Študijný program 2. stupňa:
Riadenie operácií a logistika
(KEGA 035ŽU-4/2013)

Modul
Aplikovaná matematika,
štatistika a operačný výskum

I.
Základy lineárnej algebry
Základy matematickej analýzy

RNDr. Rudolf Blaško, PhD.

Obsah

Základné pojmy

Výroky, kvantifikátory a sumačné symboly

Logika sa zaoberá štúdiom formálnych vlastností myšlienky a stanovuje pravidlá správneho, t. j. logického usudzovania. Na vyjadrenie myšlienok používame jazyk, ktorý sa skladá z **výrazov**. Výrazy môžu byť jednoduché alebo zložené, ktoré sa tvoria z jednoduchých pomocou syntaktických pravidiel jazyka. V živom jazyku sú výrazmi slová a vety. Výrazy sa rozdeľujú na konštanty a premenné. **Konštanty** sú výrazy, ktoré majú nemenný (t. j. konštantný) význam. **Premenné** sú výrazy, ktorých význam sa môže meniť a v prípade potreby ich môžeme nahradiť konštantami.

α	A	alfa	a	η	H	éta	é	ν	N	ný	n	τ	T	tau	t
β	B	beta	b	ϑ	Θ	théta	th	ξ	Ξ	ksí (xí)	x	υ	Υ	ypsilon	y
γ	Γ	gama	g	ι	I	ióta	i	o	O	omikron	o	φ	Φ	fí	f
δ	Δ	delta	d	κ	K	kappa	k	π	Π	pí	p	χ	X	chí	ch
ε	E	epsilon	e	λ	Λ	lambda	l	ρ	P	ró	r	ψ	Ψ	psí	ps
ζ	Z	dzéta	dz	μ	M	mí	m	σ	Σ	sigma	s	ω	Ω	omega	ó

Tabuľka 0.0.1: Grécka abeceda

Výrok je výraz, ktorý vyjadruje pravdivú alebo nepravdivú myšlienku, preto ich delíme na **pravdivé** a **nepravdivé**. Kritériom pravdivosti je zhoda so skutočnosťou a nemôže byť zároveň pravdivý a nepravdivý. Gramaticky je výrok oznamovacia veta.[1]

Výrazy, ktoré obsahujú premenné, nazývame **výrokové formy**. Výroková forma nie je výrok, ale výrok z nej vznikne, ak nahradíme všetky premenné prípustnými konštantami. Napr. „$2 + 3 = x$“ je výroková forma a „$2 + 3 = 4$“ je nepravdivý výrok.

Výrok vyjadruje pravdivú alebo nepravdivú myšlienku, preto je vhodné zaviesť pojem **pravdivostná**, resp. **logická hodnota výroku**. Pre pravdivý výrok definujeme pravdivostnú hodnotu **pravda** (P) a pre nepravdivý výrok pravdivostnú hodnotu **nepravda** (N).[2] Pravdivostnú hodnotu výroku p budeme označovať $|p|$.

Výrokový počet sa zaoberá pravdivostnou hodnotou **zložených výrokov**, ktoré sú vytvorené z iných výrokov pomocou **logických operácií**. Základné logické operácie sú negácia výroku, konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia výrokov (tab. 0.0.2).

[1] Od gramatickej vety je nutné odlišovať **matematickú vetu**. Je to pravdivý výrok o matematických objektoch a vzťahoch medzi nimi, ktorý je dokázaný (napr. binomická veta, Pytagorova veta, …)

[2] Tiež sa používa 1, A (áno), T (true), Y (yes), resp. 0, N (nie), F (false), N (no).

Negácia výroku p sa tvorí výrazmi „*nie je pravda, že* p“, „*nie je pravda, že platí* p“, „*nie* p“, „*non* p“ a podobne. Negáciu výroku p označujeme $\overline{p}$, prípadne p'.

Výrok a jeho negácia majú opačné pravdivostné hodnoty. Ďalej je zrejmé, že negáciou negácie výroku p je pôvodný výrok p, t. j. $\overline{(\overline{p})} = \overline{\overline{p}}$.

Konjunkcia výrokov p **a** q sa tvorí pomocou spojky „a“, označujeme ju $p \wedge q$, resp. $p\&q$ a čítame „*p a q*“, „*p a súčasne q*“, „*p konjunkcia q*“, „*konjunkcia výrokov p a q*“ a podobne. Konjunkcia je pravdivá iba v prípade, že sú pravdivé oba výroky.

Disjunkcia výrokov p **a** q sa tvorí pomocou spojky „alebo“, označujeme ju $p \vee q$ (skratka z latinského *vel* — alebo) a čítame „*p alebo q*“, „*p vel q*“, „*disjunkcia výrokov p, q*“ a podobne. Disjunkcia je pravdivá, ak je pravdivý aspoň jeden z výrokov.

Implikácia výrokov p **a** q sa tvorí pomocou slov: „Ak (platí) ..., potom (platí) ...“. Označujeme ju $p \Rightarrow q$ a čítame „*Z p vyplýva q*“, „*p potom q*“, „*Ak platí p, potom platí q*“, „*p je nutná podmienka pre q*“, „*q je postačujúca podmienka pre p*“. Výrok p sa nazýva podmieňujúci (predpoklad) a q podmienený (záver). Implikácia je nepravdivá iba v prípade $|p| = P$ a $|q| = N$.

Ekvivalencia výrokov p **a** q sa tvorí pomocou konštrukcie: „... (platí) práve vtedy, ak (platí) ...“. Označujeme ju $p \Leftrightarrow q$, prípadne $p \sim q$ alebo $p \equiv q$ a čítame „*p (platí) práve vtedy, ak (platí) q*“, „*p platí vtedy a len vtedy, ak platí q*“, „*Z p vyplýva q a naopak z q vyplýva p*“, „*p je nutná podmienka a súčasne postačujúca podmienka pre q*“ a podobne. Ekvivalencia $p \Leftrightarrow q$ je pravdivá v prípade, že $|p| = |q|$ a môžeme ju nahradiť zloženým výrokom $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$
P	P	N	P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	N			N	N	P	P	N	P	N	N
N	P	P	N	N	N	P	P	P	N	N	N
N	N			N	N	N	N	P	P	P	P

Tabuľka 0.0.2: Pravdivostné hodnoty zložených výrokov

Nemá zmysel hovoriť o pravdivosti výrokovej formy, pretože obsahuje premenné. Ale má zmysel uvažovať, pre aké premenné vznikne pravdivý alebo nepravdivý výrok. **Tautológia** je výroková forma, ktorá po nahradení všetkých premenných konštantami dáva vždy pravdivý výrok. Naopak z **kontraindikácie** vznikne vždy nepravdivý výrok.

Teraz uvedieme niektoré dôležité tautológie.

- **Zákon dvojitej negácie:** $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$, t. j. p a $\overline{\overline{p}}$ majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.
- **Zákon vylúčenia tretieho:** $p \vee \overline{p}$, t. j. buď platí výrok p alebo jeho negácia $\overline{p}$.
- **Zákon sporu:** $\overline{p \wedge \overline{p}}$, t. j. nemôže byť výrok p pravdivý a zároveň nepravdivý.
- **de Morganove zákony:** $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$, **resp.** $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$.
- **Zákon hypotetického sylogizmu:** $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \;\Rightarrow\; (p \Rightarrow r)$.
- **Zákon transpozície:** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$, t. j. obrátená implikácia.
- **Komutatívne zákony:** $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$, $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$.
- **Asociatívne zákony:** $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$, $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$.
- **Distributívne zákony:** $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$, $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.
- **Vzťah ekvivalencie a implikácie:** $[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

- **Negácia implikácie:** $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$, t. j. princíp dôkazu sporom.

V matematike často skúmame, či je nejaký výrok pravdivý všeobecne, t. j. platný pre všetky prvky z oboru úvahy, alebo iba pre niektoré prvky, prípadne iba pre práve jeden prvok. Na druhej strane nás niekedy zaujíma, či existuje aspoň jeden prvok, pre ktorý je tento výrok pravdivý. Hovoríme, že **výrok kvantifikujeme**.

Ak danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňajú **všetky prvky** z oboru úvahy, kvantifikujeme daný výrok **všeobecným kvantifikátorom**. Označujeme ho symbolom $\forall$ a vyjadrujeme ho slovami „každý“, „všetky“, „žiadny“ a podobne.

Ak danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňa **aspoň jeden prvok** z oboru úvahy, kvantifikujeme výrok **existenčným kvantifikátorom**. Označujeme ho symbolom $\exists$ a vyjadrujeme ho slovami „existuje“, „jestvuje“, „niektoré“, „aspoň jeden“ a podobne.

Symbolom $\exists!$ vyjadrujeme, že danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňa **práve jeden prvok** (aspoň jeden a najviac jeden). Namiesto označenia $\overline{\exists x}$ sa používa $\nexists x$.

Označme symbolom $F(x)$ skutočnosť, že prvok x má vlastnosť F (napr. že prvok x patrí do nejakej množiny F). Kvantifikácia sa vždy vzťahuje k **oboru kvantifikácie**, t. j. k množine premenných prvkov x. Ak použijeme kvantifikátor, potom viažeme premennú na túto množinu a z výrokovej formy $F(x)$ sa stáva výrok.

$\forall x\, F(x)$	„*Pre všetky x, pre ktoré platí $F(x)$.*“, t. j. „*Každé x má vlastnosť F.*“
$\overline{\forall x\, F(x)}$	„*Nie je pravda, že každé x má vlastnosť F.*“, t. j. „*Nie každé x má vlastnosť F.*“, t. j. „*Existuje aspoň jedno x, ktoré nemá vlastnosť F.*“.
$\overline{\forall x}\, F(x)$	„*Nie každé x má vlastnosť F.*“, t. j. „*Existuje x, ktoré nemá vlastnosť F.*“.
$\forall x\, \overline{F(x)}$	„*Pre každé x platí, že nemá vlastnosť F.*“, t. j. „*Každé x nemá vlastnosť F.*“. V hovorovej reči použijeme dvojitú negáciu: „*Žiadne x nemá vlastnosť F.*“.
$\overline{\forall x}\, \overline{F(x)}$	„*Nie každé x nemá vlastnosť F.*“, t. j. „*Neplatí, že každé x nemá vlastnosť F.*“.
$\exists x\, F(x)$	„*Existuje aspoň jedno x, ktoré má vlastnosť F.*“
$\overline{\exists x\, F(x)}$	„*Nie je pravda, že existuje x, ktoré má vlastnosť F.*“, t. j. „*Neexistuje x, ktoré má vlastnosť F.*“, t. j. „*Každé x nemá vlastnosť F.*“.
$\overline{\exists x}\, F(x)$	„*Neexistuje x, ktoré má vlastnosť F.*“, t. j. „*Každé x nemá vlastnosť F.*“.
$\exists x\, \overline{F(x)}$	„*Existuje aspoň jedno x, ktoré nemá vlastnosť F.*“
$\overline{\exists x}\, \overline{F(x)}$	„*Neexistuje x, ktoré nemá vlastnosť F.*“

Z predchádzajúceho vyplýva, že $\overline{\forall x\, F(x)}$, $\overline{\forall x}\, F(x)$ a $\exists x\, \overline{F(x)}$, resp. $\overline{\exists x\, F(x)}$, $\overline{\exists x}\, F(x)$ a $\forall x\, \overline{F(x)}$ vyjadrujú tie isté výroky. To znamená, že negácia kvantifikátora je ekvivalentná negácii kvantifikovaného výroku a že pri negácii výroku sa menia kvantifikátory navzájom a výroková forma sa mení na svoju negáciu.

Znak $\sum$ (veľké grécke sigma) sa používa na zjednodušenie zápisu súčtu s mnohými sčítancami. Ich počet môže byť konečný ale aj nekonečný. Tento súčet zapisujeme v tvare

$$\sum_{j=s}^{n} a_j = a_s + a_{s+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n, \quad \text{resp.} \quad \sum_{j=s}^{\infty} a_j = a_s + a_{s+1} + a_{s+2} + a_{s+3} + \cdots$$

a čítame **suma (súčet) a_j pre $j=s$ až n**, resp. **až do nekonečna**.

Na zjednodušenie súčinu používame analogicky znak $\prod$ (veľké grécke pí). Píšeme

$$\prod_{j=s}^{n} a_j = a_s \cdot a_{s+1} \cdots a_{n-1} \cdot a_n, \quad \text{resp.} \quad \prod_{j=s}^{\infty} a_j = a_s \cdot a_{s+1} \cdot a_{s+2} \cdot a_{s+3} \cdots$$

a čítame **súčin** (**produkt**) a_j **pre** $j=s$ **až** n, resp. **až do nekonečna**.

Písmeno j nazývame **sčítací/násobiaci index**, $s \in Z$ nazývame **dolná hranica** a $n \in Z$, resp. ∞ nazývame **horná hranica pre sčítanie/násobenie**. Za j dosadzujeme postupne celočíselné hodnoty od dolnej hranice po hornú hranicu (vrátane hraníc).

Nekonečné sumy sa nazývajú **číselné rady**. Súčin $n! = \prod_{j=1}^{n} j = 1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n$ nazývame **faktoriál čísla** $n \in N$ a čítame n **faktoriál**. Špeciálne pre $n=0$ definujeme $0!=1$.

Základné prvky matematickej teórie

Hlavným znakom súčasnej matematiky je, že svoje jednotlivé disciplíny buduje axiomaticky. Na začiatku sú najjednoduchšie pojmy (tzv. **primitívne**) a súbory viet (**axiómy**), o ktorých predpokladáme, že platia a nedokazujeme ich.

Výber primitívnych pojmov a axióm je ovplyvnený rôznymi podmienkami a hlavne účelom, pre ktorý sa disciplína buduje. Najdôležitejšia je **podmienka bezspornosti systému**. To znamená, že v syténe nemôžeme odvodiť výrok a zároveň jeho negáciu. Na tomto základe definujeme pomocou definícií nové pojmy a pomocou už dokázaných (t. j. platných) viet formulujeme a dokazujeme vety nové. Štruktúru matematiky môžeme charakterizovať trojicou základných kameňov, ktoré nazývame **definícia**, **veta** a **dôkaz**.

Definícia určuje význam zavádzaného pojmu pomocou už známych pojmov.

Veta (**poučka**, **tvrdenie**, **lema**, **pravidlo**) je pravdivý výrok o matematických objektoch a vzťahoch medzi nimi, ktorý je dokázaný, resp. nie sú o ňom pochybnosti. **Pravidlom** nazývame obyčajne vetu, ktorá obsahuje návod na ďalší postup (napr. konštrukciu daných objektov). **Lemy** (**pomocné vety**) majú pomocný význam.

Dôkaz vety, resp. daného tvrdenia je logický proces, ktorého cieľom je ukázať pravdivosť tvrdenia pomocou axióm, definícií a už predtým dokázaných viet.

Priamy dôkaz sa používa pri dokazovaní platnosti viet tvaru $p \Rightarrow q$ (ak platí výrok p, potom platí výrok q). Predpokladáme, že výrok p je pravdivý a pomocou definícií, axióm a už dokázaných viet postupne ukážeme, že platí výrok q.

Nepriamy dôkaz sa tiež používa pri dokazovaní platnosti viet tvaru $p \Rightarrow q$. Nedokazujeme pôvodný, ale nejaký ekvivalentný výrok (napr. obrátenú implikáciu $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$) alebo neplatnosť negácie pôvodného výroku (dôkaz sporom — predpokladáme platnosť negácie $p \wedge \overline{q}$ a ukážeme jej nepravdivosť, t. j. dospejeme ku sporu).

Matematická indukcia je dôležitý prostriedok na dokazovanie tvrdenia, že prvky danej množiny (najčastejšie N) spĺňajú nejakú vlastnosť F, t. j. $\forall n \in N, n \geq n_0\colon\ F(n)$, kde $n_0 \in N$ je vopred dané číslo. Samotný dôkaz pozostáva z krokov 1, 2 a záveru:

Krok 1: Ukážeme, že tvrdenie F je splnené pre prvý prvok $n=n_0$, t. j. že platí $F(n_0)$.

Krok 2: Predpokladáme, že tvrdenie F platí pre nejaké prirodzené číslo $n=k \geq n_0$ a (za tohto predpokladu) dokážeme, že tvrdenie F platí aj pre nasledujúce prirodzené číslo $n=k+1$. Takže dokážeme implikáciu $F(k) \Rightarrow F(k+1)$.

Záver: V kroku 1 sme ukázali, že platí $F(n_0)$. Z kroku 2 vyplýva platnosť $F(n_0+1)$. Z tohto opäť na základe kroku 2 vyplýva platnosť $F(n_0+2)$, $F(n_0+3)$ atď. Potom je tvrdenie F splnené pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$.

Nie všetky tvrdenia sa dajú dokázať uvedenými spôsobmi. Ak potrebujeme overiť existenciu nejakého objektu ($\exists x\, F(x)$), potom nám stačí nájsť jeden prvok, pre ktoré F

platí — **existenčný dôkaz**. Na vyvrátenie pravdivosti výroku $\forall x\, F(x)$ postačí jeden prvok, pre ktorý vlastnosť F neplatí — **kontrapríklad**. Ak potrebujeme zostrojiť objekt s danými vlastnosťami, takýto postup nazývame **konštruktívny dôkaz**.

Príklad 0.0.1. Dokážte matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí nasledujúci vzťah $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.

Riešenie.
Označme $F(n) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$. Takže máme ukázať rovnosť $F(n)=n^2$.

Krok 1 $[F(1)=1^2]$: Platí triviálne, pretože $F(1)=1=1^2$.

Krok 2 $[F(k)=k^2 \Rightarrow F(k+1)=(k+1)^2]$: $F(k)=k^2 \Rightarrow$
$F(k+1) = 1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = F(k)+(2k+1) = k^2+2k+1 = (k+1)^2$. ■

Množiny

Pod pojmom **množina** rozumieme neusporiadaný súbor (skupinu, súhrn) predmetov (vecí, pojmov, čísel, ...), ktoré nazývame **prvky množiny**. Množiny sa obvykle označujú veľkými písmenami a ich prvky sa ohraničujú zloženými zátvorkami $\{\ \}$. Symbolmi $\in$ a $\notin$ vyjadrujeme, že prvok patrí alebo nepatrí do danej množiny.

Množinu považujeme za danú, ak o každom predmete je určené, či do nej patrí alebo nepatrí. Množinu definujeme vyjadrením všetkých jej prvkov, napríklad zápismi

$$A = \{\text{zoznam prvkov}\} = \{x : \text{ podmienky pre } x\}.$$

Ak má množina konečný počet prvkov, nazýva sa **konečná množina**. Ak nie je konečná, nazýva sa **nekonečná množina**.

Hovoríme, že **množina A je podmnožinou množiny B** ak, každý prvok množiny A patrí aj do množiny B a zapisujeme $A \subset B$. V opačnom prípade zapisujeme $A \not\subset B$.

Hovoríme, že **množiny A a B sa rovnajú** (**sú totožné**), ozn. $A = B$, ak majú rovnaké prvky, t. j. ak $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$. V opačnom prípade hovoríme, že **množiny A a B sú rôzne** (**nerovnajú sa**) a zapisujeme $A \neq B$.

Množinu, ktorá neobsahuje žiadne prvky, nazývame **prázdna množina** a označujeme ju $\emptyset$, prípadne $\{\}$. **$\emptyset$ je podmnožinou každej množiny** a je **konečná**.

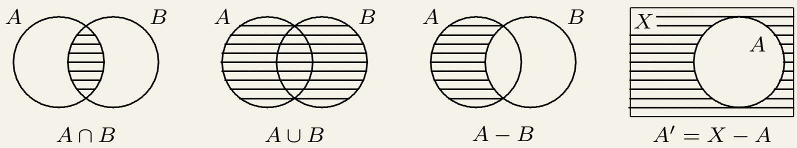
Môže sa stať, že prvkami množiny sú opäť množiny, napr. množina všetkých podmnožín danej množiny A, tzv. **potenčná množina množiny A** $2^A = \{B : B \subset A\}$.

Prienikom množín A a B nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A a zároveň do množiny B, t. j. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$. Ak pre množiny A, B platí $A \cap B = \emptyset$, potom ich nazývame **disjunktné**.

Zjednotením (**súčtom**) **množín A a B** nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A alebo do množiny B, t. j. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

Rozdielom množín A a B nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A a zároveň nepatriace do množiny B, t. j. $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Nech $A \subset X$. **Doplnkom** (**komplementom**, **doplnkovou**, resp. **komplementárnou množinou**) **množiny A do množiny X** nazývame množinu $A' = X - A$. Množiny A a A' sa nazývajú **doplnkové** (**komplementárne**) **vzhľadom na množinu X**.



