PRAVDEPODOBNOSŤ a ŠTATISTIKA

Základy teórie odhadu

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Katedra matematických metód a operačnej analýzy, FRI ŽU

29. apríla 2019

Budeme sa venovať dvom princípom odhadu neznámych parametrov základného súboru.

Stretneme sa tu s problémom dôsledného rozlišovania náhodnej premennej a jej realizácie - hodnoty. Dodržíme zaužívanú konvenciu napr. takto: výberový priemer z náhodného výberu $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$ označíme $\overline{\mathbf{X}}$, ale keď sa tento výber bude realizovať konkrétnymi hodnotami $x_1, x_2, \ldots, x_n$ potom dostaneme konkrétnu realizáciu - aritmetický priemer $\overline{x}$ náhodnej premennej $\overline{\mathbf{X}}$.

Predpokladajme, že máme k dispozícii náhodný výber $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$ so základného súboru s rozdelením $f_{\mathbf{X}}(x, \boldsymbol{\theta})$ závislým od neznámeho reálneho alebo (vo všeobecnom prípade) vektora parametrov $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in \Re^m$.

Na základe tohoto výberu chceme, čo najpresnejšie určiť hodnotu parametra $\boldsymbol{\theta}$, ktorý je prvkom parametrického priestoru $\boldsymbol{\Theta}$.

Poznámka:
$\boldsymbol{\Theta} = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \Re, \sigma^2 > 0\}$ je príkladom parametrického priestoru z normálneho rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$.

Rozoznávame bodové a intervalové odhady parametrov.

Nech náhodný výber $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$ závisí od neznámeho parametra θ. Potom bodovým odhadom parametra θ rozumieme štatistiku $\mathbf{T}_n = T(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$, ktorá každej množine pozorovaných hodnôt priradí hodnotu odhadovaného parametra, ktorú označíme $\hat{\theta}$.

Poznámka:
Bodový odhad teda predstavuje nejakú reálnu funkciu definovanú na $\Re^n$, kde n je rozsah náhodného výberu, kým $\hat{\theta}$ je už konkrétnou odhadovanou hodnotou parametra θ.

Vlastnosti bodových odhadov

Bodový odhad štatistiky $\mathbf{T}_n$ parametra θ nazývame

- nestranný (nevychýlenný) odhad, ak pre každé $\theta \in \Theta$ platí
$$E(\mathbf{T}_n) = \theta,$$
- asymptoticky nevychýlený odhad, ak $\lim\limits_{n \to \infty} E(\mathbf{T}_n) = \theta$,
- efektívny (najlepší nevychýlený) odhad, ak $\mathbf{T}_n$ je nestranný odhad a pre ľubovoľný nestranný odhad $\mathbf{T}_n^*$ platí
$$D(\mathbf{T}_n) \leq D(\mathbf{T}_n^*),$$
- konzistentný odhad, ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí
$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{P}(|\mathbf{T}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$
t.j. ak $\mathbf{T}_n$ s rastúcim n konverguje podľa pravdepodobnosti k θ.

Nestrannosť je síce dôležitá vlastnosť „dobrých“ odhadov, ale nie vždy možno na nej trvať. Požiadavka, že vychýlenie odhadu je nulové znamená, že „v priemere“ odhaduje priamo parameter θ, pričom výraz „v priemere“ sa vzťahuje k opakovanému výberu.

Predstavme si, že máme viacero bodových odhadov. Napr. miesto výberového priemeru $\overline{\mathbf{X}}$ sa použije len pozorovanie $\mathbf{X}_1$. Potom sa rozhodneme pre efektívny odhad, ktorý menej kolíše okolo odhadovanej hodnoty.

Pri skúmaní asymptotického chovania odhadu len jedného parametra stačí, aby postupnosť stredných hodnôt konvergovala k odhadovanému parametru a postupnosť jeho rozptylov konvergovala k nule, ako uvádza nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 23

Nech $\lim_{n\to\infty} E(\mathbf{T}_n) = \theta$, $\lim_{n\to\infty} D(\mathbf{T}_n) = 0$, potom je $\mathbf{T}_n$ konzistentný odhad parametra θ.

