Redukcia trojindexových MIP úloh na dvojindexové v okružných úlohách

Štefan PEŠKO, Zuzana BORČINOVÁ

VYUŽITIE KVANTITATÍVNYCH METÓD VO VEDECKO–VÝSKUMNEJ ČINNOSTI A V PRAXI XIV
medzinárodný vedecký seminár

...

20.6.2021, Bratislava,

Motivácia - okružná dopravná úloha

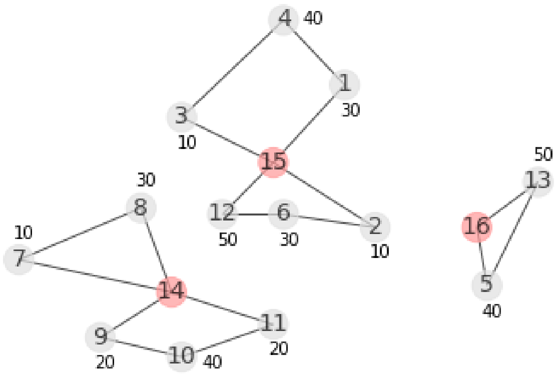

Figure 1: Okružné trasy 5-tich vozidiel z troch zdrojov z kapacitou 90

Priradenie čísel zdrojov k obsluhovaným uzlom

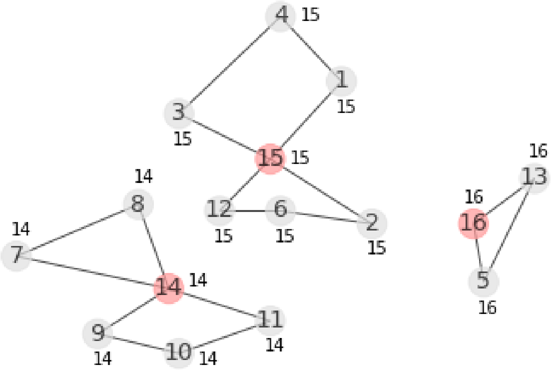

Figure 2: Trasy: $14 \rightarrow 11 \rightarrow 20 \rightarrow 9 \rightarrow 14, 14 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14,$
$15 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 15, 15 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 15{,}16 \rightarrow 13 \rightarrow 5 \rightarrow 16$

Redukcia $x_{ijk} \to x_{ij}$

Uvažujme úlohu MIP trasovania vozidiel, v ktorej rozhodovacie premenné x_{ijk} interpretujeme takto:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ak je do trasy vozidla k vybraná jazda } i \to j \\ 0, & \text{inak,} \end{cases}$$

Trojindexové premenné by sme chceli nahradiť dvojindexovými x_{ij}

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak je do niektorej trasy vozidla vybraná jazda } i \to j \\ 0, & \text{inak,} \end{cases}$$

Na identifikáciu vozidla potrebujeme pre každý obsluhovaný uzol i premennú z_i, ktorá udáva číslo vozidla resp. zdroja. Potom nám priradenie uzlov k vozidlám zabezpečí podmienka pre všetky $i \to j$

$$M\,(x_{ij} - 1) \le z_i - z_j \le M\,(1 - x_{ij})$$

kde M je penalizačná konštanta.

Ak $x_{ij} = 1$, potom $z_i = z_j$, t.j. uzly i a j so obsluhované zo spoločného zdroja t.j. teda môžu aj tým istým vozidlom.

- n zákazníkov s istými požiadavkami,
- m dep,
- v vozidiel s rovnakou kapacitou Q v každom depe.

Cieľ:

Určiť trasy vozidiel, ktoré obslúžia všetkých zákazníkov, pričom:

1) trasa každého vozidla musí začínať aj končiť v tom istom depe,
2) každý zákazník bude obslúžený jediným vozidlom,
3) na žiadnej trase nebude prekročená kapacita vozidla,
4) celkové prepravné náklady budú minimálne.