Obr. 0.0.1: Prienik, zjednotenie, rozdiel a doplnok množín

Karteziánskym súčinom množín A a B nazývame $A\times B = \{[x;y] : x\in A,\ y\in B\}$. Výraz $[x;y]$ sa nazýva **usporiadaná dvojica prvkov x a y**, pretože záleží na poradí prvkov x a y. Usporiadané dvojice $[x_1;y_1]$ a $[x_2;y_2]$ sa **rovnajú**, ak platí $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Podobne pre $n\in N$ nazývame výraz $[x_1;x_2;\ldots;x_n]$ **usporiadaná n-tica** a množinu

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{[x_1;x_2;\ldots;x_n] :\ x_1\in A_1, x_2\in A_2,\ldots,x_n\in A_n\}$$

karteziánskym súčinom množín A_1, A_2, $\ldots$ A_n. Pre $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ zjednodušene píšeme $A\times A\times\cdots\times A = A^n$, t. j. $A = A^1$, $A\times A = A^2$, $A\times A\times A = A^3$.

Veta 0.0.1. Nech $X \neq \emptyset$, A, B, C sú ľubovoľné množiny, potom platí:
$A\cup\emptyset = A,\ A\cap\emptyset = \emptyset,\ \emptyset - A = \emptyset,\ A\cap B = B\cap A,\ A\cup B = B\cup A,$
$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C,\ A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C,$
$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C),\ A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C),$
$A, B\subset X\ \Rightarrow\ (A\cap B)' = A'\cup B',\ (A\cup B)' = A'\cap B',\ X' = \emptyset,\ \emptyset' = X,\ (A')' = A.$

Binárnou reláciou medzi množinami $A\neq\emptyset$ a $B\neq\emptyset$ nazývame každú podmnožinu karteziánskeho súčinu $A\times B$. Slovo binárna často vynechávame. Ak $T\subset A\times B$, potom skutočnosť, že prvok $[x;y]$ patrí do relácie T, zapisujeme $[x;y]\in T$, resp. xTy.

Jedným zo základných pojmov v matematike je pojem zobrazenie (v matematickej analýze sa uprednostňuje názov funkcia). Nech $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$. **Zobrazením** (**funkciou**) **z množiny A do množiny B** nazývame každú reláciu $f\subset A\times B$ takú, že pre každé $x\in A$ existuje najviac jedno $y\in B$, že $[x;y]\in f$.

Prvok $x\in A$ sa nazýva **vzor** (**nezávislá premenná**). Príslušné $y=f(x)$ sa nazýva **obraz prvku x v zobrazení f** (**závislá premenná**), resp. **hodnota zobrazenia f v bode x** (**funkčná hodnota v bode x**).

Množinu $D(f)$ všetkých $x\in A$, pre ktoré existuje $y=f(x)\in B$, nazývame **definičný obor zobrazenia f**. Množinu $H(f)$ všetkých obrazov $y\in B$, pre ktoré existuje vzor $x\in A$ taký, že $y=f(x)$, nazývame **obor hodnôt zobrazenia f**. To znamená, že

$$D(f) = \{x\in A : \exists y\in B, [x;y]\in f\}, \qquad H(f) = \{y\in B : \exists x\in D(f), [x;y]\in f\}.$$

Namiesto zápisov $[x;y]\in f$ a xfy sa častejšie používajú zápisy

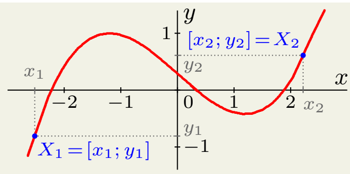
$$f\colon\ x\mapsto y, \qquad \text{resp.}\ \ y = f(x), \qquad \text{resp.}\ \ y = f(x)\colon\ D(f)\to B.$$

Ak $D(f) = A$, potom f nazývame **zobrazenie zobrazujúce množinu A do množiny B** a značíme $y = f(x)\colon\ A\to B$, resp. $f\colon\ A\to B$. Množinu $f(C) = \{f(x) : x\in C\}$ nazývame **obraz množiny $C\subset D(f)$ v zobrazení f**.

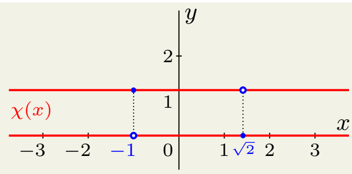
Poznámka 0.0.1. *Ak definičný obor nie je zadaný, potom pod $D(f)$ rozumieme množinu všetkých x, pre ktoré existuje $y=f(x)$ (t. j. maximálnu možnú množinu vzorov).*
Obor hodnôt funkcie f je množina $H(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$, takže zápisom $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je zároveň určený aj obor hodnôt $H(f)$. To znamená, že zápis $y=f(x)$, $x \in D(f)$ a zápis $y=f(x)\colon\ D(f) \to H(f)$ sú ekvivalentné.

Funkciu $y = f(x)$ tvoria usporiadané dvojice $[x; f(x)]$, takže ju môžeme v rovine R^2 zobraziť v **pravouhlom súradnicovom systéme**[3] ako množinu bodov s týmito súradnicami. Túto množinu $\big\{[x; y] \in R^2 : x \in D(f),\ y = f(x)\big\}$ nazývame **graf funkcie f**.

Karteziánsky súradnicový systém sa skladá z **x-ovej** a na ňu kolmej **y-ovej** (**súradnicovej**) **osi**. Ich priesečník označujeme 0 alebo O a nazývame **počiatok súradnicového systému**. Každému bodu $X \in R^2$ je priradená dvojica hodnôt $[x; y]$, ktoré nazývame **x-ová súradnica** a **y-ová súradnica** (obr. 0.0.2).



Obr. 0.0.2: Karteziánsky systém



Obr. 0.0.3: Dirichletova funkcia $\chi(x)$

Geometrická interpretácia funkcie nám v mnohých prípadoch pomôže pri skúmaní jej vlastností. Pojem grafu je ale u mnohých ľudí spojený s pojmom krivka, t. j. „súvislá čiara“. Táto predstava je ale zavádzajúca. Existujú funkcie, ktorých grafy majú veľmi málo spoločné s touto predstavou, dokonca sa dajú veľmi ťažko nakresliť. Príkladom je **Dirichletova funkcia χ** (obr. 0.0.3) definovaná $\chi(x) = 1$ pre $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in I$.

$f\colon\ A \to B$ je **injektívne zobrazenie** (**injekcia**, **prosté zobrazenie**), ak dvom rôznym vzorom z množiny A prislúchajú rôzne obrazy z množiny B t. j. $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, resp. ak rovnaké obrazy majú rovnaké vzory, t. j. $\forall x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (obrátená implikácia).

$f\colon\ A \to B$ je **surjektívne zobrazenie** (**surjekcia**, **zobrazenie na množinu B**), ak ku každému obrazu z množiny B existuje vzor z množiny A, t. j. ak $f(A) = B$. To znamená, ak platí: $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ y = f(x)$.

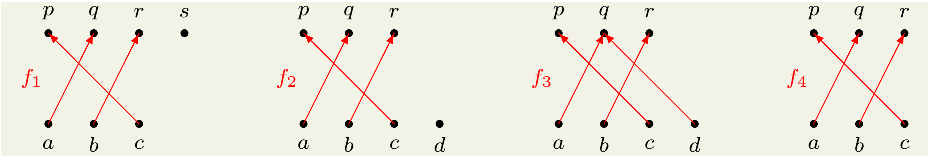
Hovoríme, že $f\colon\ A \to B$ je **bijektívne zobrazenie** (**bijekcia**, **jednojednoznačné zobrazenie**), ak je injektívne a zároveň surjektívne (prosté na množinu B).

Je zrejmé, že ak je zobrazenie $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t. j. $f\colon\ D(f) \to H(f)$ injektívne, potom je zároveň aj surjektívne, t. j. je bijektívne.

Zobrazenia sú množiny usporiadaných dvojíc, takže **ich rovnosť musíme chápať ako rovnosť množín.** Inými slovami $f = g$ práve vtedy, ak $[x; y] \in f \Leftrightarrow [x; y] \in g$. To znamená, že **zobrazenie f, $x \in D(f)$ sa rovná zobrazeniu g, $x \in D(g)$** práve vtedy, ak $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Nech $M \subset D(f) \cap D(g)$, potom **zobrazenie f, $x \in D(f)$ sa rovná zobrazeniu g, $x \in D(g)$ na množine M** práve vtedy, ak pre všetky $x \in M$ platí $f(x) = g(x)$.

[3] Tiež sa azýva **karteziánsky súradnicový systém**.

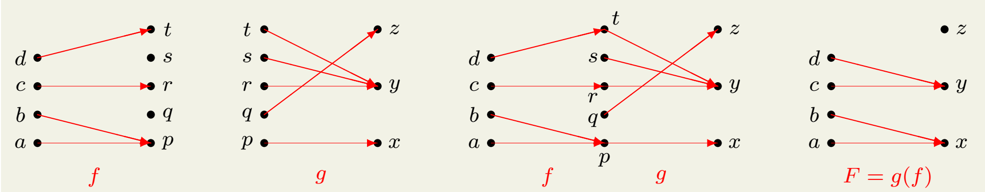


Obr. 0.0.4: Injekcie f_1, sujekcie f_2, f_3 a bijekcia f_4

Nech $f\colon\ A \to B$, $g\colon\ C \to D$, pričom $H(f) \subset C$. Potom zobrazenie $F\colon\ A \to D$, ktoré každému $x \in A$ priradí hodnotu $z = g(y) \in D$, kde $y = f(x)$, nazývame **zložené zobrazenie** (**kompozícia**, resp. **zloženie**) **zobrazení f a g**. Zložené zobrazenie zapisujeme

$$F = g(f) = f \circ g, \quad \text{resp.} \quad F(x) = g[f(x)] = [f \circ g](x),\ \ x \in D(f).$$

Zobrazenie f nazývame **vnútorná zložka** a g **vonkajšia zložka** zobrazenia $g(f)$. Ak sú funkcie zadané analyticky $u = f(x)$, $y = g(u)$, potom do vzorca pre $g(f)$ stačí za u dosadiť $f(x)$. Hovoríme, že **vykonávame substitúciu premennej u výrazom $f(x)$**.



Obr. 0.0.5: Zložené zobrazenie $F = g(f)$

Identickým zobrazením (**identitou**) nazývame zobrazenie $f(x) = x$, $x \in D(f)$. Je zrejmé, že identita je injektívna a zároveň surjektívna, t. j. bijektívna.

Ak je $y = f(x) : A \to B$ bijektívne, potom existuje zobrazenie $x = f^{-1}(y) : B \to A$ také, že platí $[x; y] \in f \Leftrightarrow [y; x] \in f^{-1}$. Zobrazenie f^{-1} nazývame **inverzným k zobrazeniu f**. Zrejme platí $(f^{-1})^{-1} = f$. Keďže sa $[x; y] \in f$ a $[y; x] \in f^{-1}$ líšia iba poradím prvkov, sú grafy funkcií f a f^{-1} osovo súmerné podľa priamky $y = x$ (obr. 0.0.7).

Spravidla sa dodržiava dohoda, že argument funkcie f a inverznej funkcie f^{-1} značíme rovnakým symbolom. Preto namiesto $x = f^{-1}(y)$ píšeme $y = f^{-1}(x)$.

Postupnosťou nazývame ľubovoľné zobrazenie f s definičným oborom N, t. j.

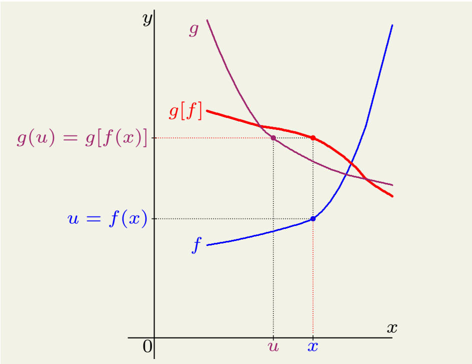
$$f = \{[n; f(n)] : n \in N\} = \{[1; f(1)]\,,\ [2; f(2)]\,,\ [3; f(3)]\,,\ \ldots,\ [n; f(n)]\,,\ \ldots\}\,.$$

Pre jednoduchosť označíme $f(n) = a_n$, $n \in N$ a postupnosť f budeme zapisovať

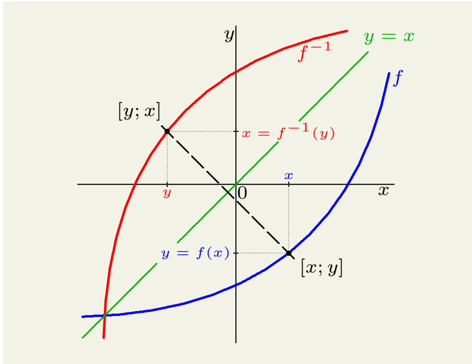
$$f = \{f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots\} = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\,.$$

kde a_n, $n \in N$ nazývame[4] **členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$**. Obor hodnôt $H(f)$, t. j. množinu hodnôt, ktoré nadobúdajú a_n, nazývame **množina hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$**.

[4]Každý člen a_n, $n \in N$ predstavuje usporiadanú dvojicu $[n; a_n]$, t. j. vzor a_n je určený jeho poradím.



Obr. 0.0.6: Graf zloženej funkcie



Obr. 0.0.7: Graf inverznej funkcie

Veta 0.0.2. Ak sú funkcie $f : A \to B$, $g : B \to C$ bijekcie, potom aj funkcie $g[f] : A \to C$, $f^{-1} \colon B \to A$ sú bijekcie.

Hovoríme, že **množina A je ekvivalentná s množinou B**, ozn. $A \sim B$, ak existuje bijekcia $f \colon A \to B$. Ak množiny A a B nie sú ekvivalentné, potom píšeme $A \not\sim B$.

Ak $A \sim B$, potom tiež hovoríme, že **množiny A a B majú rovnakú mohutnosť**. Ak existuje injekcia, ale neexistuje bijekcia (t. j. surjekcia) $A \to B$, hovoríme, že **množina A má menšiu mohutnosť ako množina B**, resp. **B má väčšiu mohutnosť ako A**.

Množina A sa nazýva **nekonečne spočítateľná**, ak je ekvivalentná s množinou prirodzených čísel, t. j. ak $A \sim N$. Ak je A nekonečne spočítateľná alebo konečná, nazývame ju **spočítateľná**. Ak A nie je spočítateľná, nazývame ju **nespočítateľná**.

Množina môže byť konečná, nekonečná, spočítateľná alebo nespočítateľná (tab. 0.0.3). Ak sú množiny A, B spočítateľné, potom sú $A \cup B$, $A \times B$, $C \subset A$ spočítateľné.

$$\text{množina}\left\{\begin{array}{l} \text{konečná}\left\{\begin{array}{l}\text{prázdna}\\ \text{konečne spočítateľná}\end{array}\right. \\ \text{nekonečná}\left\{\begin{array}{l}\text{nekonečne spočítateľná}\\ \text{nespočítateľná}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{prázdna}\\ \text{konečne spočítateľná}\\ \text{nekonečne spočítateľná}\end{array}\right\}\text{spočítateľná}\\ \text{nespočítateľná}\end{array}\right\}\text{množina}$$

Tabuľka 0.0.3: Konečná, nekonečná, spočítateľná, nespočítateľná množina

Nech $A \subset R$. Ak pre všetky $x \in A$ platí $x \leq a$, resp. $b \leq x$, potom číslo $a \in R$, resp. $b \in R$ nazývame **horné**, resp. **dolné ohraničenie množiny A**. Množinu A nazývame **zhora** [resp. **zdola**] **ohraničená**. Ak je A ohraničená zdola a aj zhora, potom sa nazýva **ohraničená**. Ak množina A nie je ohraničená zhora [resp. zdola], nazýva sa **neohraničená zhora** [resp. **neohraničená zdola**]. Ak A nie je ohraničená, t. j. nie je ohraničená zhora alebo nie je ohraničená zdola, nazýva sa **neohraničená**.

Nech $A \subset R$. Ak $a \in R$ je horné [resp. dolné] ohraničenie množiny A a zároveň $a \in A$, potom a nazývame **najväčší prvok** (**maximum**) [resp. **najmenší prvok** (**minimum**)] **množiny A** a označujeme $a = \max A$ [resp. $a = \min A$].

Najmenšie z horných ohraničení nazývame **suprémum** a najväčšie z dolných ohraničení nazývame **infimum množiny A**, označujeme $\sup A$ a $\inf A$.

Čísla $1,\ 2{=}1{+}1,\ 3{=}2{+}1,\ 4{=}3{+}1,\ \ldots,\ n{=}(n{-}1){+}1,\ \ldots$ nazývame **prirodzené**. **Množinu všetkých prirodzených čísel** označujeme N. **Celými číslami** nazývame čísla, ktoré sa dajú zapísať ako rozdiel dvoch prirodzených čísel. **Množinu všetkých celých čísel** označujeme Z. Do množiny Z patria všetky prirodzené čísla, všetky čísla k nim opačné a číslo 0. V množine Z nie je vo všeobecnosti definovaný podiel čísel. Každé číslo, ktoré sa dá vyjadriť ako m/n, kde $m\in Z$, $n\in N$ sa nazýva **racionálne číslo**. **Množinu všetkých racionálnych čísel** označujeme Q. Čísla, ktoré nie sú racionálne, nazývame **iracionálne** (napr. $\sqrt{2}$, e, π). **Množinu všetkých iracionálnych čísel** označujeme I.

Aj keď je množina reálnych čísel R nekonečná, všetky jej prvky sú konečné. Preto má zmysel rozšíriť množinu R o prvky **mínus nekonečno** a (**plus**) **nekonečno**, ktoré označujeme symbolmi $-\infty$ a ∞. Túto množinu nazývame **rozšírená množina reálnych čísel** a značíme $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$.

Operácie a relácie, definované na R, môžeme čiastočne rozšíriť aj na množinu R^*. Pre všetky $a\in R$ platí $-\infty < a < \infty$. Pre všetky $a, b\in R$, $b > 0$ definujeme výrazy:

$$\infty{+}\infty = \infty,\quad -\infty{-}\infty = -\infty,\quad a \pm \infty = \pm\infty,\quad \pm\infty{\cdot}\infty = \pm\infty,\quad \pm\infty{\cdot}(-\infty) = \mp\infty,$$
$$\pm b{\cdot}\infty = \pm\infty,\quad \pm b{\cdot}(-\infty) = \mp\infty,\quad \tfrac{a}{\pm\infty} = 0,\quad \tfrac{\infty}{\pm b} = \pm\infty,\quad \tfrac{-\infty}{\pm b} = \mp\infty.$$

Nedefinujeme výrazy, nazývajú sa **neurčité** a riešia sa pomocou limít:

$$\infty - \infty,\quad \pm\infty \cdot 0,\quad \tfrac{\pm\infty}{\infty},\quad \tfrac{\infty}{\pm\infty},\quad \tfrac{\pm\infty}{0},\quad \tfrac{a}{0}.$$

Ak je množina $A \subset R$ zhora, resp. zdola ohraničená, potom $\sup A\in R$, resp. $\inf A\in R$. V opačnom prípade definujeme $\sup A = \infty$, resp. $\inf A = -\infty$.

Intervaly a ich zjednotenia sú najčastejšími množinami, s ktorými pracujeme.

Nech $a, b\in R$, $a < b$, potom **ohraničenými intervalmi s krajnými bodmi a a b** (**ľavým a**, **pravým b**) nazývame nasledujúce množiny:

$\langle a\,;\, b\rangle = \{x\in R : a \le x \le b\}$ **uzavretý interval**,
$\langle a\,;\, b) = \{x\in R : a \le x < b\}$ **zľava uzavretý a sprava otvorený interval**,
$(a\,;\, b\rangle = \{x\in R : a < x \le b\}$ **zľava otvorený a sprava uzavretý interval**,
$(a\,;\, b) = \{x\in R : a < x < b\}$ **otvorený interval**.

Ak I je ohraničený interval, potom **dĺžkou intervalu I** nazývame číslo $d_I = b - a$.

Nech $a\in R$. **Neohraničenými intervalmi** nazývame množiny:

$$(-\infty\,;\, a\rangle = \{x\in R : x \le a\},\qquad \langle a\,;\, \infty) = \{x\in R : a \le x\},$$
$$(-\infty\,;\, a) = \{x\in R : x < a\},\qquad (a\,;\, \infty) = \{x\in R : a < x\}.$$

Množinu R zvykneme zapisovať ako neohraničený interval $(-\infty\,;\, \infty) = \{x\in R\} = R$.

Tieto intervaly nazývame **nedegenerované**.

Intervaly $\langle a\,;\, a\rangle = \{x\in R : a \le x \le a\} = \{a\}$, $(a\,;\, a) = \{x\in R : a < x < a\} = \emptyset$ nazývame **degenerované**.

Množina $A \subset R$ sa nazýva **súvislá**, ak pre všetky $a, b\in A$, $a < b$, platí $\langle a\,;\, b\rangle \subset A$.