Dôkaz: Zvoľme ľubovolné $\varepsilon > 0$. Potom z Čebyševovej nerovnosti platí pre každé n

$$\mathcal{P}(|\mathbf{T}_n - E(\mathbf{T}_n)| < \varepsilon/2) \geq 1 - \frac{D(\mathbf{T}_n)}{(\varepsilon/2)^2}. \qquad (*)$$

Súčasne je pre $n > n_0$ vždy $|E(\mathbf{T}_n) - \theta| < \varepsilon/2$. Pre $n > n_0$ však platí

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(|\mathbf{T}_n - \theta| < \varepsilon) &= \mathcal{P}(|\mathbf{T}_n - E(\mathbf{T}_n)| < \varepsilon/2,\ |E(\mathbf{T}_n) - \theta| < \varepsilon/2) \\ &= \mathcal{P}(|\mathbf{T}_n - E(\mathbf{T}_n)| < \varepsilon/2),\end{aligned}$$

lebo druhá náhodná udalosť je istá. Posledná pravdepodobnosť podľa Čebyševovej nerovnosti $(*)$ konverguje podľa pp. k 1.

Príklad 9.1

Uvažujme náhodný výber $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$ z $N(\mu, \sigma^2)$. Ako odhad rozptylu σ^2 sa niekedy používa štatistika

$$\mathbf{S}_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})^2.$$

Tento odhad nie je nestranným odhadom σ^2, lebo platí

$$E(\mathbf{S}_*^2) = E\left(\frac{n-1}{n}\mathbf{S}^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Zrejme platí $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{S}_*^2 = \sigma^2$. Možno odvodiť, že $D(\mathbf{S}^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$ takže $\lim\limits_{n\to\infty} D(\mathbf{S}_*^2) = \lim\limits_{n\to\infty} D\left(\frac{n-1}{n}\mathbf{S}^2\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2} = 0.$
Štatistika $\mathbf{S}_*^2$ je nielen asymptoticky nestranným a ale aj konzistentným odhadom rozptylu σ^2.

Momentová metóda

Nech $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$ je náhodný výber z rozdelenia, ktoré závisí od parametra $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$. Predpokladajme, že pre každé $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ existujú počiatočné momenty $\nu_k = E(\mathbf{X}_i^k), k = 1, 2, \dots, m$.

Realizácie výberových počiatočných momentov sú dané pre $k = 1, 2, \dots, m$ vzťahom

$$v_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k .$$

Odhady parametra $\boldsymbol{\theta}$ momentovou metódou dostaneme tak, že za odhady, označíme ich $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)$, vezmeme riešenia systému rovníc

$$\nu_k = v_k, \;\; k = 1, 2, \dots, m.$$

Poznámka:

Keby týchto m-rovníc nestačilo na jednoznačne určenie odhadov, potom pridáme ešte ďalšie $\nu_k = v_k, \;\; k = m+1, m+2, \dots,$ kým nezískame potrebný počet rovníc, čo je možné ak také ν_k existujú.

Príklad 9.2

Nech $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je realizácia náhodného výberu z exponenciálneho rozdelenia $Exp(\lambda)$. Odhadnite parameter λ momentovou metódou.

Hustota pravdepodobnosti exponenciálneho rozdelenia je $f(t, \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \; t \geq 0$.

Počiatočný moment $\nu_1 = E(\mathbf{X}) = \frac{1}{\lambda}$. Realizáciou výberového počiatočného momentu je $v_1 = \overline{x}$.

Momentová metóda tu spočíva v riešení rovnice $\nu_1 = v_1$, odkiaľ dostávame odhad

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}}.$$

Metóda maximálnej vierohodnosti

Nech $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$ je náhodný výber a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jeho realizácia, ktoré závisí od parametrov $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$.