Reprezentácia

Nech $\vec{G} = (V, \vec{H}, c)$ je digraf, pričom

V: množina vrcholov, $V = Z \cup D \wedge Z \cap D = \emptyset$,

Z: množina zákazníkov,

D: množina dep,

$\vec{H}$: množina hrán, $\vec{H} = \{(i,j) : i,j \in V, i \neq j\} - D \times D$,

K: množina vozidiel,

c_{ij}: cena prepravy z vrcholu i do vrcholu j,

d_i: požiadavka zákazníka i,

Q: kapacita vozidla,

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ak je do trasy vozidla } k \text{ vybraná hrana } (i,j) \in \vec{H} \\ 0, & \text{inak,} \end{cases}$$

$y_{ik} \in \langle d_i, Q \rangle$ udáva náklad vozidla k, keď odchádza od zákazníka i,

$$\sum_{(i,j)\in\vec{H}} \sum_{k\in K} c_{ij} x_{ijk} \to minimum, \tag{1}$$

$$\sum_{i\in V, i\neq j} \sum_{k\in K} x_{ijk} = 1, \qquad \forall j \in Z, \tag{2}$$

$$\sum_{j\in Z} \sum_{k\in K} x_{ijk} \geq 1, \qquad \forall i \in D, \tag{3}$$

$$\sum_{i\in V, i\neq j} x_{ijk} - \sum_{i\in V, i\neq j} x_{jik} = 0, \qquad \forall k \in K; j \in Z, \tag{4}$$

$$\sum_{i\in D} \sum_{j\in Z, i\neq j} x_{ijk} \leq 1, \qquad \forall k \in K, \tag{5}$$

$$\sum_{i\in D} \sum_{j\in Z, i\neq j} x_{jik} \leq 1, \qquad \forall k \in K, \tag{6}$$

$$y_{ik} + d_j - y_{jk} \leq (1 - x_{ijk})\, Q, \qquad \forall i \in Z; j \in Z, i \neq j; k \in K, \tag{7}$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \qquad \forall (i,j) \in \vec{H}; k \in K, \tag{8}$$

$$d_i \leq y_{ik} \leq Q, \qquad \forall i \in Z; k \in K. \tag{9}$$

Dvojindexový model

$$\sum_{(i,j)\in\vec{H}} c_{ij}x_{ij} \qquad , \qquad (10)$$

$$\sum_{j\in V:(i,j)\in\vec{H}} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in Z, \qquad (11)$$

$$\sum_{j\in V:(i,j)\in\vec{H}} x_{ji} = 1, \qquad \forall i \in Z, \qquad (12)$$

$$\sum_{i\in Z} x_{ij} \leq v, \qquad \forall j \in D, \qquad (13)$$

$$M\,(x_{ij} - 1) \leq z_i - z_j \leq M\,(1 - x_{ij}), \qquad \forall (i,j) \in \vec{H}, \qquad (14)$$

$$y_i + d_j\,x_{ij} - y_j \leq (1 - x_{ij})\,Q, \qquad \forall i \in Z, j \in Z, i \neq j \qquad (15)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in \vec{H}, \qquad (16)$$

$$d_i \leq y_i \leq Q, \qquad \forall i \in Z, \qquad (17)$$

$$z_i = i, \qquad \forall i \in D, \qquad (18)$$

$$\min(D) \leq z_i \leq \max(D), \qquad \forall i \in Z. \qquad (19)$$

Počítačové experimenty

Inštancia	n	m	v	Q	Čas výpočtu (s) Trojindexový	Čas výpočtu (s) Dvojindexový
1.	20	2	1	160	6,73	1,62
2.	20	2	2	80	970,15	106,28
3.	20	2	3	80	3 279,06	25,47
4.	20	3	1	100	954,08	184,33
5.	20	3	2	80	101,68	6,54
6.	20	3	3	80	460,61	3,37
7.	20	4	1	80	1 508,49	313,83
8.	20	4	2	80	360,81	9,34
9.	20	4	3	80	325,54	3,95
10.	25	2	1	240	2 325,33	5,35
11.	25	2	2	160	26 456,81	199,33
12.	25	3	1	160	5 906,80	11,53
13.	25	3	2	80		813,99
14.	25	3	3	80		1 198,31
15.	25	4	1	100	9 871,87	26,96
16.	25	4	2	80	23 030,76	59,04
18.	25	4	3	50		2 023,23
19.	25	1	4	160		2 323,73

n – počet zákazníkov, m – počet dep, v – počet vozidiel v depe, Q – kapacita vozidla

Problém poradia zákaziek na kaliacich strojoch

Sú dané

- množina strojov S,
- množina zákaziek Z,
- T_i doba potrebná na spracovanie zákazky i,
- τ_{ij} čas potrebný k nastaveniu teploty pre spracovanie zákazky j po spracovaní zákazky i.
- d_i čas najskôr možného začiatku spracovania zákazky i,
- h_i čas nejneskôr prípustného konca spracovania zákazky i,

Cieľ: Nájsť také prípustné poradie zakázok pri ktorom je celková doba na prestavovanie teploty na kaliacich strojoch minimálna.