Nech $a \in R$, potom interval $(a-\delta\,;\,a+\delta) = \{x \in R : |x-a| < \delta\}$ označujeme $O_\delta(a)$ a nazývame **δ-okolím bodu a**. Číslo $\delta > 0$ nazývame **polomer okolia**.

Niekedy je výhodné z okolia vylúčiť samotný bod $a \in R$. Množinu $O_\delta(a) - \{a\}$ nazývame **prstencovým δ-okolím bodu $a \in R$** a označujeme $P_\delta(a)$.

V prípade, že nie je veľkosť polomeru δ podstatná, hovoríme o (**prstencovom**) **okolí bodu a** a označujeme stručne $O(a)$, resp. $P(a)$.

Okolím (**r-okolím**) **bodu ∞** nazývame interval $(r\,;\,\infty) = \{x \in R : r < x\}$ a označujeme $O_r(\infty)$, resp. $O(\infty)$. Analogicky interval $(-\infty\,;\,r) = \{x \in R : x < r\}$ nazývame **okolím** (**r-okolím**) **bodu $-\infty$** a označujeme $O_r(-\infty)$, resp. $O(-\infty)$. Tieto okolia sú zároveň aj prstencovými okoliami.

$O_\delta^-(a) = (a-\delta\,;\,a\rangle$ a $O_\delta^+(a) = \langle a\,;\,a+\delta)$, $P_\delta^-(a) = (a-\delta\,;\,a)$ a $P_\delta^+(a) = (a\,;\,a+\delta)$ nazývame **ľavé** a **pravé** (**prstencové**) **δ-okolie bodu a**, t. j. **jednostranné okolia**.

Poznámka 0.0.2. *Množina $R = (-\infty\,;\,\infty)$ je okolím každého bodu $a \in R^*$ (t. j. aj $\pm\infty$) s polomerom $r = \infty$. Množina $\emptyset = (a\,;\,a)$ je okolím každého bodu $a \in R$ s polomerom $\delta = 0$.*

Bod $a \in A$ sa nazýva **vnútorný bod množiny $A \subset R$**, ak existuje okolie $O(a) \subset A$. Množinu všetkých vnútorných bodov množiny A nazývame **vnútro množiny A** a označujeme $\operatorname{int} A$, resp. A^0.

Bod $a \in R$ sa nazýva **vonkajší bod množiny $A \subset R$**, ak je vnútorným bodom jej doplnku $A' = R - A$. Množinu všetkých vonkajších bodov množiny A nazývame **vonkajšok množiny A** a označujeme $\operatorname{ext} A$.

Bod $a \in R$ sa nazýva **hraničný bod množiny $A \subset R$**, ak nie je ani vnútorným a ani vonkajším bodom[5] množiny A. Množinu všetkých hraničných bodov množiny A nazývame **hranica množiny A** a označujeme ∂A.

Bod $a \in R$ sa nazýva **hromadný bod množiny $A \subset R$** práve vtedy, ak v každom jeho okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod z množiny A, ktorý je rôzny od bodu a, t. j. pre každé prstencové okolie $P(a)$ platí $P(a) \cap A \neq \emptyset$.

Uzáverom množiny $A \subset R$, ozn. $\overline{A}$, nazývame zjednotenie množiny A s množinou všetkých jej hromadných bodov. Množina $A \subset R$ sa nazýva **uzavretá**, ak obsahuje všetky svoje hromadné body, t. j. ak $A = \overline{A}$.

Ak bod $a \in A$ nie je hromadným bodom A, nazýva sa **izolovaný bod množiny A**. Množina, ktorá obsahuje iba izolované body sa nazýva **izolovaná množina**.

Množina $A \subset R$ sa nazýva **otvorená**, ak každý jej bod je vnútorný, t. j. ak $A = \operatorname{int} A$.

Veta 0.0.3. Množina $A \subset R$ je otvorená, práve vtedy ak je $R - A$ uzavretá.
Ak sú $A, B \subset R$ otvorené, resp. uzavreté, potom sú $A \cap B$, $A \cup B$ otvorené, resp. uzavreté.

Veta 0.0.4. Ak sú $A_k \subset R$, $k \in N$ otvorené, potom $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ je otvorená množina.
Ak sú $A_k \subset R$, $k \in N$ uzavreté, potom $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ je uzavretá množina.

Poznámka 0.0.3. *Množiny $\left\{\frac{1}{k}\right\}$, $k \in N$ sú uzavreté, ale $\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{k}\right\} = \left\{\frac{1}{k} : k \in N\right\}$ nie je uzavretá, pretože neobsahuje bod 0, ktorý je jej hromadným bodom.*
$\left(-\frac{1}{k}\,;\,\frac{1}{k}\right)$, $k \in N$ sú otvorené množiny, ale $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}\,;\,\frac{1}{k}\right) = \{0\}$ je uzavretá.

[5] T. j. v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod z množiny A a aspoň jeden bod z množiny A'.

Kapitola 1

Základy lineárnej algebry

1.1 Lineárne priestory

Jedným zo základných pojmov v algebre je pojem operácia (napr. sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie – binárne operácie, mocnenie, odmocnenie – unárne operácie). Sčítanie dvoch čísel $a+b=c$ znamená, že dvom číslam a, b (z nejakej číselnej množiny) priradíme iné číslo c (z nejakej číselnej množiny). Vo všeobecnosti môžu byť rôzne nielen množiny, z ktorých používame prvky, ale aj spôsoby priradenia.

Zobrazenie $f\colon A \times B \to C$ budeme nazývať (**zovšeobecnená**) **binárna operácia množín A, B do množiny C**. Ak platí $B = C$, t. j. $f\colon A \times B \to B$, potom ju nazývame **vonkajšia operácia na množine B**. Ak platí $A = B$, t. j. $f\colon A \times A \to C$, potom ju nazývame **vnútorná operácia na množine A**. Ak platí $A = B = C$, t. j. $f\colon A \times A \to A$, potom ju nazývame **operácia na množine A**.

1.1.1 Lineárne priestory a podpriestory

Vo všeobecnosti môžeme lineárne priestory definovať nad ľubovoľným komutatívnym telesom (napr. [41, 20]), ale pre naše účely úplne postačí množina reálnych čísel R so svojimi operáciami $+$ (sčítanie) a $\cdot$ (násobenie).

Nech $V \neq \emptyset$ je nejaká neprázdna množina, na ktorej je definovaná binárna operácia $\oplus : A \times A \to A$, pričom platí:

- Existuje **neutrálny prvok $\Theta \in V$**, taký že pre všetky $\alpha \in V$ platí $\alpha \oplus \Theta = \Theta \oplus \alpha = \alpha$.[1]
- Ku každému $\alpha \in V$ existuje **symetrizačný prvok $\overline{\alpha} \in V$**, taký že $\alpha \oplus \overline{\alpha} = \overline{\alpha} \oplus \alpha = \Theta$.[2]
- Pre všetky $\alpha, \beta, \gamma \in V$ platí **asociatívny zákon**, t. j. $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$.
- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí **komutatívny zákon**, t. j. $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$.

Ďalej predpokladajme, že existuje vonkajšia operácia $\odot : R \times V \to V$ taká, že pre všetky $c_1, c_2 \in R$ a pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí:

- $c_1 \odot (c_2 \odot \alpha) = (c_1 \cdot c_2) \odot \alpha$,
- $(c_1 + c_2) \odot \alpha = (c_1 \odot \alpha) \oplus (c_2 \odot \alpha)$,
- $c_1 \odot (\alpha \oplus \beta) = (c_1 \odot \alpha) \oplus (c_1 \odot \beta)$,
- $1 \odot \alpha = \alpha$.

Takto definovanú množinu V s operáciami $\oplus, \odot$ nazývame **lineárny priestor** (**nad množinou reálnych čísel R**) a označujeme $(V, \oplus, \odot)$.

[1] Pri sčítaní reálnych čísel sa neutrálny prvok nazýva **nulový prvok**, resp. **nula** a označuje 0. Pri násobení reálnych čísel sa neutrálny prvok nazýva **jednotkový prvok**, resp. **jednotka** a označuje 1.

[2] Pri sčítaní reálnych čísel sa symetrizačný prvok k číslu c nazýva **opačné číslo** a označuje $-c$. Pri násobení reálnych čísel sa symetrizačný prvok k číslu c nazýva **inverzné číslo** a označuje $1/c$, resp. c^{-1}.

Prvky $t \in R$ niekedy nazývame **skaláry** a prvky $\alpha \in V$ nazývame **vektory**, preto niekedy lineárne priestory tiež nazývame **vektorové priestory**.

Poznámka 1.1.1. *Ak $(V, \oplus, \odot)$ je lineárny priestor, potom existuje **jediný neutrálny prvok** Θ, ku každému $\alpha \in V$ existuje **jediný symetrizačný prvok** $\overline{\alpha}$.*
Stručne uvedieme niektoré vlastnosti lineárneho priestoru. Nech $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in R$, potom:

$c \odot \Theta = 0 \odot \alpha = \Theta$. $\quad$ $c \odot \alpha = \Theta$ *práve vtedy, ak* $c = 0$ *alebo* $\alpha = \Theta$.
$\overline{\alpha} = (-1) \odot \alpha$. $\quad$ $\alpha \oplus \beta = \alpha \oplus \gamma$, *potom* $\beta = \gamma$. $\quad$ $\alpha \oplus \beta = \gamma$, *potom* $\alpha = \gamma \oplus \overline{\beta}$.

Množina $R^n = R \times R \times \cdots \times R = \{(x_1; x_2; \ldots; x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$, $n \in N$ sa skladá z usporiadaných n-tíc reálnych čísel. Binárna operácia sčítanie je pre všetky $x, y \in V$, $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $y = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$ daná predpisom

$$(x_1; x_2; \ldots; x_n) + (y_1; y_2; \ldots; y_n) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \ldots; x_n + y_n).$$

Vonkajšia operácia násobenie je pre všetky $c \in R$, $x \in V$, $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ definovaná

$$c \cdot (x_1; x_2; \ldots; x_n) = c\,(x_1; x_2; \ldots; x_n) = (cx_1; cx_2; \ldots; cx_n).$$

Priestor $(R^n, +, \cdot)$ **je lineárny** a pre svoje metrické vlastnosti sa často v literatúre nazýva **Euklidov** (n**-rozmerný**) **priestor**. Jeho neutrálnym (nulovým) prvkom (vektorom) je $\Theta_n = (0; 0; \ldots; 0)$. Symetrizačný prvok k prvku (vektoru) x je prvok $-x = (-x_1; -x_2; \ldots; -x_n)$ a nazýva sa opačný prvok (vektor).

Pre $n = 1$ dostaneme priestor $(R, +, \cdot)$ reálnych čísel (reálna os), pre $n = 2$ dostaneme reálnu (euklidovu) rovinu $(R^2, +, \cdot)$ a pre $n = 3$ reálny priestor $(R^3, +, \cdot)$. V praxi stručne píšeme R, R^2, ..., R^n.

Ako ukazujú nasledujúce príklady, lineárne priestory nemusia tvoriť iba usporiadané n-tice, ale aj iné objekty ako sú napríklad polynómy alebo funkcie.

Príklad 1.1.1. Množina $P_n = \{p(x) : p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n, p_0, p_1, \ldots, p_n \in R\}$ polynómov stupňa najviac n ($n \in N$) tvorí lineárny priestor nad telesom reálnych čísel R spolu s operáciami sčítanie polynómov a násobenie polynómov reálnymi číslami.
Ak $p(x), q(x) \in P_n$, $p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n$, $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n$, $c \in R$, potom $p(x) + q(x) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + \cdots + (p_n + q_n)x^n$, $cp(x) = (cq_0) + (cq_1)x + \cdots + (cq_n)x^n$.
Neutrálnym prvkom je polynóm $o(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^n = 0$, symetrizačným prvkom k $p(x)$ je polynóm $-p(x) = -p_0 - p_1 x - \cdots - p_n x^n$.
Množina $M_n = \{p(x) : p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n, p_0, p_1, \ldots, p_n \in R, p_n \neq 0\}$ polynómov stupňa práve n ($n \in N$) netvorí lineárny priestor. Sčítanie polynómov dokonca nie je ani operácia, napr. $p(x) + (-p(x)) = p(x) - p(x) = 0 \notin M_n$. ■

Poznámka 1.1.2. *Prvky množiny P_n môžeme reprezentovať usporiadanými $(n+1)$-ticami, napr. $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \in P_2$ môžeme reprezentovať trojicou $(p_0; p_1; p_2)$, analogicky platí $(-1; 0; 2)$ pre $2x^2 - 1$ alebo $(0; 0; 0)$ pre neutrálny prvok $o(x) = 0$.*

Príklad 1.1.2. Množina $F_{\langle 0\,;\,1\rangle} = \{f(x) : f(x)$ je spojitá na intervale $\langle 0\,;\,1\rangle\}$ tvorí lineárny priestor nad telesom reálnych čísel R spolu s operáciami sčítanie funkcií a násobenie funkcií reálnymi číslami.
Ak $f, g \in F_{\langle 0\,;\,1\rangle}$, $c \in R$, potom aj ich súčet je spojitá funkcia, t. j. $f + g \in F_{\langle 0\,;\,1\rangle}$ a taktiež $cf \in F_{\langle 0\,;\,1\rangle}$. Neutrálnym prvkom je konštantná funkcia $y = 0$, $x \in \langle 0\,;\,1\rangle$ a inverzným (opačným) prvkom k funkcii f je funkcia $-f$, ktorá je tiež spojitá. ■

Ak $(V,\oplus,\odot)$ je lineárny priestor, potom $(W,\oplus,\odot)$ sa nazýva **lineárny podpriestor priestoru** $(V,\oplus,\odot)$, ak $W\subset V$ a pre všetky $\alpha,\beta\in W$, $c\in R$ platí[3] $\alpha\oplus\beta\in W$, $c\odot\alpha\in W$.

Príklad 1.1.3. Priestor $(R^2,+,\cdot)$ nie je lineárnym podpriestorom priestoru $(R^3,+,\cdot)$. Ale keď označíme $R_t^2=\{(x_1;x_2;0)\colon x_1,x_2\in R\}$, potom množiny R^2 a R_t^2 majú prakticky rovnaké prvky a $(R_t^2,+,\cdot)$ je lineárnym podpriestorom priestoru $(R^3,+,\cdot)$. ■

Nech $(V,\oplus,\odot)$ je lineárny priestor, $c_i\in R$, $\alpha_i\in V$, $i=1,2,\ldots,k$, $k\in N$. **Lineárnou kombináciou prvkov α_1, α_2, ..., α_k** nazývame **prvok $\chi\in V$** definovaný vzťahom

$$\chi=(c_1\odot\alpha_1)\oplus(c_2\odot\alpha_2)\oplus\cdots\oplus(c_k\odot\alpha_k),$$

pričom prvky $c_1,c_2,\ldots,c_k\in R$ nazývame **koeficientami lineárnej kombinácie**.

Prvky $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in V$ nazývame **lineárne nezávislé**, ak rovnica

$$(c_1\odot\alpha_1)\oplus(c_2\odot\alpha_2)\oplus\cdots\oplus(c_k\odot\alpha_k)=\Theta$$

platí práve vtedy, ak $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$. V opačnom prípade nazývame $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ **lineárne závislé**. To znamená, že rovnica $(c_1\odot\alpha_1)\oplus(c_2\odot\alpha_2)\oplus\cdots\oplus(c_k\odot\alpha_k)=\Theta$ platí aj pre nejaké nenulové c_i, $i\in\{1,2,\ldots,k\}$.

Príklad 1.1.4. V priestore $(R^3,+,\cdot)$ sú prvky:

$(1;1;1)$, $(0;0;0)$ lineárne závislé, pretože $0\cdot(1;1;1)+1\cdot(0;0;0)=(0;0;0)$. Prvky $(1;1;1)$, $(1;1;0)$, $(2;2;1)$ sú lineárne závislé, pretože $(1;1;1)+(1;1;0)=(2;2;1)$. Prvky $(1;0;0)$, $(1;1;0)$ sú lineárne nezávislé, pretože $c_1\,(1;0;0)+c_2\,(1;1;0)=(0;0;0)$ má jediné riešenie $c_1+c_2=0$, $c_2=0$, t. j. $c_1=c_2=0$.

V priestore $(P_2,+,\cdot)$ sú prvky (príklad 1.1.1):

1, x, x^2 lineárne nezávislé, pretože neexistuje trojica reálnych čísel c_1, c_2, c_3, pričom aspoň jedno z nich je neulové tak, aby $c_1+c_2x+c_3x^2=0$. Prvky $1+x$, $1-x$, x sú lineárne závislé, pretože $(1+x)-(1-x)-2x=0$.

V priestore $(F_{\langle 0\,;\,1\rangle},+,\cdot)$ sú prvky (príklad 1.1.2):

$\sin x$, $\cos x$ lineárne nezávislé, pretože rovnica $c_1\sin x+c_2\cos x=0$ platí pre všetky $x\in\langle 0\,;\,1\rangle$ iba vtedy, ak $c_1=c_2=0$. Naopak 1, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ sú lineárne závislé, pretože $-1+\sin^2 x+\cos^2 x=0$ pre všetky $x\in\langle 0\,;\,1\rangle$. ■

Nech $(V,\oplus,\odot)$ je lineárny priestor, nech $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in V$, $k\in N$. Potom platí:

- $\Theta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ sú lineárne závislé.
- $\alpha_i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ sú lineárne závislé pre ľubovoľné α_i, $i\in\{1,2,\ldots,k\}$.
- Ak sú $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ lineárne závislé, potom $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ sú lineárne závislé pre ľubovoľné $\beta\in V$.
- Ak sú $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ lineárne nezávislé, potom platí $\alpha_i\neq\Theta$, $\alpha_i\neq\alpha_j$ pre ľubovoľné $i,j\in\{1,2,\ldots,k\}$, $i\neq j$.
- Ak sú $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ lineárne nezávislé, potom ľubovoľných j, $j\leq k$ z nich vybratých navzájom rôznych prvkov je tiež lineárne nezávislých.
- $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ sú lineárne závislé práve vtedy, ak jeden z nich je lineárnou kombináciou ostatných prvkov.

[3] $(W,\oplus,\odot)$ je samozrejme tiež lineárny priestor.

Nech $(V, \oplus, \odot)$ je lineárny priestor, nech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$, $n \in N$ sú lineárne nezávislé. **Prvky $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tvoria bázu priestoru V**, ak neexistuje prvok $\beta \in V$, $\beta \neq \alpha_i$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ taký, že $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sú lineárne závislé. Počet prvkov bázy nazývame **rozmer** (**dimenzia**) **priestoru V**.

Poznámka 1.1.3. *Lineárny priestor $(V, \oplus, \odot)$ môže mať viacero rôznych báz, ale všetky tieto bázy musia mať rovnaký počet prvkov.*

Príklad 1.1.5. Priestor $(R^n, +, \cdot)$, $n \in N$ má dimenziu n, bázu tvoria napríklad vektory $\varepsilon_1 = (1; 0; \dots; 0)$, $\varepsilon_2 = (0; 1; \dots; 0)$, dots, $\varepsilon_n = (0; 0; \dots; 1)$. Táto báza sa nazýva sa **kanonická (prirodzená)**. Pre $(R^3, +, \cdot)$ sú to prvky $\varepsilon_1 = (1; 0; 0)$, $\varepsilon_2 = (0; 1; 0)$, $\varepsilon_3 = (0; 0; 1)$.

Priestor polynómov $(P_n, +, \cdot)$, $n \in N$ z príkladu 1.1.1 má dimenziu $n+1$, bázu tvoria napríklad vektory 1, x, x^2, $\dots$, x^n.

Priestor $(F_{\langle 0\,;\,1\rangle}, +, \cdot)$ z príkladu 1.1.2 nemá konečnú dimenziu, ale nekonečnú.[4] ■

Ak $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$, $n \in N$ tvoria bázu lineárneho priestoru $(V, \oplus, \odot)$ a $\beta \in V$ je ľubovoľný prvok, potom existujú čísla $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ také, že[5]

$$\beta = (c_1 \odot \alpha_1) \oplus (c_2 \odot \alpha_2) \oplus \dots \oplus (c_n \odot \alpha_n).$$

Prvky $c_1, c_2, \dots, c_n$ nazývame **súradnice prvku β v báze $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$** a označujeme $[c_1; c_2; \dots; c_n]$. Pri určovaní súradníc prvku záleží na poradí členov bázy. Ak sa zmení poradie bázických prvkov, analogicky sa zmení aj poradie súradníc.

Príklad 1.1.6. Uvažujme priestor $(R^3, +, \cdot)$ a prvok $\beta = (3; 5; 4)$.