Združenú hustotu pravdepodobnosti pri pevných výberových hodnotách $\mathbf{X}_i = x_i, i = 1, 2, \ldots, n$ ako funkciu parametra θ nazveme vierohodnostnou funkciou a označíme

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \boldsymbol{\theta}).$$

Metóda maximálnej vierohodnosti spočíva v tom, že za hodnoty $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sa zvolia také hodnoty $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, ktoré pri daných hodnotách x_i maximalizujú vierohodnostnú funkciu alebo jej logaritmus.

Maximimálne vierohodný odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ potom určíme riešením systému m-rovníc

$$\frac{\partial ln(L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m))}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

V prípade diskrétneho rozdelenia určeného pravdepodobnostnou funkciou $p(x_i, \boldsymbol{\theta}), i = 1, 2, \ldots, m$ je vierohodnostná funkcia

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \boldsymbol{\theta}).$$

a maximálne vierohodný odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sa hľadá tiež pomocou derivácie logaritmu vierohodnostnej funkcie t.j.

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n} ln(p(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m))}{\partial \theta_i} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Príklad 9.3

Majme náhodný výber $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n)$ z alternatívneho rozdelenia $A(p)$. Hľadáme vierohodný odhad parametra p z jeho realizácii $(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Združené rozdelenie náhodného vektora je dané

$$L(y_1, y_2, \dots, y_n, p) = \prod_{i=1}^{n} p^{y_i}(1-p)^{1-y_i} = p^y(1-p)^{n-y},$$

kde $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Logaritmus vierohodnostnej funkcie je v tvare

$$ln(L(y_1, y_2, \dots, y_n, p)) = yln(p) + (n-y)ln(1-p).$$

Pri hľadaní jej maxima vyriešime rovnicu

$$\frac{\partial ln(L(y_1, y_2, \dots, y_n, p))}{\partial p} = \frac{y}{p} - \frac{n-y}{1-p} = 0,$$

ktorá vedie k odhadu $\hat{p} = \frac{y}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y}$.

Príklad 9.4

Majme náhodný výber z normálneho rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$. Hľadáme vierohodný odhad oboch parametrov.

Vierohodnostná funkci má pre $\mu \in \Re, \sigma^2 > 0$ tvar

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

a tak logaritmus vierohodnostnej funkcie

$$ln(L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2)) = -\frac{n}{2} ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2.$$

Derivovaním dostaneme

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial \mu} = -\frac{2}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = -\frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu \right) = 0 \ \Rightarrow \hat{\mu} = \overline{x},$$

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{2} \frac{2\pi}{2\pi\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0 \ \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2.$$

Pozor! Odhadovali sme parameter σ^2 a preto sme derivovali podľa σ^2 a nie podľa σ. Po dosadení vypočítaných odhadov $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ do matice druhých derivácii dostaneme negatívne definitnú maticu

$$\begin{pmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{(2\hat{\sigma}^2)^2} \end{pmatrix},$$

čo znamená, že nájdené riešenie sústavy rovníc sú skutočne maximálne vierohodné odhady.

Poznámka: Možno dokázať, že metóda maximálnej vierohodnosti nám dáva nestranný odhad hľadaného parametra zatiaľ čo odhad momentovou metódou môže byť vychýlený.

Úlohou je nájsť na základe náhodného výberu $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$ taký interval, ktorý by obsahoval neznámu hodnotu parametra θ s pravdepodobnosťou $1 - \alpha$.