Reprezentácia

- $V = S \cup Z$ je množina vrcholov digrafu $\vec{G}$,
- $SxZ \subset S \times Z$ je množina prípustných hrán (stroj,zákazka).
- $ZxZ \subset Z \times Z$ je množina prípustných hrán (zákazka,zákazka).
- $ZxS \subset S \times Z$ je množina prípustných hrán (zákazka,stroj),
- $\vec{H} = SxZ \cup ZxZ \cup ZxS$ je množina vrcholov digrafu $\vec{G}$,
- $M = 7 \cdot 1440$ je penalizačná konštanta – počet minút za týždeň.

Riešenie reprezentujem prípustnými cyklami C_i, ktoré obsahujú práve jeden stroj i a sú rozkladom množiny vrcholov digrafu $\vec{G} = (V, \vec{H})$, kde

- V je množina vrcholov tvorená strojmi (záporné čísla) a zákazkami (kladné čísla),
- $\vec{H}$ je množina hrán tvorená usporiadanými dvojicami (stroj, zákazka), (zákazka,zákazka), (zákazka,stroj).

Priradenie strojov k zákazkám

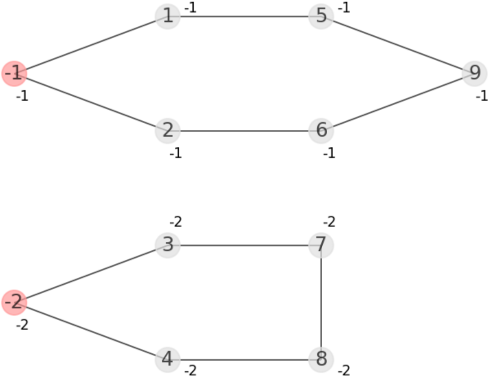

Figure 3: Cykly dvoch strojov: $C_{-1} = -1 \to 2 \to 6 \to 9 \to 5 \to 1 \to -1$, $C_{-2} = -2 \to 4 \to 8 \to 7 \to 3 \to -2$.

Dvojindexový model

$$\sum_{(i,j)\in Z\times Z\cap\vec{H}} \tau_{ij}x_{ij} \to \min \tag{20}$$

$$\sum_{i\in Z:(i,j)\in\vec{H}} x_{ij} = 1 \qquad \forall j\in S \tag{21}$$

$$\sum_{i\in V:(i,j)\in\vec{H}} x_{ij} = 1 \qquad \forall j\in Z \tag{22}$$

$$\sum_{j\in V:(i,j)\in\vec{H}} x_{ij} = 1 \qquad \forall i\in Z \tag{23}$$

$$M(x_{ij}-1)\le z_i - z_j \le M(1-x_{ij}) \qquad \forall (i,j)\in\vec{H} \tag{24}$$

$$t_i + T_i + \tau_{ij} \le t_j + M(1-x_{ij}) \qquad \forall (i,j)\in\vec{H} : i\notin S \wedge j\notin S \tag{25}$$

$$d_i \le t_i \le h_i + T_i \qquad \forall i\in Z \tag{26}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \qquad \forall (i,j)\in\vec{H} \tag{27}$$

$$z_i = i \quad \forall i\in S, \qquad \min(S)\le z_i\le\max(S) \quad \forall i\in Z \tag{28}$$

$$z_i \ge 0 \qquad \forall i\in Z \tag{29}$$

Počítačové experimenty

Inštancia	n	m	Čas výpočtu (s) Trojindexový	Dvojindexový
1.	50	4	123,67	1,76
2.	75	5	2153,81	5,44
3.	80	2	438,23	31,68
4.	100	2	21 613,10	174,58
5.	100	3	16 645,75	93,35
6.	100	4	NA	100,83
7.	160	4	NA	292,66
8.	240	6	NA	775,24

n – počet zákaziek, m – počet strojov, NA – nedopočítal

V tomto modeli sa rieši jeden z problémov riešenými autormi systému KASTOR len heuristicky. Jedná sa o prípad, keď okrem vodičov z nocovní ostatní vodiči začínajú a končia svoj turnus v centrálnom depa, garáže autobusov. V základnom viacdepovom obehovom rozvrhu autobusov sa rieši také priradenie q autobusov k spojom, že

1. Každý spoj je priradený práve jednému autobusu.
2. Každý autobus musí začínať a končiť svoj turnus v tom istom depe (v centrálnej garáži alebo nocovni).
3. V každej z h nocovni je disponibilný jeden autobus, q ostatných garážuje v centrálnom depe.
4. Celková doba neproduktívnych prejazdov autobusov, ktorá obsahuje prístavné a odstavné jazdy, jazdy medzi konečnými spojmi, je minimálna.