Súradnice vektora β v báze $\varepsilon_1 = (1; 0; 0)$, $\varepsilon_2 = (0; 1; 0)$, $\varepsilon_3 = (0; 0; 1)$ sú $[3; 5; 4]$, v báze ε_3, ε_1, ε_2 sú[6] $[4; 3; 5]$ a v báze $(0; 1; 1)$, $(1; 0; 1)$, $(1; 1; 0)$ sú $[3; 1; 2]$. ■

1.1.2 Zobrazenia lineárnych priestorov

Ak sú $(V_1, \oplus_1, \odot_1)$, $(V_2, \oplus_2, \odot_2)$ lineárne priestory, potom zobrazenie $f\colon V_1 \to V_2$ nazývame **lineárnym zobrazením**, ak pre všetky $\alpha, \beta \in V_1$, $c \in R$ platí

$$f(\alpha \oplus_1 \beta) = f(\alpha) \oplus_2 f(\beta) \ (\textbf{aditívnosť}), \quad f(c \odot_1 \alpha) = c \odot_2 f(\alpha) \ (\textbf{homogénnosť}).$$

Pre lineárne zobrazenie $f\colon V_1 \to V_2$ platí:

- Ak Θ_1 je neutrálny prvok priestoru V_1, potom $\Theta_2 = f(\Theta_1)$ je neutrálny prvok V_2.
- Ak $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in V_1$, $c_1, c_2, \dots, c_k \in R$, $k \in N$ potom platí
$$f\big[(c_1 \odot_1 \alpha_1) + (c_2 \odot_1 \alpha_2) + \dots + (c_k \odot_1 \alpha_k)\big] = c_1 \odot_2 f(\alpha_1) + c_2 \odot_2 f(\alpha_2) + \dots + c_k \odot_2 f(\alpha_k).$$
- Ak $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in V_1$ sú lineárne závislé, potom $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_k) \in V_2$ sú lineárne závislé.
- Ak $(W_1, \oplus_1, \odot_1)$ je podpriestor lineárneho priestoru $(V_1, \oplus_1, \odot_1)$, potom jeho obraz $(f(W_1), \oplus_2, \odot_2)$ je podpriestor priestoru $(V_2, \oplus_2, \odot_2)$.

---

[4] Určovanie bázy tohto priestoru prekračuje rámec tejto publikácie, môže ňou byť napríklad nekonečný systém polynómov $y = x^i$, $x \in \langle 0\,;\,1\rangle$, $i = 1, 2, \dots$

[5] To znamená, že každý prvok lineárneho priestoru sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia jeho bázy.

[6] Keďže sú členy bázy presunuté, sú rovnako presunuté aj súradnice.

Príklad 1.1.7. Uvažujme lineárny priestor $(R^1, +, \cdot)$ a lineárny priestor $(R^+, \oplus, \odot)$, pričom $R^+ = \{x \in R, x > 0\}$ a pre $x, y \in R^+$, $c \in R$ sú operácie $\oplus$ a $\odot$ definované

$$x \oplus y = \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \qquad c \odot x = \ln x^c = c \cdot \ln x.$$

Potom zobrazenie $f\colon R^+ \to R$ určené predpisom $f(x) = \ln x$, $x \in R^+$ je lineárne. ■

Lineárny priestory $(V_1, \oplus_1, \odot_1)$, $(V_2, \oplus_2, \odot_2)$ sa nazývajú **izomorfné**, ak existuje bijektívne lineárne zobrazenie $f\colon V_1 \to V_2$. Zobrazenie f nazývame **izomorfizmus**.

Veta 1.1.1. Nech $n \in N$, potom každý n-rozmerný lineárny priestor $(V, \oplus, \odot)$ je izomorfný s lineárnym priestorom $(R^n, +, \cdot)$.

Predchádzajúca veta inými slovami hovorí, že všetky n-rozmerné lineárne priestory sa dajú reprezentovať lineárnym priestorom $(R^n, +, \cdot)$, t. j. pomocou usporiadaných n-tíc.

Nech prvky $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $n \in N$ tvoria bázu lineárneho priestoru $(V, \oplus, \odot)$. Pre ľubovoľný prvok $\beta \in V_n$ označme jeho súradnice v tejto báze ako $[c_1; c_2; \ldots; c_n]$, teda

$$\beta = (c_1 \odot \alpha_1) \oplus (c_2 \odot \alpha_2) \oplus \cdots \oplus (c_k \odot \alpha_k).$$

Potom zobrazenie $\varphi\colon V \to R^n$ definované vzťahom $\varphi(\beta) = (c_1; c_2; \ldots; c_n)$ je izomorfizmus[7] lineárnych priestorov $(V, \oplus, \odot)$ a $(R^n, +, \cdot)$.

1.2 Matice a determinanty

1.2.1 Matice a ich základné vlastnosti

Obdĺžníkova schéma $\boldsymbol{A}$ zložená z $m \cdot n$ prvkov, $m, n \in N$, ktoré sú usporiadané do m riadkov a n stĺpcov sa nazýva **matica typu $m \times n$**:

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij}).$$

Na maticu typu $m \times n$ sa môžeme pozerať ako na m riadkov usporiadaných n-tíc (**riadkové vektory**) alebo ako na n stĺpcov usporiadaných m-tíc (**stĺpcové vektory**).

Prvky a_{ij} matice $\boldsymbol{A}$ sú spravidla čísla. Ak sú prvky matice reálne čísla, nazýva sa **reálna matica**. Ak sú prvky matice komplexné čísla, nazýva sa **komplexná matica**. Prvky matice môžu byť aj iné objekty, ako sú napríklad funkcie, polynómy alebo aj matice. Matice sa v praxi (a nielen matematickej) používajú veľmi často.

Ak z danej matice $\boldsymbol{A}$ vyberieme len tie prvky, ktoré sa nachádzajú vo vopred zvolených riadkoch a vopred zvolených stĺpcoch, takto vzniknutú maticu nazývame **podmatica matice $\boldsymbol{A}$** (stĺpcový alebo riadkový vektor sú tiež podmatice).

[7] φ je bijektívne lineárne zobrazenie (izomorfizmus), ktoré pri danej báze priradí každému prvku priestoru $(V, \oplus, \odot)$ jeho súradnice.

Príklad 1.2.1. $\boldsymbol{B}$ je podmaticou matice $\boldsymbol{A}$, vybrali sme 1. a 3. riadok, 1., 2. a 4. stĺpec.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Ak rozdelíme danú maticu $\boldsymbol{A}$ na niekoľko jej podmatíc tak, že tieto tvoria pôvodnú celú maticu, potom ju nazývame **bloková matica** a jednotlivé podmatice nazývame **bloky matice $\boldsymbol{A}$**. Ako ukazuje nasledujúci príklad, všetky bloky v jednom riadku rovnaký počet riadkov a všetky bloky v jednom stĺpci majú rovnaký počet stĺpcov.

Príklad 1.2.2. Rozklad matice $\boldsymbol{A}$ na bloky $\boldsymbol{A_{11}}, \ldots, \boldsymbol{A_{23}}$:

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} & \boldsymbol{A_{13}} \\ \hline \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} & \boldsymbol{A_{23}} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} & \boldsymbol{A_{13}} \\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} & \boldsymbol{A_{23}} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Ak $m = n$, potom $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ sa nazýva **štvorcová matica rádu n** (**stupňa n**). Štvorcová matica stupňa n sa nazýva:

- **nulová matica**, ak pre všetky $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí $a_{ij} = 0$. Označuje sa $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_{n\times n}$.
- **jednotková matica**, ak $a_{ii} = 1$ pre $i = j$, $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Označuje sa $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{n\times n} = \boldsymbol{E}_n$.
- **diagonálna matica**, ak $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Prvky a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} tvoria tzv. **hlavnú diagonálu**.
- **horná trojuholníkova matica**, ak $a_{ij} = 0$ pre $i > j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
- **dolná trojuholníkova matica**, ak $a_{ij} = 0$ pre $i < j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
- **symetrická matica**, ak $a_{ij} = a_{ji}$ pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
- **antisymetrická matica**, ak $a_{ij} = -a_{ji}$ pre $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (zrejme $a_{ii} = 0$).

Rovnosť dvoch matíc má zmysel iba, ak majú rovnaký typ, t. j. majú rovnaký počet riadkov a rovnaký počet stĺpcov. **Matica $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ sa rovná matici $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$**, označenie $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, ak pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ platí $a_{ij} = b_{ij}$.

Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, $c \in R$, potom definujeme **súčet matíc $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$** a **skalárny násobok čísla a matice $c \cdot \boldsymbol{A} = c\boldsymbol{A}$** (po príslušných prvkoch) nasledovne

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, \quad c\boldsymbol{A} = c(a_{ij})_{m\times n} = (ca_{ij})_{m\times n}.$$

Maticu $(-1) \cdot \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}$ nazývame **opačná matica k matici $\boldsymbol{A}$**. To znamená, že ak $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Theta}$, potom sú matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ opačné, t. j. $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B}$, resp. $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$.

Príklad 1.2.3. Uvedieme príklad súčtu dvoch matíc a násobku matice skalárom:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ -9 & 12 & -3 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times p}$, t. j. počet stĺpcov matice $\boldsymbol{A}$ sa rovná počtu riadkov matice $\boldsymbol{B}$. **Súčin matíc $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AB}$** definujeme nasledovne:

$$\boldsymbol{AB} = (a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p} = (c_{ij})_{m\times p},\ \text{pričom } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

pre $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, p$. To znamená, že sčítavame postupne násobky prvkov i-teho riadku matice $\boldsymbol{A}$ a j-teho stĺpca matice $\boldsymbol{B}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}_{n\times p} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}_{m\times p}.$$

Príklad 1.2.4. Vo všeobecnosti neplatí $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ ani pri štvorcových maticiach.

$$(\,2 \quad -1 \quad 3\,)_{1\times 3}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{3\times 1} = (\,7\,)_{1\times 1},\qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{3\times 1}\cdot(\,2 \quad -1 \quad 3\,)_{1\times 3} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

Pre ľubovoľné matice $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{n\times p}$, $\boldsymbol{C}_{n\times p}$, $\boldsymbol{D}_{p\times r}$, jednotkové matice $\boldsymbol{E}_m$, $\boldsymbol{E}_n$, nulové matice $\boldsymbol{\Theta}_{m\times n}$, $\boldsymbol{\Theta}_{p\times r}$ a ľubovoľné $c, d\in R$ platia vzťahy:[8]

- $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BD}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{D}$, t. j. $\boldsymbol{A}_{m\times n}(\boldsymbol{B}_{n\times p}\boldsymbol{D}_{p\times r}) = (\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times p})\boldsymbol{D}_{p\times r}$.
- $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{D} = \boldsymbol{BD} + \boldsymbol{CD}$, t. j. $(\boldsymbol{B}_{n\times p} + \boldsymbol{C}_{n\times p})\boldsymbol{D}_{p\times r} = \boldsymbol{B}_{n\times p}\boldsymbol{D}_{p\times r} + \boldsymbol{C}_{n\times p}\boldsymbol{D}_{p\times r}$.
- $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$, t. j. $\boldsymbol{A}_{m\times n}(\boldsymbol{B}_{n\times p} + \boldsymbol{C}_{n\times p}) = \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times p} + \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{C}_{n\times p}$.
- $c(d\boldsymbol{A}) = (cd)\boldsymbol{A} = cd\boldsymbol{A}$, t. j. $c(d\boldsymbol{A}_{m\times n}) = (cd)\boldsymbol{A}_{m\times n} = cd\boldsymbol{A}_{m\times n}$.
- $(c\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = c(\boldsymbol{AB}) = c\boldsymbol{AB}$, t. j. $(c\boldsymbol{A}_{m\times n})\boldsymbol{B}_{n\times p} = c(\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times p}) = c\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times p}$.
- $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{AE}_n$, t. j. $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n$.
- $\boldsymbol{\Theta}_{m\times n} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\Theta}_{m\times n}$, t. j. $\boldsymbol{\Theta}_{m\times n} + \boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n} + \boldsymbol{\Theta}_{m\times n}$.
- $\boldsymbol{\Theta}_{m\times n}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Theta}_{m\times p}$, $\boldsymbol{B\Theta}_{p\times r} = \boldsymbol{\Theta}_{n\times r}$, t. j. $\boldsymbol{\Theta}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times p} = \boldsymbol{\Theta}_{m\times p}$, $\boldsymbol{B}_{n\times p}\boldsymbol{\Theta}_{p\times r} = \boldsymbol{\Theta}_{n\times r}$.

Pre štvorcovú maticu $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ definujeme **0-tu mocninu matice $\boldsymbol{A}$** vzťahom $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}_n$ a pre $k\in N$ definujeme **k-tu mocninu matice $\boldsymbol{A}$** vzťahom $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A}$. To znamená, že $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$, atď.

Ak $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ je typu $m\times n$, potom matica $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times m}$ typu $n\times m$ taká, že pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ platí $b_{ij} = a_{ji}$ sa nazýva **transponovaná k matici $\boldsymbol{A}$** a označuje sa $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T = (a^T_{ij})_{n\times m}$ (t. j. pre prvky matíc $\boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{A}$ platí vzťah $a^T_{ij} = a_{ji}$).

Z definície vyplýva, že štvorcová matica $\boldsymbol{A}$ typu $n\times n$ je symetrická práve vtedy, ak $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ a antisymetrická práve vtedy, ak $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$.

[8] Uvedené rovnosti ostanú v platnosti aj v prípade, ak c, d, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ sú komplexné.

Poznámka 1.2.1. *Uvažujme ľubovoľnú štvorcovú maticu $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ a k nej transponovanú $\boldsymbol{A}^T=(a_{ij}^T)_{n\times n}=(a_{ji})_{n\times n}$. Potom súčet $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T=(a_{ij})_{n\times n}+(a_{ji})_{n\times n}=(a_{ij}+a_{ji})_{n\times n}$ je symetrická matica a rozdiel $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T=(a_{ij})_{n\times n}-(a_{ji})_{n\times n}=(a_{ij}-a_{ji})_{n\times n}$ je antisymetrická matica. Z toho vyplýva, že môžeme maticu $\boldsymbol{A}$ vyjadriť ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice vzťahom $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T)$.*

Pre ľubovoľné matice $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{m\times n}$, $\boldsymbol{C}_{n\times p}$ a ľubovoľné $c\in R$ platia vzťahy:[9]

$$(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A},\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T,\quad (c\boldsymbol{A})^T=c\boldsymbol{A}^T,\quad (\boldsymbol{BC})^T=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T.$$

Poznámka 1.2.2. *Označme symbolom $\mathcal{A}_{m\times n}$ množinu všetkých matíc $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ typu $m\times n$, potom $\mathcal{A}_{m\times n}$ spolu s operáciami sčítanie matíc a násobenie matice skalárom tvorí lineárny priestor s dimenziou $m\cdot n$. To znamená že $(\mathcal{A}_{m\times n},+,\cdot)$ tvorí lineárny priestor s dimenziou $m\cdot n$.*

Príklad 1.2.5. $(\mathcal{A}_{2\times 2},+,\cdot)$ tvorí lineárny priestor s dimenziou 4. Bázu tvoria napríklad matice $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.
Pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A}\in\mathcal{A}_{2\times 2}$ potom platí

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}\boldsymbol{B}_1+a_{12}\boldsymbol{B}_2+a_{21}\boldsymbol{B}_3+a_{22}\boldsymbol{B}_4.\ \blacksquare$$

1.2.2 Determinant matice

Determinant štvorcovej matice je číslo, ktoré určitým spôsobom charakterizuje túto maticu. Definuje sa pomocou permutácií. Pojem permutácia je čitateľovi určite známy z kombinatoriky, kde vyjadruje výber n prvkov z n-prvkovej množiny $\{1,2,\ldots,n\}$, pričom nás zaujíma v akom poradí tieto prvky vyberáme. Ak vyberieme postupne čísla $2,4,1,\ldots,$ potom daný výber môžeme vyjadriť funkciou $p:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ nasledovne: $p(1)=2$ (prvé sme vybrali číslo 2), $p(2)=4$ (druhé sme vybrali číslo 4), $p(3)=1$ atď.

Nech $n\in N$, každé bijektívne zobrazenie $\pi:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ nazývame **permutáciou množiny** $\{1,2,\ldots,n\}$ a stručne zapisujeme[10] $\pi=(\pi(1);\pi(2);\ldots;\pi(n))$.

Označme množinu všetkých permutácií množiny $\{1,2,\ldots,n\}$ symbolom Π_n, je zrejmé, že má $n!$ prvkov. Nech $\pi\in\Pi_n$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, $i<j$. Hovoríme, že $(i;j)$ **predstavuje inverziu v permutácii** π, ak platí $\pi(i)>\pi(j)$. **Znamienkom permutácie** π nazývame číslo $\operatorname{zn}\pi=(-1)^k$, kde k je počet inverzií danej permutácie π.

Príklad 1.2.6. $\Pi_2=\{(1;2),(2;1)\}$, pričom permutácia $\pi_1=(1;2)$ nemá inverzie, $\operatorname{zn}\pi_1=(-1)^0=1$. Permutácia $\pi_2=(2;1)$ má jednu inverziu, $\operatorname{zn}\pi_2=(-1)^1=-1$.
$\Pi_3=\{(1;2;3),(1;3;2),(2;1;3),(2;3;1),(3;1;2),(3;2;1)\}$, pričom $\pi_1=(1;2;3)$ nemá inverzie, $\pi_2=(1;3;2)$ má jednu inverziu $(2;3)$ $[\pi(2)=3>\pi(3)=2]$, $\pi_3=(2;1;3)$ má jednu inverziu $(1;2)$, $\pi_4=(2;3;1)$ má dve inverzie $(1;3)$, $(2;3)$, $\pi_5=(3;1;2)$ má dve inverzie $(1;2)$, $(1;3)$, $\pi_6=(3;2;1)$ má tri inverzie $(1;2)$, $(1;3)$, $(2;3)$. Potom platí $\operatorname{zn}\pi_1=\operatorname{zn}\pi_4=\operatorname{zn}\pi_5=1$, $\operatorname{zn}\pi_2=\operatorname{zn}\pi_3=\operatorname{zn}\pi_6=-1$. $\blacksquare$

[9] Uvedené rovnosti ostanú v platnosti aj v prípade, ak c, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ sú komplexné.
[10] Napríklad zápis $\pi=(3;1;2)$ vyjadruje permutáciu $\pi(1)=3$, $\pi(2)=1$, $\pi(3)=2$ množiny $\{1,2,3\}$.

Nech $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $n\in N$ je štvorcová matica. **Determinantom matice $\boldsymbol{A}$ rádu n (stupňa n)** nazývame číslo

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{\pi\in\Pi_n} (-1)^k a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

kde k znamená počet inverzií danej permutácie π. Označujeme

$$\det \boldsymbol{A} = |a_{ij}| = |a_{ij}|_{n\times n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinant matice $\boldsymbol{A}$ predstavuje súčet $n!$ súčinov prvkov z matice $\boldsymbol{A}$ takých, že z každého riadku a z každého stĺpca je vybratý práve jeden prvok.

Poznámka 1.2.3. *Horná trojuholníková matica*[11] *má všetky prvky pod hlavnou diagonálou nulové, potom jedinú permutáciu, ktorá neobsahuje žiadny z týchto nulových prvkov, tvorí hlavná diagonála (je to identita a nemá inverzie). Ak permutácia obsahuje z prvého riadku ľubovoľný prvok $a_{1j} \neq a_{11}$, potom z prvého stĺpca môže obsahovať iba nejaký prvok $0 = a_{i1} \neq a_{11}$ a súčin bude 0. To znamená, že* ***ak $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ je horná** alebo **dolná trojuholníkova matica, potom** $\det \boldsymbol{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.* *Špeciálne platí $\det \boldsymbol{E}_n = 1$.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanty sa v praxi zriedkakedy počítajú pomocou permutácií. Výnimkou sú matice druhého a tretieho stupňa, ktoré sa počítajú pomocou Sarusového pravidla. Pri výpočte determinantov sa väčšinou matice upravujú na horný (resp. dolný) trojuholníkový tvar alebo sa používa Laplaceov rozvoj podľa nejakého riadku alebo stĺpca.

Nech $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $n\in N$ je štvorcová matica, potom platí:

- $\det \boldsymbol{A} = \det (\boldsymbol{A}^T)$.
- Ak má $\boldsymbol{A}$ má dva riadky (resp. stĺpce) rovnaké, potom $\det \boldsymbol{A} = 0$.
- Ak má $\boldsymbol{A}$ jeden riadok (resp. stĺpec) nulový, potom $\det \boldsymbol{A} = 0$.
- Ak matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vynásobením jedného jej riadku (resp. stĺpca) číslom k, potom $\det \boldsymbol{B} = k \det \boldsymbol{A}$.
- Ak $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ výmenou dvoch riadkov (resp. stĺpcov), potom $\det \boldsymbol{B} = -\det \boldsymbol{A}$.
- Ak matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ pripočítaním k-násobku jedného jej riadku (resp. stĺpca) k ľubovoľnému inému riadku (resp. stĺpcu), potom $\det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{A}$.
- Ak matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ pripočítaním ľubovoľnej lineárnej kombinácie jej riadkov (resp. stĺpcov) k ľubovoľnému inému riadku (resp. stĺpcu), potom $\det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{A}$.