Nech sú dané dve štatistiky $\mathbf{T}_D$ a $\mathbf{T}_H$ náhodného výberu a platí

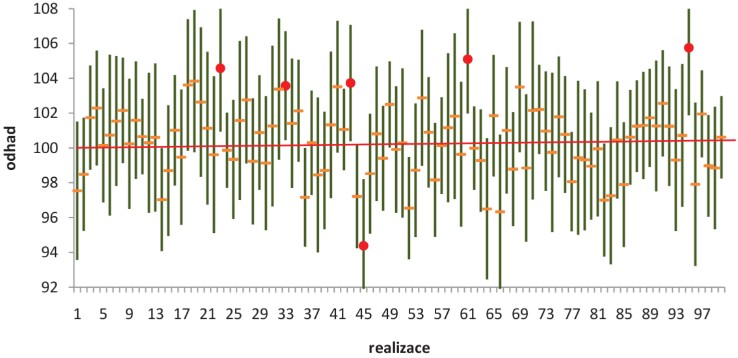
$$\mathcal{P}(\mathbf{T}_D \leq \theta \leq \mathbf{T}_H) = 1 - \alpha.$$

Hovoríme, že $\langle \mathbf{T}_D, \mathbf{T}_H \rangle$ je $100(1-\alpha)\%$-tný interval spoľahlivosti parametra θ so spoľahlivosťou $1 - \alpha$.

Vopred zvolenému číslu $\alpha, \alpha \in (0, 1)$ hovoríme hladina významnosti (riziko). V praxi sa najčastejšie volí $\alpha = 0.01$ a $\alpha = 0.05$

Intervalový odhad parametra θ so spoľahlivosťou $1 - \alpha$ je interval $\langle t_D, t_H \rangle$, kde t_D, t_H sú hodnoty štatistík $\mathbf{T}_D, \mathbf{T}_H$ štatistického súboru $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

Príklad 9.4



Obr. 1: *Simulácia* 95 %*-tných intervalových odhadov strednej hodnoty (spoľahlivosť* $1-\alpha = 0,95$*) získaných na základe* 100 *opakovaných výberov rozsahu* $n = 30$ z populácie so strednou hodnotou $\theta = 100$. 6 intervalov zo 100 (•.) neobsahuje skutočnú strednú hodnotu.

Orandžové úsečky zodpovedajú priemerom jednotlivých výberov.

Interpretácia intervalového odhadu

Spoľahlivosť intervalového odhadu $1-\alpha$ udáva, že pri opakovaných výberoch s konštantným rozsahom n z daného základného súboru približne $100(1-\alpha)\%$ intervalových odhadov obsahuje skutočnú hodnotu odhadovaného parametra θ a $100\alpha\%$ intervalových odhadov ho neobsahuje.

Spoľahlivosť odhadu $1-\alpha$ požadujeme blízkou jednej, resp. 100%. Čím je vyššia spoľahlivosť odhadu, tým širší intervalový odhad získame (hľadaná hodnota se v ňom musí nachádzať s vyššou pravdepodobnosťou). Ak chceme intervalový odhad zúžiť (spresniť), potom treba zväčšiť rozsah výberu n.

Jednostranné intervaly spoľahlivosti

Pri jednostranných intervaloch spoľahlivosti sa udáva buď dolná alebo horná hranica intervalu.

Ak je daná dolná hranica intervalu $\mathbf{T}_D$ hovoríme o ľavostrannom intervale spoľahlivosti $\langle \mathbf{T}_D, \infty)$, pre ktorý platí

$$\mathcal{P}(\theta \geq \mathbf{T}_D) = 1 - \alpha.$$

Ak je daná horná hranica intervalu $\mathbf{T}_H$ hovoríme o pravostrannom intervale spoľahlivosti $(\infty, \mathbf{T}_H\rangle$, pre ktorý platí

$$\mathcal{P}(\theta \leq \mathbf{T}_H) = 1 - \alpha.$$

Dvojstranný interval spoľahlivosti

Ak nás zaujímajú obe hranice odhadu hovoríme o dvojstrannom intervale spoľahlivosti $\langle \mathbf{T}_D, \mathbf{T}_H \rangle$, ktorý hľadá tak, aby platilo

$$\mathcal{P}(\theta \geq \mathbf{T}_D) = \frac{\alpha}{2}, \ \mathcal{P}(\theta \leq \mathbf{T}_H) = \frac{\alpha}{2}.$$

Tieto podmienky zaručujú, že platí

$$\mathcal{P}(\mathbf{T}_D \leq \theta \leq \mathbf{T}_H) = 1 - \alpha,$$

a naviac zabezpečia i to, že je takýto dvostranný interval má najmenšiu dĺžku.