Daná množina spojov S je tvorená štvoricami $S_i = (m_i^d, t_i^d, m_i^a, t_i^a)$, $i \in N = \{1, 2, .., n\}$ kde

- m_i^d je miesto (zastávka) odchodu spoja,
- t_i^d je čas odchodu spoja,
- m_i^a je miesto (zastávka) príchodu spoja,
- t_i^a je čas príchodu spoja.

Sú dané doby prejazdov medzi uzlami autobusovej siete $\tau(A, B)$, kde sú A, B buď zastávky spojov alebo depá. To umožňuje definovať turnus autobusu z depa d ako sled

$$d \prec S_{i1} \prec \ldots S_u \prec S_v \prec \cdots \prec S_{im} \prec d,$$

kde

- $S_u \prec S_v$ ak autobus po spoji S_u pokračuje spojom S_v,
- $d \prec S_{i1}$ prístavná jazda z depa,
- $S_{im} \prec d$ odstavná jazda do depa.

Reprezentácia

Sieť rozvrhu autobusov modelujeme digrafom $G = (V, A)$, kde

- $V = \{-h, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$ je množina vrcholov pričom kladé čísla zodpovedajú indexom spojov, 0 je centrálna garáž a záporné indexy označujú indexy nocovní; $K = \{0, 1, \dots, h\}$.
- $\vec{H} = \{(i,j) : S_i \prec S_j\} \cup \{(i,j), (j,i) : i \in S, j \in N\}$ je množina hrán (neproduktívnych prejazdov),

Rozhodovacia premená $x_{ij}, (i,j) \in H$ tu nadobúda hodnotu 1, ak je hrana (i,j) vybraná do turnusu niektorého vozidla, ináč 0.

Premenná $z_i \in S$ udáva index domovského depa autobusu, pričom $z_i = i, i \in S$.

Dvojindexový model

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{30}$$

s.t.

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = 0 \qquad \forall i \in V, \tag{31}$$

$$\sum_{(-k,j)\in A} x_{-kj} = 1, \qquad \forall k \in K - \{0\}, \tag{32}$$

$$\sum_{(0,j)\in A} x_{0j} = q, \tag{33}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in V : i > 0, \tag{34}$$

$$h(x_{ij} - 1) \leq z_i - z_j \leq h(1 - x_{ij}) \qquad \forall (i,j) \in A, \tag{35}$$

$$z_{-k} = k \qquad \forall k \in K, \tag{36}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A, \tag{37}$$

$$z_k \geq 0, \qquad \forall k \in V. \tag{38}$$

Sieť MHD Martin s 726 spojmi.

Spoje	Depá	Doba prejazdov [min.]	Doba výpočtu [sec.]
666	24; 1	1 303	914.0
666	24; 1, 17	1 269	877.33
666	24; 1, 17, 15	1 232	865.13
666	24; 1, 17, 15, 4	1 228	843.34
180	24; 1	1 209	1.80
180	24; 1, 17	1 084	1.78
180	24; 1, 17, 15	1 054	2.92
180	24; 1, 17, 15, 4	1 050	4.74

Table 1: Vo vrchole 24 je centrálna garáž ostatné sú nocovne v sieti MHD Martin

Spoje	Depá	Doba prejazdov [min.]	Doba výpočtu [sec.]
726	24; 1	1 356	65.15
726	24; 1, 17	1 319	84.97
726	24; 1, 17, 15	1 299	76.33
726	24; 1, 17, 15, 4	1 295	85.52
720	24; 1	1 925	60.29
720	24; 1, 17	1 304	65.86
720	24; 1, 17, 15	1 299	76.94
720	24; 1, 17, 15, 4	1 295	74.57
666	24; 1	1 303	64.29
666	24; 1, 17	1 269	60.81
666	24; 1, 17, 15	1 232	74.44
666	24; 1, 17, 15, 4	1 228	60.61
180	24; 1	1 209	2.86
180	24; 1, 17	1 084	2.14
180	24; 1, 17, 15	1 054	1.93
180	24; 1, 17, 15, 4	1 050	2.36

Table 2: Počítačové charakteristiky pre dvojindexový model.

Ďakujem za pozornosť a trpezlivosť