[11] Dolná trojuholníková má nulové prvky nad hlavnou diagonálou.

- Ak rozložíme prvky jedného riadku (resp. stĺpca) na súčet dvojíc prvkov, potom platí:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Označme štvorcovú podmaticu rádu $n-1$, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $n\in N$ vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca symbolom $\boldsymbol{A_{ij}}$. Číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det \boldsymbol{A_{ij}}$ sa nazýva **algebraický doplnok prvku** a_{ij}. Pre ľubovoľné $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \det \boldsymbol{A}, \quad a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \det \boldsymbol{A}.$$

Posledné dva vzťahy nazývame **Laplaceovým rozvojom** $\det \boldsymbol{A}$ **podľa prvkov** i**-teho riadku**, resp. j**-teho stĺpca**.

Poznámka 1.2.4. *Ak* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$*,* $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}$ *sú štvorcové matice, potom pre determinant ich súčinu platí* $\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A}\cdot\det \boldsymbol{B}$.

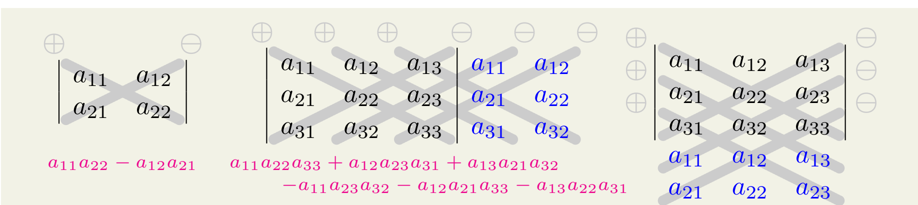
Príklad 1.2.7. Π_2 obsahuje kladnú permutáciu $\pi_1 = (1;2)$, t. j. $\pi_1(1) = 1$ pre a_{11}, $\pi_1(2)=2$ pre a_{22} (súčin $a_{11}a_{22}$) a zápornú permutáciu $\pi_2 = (2;1)$, t. j. $\pi_1(1)=2$ pre a_{12}, $\pi_1(2)=1$ pre a_{21} (súčin $-a_{12}a_{21}$). Potom pre determinant matice $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times 2}$ platí

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Množina Π_3 obsahuje (príklad 1.2.5) tri kladné permutácie $(1;2;3)$, $(2;3;1)$, $(3;1;2)$, t. j. $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$ a tri záporné permutácie $(1;3;2)$, $(2;1;3)$, $(3;2;1)$, t. j. $-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$. Potom pre determinant matice $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ platí

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Uvedený spôsob výpočtu (platí iba pre $\boldsymbol{A}_{2\times 2}$ a $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$) sa nazýva **Sarusovo pravidlo**. ■



Obr. 1.2.1: Sarusovo pravidlo pre matice $\boldsymbol{A}_{2\times 2}$ a $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$

Príklad 1.2.8. Platí ($k\times$r01 ... k danému riadku sa pripočíta k-násobok 1. riadku):

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\times\text{r01} \\ +1\times\text{r01} \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 6 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 4 \begin{vmatrix} 2 & -6 & -5 \\ 6 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Laplaceov rozvoj podľa 1. stĺpca, prvok $a_{11} = 4$. Ostatné tri prvky v stĺpci sú nulové, t. j. platí $\det \boldsymbol{A} = 4\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 0\cdot A_{14} = 4A_{11}$.

$$= 4 \begin{vmatrix} 2 & -6 & -5 \\ 6 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2\times\text{r03} \\ -6\times\text{r03} \\ \\ \end{matrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & -4 & -7 \\ 0 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{3+1}\cdot 1 \begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot\big(-4\cdot 3 - (-7)\cdot 8\big) = 4\cdot(-12+56) = 4\cdot 44 = 176. \blacksquare$$

1.2.3 Hodnosť matice

Hodnosťou matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $m, n \in N$ rozumieme maximálny počet jej lineárne nezávislých riadkov (presnejšie riadkových vektorov) a označujeme $h(\boldsymbol{A})$. Ak $\boldsymbol{A}$ je štvorcová matica rádu n, potom číslo $n - h(\boldsymbol{A})$ nazývame **defekt** (**nulita**) **matice $\boldsymbol{A}$**.

Nasledujúce úpravy matice $\boldsymbol{A}$ sa nazývajú **elementárne úpravy matice $\boldsymbol{A}$**:

- vzájomná výmena dvoch riadkov (resp. stĺpcov),
- vynásobenie riadku (resp. stĺpca) nenulovým číslom,
- pripočítanie k-násobku riadku (resp. k-násobku stĺpca) k inému riadku (resp. stĺpcu).

V praxi sa používajú na zisťovanie hodnosti matice, pretože **nemenia jej hodnosť**.

Poznámka 1.2.5. *Riadkové (resp. stĺpcové) elementárne úpravy matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ je možné vykonať aj pomocou násobenia tejto matice zľava alebo sprava vhodnou maticou:*

- ***Vzájomnú výmenu i-teho a j-teho riadku** (resp. **i-teho a j-teho stĺpca**) **matice $\boldsymbol{A}$** dosiahneme jej vynásobením zľava (resp. sprava) maticou, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{E}_m$ (resp. $\boldsymbol{E}_n$) výmenou i-teho a j-teho riadku (resp. i-teho a j-teho stĺpca). Napríklad pre výmenu 1. a 3. riadku, resp. 1. a 2. stĺpca v matici typu 2×3 platí:*

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13} \\ a_{21}&a_{22}&a_{23} \\ a_{31}&a_{32}&a_{33} \\ a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31}&a_{32}&a_{33} \\ a_{21}&a_{22}&a_{23} \\ a_{11}&a_{12}&a_{13} \\ a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{12}&a_{11}&a_{13} \\ a_{22}&a_{21}&a_{23} \\ a_{32}&a_{31}&a_{33} \\ a_{42}&a_{41}&a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13} \\ a_{21}&a_{22}&a_{23} \\ a_{31}&a_{32}&a_{33} \\ a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}.$$

- ***Vynásobenie i-teho riadku** (resp. **i-teho stĺpca**) **matice $\boldsymbol{A}$ nenulovým číslom k** dosiahneme jej vynásobením zľava (resp. sprava) maticou, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{E}_m$ (resp. $\boldsymbol{E}_n$) nahradením prvku $e_{ii} = 1$ prvkom $e_{ii} = k$. Napríklad pre násobenie 2. riadku, resp. 2. stĺpca číslom k platí ($e_{22} = k$):*

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&k&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13} \\ a_{21}&a_{22}&a_{23} \\ a_{31}&a_{32}&a_{33} \\ a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13} \\ ka_{21}&ka_{22}&ka_{23} \\ a_{31}&a_{32}&a_{33} \\ a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}&ka_{12}&a_{13} \\ a_{21}&ka_{22}&a_{23} \\ a_{31}&ka_{32}&a_{33} \\ a_{41}&ka_{42}&a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13} \\ a_{21}&a_{22}&a_{23} \\ a_{31}&a_{32}&a_{33} \\ a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&k&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}.$$

- ***Pripočítanie k-násobku j-teho riadku k i-temu riadku*** *(resp.* ***k-násobku i-teho stĺpca k j-temu stĺpcu) v matici $\boldsymbol{A}$*** *dosiahneme jej vynásobením zľava (resp. sprava) maticou, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{E}_m$ (resp. $\boldsymbol{E}_n$) nahradením prvku $e_{ij}=0$ prvkom $e_{ij}=k$. Napríklad pre pripočítanie k-násobku 3. riadka k 1. riadku, resp. k-násobku 1. stĺpca k 3. stĺpcu platí ($e_{13}=k$):*

$$\begin{pmatrix} 1&0&k&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\\ a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+ka_{31}&a_{12}+ka_{31}&a_{13}+ka_{31}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\\ a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&ka_{11}+a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&ka_{21}+a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&ka_{31}+a_{33}\\ a_{41}&a_{42}&ka_{41}+a_{43} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\\ a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&k\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Vykonanie viacerých elementárnych úprav po sebe dosiahneme tak, že vynásobíme maticu $\boldsymbol{A}$ príslušnými maticami (maticami na výmenu, násobenie alebo pripočítanie riadkov, resp. stĺpcov) postupne zľava, resp. sprava. Ak vynásobíme tieto matice medzi sebou, dostaneme transformačnú maticu $\boldsymbol{B}_{m\times m}$, resp. maticu $\boldsymbol{B}_{n\times n}$, ktorou keď vynásobíme zľava, resp. sprava maticu $\boldsymbol{A}$, dostaneme rovnakú maticu ako po použití elementárnych riadkových, resp. stĺpcových úprav. Napríklad pre výmenu 1. a 3. riadku a násobenie 2. riadku číslom k platí:

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&k&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&k&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&k&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\\ a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{31}&a_{32}&a_{33}\\ ka_{21}&ka_{22}&ka_{23}\\ a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{41}&a_{42}&a_{43} \end{pmatrix}.$$

Každú maticu $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ je možné pomocou elementárnych úprav previesť (**Gaussova eliminačná metóda**) na niektorý z nasledujúcich tvarov matíc typu $m\times n$:

$$\begin{pmatrix} b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1\,m-1}&b_{1m}&\cdots&b_{1n}\\ 0&b_{22}&\cdots&b_{2\,m-1}&b_{2m}&\cdots&b_{2n}\\ 0&0&\cdots&b_{3\,m-1}&b_{3m}&\cdots&b_{3n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&\cdots&0&b_{mm}&\cdots&b_{mn} \end{pmatrix},\ \text{resp.}\ \begin{pmatrix} b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}&\cdots&b_{1n}\\ 0&b_{22}&\cdots&b_{2m}&\cdots&b_{2n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&\cdots&b_{kk}&\cdots&b_{kn}\\ 0&0&\cdots&0&\cdots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots \end{pmatrix}\ \text{pre } m<n,$$

$$\begin{pmatrix} b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1\,n-1}&b_{1n}\\ 0&b_{22}&\cdots&b_{2\,n-1}&b_{2n}\\ 0&0&\cdots&b_{3\,n-1}&b_{3n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&\cdots&b_{n-1\,n-1}&b_{n-1\,n}\\ 0&0&\cdots&0&b_{nn}\\ 0&0&\cdots&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots \end{pmatrix},\ \text{resp.}\ \begin{pmatrix} b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1k}&\cdots&b_{1n}\\ 0&b_{22}&\cdots&b_{2k}&\cdots&b_{2n}\\ 0&0&\cdots&b_{3k}&\cdots&b_{3n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&\cdots&b_{kk}&\cdots&b_{kn}\\ 0&0&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&0&\cdots&0&\cdots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots \end{pmatrix}\ \text{pre } m>n,$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\,n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2\,n-1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{3\,n-1} & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1\,n-1} & b_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{3k} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{kk} & \cdots & b_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \text{ pre } m = n.$$

Každú maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ je možné pomocou elementárnych úprav previesť (**Jordanova eliminačná metóda**) na niektorý z nasledujúcich tvarov matíc typu $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \text{ pre } m < n,$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \text{ pre } m > n,$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \text{ pre } m = n.$$

Je zrejmé, že výsledný tvar matice upravenej Gaussovou alebo Jordanovou eliminačnou metódou nie je jednoznačne určený.[12]

Ak upravujeme danú maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ Gaussovou eliminačnou metódou na trojuholníkový tvar alebo Jordanovou eliminačnou metódou na diagonálny tvar, dostaneme **matice s rovnakou hodnosťou ako pôvodná matica $\boldsymbol{A}$**. Počet nenulových riadkov a nenulových stĺpcov v takto získanej diagonálnej matici je rovnaký. Tieto riadky, resp. stĺpce sú lineárne nezávislé a je ich maximálny počet. To znamená, že aj v pôvodnej matici $\boldsymbol{A}$ a tiež v trojuholníkovej matici získanej Gaussovou elimináciou je maximálny počet lineárne nezávislých riadkových vektorov rovnaký ako maximálny počet lineárne nezávislých stĺpcových vektorov a platí $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}^T) \leq \min\{m, n\}$. Pre nulové matice $\boldsymbol{\Theta}_{m\times n}$, $m, n \in N$ platí $h(\boldsymbol{\Theta}_{m\times n}) = 0$ a pre jednotkové matice $\boldsymbol{E}_n$, $n \in N$ platí $h(\boldsymbol{E}_n) = n$.

[12] Stačí vynásobiť nejaký riadok alebo stĺpec nenulovým reálnym číslom.

Ak matica $\boldsymbol{B}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ pomocou elementárnych úprav, potom hovoríme, že **matica $\boldsymbol{A}$ je ekvivalentná s maticou $\boldsymbol{B}$** (**matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sú ekvivalentné**) a označujeme **$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$**. Ekvivalentné matice majú rovnakú hodnosť a relácia $\sim$ je reflexívna ($\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$), symetrická ($\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$) a tranzitívna ($\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$).

Príklad 1.2.9. Hodnosť $h(\boldsymbol{A}) = 4$, pretože platí:[13]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \mathrm{r}03 \\ \\ \to \mathrm{r}01 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +1\times\mathrm{r}01 \\ -3\times\mathrm{r}01 \\ -4\times\mathrm{r}01 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -1\times \\ +2\times\mathrm{r}02 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +\frac{1}{2}\times \\ +\frac{1}{3}\times \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -1\times\mathrm{r}03 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(\boldsymbol{A}) = 4.$$

Hodnosť matice sme určili Gaussovou eliminačnou metódou. Môžeme pokračovať ďalej Jordanovou eliminačnou metódou, ale pre zisťovanie hodnosti matice to je zbytočné.

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2\times\mathrm{r}04 \\ -2\times\mathrm{r}04 \\ -1\times\mathrm{r}04 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -1\times\mathrm{r}03 \\ -3\times\mathrm{r}03 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +3\times \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2\times\mathrm{r}02 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

$$-\tfrac{2}{3}\times\mathrm{s}01 + \tfrac{1}{3}\times\mathrm{s}02 - 1\times\mathrm{s}03 \nearrow$$

Štvorcovú maticu $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $n\in N$ nazývame **regulárnou**, ak $h(\boldsymbol{A}) = n$. Ak matica $\boldsymbol{A}$ nie je regulárna, nazýva sa **singulárna**.

Z definície vyplýva, že matica $\boldsymbol{A}$ je regulárna práve vtedy, ak elementárnymi úpravami dostaneme regulárnu trojuholníkovu maticu (Gaussova eliminácia), resp. regulárnu diagonálnu maticu (Jordanova eliminácia), t. j. matice, ktoré majú na hlavnej diagonále iba nenulové prvky. To znamená, že ich determinant je tiež nenulový.

Matica $\boldsymbol{A}$ je singulárna práve vtedy, ak $h(\boldsymbol{A}) < n$, t. j. elementárnymi úpravami dostaneme trojuholníkovu, resp. diagonálnu maticu s aspoň jedným nulovým prvkom na hlavnej diagonále a teda nulovým determinantom.

Poznámka 1.2.6. *Štvorcová matica $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, $n\in N$ je* ***regulárna*** *práve vtedy, ak* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ *a* ***singulárna*** *práve vtedy, ak* $\det \boldsymbol{A} = 0$.
Regulárna matica má riadkové (a taktiež stĺpcové) vektory lineárne nezávislé. Singulárna matica má riadkové (a taktiež stĺpcové) vektory lineárne závislé.

Ak vynásobíme maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $m, n \in N$ regulárnou maticou $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times m}$ zľava alebo regulárnou maticou $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ sprava, **jej hodnosť sa nezmení**, t. j. platí $h(\boldsymbol{BA}) = h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{AC})$.

[13] $k\times\mathrm{r}01$ ... k riadku sa pripočíta k-násobok 1. riadku, $\to \mathrm{r}01$ ... riadok sa presunie na 1. riadok.

1.2.4 Inverzná matica

Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, $n \in N$ je štvorcová regulárna matica, t. j. $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Štvorcová matica typu $n \times n$ sa nazýva **inverznou maticou k matici $\boldsymbol{A}$** a označuje $\boldsymbol{A}^{-1}$, ak platí

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}.$$

Ku každej štvorcovej regulárnej matici $\boldsymbol{A}$ existuje práve jedna inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$. Ak pre maticu $\boldsymbol{B}$ platí $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_n$, resp. $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n$, potom je $\boldsymbol{B}$ inverznou maticou k matici $\boldsymbol{A}$, t. j. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$. To znamená, že platí tiež $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n$, resp. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_n$.

Ak sú $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$ inverzné matice k maticiam $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ typu $n \times n$, potom platí:

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad {\boldsymbol{E}_n}^{-1} = \boldsymbol{E}_n.$$

Poznámka 1.2.7. *Pre matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{-1}$ typu $n\times n$ platí $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}_n$. Pre ich determinanty platí* $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{E}_n = 1$, *t. j.* $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}$.

Štvorcovú maticu $\boldsymbol{A}_{n\times n}$, $n \in N$ môžeme pomocou riadkových elementárnych úprav previesť na jednotkovú maticu $\boldsymbol{E}_n$. Potom existuje transformačná matica $\boldsymbol{B}_{n\times n}$ (poznámka 1.2.5) taká, že $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n$, t. j. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Ak aplikujeme **riadkové elementárne úpravy** (nie stĺpcové) **Jordanovej eliminačnej metódy** na blokovú maticu $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n)$ typu $n \times 2n$ tak, aby sa matica $\boldsymbol{A}$ previedla na jednotkovú maticu $\boldsymbol{E}_n$, potom sa pri týchto úpravách jednotková matica $\boldsymbol{E}_n$ z pravej strany blokovej matice prevedie na inverznú maticu $\boldsymbol{A}^{-1}$, t. j. $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n) \sim (\boldsymbol{E}_n|\boldsymbol{A}^{-1})$.

Príklad 1.2.10. Vypočítame inverznú maticu k matici typu 4×4. Platí:

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_4) = \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\times \mathrm{r}01 \\ -1\times \mathrm{r}01 \\ -1\times \mathrm{r}01 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2\times \mathrm{r}04 \\ -2\times \mathrm{r}04 \\ -3\times \mathrm{r}04 \\ -1\times \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1\times \mathrm{r}03 \\ -4\times \mathrm{r}03 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ +1\times \mathrm{r}02 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 & 1 & 4 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \to \mathrm{r}03 \\ \to \mathrm{r}04 \\ \to \mathrm{r}02 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 & 1 & 4 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) = (\boldsymbol{E}_4|\boldsymbol{A}^{-1}).$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 4 & -15 \\ 8 & 1 & 4 & -14 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Pri predchádzajúcom výpočte nemusíme najprv overovať regulárnosť matice $\boldsymbol{A}$, t. j. či má vôbec zmysel hľadať inverznú maticu $\boldsymbol{A}^{-1}$. Táto skutočnosť sa overuje automaticky.

Ak sa riadkovými úpravami nedá matica $\boldsymbol{A}$ previesť na jednotkovú maticu $\boldsymbol{E}_n$ (vzniknú nulové riadky), potom je singulárna a neexistuje k nej inverzná matica.