Ako nájsť intervalový odhad?

Pripomeňme, že $100p\%$ kvantil pre spojitú náhodnú premennú $\mathbf{X}$ je číslo x_p, pre ktoré platí $\mathcal{P}(\mathbf{X} < x_p) = \mathcal{P}(\mathbf{X} \leq x_p) = F(x_p) = p$.

Nech je x_p kvantil výberovej štatistiky $T(\mathbf{X})$, ktorej pp. rozdelenie poznáme. Pre ľubovolné $\alpha \in (0, 1)$ platí

$$\mathcal{P}\left(x_{\frac{\alpha}{2}} \leq T(\mathbf{X}) \leq x_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = F\left(x_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - F\left(x_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha,$$

$$\mathcal{P}\left(T(\mathbf{X}) \leq x_{1-\alpha}\right) = F\left(x_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha,$$

$$\mathcal{P}\left(T(\mathbf{X}) \geq x_{\alpha}\right) = 1 - F\left(x_{\alpha}\right) = 1 - \alpha.$$

Poznámka:
Všeobecné metódy intervalových odhadov sú podstatne náročnejšie. My sa ďalej obmedzíme len na intervaly spoľahlivosti pre parametre z normálneho rozdelenia a z neho odvodených rozdelení.

Tvrdenie 24

Nech $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$ je náhodný výber z $N(\mu, \sigma^2)$. Ak je rozptyl σ^2 známy, potom majú intervaly spoľahlivosti pre parameter μ tvar

$$\overline{\mathbf{X}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{\mathbf{X}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\mu \ge \overline{\mathbf{X}} - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \mu \le \overline{\mathbf{X}} + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Dôkaz: Vieme, že $\overline{\mathbf{X}} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, $T(\mathbf{X}) = \frac{\overline{\mathbf{X}}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\overline{\mathbf{X}}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$.

Potom môžeme tvrdiť (pre kvatily z $N(0,1)$ platí $z_p = -z_{1-p}$), že

$$1-\alpha = \mathcal{P}\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \le T(\mathbf{X}) \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathcal{P}\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{\mathbf{X}}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$\mathcal{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{\mathbf{X}}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \mathcal{P}\left(\overline{\mathbf{X}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{\mathbf{X}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Analogicky sa odvodia jednostranné intervaly spoľahlivosti.

Príklad 9.5

Kontrola podniku testovala životnosť batérií. Kontrolóri vybrali z produkcie podniku náhodne 50 autobatérií a zistili, že výberový priemer doby života je 950 hodín a výberová smerodajná odchýlka je 100 hodín. So spoľahlivosťou 95% určte intervalový odhad strednej doby života batérií.

Budeme predpokladať, že životnosť batérií možno modelovať normálnym rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$. Vzhľadom na to, že rozsah výberu $n = 50$ je väčší než 30 môžeme rozptyl σ^2 aproximovať výberovým rozptylom $s^2 = 100$ t.j. $\sigma \approx s$. Ide teda o intervalový odhad strednej hodnoty μ pri známom rozptyle σ^2

$$\left\langle \overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle.$$

Zo zadania máme spoľahlivosť $0.95 = 1 - \alpha$ t.j. hladinou významnosti $\alpha = 0.05$, výberový priemer $\overline{x} = 950$, výberovú smerodajnú odchýlkou $s = 10$. Kvantil $z_{0.975} = 1.96$ a tak po dosadení $\mu \in \langle 922.3, 977.7 \rangle$.