Inverznú maticu k $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, $n \in N$ môžeme vypočítať pomocou algebraických doplnkov A_{ij} prvkov a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pre inverznú maticu $\boldsymbol{A}^{-1}$ platí

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} (A_{ij})^T.$$

Príklad 1.2.11. Vypočítame inverznú maticu k matici typu 3×3. Platí:

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1\times\text{r03} \\ -2\times\text{r03} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +1\times\text{r01} \\ -1\times\text{r01} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} +3\times \\ \\ +3\times \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -9 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\times\text{r02} \\ \\ +3\times\text{r02} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \text{r02} \\ \to \text{r03} \\ \to \text{r01} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) = (3\boldsymbol{E}_3|3\boldsymbol{A}^{-1})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & -2/3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teraz vypočítame inverznú maticu pomocou algebraických doplnkov

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} -1\times\text{r03} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

1.3 Systémy lineárnych rovníc

Systémom (resp. **sústavou**) m **lineárnych rovníc s** n **neznámymi** $x_1, x_2, \dots, x_m$ nazývame

$$\begin{array}{rcrcccrcl} a_{11}x_1 &+& a_{12}x_2 &+& \cdots &+& a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 &+& a_{22}x_2 &+& \cdots &+& a_{2n}x_n &=& b_2 \\ &&&& \cdots &&&& \\ a_{m1}x_1 &+& a_{m2}x_2 &+& \cdots &+& a_{mn}x_n &=& b_m, \end{array}$$

pričom $m, n \in N$, $a_{ij} \in R$, $b_j \in R$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ sú pevne dané prvky a $x_j \in R$, $j = 1, 2, \dots, n$ sú neznáme hodnoty.[14] Ak označíme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}_{m\times 1}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}.$$

potom môžeme systém zapísať v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \text{t. j. } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}.$$

Matica $\boldsymbol{A}$ typu $m \times n$ sa nazýva **matica systému**, vektor $\boldsymbol{b}$ sa nazýva **vektor pravých strán**. Matica $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ typu $m\times(n+1)$ zjednodušuje zápis a nazývame ju **rozšírenou maticou systému** a systém lineárnych rovníc $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je ňou jednoznačne určený:

$$\begin{array}{rcrcccrcl} a_{11}x_1 &+& a_{12}x_2 &+& \cdots &+& a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 &+& a_{22}x_2 &+& \cdots &+& a_{2n}x_n &=& b_2 \\ &&&& \cdots &&&& \\ a_{m1}x_1 &+& a_{m2}x_2 &+& \cdots &+& a_{mn}x_n &=& b_m, \end{array} \quad \text{resp.} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Riešením systému lineárnych rovníc $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sa nazýva každá usporiadaná n-tica $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n)^T$ taká, že $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}$. **Riešiť systém lineárnych rovníc** znamená určiť všetky jeho riešenia.

Dva systémy lineárnych rovníc s rovnakým počtom neznámych sa nazývajú **ekvivalentné**, ak majú rovnaké množiny riešení. Počet rovníc nemusí byť rovnaký.

Daný systém $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ riešime tak, že ho prevedieme elementárnymi riadkovými[15] (nie stĺpcovými) operáciami na ekvivalentný systém lineárnych rovníc $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$, ktorý vieme riešiť. Pre rozšírené matice oboch systémov platí $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim (\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$.

Je zrejmé, že je efektívnejšie robiť úpravy s maticou $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ ako s rovnicami. V oboch prípadoch vykonávame tie isté úpravy, iba ich inak zapisujeme. Napríklad lineárnu kombináciu rovníc $(a_{21}+2a_{11})x_1 + (a_{22}+2a_{12})x_2 + \cdots + (a_{2n}+2a_{1n})x_n = b_2+2b_1$ v maticovom tvare zapisujeme $(a_{21}+2a_{11} \;\; a_{22}+2a_{12} \;\; \cdots \;\; a_{2n}+2a_{1n} \,|\, b_2+2b_1)$.

[14] V mnohých prípadoch je potrebné riešiť systémy lineárnych rovníc s komplexnými číslami.

[15] Mohli by sme použiť iba výmenu stĺpcov, kde sa mení poradie neznámych $x_1, x_2, \dots, x_m$, ktoré by sme si museli pamätať. Je zrejmé, že umiestnenie stĺpca $\boldsymbol{b}$ nemôžeme meniť.

Rozšírenú maticu $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ môžeme pomocou riadkových elementárnych úprav a výmeny stĺpcov previesť na ekvivalentnú maticu typu $m \times (n+1)$

$$(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}) = \left(\begin{array}{cccccccc|c} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1\,k+1} & \cdots & c_{1n} & & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2\,k+1} & \cdots & c_{2n} & & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{kk} & c_{k\,k+1} & \cdots & c_{kn} & & d_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & d_{k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{array}\right), \tag{1.1}$$

pričom $k \in N$, $k \leq m$, $k \leq n$ a výsledná matica v závislosti od jej hodnosti nemusí obsahovať žiadne nulové riadky, t. j. ani riadok $(0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\,|\,d_{k+1})$ pre $d_{k+1} = 0$. Prvky $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{kk}$ sú nenulové a ostatné prvky môžu byť nulové alebo nenulové. Ak sme použili aj výmenu stĺpcov, potom sa zmení poradie pôvodných neznámych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Neznáme v novom poradí označme $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$.

Poradie neznámych nemá vplyv na riešiteľnosť systému. Riešiteľnosť systému $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$ a teda aj $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ závisí v prvom rade od hodnoty d_{k+1}. Sú dve možnosti:

- Ak $d_{k+1} \neq 0$, potom posledná nenulová rovnica $0 = 0\cdot\overline{x_1} + 0\cdot\overline{x_2} + \cdots + 0\cdot\overline{x_n} = d_{k+1} \neq 0$ dáva spor, čo znamená, že systémy $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$ a tiež $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ **nemajú riešenie**. Pre hodnosti matíc potom platí $k = h(\boldsymbol{C}) < h(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}) = k+1$, t. j. $k = h(\boldsymbol{A}) < h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = k+1$.
- Ak $d_{k+1} = 0$, potom $h(\boldsymbol{C}) = h(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$, t. j. $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ a sú dve možnosti:
  - Ak $k = n$, potom má $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$ po vynechaní prípadných nulových riadkov tvar

    $$(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}) = \left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & d_n \end{array}\right).$$

    Platí $h(\boldsymbol{C}) = h(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}) = n$, t. j. $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = n$ a existuje **jediné riešenie** v tvare $\overline{x_1} = \frac{d_1}{c_{11}}$, $\overline{x_2} = \frac{d_2}{c_{22}}$, $\ldots$, $\overline{x_n} = \frac{d_n}{c_{nn}}$, t. j. $\overline{x_i} = \frac{d_i}{c_{ii}}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.
  - Ak $k < n$, potom má $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$ po vynechaní prípadných nulových riadkov tvar

    $$(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1\,k+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2\,k+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{kk} & c_{k\,k+1} & \cdots & c_{kn} & d_k \end{array}\right).$$

    Platí $h(\boldsymbol{C}) = h(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}) = k < n$, t. j. $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = k < n$. V matici $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$ je viac stĺpcov ako riadkov, takže máme $n-k$ neznámych $\overline{x_{k+1}}$, $\ldots$, $\overline{x_n}$, za ktoré môžeme voliť ľubovoľné reálne čísla $t_{k+1}, \ldots, t_n$. Potom pre ostatné neznáme platí $c_{ii}\overline{x_i} = d_i - c_{i\,k+1}\overline{x_{k+1}} - \cdots - c_{in}\overline{x_n} = d_i - c_{i\,k+1}t_{k+1} - \cdots - c_{in}t_n$, $i = 1, 2, \ldots, k$ a existuje **nekonečne veľa riešení** v tvare $\overline{x_i} = \frac{d_i}{c_{ii}} - \frac{c_{i\,k+1}}{c_{ii}}t_{k+1} - \cdots - \frac{c_{in}}{c_{ii}}t_n$ pre $i = 1, 2, \ldots, k$, $\overline{x_{k+1}} = t_{k+1}, \ldots, \overline{x_n} = t_n$, kde $t_{k+1}, \ldots, t_n \in R$ sú ľubovoľné.

Veta 1.3.1 (Frobeniova)**.** Systém m lineárnych rovníc o n neznámych $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má riešenie práve vtedy, ak $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. Navyše platí:

- Ak $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = n$, potom má systém práve jedno riešenie.
- Ak $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) < n$, potom má systém nekonečne veľa riešení, pričom $n - k$ neznámych je ľubovoľne voliteľných.

Príklad 1.3.1. Riešte systém lineárnych rovníc $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$, $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$, $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$ s tromi neznámymi x_1, x_2, x_3.

Riešenie.
Rovnice môžeme písať v tvare

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}: \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array} \quad \text{alebo} \quad (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Rozšírenú maticu systému budeme upravovať riadkovými elementárnymi úpravami

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1{\times}\text{r01} \\ -1{\times}\text{r01} \\ -1{\times}\text{r01} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1{\times}\text{r02} \\ -1{\times} \\ +2{\times}\text{r02} \\ +1{\times}\text{r02} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2{\times}\text{r03} \\ \\ -1{\times} \\ -3{\times}\text{r03} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right) \implies h(\boldsymbol{A}) = h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \quad h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = h\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right) = 4.$$

Keďže $h(\boldsymbol{A}) = 3$ sa nerovná $h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 4$ (posledná rovnica $0 = -13$ predstavuje nepravdivý výrok), tento systém lineárnych rovníc nemá riešenie. ■

Príklad 1.3.2. Riešte systém lineárnych rovníc s tromi neznámymi x_1, x_2, x_3

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -7 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -3. \end{array}$$

Riešenie.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2{\times}\text{r01} \\ -1{\times}\text{r01} \\ -3{\times}\text{r01} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & -12 \\ 0 & -11 & -2 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1{\times} \\ -\frac{1}{2}{\times} \\ -2{\times}\text{r02} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} +3{\times}\text{r04} \\ +5{\times}\text{r04} \\ +1{\times}\text{r04} \\ -1{\times} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1{\times}\text{r02} \\ \\ +2{\times}\text{r02} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \to \text{r03} \\ \to \text{r04} \\ \to \text{r02} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Platí $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = 3$ a systém má jediné riešenie $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. ■

Príklad 1.3.3. Riešte systém lineárnych rovníc so štyrmi neznámymi x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 7x_2 + 8x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 9x_2 + 11x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \phantom{{}+x_4} &= 1. \end{aligned}$$

Riešenie.

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -7 & 8 & -1 & 1 \\ 2 & -9 & 11 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ -2\times\mathrm{r01} \\ -1\times\mathrm{r01} \\ -2\times\mathrm{r01} \\ -1\times\mathrm{r01} \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & -15 & 15 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} +5\times \\ -1\times \\ -2\times\mathrm{r02} \\ -3\times\mathrm{r02} \\ -1\times\mathrm{r02} \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{rrrr|r} 5 & 15 & -10 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} -3\times\mathrm{r02} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 5 & 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \text{t. j.} \quad \begin{aligned} 5x_1 \phantom{{}+5x_2} + 5x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 5x_2 - 5x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ak zvolíme $x_3 = t_3$, $x_4 = t_4$, $t_3, t_4 \in R$, potom $5x_1 = 5 - 5t_3 - 2t_4$, $5x_2 = 5t_3 - t_4$, t. j. $x_1 = 1 - t_3 - \frac{2}{5}t_4$, $x_2 = t_3 - \frac{1}{5}t_4$. Keďže parametre t_3, t_4 sú ľubovoľné, môžeme namiesto t_4 zvoliť $5t_4$ a vyhneme sa zlomkom. Potom platí $x_3 = t_3$, $x_4 = 5t_4$, $5x_1 = 5 - 5t_3 - 2\cdot 5t_4$, $5x_2 = 5t_3 - 5t_4$, t. j. $x_1 = 1 - t_3 - 2t_4$, $x_2 = t_3 - t_4$ a riešením je každá usporiadana štvorica $(1 - t_3 - 2t_4; t_3 - t_4; t_3; 5t_4) = (1;0;0;0) + t_3\,(-1;1;1;0) + t_4\,(-2;-2;0;5)$, kde $t_3, t_4 \in R$ sú ľubovoľné parametre. ■

Ak $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\Theta}_{m\times 1}$ (nulový stĺpcový vektor), potom systém nazývame **homogénny**. Ak $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{\Theta}_{m\times 1}$, potom systém nazývame **nehomogénny**. Maticou $\boldsymbol{A}$ je jednoznačne určený homogénny systém a rozšírenou maticou $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ je jednoznačne určený nehomogénny systém lineárnych rovníc.

1.3.1 Homogénne a nehomogénne systémy lineárnych rovníc

Rozšírená ekvivalentná matica (1.1) má v prípade homogénneho systému lineárnych rovníc $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\Theta}$ po vynechaní nulových riadkov tvar[16]

$$(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{\Theta}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1\,k+1} & \cdots\ c_{1n} & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2\,k+1} & \cdots\ c_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{kk} & c_{k\,k+1} & \cdots\ c_{kn} & 0 \end{array}\right), \text{ resp. } \left(\begin{array}{cccccc} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1\,k+1} & \cdots\ c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2\,k+1} & \cdots\ c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{kk} & c_{k\,k+1} & \cdots\ c_{kn} \end{array}\right),$$

pričom $c_{ii} \neq 0$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, k$ a platí $h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\Theta}) = h(\boldsymbol{A}) = k \leq n$. To znamená, že **homogénny systém lineárnych rovníc má vždy riešenie**.

[16] V prípade homogénneho systému sa nezvykne písať nulový stĺpec $\boldsymbol{\Theta}$ na pravej strane, pretože pri jednotlivých úpravách sa nemení a stále zostáva nulový.

Ak $k=n$, potom jediným riešením je $\overline{x_i} = \frac{0}{c_{ii}} = 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. To znamená, že homogénny systém $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\Theta}$ má práve jedno tzv. **triviálne riešenie** $\boldsymbol{x} = (0; 0; \ldots; 0)^T$.

Ak $k < n$, potom systém $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\Theta}$ má **nekonečne veľa riešení** $(\overline{x_1}; \overline{x_2}; \ldots; \overline{x_n})^T$ v tvare $\overline{x_i} = -\frac{c_{i\,k+1}}{c_{ii}} t_{k+1} - \cdots - \frac{c_{in}}{c_{ii}} t_n$ pre $i=1, 2, \ldots, k$, $\overline{x_{k+1}} = t_{k+1}, \ldots, \overline{x_n} = t_n$, kde $t_{k+1}, \ldots, t_n \in R$ sú ľubovoľné. Pre $t_{k+1} = \cdots = t_n = 0$ dostaneme triviálne riešenie.

Poznámka 1.3.1. *Všetky usporiadané n-tice reálnych čísel tvoria lineárny priestor s dimenziou n a neutrálnym prvkom* $\boldsymbol{\Theta}_n = (0; 0; \ldots; 0)$. *Riešenie* $\boldsymbol{x}$ *homogénneho systému* $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\Theta}$ *môžeme považovať za usporiadanú n-ticu*[17] $\boldsymbol{x}=(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R^n$.
Nech $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\Theta}$ *je homogénny systém m lineárnych rovníc s n neznámymi. Triviálne riešenie* $\boldsymbol{\Theta}_n = (0; 0; \ldots; 0)$ *má homogénny systém vždy. Nech* $c \in R$, *nech* $\boldsymbol{u}=(u_1; u_2; \ldots; u_n)$, $\boldsymbol{v}=(v_1; v_2; \ldots; v_n)$ *sú riešenia systému* $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\Theta}$, *t. j.* $\boldsymbol{Au}=\boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{Av}=\boldsymbol{\Theta}$. *Potom platí*

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{Au} + \boldsymbol{Av} = \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}, \qquad \boldsymbol{A}(c\boldsymbol{u}) = c\boldsymbol{Au} = c\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta},$$

t. j. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $c\boldsymbol{u}$ *sú tiež riešenia*[18] *systému* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\Theta}$. *To znamená, že* ***všetky riešenia systému*** $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\Theta}$ ***tvoria lineárny podpriestor*** *priestoru všetkých usporiadaných n-tíc reálnych čísel. Pre* $k = n$ *má systém iba triviálne riešenie a tento lineárny priestor sa rovná jednoprvkovej množine* $\{(0; 0; \ldots; 0)\}$. *Pre* $k < n$ *môžeme riešenie vyjadriť v tvare*

$$\begin{aligned}
&(\overline{x_1};\ \overline{x_2};\ \ldots;\ \overline{x_k};\ \overline{x_{k+1}};\ \overline{x_{k+2}};\ \ldots;\ \overline{x_n}) = \\
&\quad = \big(-\tfrac{c_{1\,k+1}}{c_{11}} t_{k+1} - \tfrac{c_{1\,k+2}}{c_{11}} t_{k+2} - \cdots - \tfrac{c_{1n}}{c_{11}} t_n;\ -\tfrac{c_{2\,k+1}}{c_{22}} t_{k+1} - \tfrac{c_{2\,k+2}}{c_{22}} t_{k+2} - \cdots - \tfrac{c_{2n}}{c_{22}} t_n;\ \ldots \\
&\qquad \ldots;\ -\tfrac{c_{k\,k+1}}{c_{kk}} t_{k+1} - \tfrac{c_{k\,k+2}}{c_{kk}} t_{k+2} - \cdots - \tfrac{c_{kn}}{c_{kk}} t_n;\ t_{k+1};\ t_{k+2};\ \ldots;\ t_n\big) = \\
&\quad = t_{k+1}\big(-\tfrac{c_{1\,k+1}}{c_{11}};\ -\tfrac{c_{2\,k+1}}{c_{22}};\ \ldots;\ -\tfrac{c_{k\,k+1}}{c_{kk}};\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0\big) + \\
&\qquad + t_{k+2}\big(-\tfrac{c_{1\,k+2}}{c_{11}};\ -\tfrac{c_{2\,k+2}}{c_{22}};\ \ldots;\ -\tfrac{c_{k\,k+2}}{c_{kk}};\ 0;\ 1;\ \ldots;\ 0\big) + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + t_n\big(-\tfrac{c_{1n}}{c_{11}};\ -\tfrac{c_{2n}}{c_{22}};\ \ldots;\ -\tfrac{c_{kn}}{c_{kk}};\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1\big),
\end{aligned}$$

kde $t_{k+1}, \ldots, t_n \in R$ *je* $n-k$ *vhodne zvolených čísel. To znamená, že usporiadané n-tice* $(-\frac{c_{1\,k+1}}{c_{11}}; -\frac{c_{2\,k+1}}{c_{22}}; \ldots; -\frac{c_{k\,k+1}}{c_{kk}}; 1; 0; \ldots; 0)$, $(-\frac{c_{1\,k+2}}{c_{11}}; -\frac{c_{2\,k+2}}{c_{22}}; \ldots; -\frac{c_{k\,k+2}}{c_{kk}}; 0; 1; \ldots; 0)$, $\ldots$, $(-\frac{c_{1n}}{c_{11}}; -\frac{c_{2n}}{c_{22}}; \ldots; -\frac{c_{kn}}{c_{kk}}; 0; 0; \ldots; 1)$ *sú bázou (**bázickými riešeniami**) pre poradie neznámych* $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ *a dimenzia priestoru je* $n-k$.[19]

Príklad 1.3.4. Riešte homogénny systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 0\\
x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0\\
2x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0\\
x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Riešenie.
Nulový stĺpec na pravej strane nie je potrebné písať, pretože stále zostáva nulový.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2\times r02 \\ -1\times r01 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2\times r02 \\ \\ \\ -1\times r02 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

[17] Intuitívne sme riešenia písali ako usporiadané trojice, resp. štvorice aj v predchádzajúcich príkladoch.
[18] Ľubovoľná lineárna kombinácia riešení daného homogénneho systému je opäť jeho riešením.
[19] Pri praktickom riešení systémov poradie neznámych nie je potrebné meniť. Výber neznámych, ktoré sú voliteľnými parametrami je zrejmý z výpočtu.

Dostali sme nový ekvivalentný homogénny systém s dvomi rovnicami a piatimi neznámymi $x_1 - x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 0$, $x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$.
Takže máme tri voliteľné neznáme $x_2 = t_2$, $x_4 = t_4$, $x_5 = t_5$, kde $t_2, t_4, t_5 \in R$. Potom platí $x_1 = x_2 - 3x_4 - 3x_5 = t_2 - 3t_4 - 3t_5$, $x_3 = -2x_4 - x_5 = -2t_4 - t_5$. Riešením je usporiadaná pätica $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (t_2 - 3t_4 - 3t_5;\ t_2;\ -2t_4 - t_5;\ t_4;\ t_5)$, $t_2, t_4, t_5 \in R$. Ďalej platí

$$(t_2 - 3t_4 - 3t_5; t_2; -2t_4 - t_5; t_4; t_5) = t_2(1;1;0;0;0) + t_4(-3;0;-2;1;0) + t_5(-3;0;-1;0;1).$$

To znamená, že všetky riešenia systému tvoria trojrozmerný lineárny priestor s bázickými riešeniami $(1;1;0;0;0)$, $(-3;0;-2;1;0)$, $(-3;0;-1;0;1)$. ■

Nech $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je nehomogénny systém m lineárnych rovníc s n neznámymi. Nech $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú dve ľubovoľné jeho riešenia, t. j. $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{Av} = \boldsymbol{b}$. Potom pre ich rozdiel $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ platí

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{Au} - \boldsymbol{Av} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\Theta}.$$

t. j. $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ je riešením homogénneho systému $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\Theta}$. Potom existuje riešenie $\boldsymbol{w}$ homogénneho systému $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\Theta}$ také, že platí $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, t. j. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$. To znamená, že ak poznáme riešenia homogénneho systému (tvoria lineárny priestor — riešenie $\boldsymbol{w}$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia bázických riešení), potom nám stačí nájsť jedno ľubovoľné riešenie nehomogénneho systému a máme určené všetky jeho riešenia. Túto vlastnosť nazývame **vlastnosťou superpozície riešenia**.

Príklad 1.3.5. Riešte nehomogénny systém lineárnych rovníc (viď príklad 1.3.4)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= -4 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 &= 6 \\ 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 12 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Riešenie.
Úlohu riešime rovnako ako pri homogénnom prípade.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2\times\mathrm{r}02 \\ -1\times\mathrm{r}01 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2\times\mathrm{r}02 \\ \\ \\ -1\times\mathrm{r}02 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ak položíme $x_2 = t_2$, $x_4 = t_4$, $x_5 = t_5$, $t_2, t_4, t_5 \in R$, potom pre zvyšné dve neznáme platí $x_1 = 8 + x_2 - 3x_4 - 3x_5 = t_2 - 3t_4 - 3t_5$, $x_3 = 6 - 2x_4 - x_5 = 2t_4 - t_5$. Riešením je

$$\begin{aligned} &(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (8 + t_2 - 3t_4 - 3t_5;\ t_2;\ 6 - 2t_4 - t_5;\ t_4;\ t_5) = \\ &= (8;0;6;0;0) + t_2\,(1;1;0;0;0) + t_4\,(-3;0;2;1;0) + t_5\,(-3;0;-1;0;1),\ t_2, t_4, t_5 \in R, \end{aligned}$$

pričom $(8;0;6;0;0)$ je (jedným) riešením nehomogénneho systému a pätice $(1;1;0;0;0)$, $(-3;0;2;1;0)$, $(-3;0;-1;0;1)$ sú bázickými riešeniami homogénneho systému. ■

Poznámka 1.3.2. *Ak v predchádzajúcom nehomogénnom systéme v poslednej rovnici nahradíme pravú stranu inou hodnotou, napr. $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$, systém nebude mať riešenie. Hneď po prvej úprave dostaneme dve rovnice s rôznymi pravými stranami a po ich odčítaní v ďalšom kroku neriešiteľnú rovnicu $0 = -2$.*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2\times\mathrm{r}02 \\ -1\times\mathrm{r}01 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2\times\mathrm{r}02 \\ \\ \\ -1\times\mathrm{r}02 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Špeciálne systémy lineárnych rovníc

Uvažujme systém lineárnych rovníc $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ s rovnakým počtom rovníc a neznámych n. Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ **je regulárna**, t. j. $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Potom $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = n$ a systém $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má práve jedno riešenie (Frobeniova veta 1.3.1). Po vynásobení rovnosti $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ zľava inverznou maticou $\boldsymbol{A}^{-1}$ dostaneme rovnosti

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

Potom jediné riešenie daného systému má tvar $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, resp.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \dots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}.$$

Označme pre $i=1,2,\dots,n$ symbolom $\boldsymbol{B}_i$ maticu, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ nahradením i-teho stĺpca stĺpcovým vektorom $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \dots, \ \boldsymbol{B}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Pre $i = 1,2,\dots,n$ predstavuje $b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \cdots + b_nA_{ni}$ Laplaceov rozvoj podľa i-teho stĺpca matice $\boldsymbol{B}_i$, t. j. $b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \cdots + b_nA_{ni} = \det \boldsymbol{B}_i$. Potom platí

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} \det \boldsymbol{B}_1 \\ \det \boldsymbol{B}_2 \\ \dots \\ \det \boldsymbol{B}_n \end{pmatrix}.$$

Takéto vyjadrenie jediného riešenia systému lineárnych rovníc $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ s regulárnou maticou $\boldsymbol{A}$ sa nazýva **Cramerovo pravidlo**.

Poznámka 1.3.3. *Praktické použitie Cramerovho pravidla je zložitejšie, pretože je potrebné vypočítať $n+1$ determinantov stupňa n, kým pri použití Gaussovej alebo Jordanovej eliminácie vystačíme s úpravou jednej matice typu $n \times (n+1)$.*

Príklad 1.3.6. Riešte homogénny systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Riešenie.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1\times \\ +1\times\text{r01} \\ +1\times\text{r01} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Systém má jediné riešenie $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, t. j. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Iné riešenie.
Pre inverznú maticu systému platí

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\times \\ +1\times\text{r01} \\ +1\times\text{r01} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +1\times\text{r02}+1\times\text{r03} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \to \text{r03} \\ \to \text{r02} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie má potom tvar $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, t. j. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Iné riešenie.
Pri použití Cramerovho pravidla musíme vypočítať 4 determinanty. Najprv musíme overiť, či vôbec túto metódu môžeme použiť. To znamená, či platí $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ +1\times\text{r01} \\ +1\times\text{r01} \end{array} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \to \text{r03} \\ \to \text{r02} \end{array} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot 2\cdot 2 = 4,$$

$$\det \boldsymbol{B}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ -1\times\text{r01} \\ -1\times\text{r01} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\det \boldsymbol{B}_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -1\times\text{r02} \\ \\ -1\times\text{r02} \end{array} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ +\frac{1}{2}\times\text{r01} \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\det \boldsymbol{B}_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -1\times\text{r03} \\ -1\times\text{r03} \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +\frac{1}{2}\times\text{r01}+\frac{1}{2}\times\text{r02} \end{array} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Riešenie má potom tvar $x_1 = \frac{\det \boldsymbol{B}_1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{4}{4} = 1$, $x_2 = \frac{\det \boldsymbol{B}_2}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{4}{4} = 1$, $x_3 = \frac{\det \boldsymbol{B}_3}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{4}{4} = 1$.[20] ■

1.3.2 Vlastné hodnoty a vlastné vektory matice

Nech $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, $n \in N$ je štvorcová matica, ktorej prvky sú reálne čísla (všeobecne to môžu byť aj komplexné čísla). Číslo δ sa nazýva **vlastná** (resp. **charakteristická**) **hodnota** (**resp. číslo**) **matice** $\boldsymbol{A}$, ak existuje nenulový stĺpcový vektor $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\Theta}$ taký, že

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \delta\boldsymbol{x}, \quad \text{t. j.} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vektor[21] $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\Theta}$ sa nazýva **vlastný** (resp. **charakteristický**) **vektor matice** $\boldsymbol{A}$ **prislúchajúci k vlastnej hodnote** δ.

[20] Tento systém môžeme vyriešiť jednoducho iba s použitím obyčajného sedliackeho rozumu. Ak zvážime symetriu koeficientov pri neznámych premenných navzájom a rovnaké čísla na pravej strane, dostaneme $x_1 = x_2 = x_3$ a po dosadení do niektorej z rovníc dostaneme riešenie $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.
[21] Nulový vektor je riešením pre každé δ, pretože $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta} = \delta\boldsymbol{\Theta}$.

Keďže platí $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{x}$, potom môžeme rovnosť $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \delta\boldsymbol{x}$ upraviť

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \delta\boldsymbol{x} = \delta\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{x} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \delta\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A} - \delta\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{x}.$$

Rovnosť $(\boldsymbol{A} - \delta\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Theta}$ predstavuje homogénny systém n lineárnych rovníc s n neznámymi. Tento systém má netriviálne riešenie $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\Theta}$ práve vtedy, ak $h(\boldsymbol{A} - \delta\boldsymbol{E}_n) < n$. To znamená, že matica $\boldsymbol{A} - \delta\boldsymbol{E}_n$ musí byť singulárna, t. j. $\det(\boldsymbol{A} - \delta\boldsymbol{E}_n) \neq 0$. Detereminant

$$\det(\boldsymbol{A}-\delta\boldsymbol{E}_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-\delta & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\delta & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\delta \end{vmatrix} = b_n\delta^n + b_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + b_1\delta + b_0$$

je polynóm stupňa n s reálnymi koeficientami a nazýva sa **charakteristický polynóm matice $\boldsymbol{A}$**. Rovnica[22] $\det(\boldsymbol{A}-\delta\boldsymbol{E}_n) = (-1)^n\delta^n + b_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + b_1\delta + b_0 = 0$ sa nazýva **charakteristická rovnica matice $\boldsymbol{A}$**. Jej koreňmi sú vlastné hodnoty matice.

Ak je δ_0 vlastnou hodnotou matice $\boldsymbol{A}$, potom k nej prislúchajúci vlastný vektor $\boldsymbol{x}$ je netriviálnym riešením homogénneho systému $(\boldsymbol{A}-\delta_0\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Theta}$. Číslo $n - h(\boldsymbol{A}-\delta_0\boldsymbol{E}_n)$, t. j. defekt matice $\boldsymbol{A}-\delta_0\boldsymbol{E}_n$, sa nazýva **geometrická násobnosť vlastnej hodnoty δ_0** matice $\boldsymbol{A}$ a udáva maximálny počet lineárne nezávislých riešení systému $(\boldsymbol{A} - \delta_0\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Theta}$, t. j. dimenziu lineárneho priestoru všetkých vlastných vektorov prislúchajúcich k vlastnej hodnote δ_0. Násobnosť vlastnej hodnoty δ_0 ako koreňa charakteristickej rovnice budeme nazývať **algebraickou násobnosťou vlastnej hodnoty δ_0** matice $\boldsymbol{A}$. Geometrická násobnosť vlastnej hodnoty δ_0 je vždy menšia alebo rovná jej algebraickej násobnosti.

Vlastné vektory zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám matice $\boldsymbol{A}$ sú lineárne nezávislé.

Poznámka 1.3.4. *Charakteristická rovnica $(-1)^n\delta^n + b_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + b_1\delta + b_0 = 0$ má síce všetky koeficienty reálne čísla, ale jej korene môžu byť aj komplexné čísla.*
Ak má rovnica s reálnymi koeficientami komplexný koreň $\alpha + \mathrm{i}\,\beta$, potom má aj komplexne združený koreň $\alpha - \mathrm{i}\,\beta$. To znamená, že ak má charakteristická rovnica matice $\boldsymbol{A}$ komplexné korene, potom ich je párny počet. Ku komplexným vlastným hodnotám prináležia komplexné vlastné vektory.
Ak $\delta = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ je komplexná vlastná hodnota matice $\boldsymbol{A}$ a k nej prislúchajúci vlastný vektor je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{v}$ ($x_i = u_i + \mathrm{i}\,v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$), potom ku komplexne združenej vlastnej hodnote $\overline{\delta} = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$ prislúcha komplexne združený vlastný vektor $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{u} - \mathrm{i}\,\boldsymbol{v}$.

Príklad 1.3.7. Určte vlastné hodnoty a k nim prislúchajúce vlastné vektory matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.
Pre charakteristickú rovnicu $\det(\boldsymbol{A}-\delta\boldsymbol{E}_3) = 0$ matice $\boldsymbol{A}$ platí

$$\begin{vmatrix} 2-\delta & 1 & 2 \\ 2 & 1-\delta & 2 \\ 1 & 1 & 3-\delta \end{vmatrix} \begin{matrix} -1\times\mathrm{r}02 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -\delta & \delta & 0 \\ 2 & 1-\delta & 2 \\ 1 & 1 & 3-\delta \end{vmatrix} \begin{matrix} +\delta\times \\ \\ \\ \end{matrix} = \delta \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1-\delta & 2 \\ 1 & 1 & 3-\delta \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +2\times\mathrm{r}01 \\ +1\times\mathrm{r}01 \end{matrix} =$$

[22] Permutácia, ktorá udáva stupeň polynómu je $(a_{11}-\delta)(a_{22}-\delta)\cdots(a_{nn}-\delta)$ a koeficient $b_n = (-1)^n$.

$$= \delta \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\delta & 2 \\ 0 & 2 & 3-\delta \end{vmatrix} = \delta(-1)(-1)^2 \begin{vmatrix} 3-\delta & 2 \\ 2 & 3-\delta \end{vmatrix} = -\delta\big((3-\delta)^2-2^2\big) =$$

$$= -\delta(3-\delta-2)(3-\delta+2) = -\delta(1-\delta)(5-\delta) = 0 \ \Leftrightarrow\ \delta_1 = 0,\ \delta_2 = 1,\ \delta_3 = 5.$$

Pre každú vlastnú hodnotu určíme vlastné vektory tak, že vyriešime homogénny systém

$$\begin{array}{rcrcrl} (2-\delta)x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & + & (1-\delta)x_2 & + & 2x_3 & = 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & (3-\delta)x_3 & = 0 \end{array} \qquad \text{t. j.} \ \begin{pmatrix} 2-\delta & 1 & 2 \\ 2 & 1-\delta & 2 \\ 1 & 1 & 3-\delta \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\delta_1 = 0} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -1\times \text{r02} \\ -2\times \text{r03} \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1\times \\ +1\times \text{r02} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{r03} \\ \\ \to \text{r01} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ak položíme $x_3 = t$, potom $x_1 = x_3 = t$, $x_2 = -4x_3 = -4t$, t. j. vlastné vektory prislúchajúce k $\delta_1 = 0$ majú tvar $\boldsymbol{x} = (t; -4t; t)^T = t\,(1; -4; 1)^T$, kde $t \in R$, $t \neq 0$.

$$\boxed{\delta_2 = 1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2\times \text{r01} \\ -1\times \text{r01} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +\frac{1}{2}\times \text{r02} \\ -\frac{1}{2}\times \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ak položíme $x_3 = t$, potom $x_1 = -x_3 = -t$, $x_2 = -x_3 = -t$, t. j. vlastné vektory prislúchajúce k $\delta_2 = 1$ majú tvar $\boldsymbol{x} = (-t; -t; t)^T = t\,(-1; -1; 1)^T$, kde $t \in R$, $t \neq 0$.

$$\boxed{\delta_3 = 5} \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +3\times \text{r03} \\ -2\times \text{r03} \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +\frac{1}{4}\times \\ -\frac{1}{6}\times \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -1\times \text{r02} \\ \\ -1\times \text{r02} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ak položíme $x_3 = t$, potom $x_1 = x_3 = t$, $x_2 = x_3 = t$, t. j. vlastné vektory prislúchajúce k $\delta_3 = 5$ majú tvar $\boldsymbol{x} = (t; t; t)^T = t\,(1; 1; 1)^T$, kde $t \in R$, $t \neq 0$. ∎

Príklad 1.3.8. Určte vlastné hodnoty a k nim prislúchajúce vlastné vektory matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.
Charakteristická rovnica $\det(\boldsymbol{A} - \delta\boldsymbol{E}_3) = (1-\delta)^2(-1-\delta) = 0$, t. j. $\delta_{1,2} = 0$, $\delta_3 = -1$.

$$\boxed{\delta_{1,2} = 1} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +\frac{1}{2}\times \text{r03} \\ \\ -\frac{1}{2}\times \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \to \text{r03} \\ \to \text{r02} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dostali sme dve rovnice $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Vlastné vektory prislúchajúce k dvojnásobnej vlastnej hodnote $\delta_{1,2} = 0$ majú tvar $\boldsymbol{x} = (t; 0; 0)^T = t\,(1; 0; 0)^T$, kde $t \in R$, $t \neq 0$.

$$\boxed{\delta_3 = -1} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\times \text{r02} \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in R,\ t \neq 0.$$

Ak položíme $x_3 = t$, potom $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}t$, t. j. $\boldsymbol{x} = \big(-\frac{1}{2}t; -\frac{1}{2}t; t\big)^T$, $t \in R$, $t \neq 0$. Lepšie je zvoliť $x_3 = 2t$, t. j. $\boldsymbol{x} = (-t; -t; 2t)^T$, $t \in R$, $t \neq 0$, aby sme sa vyhli zlomkom. ∎

Príklad 1.3.9. Určte vlastné hodnoty a k nim prislúchajúce vlastné vektory matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-1&3&1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

Riešenie.
Charakteristická rovnica má tvar

$$\begin{vmatrix}3-\delta&2&-1\\-1&3-\delta&1\\0&1&2-\delta\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}(3-\delta)\begin{vmatrix}3-\delta&2&-1\\-1&3-\delta&1\\0&1&2-\delta\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix}3-\delta&2&-1\\-1&3-\delta&1\\0&1&2-\delta\end{vmatrix}=$$

$$=(3-\delta)[(3-\delta)(2-\delta)-1]+[2(2-\delta)+1]=(3-\delta)^2(2-\delta)-(3-\delta)+(5-2\delta)=$$

$$=(\delta-3)^2(2-\delta)+(2-\delta)=[(\delta-3)^2+1](2-\delta)=0\ \Leftrightarrow\ \delta_1=2,\ \delta_{2,3}=\pm\,\mathrm{i}+3.$$

$$\boxed{\delta_1=2}\quad\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}-2\times\mathrm{r03}\\+1\times\mathrm{r01}\,-3\times\mathrm{r03}\\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \to\mathrm{r03}\\ \to\mathrm{r02}\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Vlastné vektory majú tvar $\boldsymbol{x}=(t;0;t)^T=t\,(1;0;1)^T$, kde[23] $t\in C$, $t\neq 0$.

$$\boxed{\delta_2=3-\mathrm{i}}\quad\begin{pmatrix}\mathrm{i}&2&-1\\-1&\mathrm{i}&1\\0&1&\mathrm{i}-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}-\mathrm{i}\times\\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&-2\mathrm{i}&\mathrm{i}\\-1&\mathrm{i}&1\\0&1&\mathrm{i}-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\+1\times\mathrm{r01}\\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&-2\mathrm{i}&\mathrm{i}\\0&-\mathrm{i}&\mathrm{i}+1\\0&1&\mathrm{i}-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}-2\times\mathrm{r02}\\+\mathrm{i}\times\\ \end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-\mathrm{i}-2\\0&1&-1+\mathrm{i}\\0&1&\mathrm{i}-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\-1\times\mathrm{r02}\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\mathrm{i}-2\\0&1&\mathrm{i}-1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\text{t. j.}\quad\begin{aligned}x_1\qquad-(\mathrm{i}+2)x_3&=0\\x_2+(\mathrm{i}-1)x_3&=0.\end{aligned}$$

Ak položíme $x_3=t\in C$, potom $x_1=(\mathrm{i}+2)x_3=(2+\mathrm{i})t$, $x_2=-(\mathrm{i}-1)x_3=(1-\mathrm{i})t$. Vlastné vektory prislúchajúce k $\delta_2=3-\mathrm{i}$ majú tvar $\boldsymbol{x}=((2+\mathrm{i})t;(1-\mathrm{i})t;t)^T=t\,(2+\mathrm{i};1-\mathrm{i};1)^T$, kde $t\in C$, $t\neq 0$. Vlastné vektory prislúchajúce k $\delta_3=3+\mathrm{i}$ majú potom komplexne združený tvar $\boldsymbol{x}=t\,(2-\mathrm{i};1+\mathrm{i};1)^T$, kde $t\in R$, $t\neq 0$. ■

1.3.3 Matice a lineárne zobrazenia

V predchádzajúcich častiach sme matice študovali v súvislosti so systémami lineárnych rovníc. Matica typu $m\times n$ reprezentuje nejaké lineárne zobrazenie $R^n\to R^m$ a naopak každé lineárne zobrazenie sa dá reprezentovať nejakou maticou.

Uvažujme maticu $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $m,n\in N$ s reálnymi prvkami. Potom zobrazenie $f\colon R^n\to R^m$ definované pre $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;\ldots;x_n)^T\in R^n$ predpisom $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, t. j.

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}f_1(\boldsymbol{x})\\f_2(\boldsymbol{x})\\\cdots\\f_m(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}.$$

je lineárne zobrazenie. Stĺpcový vektor $\boldsymbol{x}$ má n zložiek a obraz $f(\boldsymbol{x})$ je tiež stĺpcový vektor a má m zložiek $f_i(\boldsymbol{x})=f_i\,(x_1;x_2;\ldots;x_n)=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$, $i=1,2,\ldots,m$.

[23] Keďže riešenia charakteristickej rovnice sú komplexné čísla, budeme predpokladať, že voliteľný parameter t je tiež komplexné číslo.

Ak $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ je báza lineárneho priestoru R^n, potom každý prvok $\boldsymbol{u} \in R^n$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n$, kde $[\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n]$ sú súradnice vektora $\boldsymbol{u}$ v báze $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$.

Zobrazenie $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ je lineárne a i-ty stĺpec matice $\boldsymbol{A}$ tvoria súradnice prvku $f(\boldsymbol{u}_i)$ v príslušnej (usporiadanej) báze $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ lineárneho priestoru R^m, t. j.

$$f(\boldsymbol{u}_i) = a_{1i}\boldsymbol{v}_1 + a_{2i}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{v}_m, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Maticu $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ nazývame **maticou lineárneho zobrazenia f v usporiadaných bázach $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$** lineárneho priestoru R^n a **$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$** lineárneho priestoru R^m.