Tvrdenie 25

Nech $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$ je náhodný výber z $N(\mu, \sigma^2)$. Ak sú oba parametre neznáme potom majú intervaly spoľahlivosti pre μ tvar

$$\overline{\mathbf{X}} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{\mathbf{S}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{\mathbf{X}} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{\mathbf{S}}{\sqrt{n}},$$

$$\mu \geq \overline{\mathbf{X}} - t_{\alpha}(n-1)\frac{\mathbf{S}}{\sqrt{n}}, \ \mu \leq \overline{\mathbf{X}} + t_{\alpha}(n-1)\frac{\mathbf{S}}{\sqrt{n}}.$$

Dôkaz: Vieme, že $\overline{\mathbf{X}} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ a zvolíme výberovú štatistiku

$$T(\mathbf{X}) = \frac{\overline{\mathbf{X}} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1).$$

Ďalej postupujeme ako v tvrdení 23 pre obojstranný i obe jednostranné intervaly spoľahlivosti.

Poznámka:

Vidíme, že záleží na tom či poznáme alebo nepoznáme niektorý parameter základného súboru.

Príklad 9.6

Obchodný reťazec BILLA zadal štúdiu o počte zákazníkov v novej predajni v piatok popoludní. Boli získané takéto počty zákazníkov za jeden mesiac $3756, 2987, 3042, 4206, 3597$. Treba s 95% spoľahlivosťou určiť intervalový odhad počtu zákazníkov v piatok popoludní.

Budeme predpokladať, že počet zákazníkov možno modelovať normálnym rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$. Vzhľadom na to, že rozsah výberu $n = 5$ je menší než 30, ide tu o intervalový odhad strednej hodnoty μ pri neznámom rozptyle σ^2.

$$\left\langle \overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \right\rangle.$$

Zo zadania máme spoľahlivosť $0.95 = 1 - \alpha$ t.j. hladinou významnosti $\alpha = 0.05$, výberový priemer $\overline{x} = 3517.6$, výberovú smerodajnú odchylkou $s = 511.1$. Kvantil $t_{0.975}(4) = 2.78$ a tak po dosadení $\mu \in \langle 2882.2, 4153.0 \rangle$.

Intervalový odhad rozptylu normálneho rozdelenia

Pri analýze znaku základného súboru nás obyčajne nezajímá len jeho stredná hodnota μ ale aj jeho variabilita. Najčastejšou mierou je jeho rozptyl σ^2. Známa stredná hodnota pri neznámom rozptyle nie je v praxi častý prípad a tak sa obmedzíme len na opačný prípad.

Tvrdenie 26

Nech $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$ je náhodný výber z $N(\mu, \sigma^2)$. Ak je stredná hodnota μ neznámy, potom majú intervaly spoľahlivosti pre parameter σ^2 tvar

$$\frac{(n-1)\mathbf{S}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\mathbf{S}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},$$

$$\sigma^2 \geq \frac{(n-1)\mathbf{S}^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \ \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\mathbf{S}^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}.$$

9.1* Uvažujme náhodný výber $\mathbf{X}$ rozsahu n z rozdelenia s konečným rozptylom σ^2. Určte konštantu c tak, aby štatistika $\mathbf{D} = c\sum_{i=2}^{n}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1})^2$ bola nestranným odhadom rozptylu σ^2.

9.2 Nech $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je realizácia náhodného výberu z rovnomerného rozdelenia $R(a, b)$, kde a, b sú neznáme paramtre. Momentovou metódou odhadnite a a b. $[\hat{b}, \hat{a} = \overline{x} \pm \sqrt{3s_*^2}]$.

9.3* Výberovým šetrením chceme odhadnúť priemernú mzdu učiteľov ZŠ. Z minuloročných štatisických výkazov sa vie, že smerodajná odchýlka bola 125 Eur. Odhad chceme previesť s 95% spoľahlivosťou, pričom sme ochotný pripustiť maximálnu chybu 50 Eur. Aký veľký by mal byť rozsah náhodného výberu? $[|\overline{x} - \mu| = 50]$.