Zobrazenie f je lineárne, takže platí

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}) &= f(\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{u}_n) = \alpha_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + \alpha_n f(\boldsymbol{u}_n) = \\ &= \alpha_1(a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{v}_m) + \alpha_2(a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{v}_m) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \alpha_n(a_{1n}\boldsymbol{v}_1 + a_{2n}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{v}_m) = \\ &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n)\boldsymbol{v}_1 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n)\boldsymbol{v}_2 + \cdots \\ &\qquad \cdots + (a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n)\boldsymbol{v}_m = \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \beta_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \beta_m\boldsymbol{v}_m. \end{aligned}$$

Teda $[\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n]$ sú súradnice prvku $\boldsymbol{u}$ v báze $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ lineárneho priestoru R^n, $[\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_m]$ sú súradnice $f(\boldsymbol{u})$ v báze $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ lineárneho priestoru R^m a platí

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \quad \text{t. j.} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ kde } \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Príklad 1.3.10. Určte maticu lineárneho zobrazenia $f\colon R^3 \to R^2$, ak pre zobrazenie f platí $f((1;2;3)^T) = (-1;-3)^T$, $f((2;1;3)^T) = (4;-3)^T$, $f((2;1;1)^T) = (2;1)^T$. Bázy v priestoroch R^3, R^2 sú kanonické, t. j. $(1;0;0)^T$, $(0;1;0)^T$, $(0;0;1)^T$, resp. $(1;0)^T$, $(0;1)^T$.

Riešenie.

Matica $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{2 \times 3}$ bude typu 2×3. Vzhľadom na kanonické bázy, budú mať dané prvky súradnice totožné s ich zložkami. Potom musí platiť $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$, t. j.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13} \\ a_{21} + 2a_{22} + 3a_{23} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{12} + 3a_{13} \\ 2a_{21} + a_{22} + 3a_{23} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ 2a_{21} + a_{22} + a_{23} \end{pmatrix}.$$

Dostaneme dva systémy troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_{11} &+& 2a_{12} &+& 3a_{13} &=& -1 \\ 2a_{11} &+& a_{12} &+& 3a_{13} &=& 4 \\ 2a_{11} &+& a_{12} &+& a_{13} &=& 2, \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} a_{21} &+& 2a_{22} &+& 3a_{23} &=& -3 \\ 2a_{21} &+& a_{22} &+& 3a_{23} &=& -3 \\ 2a_{21} &+& a_{22} &+& a_{23} &=& 1. \end{array}$$

Tieto systémy majú zhodné matice, rozšírené matice systémov majú rôznu iba pravú stranu. Takže môžeme všetky elementárne úpravy vykonávať súčasne a spojiť ich zápisy.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-1\\2&1&3&4\\2&1&1&2\end{array}\right),\ \text{resp.}\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&-3\\2&1&3&-3\\2&1&1&1\end{array}\right)\ \Rightarrow\ \left(\begin{array}{ccc|c|c}1&2&3&-1&-3\\2&1&3&4&-3\\2&1&1&2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-1\times\text{r03}\\ \\\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c|c}1&2&3&-1&-3\\0&0&2&2&-4\\2&1&1&2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}-\frac{3}{2}\times\text{r02}\\+\frac{1}{2}\times\\-\frac{1}{2}\times\text{r02}\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c|c}1&2&0&-4&3\\0&0&1&1&-2\\2&1&0&1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\-2\times\text{r01}\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c|c}1&2&0&-4&3\\0&0&1&1&-2\\0&-3&0&9&-3\end{array}\right)\begin{array}{l}+\frac{2}{3}\times\text{r03}\\ \\-\frac{1}{3}\times\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c|c}1&0&0&2&1\\0&0&1&1&-2\\0&1&0&-3&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\to\text{r03}\\\to\text{r02}\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c|c}1&0&0&2&1\\0&1&0&-3&1\\0&0&1&1&-2\end{array}\right).$$

Dostali sme $a_{11}=2$, $a_{12}=-3$, $a_{13}=1$, resp. $a_{21}=1$, $a_{22}=1$, $a_{23}=-2$, t. j.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&1&-2\end{pmatrix}.\ \blacksquare$$

Nech $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ je usporiadaná báza lineárneho priestoru R^n, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ je usporiadaná báza lineárneho priestoru R^m a $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_k$ je usporiadaná báza lineárneho priestoru R^k, kde $n,m,k\in N$. Nech $f\colon R^n\to R^m$ je lineárne zobrazenie reprezentované maticou $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ v usporiadaných bázach $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ a $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$, nech $g\colon R^m\to R^k$ je lineárne zobrazenie reprezentované maticou $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{k\times m}$ v usporiadaných bázach $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ a $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_k$. Označme $\boldsymbol{u}\in R^n$, $\boldsymbol{v}=f(\boldsymbol{u})\in R^m$, $\boldsymbol{w}=g(\boldsymbol{v})=g(f(\boldsymbol{u}))=(g\circ f)(\boldsymbol{u})\in R^k$.

Ak $[\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n]$ sú súradnice prvku $\boldsymbol{u}$ v báze $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$, $[\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_m]$ sú súradnice prvku $\boldsymbol{v}$ v báze $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$, $[\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_k]$ sú súradnice prvku $\boldsymbol{w}$ v báze $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_k$ a vektory $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_m)^T$, $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1;\gamma_2;\ldots;\gamma_r)^T$ sú stĺpcové vektory príslušných súradníc, potom platí

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}.$$

To znamená, že **matica zloženého zobrazenia** $g(f)\colon R^n\to R^k$ v usporiadaných bázach $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ a $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_k$ je $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{k\times n}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

Nech $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ a $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ sú dve usporiadané bázy priestoru R^n, $n\in N$. Predpokladajme, že lineárne zobrazenie $f\colon R^n\to R^n$ reprezentované v usporiadaných bázach $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ a $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ maticou $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ je bijektívne. V tomto prípade musí byť matica $\boldsymbol{A}$ regulárna, teda k nej existuje inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Ak $[\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n]$ sú súradnice prvku $\boldsymbol{u}\in R^n$ v báze $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$, $[\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_m]$ sú súradnice prvku $\boldsymbol{v}=f(\boldsymbol{u})\in R^n$ v báze $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ a vektory $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_m)^T$ sú stĺpcové vektory príslušných súradníc, potom platí

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\quad \text{t. j. } \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}.$$

Matica inverzného zobrazenia $f^{-1}\colon R^n\to R^n$ k zobrazeniu $f\colon R^n\to R^n$ v usporiadaných bázach $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ a $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_k$ je $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Príklad 1.3.11. Určte matice lineárnych zobrazenia $f\colon R^2 \to R^2$ a $f^{-1}\colon R^2 \to R^2$, ak pre zobrazenie f platí $f((1;2)^T)=(3;1)^T$, $f((2;1)^T)=(1;2)^T$ pri kanonických bázach.

Riešenie.
Matica $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times 2}$ zobrazenia f bude typu 2×2, súradnice prvkov budú totožné s ich zložkami. Pre súradnice potom platí $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$, t. j.

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+2a_{12}\\a_{21}+2a_{22}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_{11}+a_{12}\\2a_{21}+a_{22}\end{pmatrix}.$$

Dostaneme dva systémy dvoch lineárnych rovníc s neznámymi a_{11}, a_{12}, resp. a_{21}, a_{22}

$$\begin{aligned}a_{11}+2a_{12}&=3\\2a_{11}+a_{12}&=1,\end{aligned}\qquad \begin{aligned}a_{21}+2a_{22}&=1\\2a_{21}+a_{22}&=2\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{cc|c|c}1&2&3&1\\2&1&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l}-2\times\text{r02}\\-2\times\text{r01}\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c|c}-3&0&1&-3\\0&-3&-5&0\end{array}\right)\begin{array}{l}-1\times\text{r02}\\-1\times\text{r01}\end{array}\sim\left(\begin{array}{cc|c|c}3&0&-1&3\\0&3&5&0\end{array}\right)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}=\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&5\\3&0\end{pmatrix}.$$

Matica $\boldsymbol{A}^{-1}=(x_{ij})_{2\times 2}$ zobrazenia f^{-1} bude tiež typu 2×2, pričom $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$, t. j.

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_{11}+x_{12}\\3x_{21}+x_{22}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}+2x_{12}\\x_{21}+2x_{22}\end{pmatrix}.$$

Dostaneme dva systémy lineárnych rovníc s dvomi neznámymi x_{11}, x_{12}, resp. x_{21}, x_{22}

$$\begin{aligned}3x_{11}+x_{12}&=1\\x_{11}+2x_{12}&=2,\end{aligned}\qquad \begin{aligned}3x_{21}+x_{22}&=2\\x_{21}+2x_{22}&=1\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{cc|c|c}3&1&1&2\\1&2&2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}-3\times\text{r02}\\-2\times\text{r01}\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c|c}0&-5&-5&-1\\-5&0&0&-3\end{array}\right)\begin{array}{l}-1\times\text{r02}\\-1\times\text{r01}\end{array}\sim\left(\begin{array}{cc|c|c}0&5&5&1\\5&0&0&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c|c}5&0&0&3\\0&5&5&1\end{array}\right)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}^{-1}=\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0&5\\3&1\end{pmatrix}.$$

Ak využijeme vlastnosť, že inverzným zobrazeniam zodpovedajú inverzné matice, platí

$$\boldsymbol{A}=\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&5\\3&0\end{pmatrix},\quad \det\boldsymbol{A}=\tfrac{1}{3}(0-15)=-5,\quad \boldsymbol{A}^{-1}=-\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0&-5\\-3&-1\end{pmatrix}=\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0&5\\3&1\end{pmatrix}.\ \blacksquare$$

Poznámka 1.3.5. *Súradnice prvku $\boldsymbol{u}=(1;2)^T$ v kanonickej báze $\boldsymbol{u_1}=(1;0)^T$, $\boldsymbol{u_2}=(0;1)^T$ sa rovnajú jeho zložkám, t. j. $[1;2]$. Analogicky sú súradnice prvku $\boldsymbol{v}=f(\boldsymbol{u})=(3;1)^T$ v tejto báze $[3;1]$. Ak označíme $\boldsymbol{\alpha}$, resp. $\boldsymbol{\beta}$ stĺpcové vektory týchto súradníc, potom $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}$ a platí $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$, t. j. $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v}$:*

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&5\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0&5\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

Uvažujme lineárny priestor R^n, $n\in N$. Nech $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$, resp. $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$ sú dve rôzne bázy tohto priestoru. Zaujíma nás ako sa zmenia súradnice nejakého prvku $\boldsymbol{u}$ pri prechode od bázy $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ k báze $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$, t. j. vzťah medzi jeho súradnicami $[\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n]$ v báze $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ a súradnicami $[\rho_1;\rho_2;\ldots;\rho_m]$ v báze $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$. Hľadáme lineárne zobrazenie $f\colon R^n\to R^n$ pomocou, ktorého vypočítame zmenu súradníc.

Každý bázický prvok $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu prvkov $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ druhej bázy. Potom pre každé $i=1,2,\ldots,n$ existujú čísla $p_{1i},p_{2i},\ldots,p_{ni}$ (súradnice prvku $\boldsymbol{r}_i$ v báze $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$) také, že

$$\boldsymbol{r}_i=p_{1i}\boldsymbol{u}_1+p_{2i}\boldsymbol{u}_2+\cdots+p_{ni}\boldsymbol{u}_n,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Ak má prvok $\boldsymbol{u}\in R^n$ v báze $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ súradnice $[\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n]$ a v druhej báze $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ súradnice $[\rho_1; \rho_2; \ldots; \rho_n]$, potom platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{u}_n = \rho_1\boldsymbol{r}_1 + \rho_2\boldsymbol{r}_2 + \cdots + \rho_n\boldsymbol{r}_n = \\ &= \rho_1(p_{11}\boldsymbol{u}_1 + p_{21}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{u}_n) + \rho_2(p_{12}\boldsymbol{u}_1 + p_{22}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{u}_n) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \rho_n(p_{1n}\boldsymbol{u}_1 + p_{2n}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{u}_n) = \\ &= (p_{11}\rho_1 + p_{12}\rho_2 + \cdots + p_{1n}\rho_n)\boldsymbol{u}_1 + (p_{21}\rho_1 + p_{22}\rho_2 + \cdots + p_{2n}\rho_n)\boldsymbol{u}_2 + \cdots \\ &\qquad \cdots + (p_{n1}\rho_1 + p_{n2}\rho_2 + \cdots + p_{nn}\rho_n)\boldsymbol{u}_n.\end{aligned}$$

Pre súradnice v jednotlivých bázach z toho vyplýva

$$\begin{array}{l}\alpha_1 = p_{11}\rho_1 + p_{12}\rho_2 + \cdots + p_{1n}\rho_n \\ \alpha_2 = p_{21}\rho_1 + p_{22}\rho_2 + \cdots + p_{2n}\rho_n \\ \qquad \cdots \\ \alpha_n = p_{n1}\rho_1 + p_{n2}\rho_2 + \cdots + p_{nn}\rho_n,\end{array} \quad \text{t. j.} \quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \cdots\\ \rho_n\end{pmatrix}.$$

Matica

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}$$

sa nazýva **matica prechodu od bázy $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ k báze $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$**. Matica $\boldsymbol{P}$ je maticou lineárneho zobrazenia $\boldsymbol{Px}$ a je regulárna. V opačnom prípade by nezabezpečovala prechod od jednej bázy k druhej báze. Existuje teda inverzná matica $\boldsymbol{P}^{-1}$.

Ak označíme $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)^T$, resp. $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1; \rho_2; \ldots; \rho_n)^T$ stĺpcové vektory súradníc prvku $\boldsymbol{u}$ v báze $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, resp. v báze $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$, potom pre **transformáciu súradníc pri prechode od jednej bázy k druhej** platia vzťahy

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P\rho}, \quad \text{resp.} \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{P\rho}) = \boldsymbol{\rho}.$$

Príklad 1.3.12. Nech $\boldsymbol{u}_1 = (1; 0)^T$, $\boldsymbol{u}_2 = (0; 1)^T$, resp. $\boldsymbol{r}_1 = (2; 3)^T$, $\boldsymbol{r}_2 = (3; 1)^T$ sú dve bázy lineárneho priestoru R^2. Určte matice prechodu od jednej bázy k druhej a určte súradnice prvku $\boldsymbol{u} = (-3; 1)^T$ v daných bázach.

Riešenie.
Pre vyjadrenie $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ pomocou $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ platí $\boldsymbol{r}_1 = p_{11}\boldsymbol{u}_1 + p_{21}\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{r}_2 = p_{12}\boldsymbol{u}_1 + p_{22}\boldsymbol{u}_2$, t. j.

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = p_{11}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + p_{12}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{11}\\p_{12}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = p_{21}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + p_{22}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{21}\\p_{22}\end{pmatrix},$$

Potom pre matice prechodu $\boldsymbol{P}$ od $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ ku $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ a $\boldsymbol{P}^{-1}$ od $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ ku $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ platí[24]

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{P}}\begin{pmatrix}P_{11} & P_{21}\\ P_{12} & P_{22}\end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

[24] $\det \boldsymbol{P} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 7$, $P_{11} = +3$, $P_{21} = -2$, $P_{12} = -(-2) = 2$, $P_{22} = +1$.

Prvok $\boldsymbol{u} = (-3;1)^T$ má v báze $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ súradnice $[-3;1]$ a v báze $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ súradnice $[\rho_1;\rho_2]$, pre ktoré platí $\boldsymbol{u} = \rho_1\boldsymbol{r}_1 + \rho_2\boldsymbol{r}_2$:

$$\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \rho_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \rho_2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{cc|c}2&3&-3\\3&1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}-1\times r01+3\times r02\\+3\times r01-3\times r02\end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c}7&0&6\\0&7&-11\end{array}\right).$$

Súradnice $\boldsymbol{u}$ v báze $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ sú $\left[\frac{6}{7};-\frac{11}{7}\right]$ a transformačné vzorce pri zmene báz pre súradnice prvku $\boldsymbol{u}$ sú $(\alpha_1;\alpha_2)^T = \boldsymbol{P}\,(\rho_1;\rho_2)^T$, resp. $(\rho_1;\rho_2)^T = \boldsymbol{P}^{-1}\,(\alpha_1;\alpha_2)^T$

$$\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-11\end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\-11\end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-1&3\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}. \;\blacksquare$$

Uvažujme lineárne zobrazenie $f\colon R^n \to R^m$, $m,n\in N$ definované pre všetky $\boldsymbol{u}\in R^n$ vzťahom $\boldsymbol{v}=f(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$, kde $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ je matica tohto lineárneho zobrazenia v bázach $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ lineárneho priestoru R^n a $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ lineárneho priestoru R^m.

Nech $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$ je báza R^n a $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\ldots,\boldsymbol{s}_m$ je báza R^m. Úlohou je určiť maticu $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ tohto lineárneho zobrazenia v bázach $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$ a $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\ldots,\boldsymbol{s}_m$. To znamená, že chceme **transformovať maticu lineárneho zobrazenia** f z jednej dvojice báz $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ a $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ na inú dvojicu báz $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$ a $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\ldots,\boldsymbol{s}_m$.

Ak $[\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n]$ sú súradnice prvku $\boldsymbol{u}$ v báze $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ a $[\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_m]$ sú súradnice prvku $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u})$ v báze $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$, potom platí vzťah $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$, pričom $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_m)^T$ sú stĺpcové vektory príslušných súradníc.

Analogicky platí $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\rho}$ pre $[\rho_1;\rho_2;\ldots;\rho_n]$ súradnice prvku $\boldsymbol{u}$ v báze $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$, $[\varphi_1;\varphi_2;\ldots;\varphi_m]$ súradnice prvku $\boldsymbol{v}=f(\boldsymbol{u})$ v báze $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\ldots,\boldsymbol{s}_m$, kde $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1;\rho_2;\ldots;\rho_n)^T$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1;\varphi_2;\ldots;\varphi_m)^T$ sú stĺpcové vektory príslušných súradníc.

Ďalej existuje matica $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ prechodu od bázy $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ ku $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$ taká, že $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\rho}$, resp. $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. Taktiež existuje matica $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{m\times m}$ prechodu od bázy $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ ku $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\ldots,\boldsymbol{s}_m$ taká, že $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\varphi}$, resp. $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\beta}$.

Ak to zhrnieme, potom platí

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\rho}, \quad \text{t. j. } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}.$$

Poznámka 1.3.6. *Predpokladajme, že $f\colon R^n \to R^n$ a že sa stotožnia bázy $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ a $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$. Tiež predpokladajme, že sa stotožnia bázy $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$ a $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\ldots,\boldsymbol{s}_n$. Potom budú prvky $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}=f(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ budú vyjadrené v rovnakej báze $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ a analogicky prvky $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ v rovnakej báze $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$. Potom $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}$ (matica prechodu od bázy $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ ku báze $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n$) a $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.*

Jadrom[25] lineárneho zobrazenia $f\colon R^n \to R^m$, $m,n\in N$ nazývame množinu

$$\{\boldsymbol{u}\in R^n\colon f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Theta}_m\}\,.$$

Jadro lineárneho zobrazenia f tvoria všetky prvky $\boldsymbol{x} = (x_1;x_2;\ldots;x_n)^T \in R^n$ také, že $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Theta}_m$. Sú to riešenia homogénneho systému $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Theta}_m$ a tvoria lineárny podpriestor priestoru R^n.

Dimenziu lineárneho priestoru $f(R^n) = \{\boldsymbol{v}\in R^m\colon f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\in R^n\}$ nazývame **hodnosťou zobrazenia** f a dimenziu jeho jadra nazývame **defektom zobrazenia** f. Hodnosť, resp. defekt zobrazenia f sa rovnajú hodnosti, resp. defektu matice $\boldsymbol{A}$, ktorá toto zobrazenie reprezentuje (viď. 1.2.3 na str. 23).

[25] Jadro po anglicky kernel.

Kapitola 2

Základy matematickej analýzy

2.1 Reálne funkcie a ich vlastnosti

2.1.1 Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame **explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n alebo **rekurentne**, t. j. zadaním prvého člena a zadaním člena a_n pomocou predchádzajúcich členov.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (**postupnosti sa rovnajú**), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$. Symbolicky to zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:
Ohraničená zdola, resp. **zhora**, ak existuje $\alpha \in R$, resp. $\beta \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $\alpha \leq a_n$, resp. $a_n \leq \beta$. **Ohraničená**, ak je ohraničená zdola a zhora. **Neohraničená zdola**, resp. **zhora**, ak nie je ohraničená zdola, resp. zhora. **Neohraničená**, ak nie je ohraničená (neohraničená zdola alebo zhora). **Rastúca**, resp. **klesajúca**, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$, resp. $a_n > a_{n+1}$. **Neklesajúca**, resp. **nerastúca**, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$, resp. $a_n \geq a_{n+1}$. **Stacionárna** (**konštantná**), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_1 = a$. **Monotónna**, ak je neklesajúca, nerastúca alebo stacionárna. **Rýdzo monotónna**, ak je rastúca alebo klesajúca.

Ak $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Potom sa postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazýva **podpostupnosť** (**vybraná postupnosť z**) **postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$**.

Súčtom, **rozdielom**, **súčinom**, resp. **podielom postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$** nazývame postupnosti $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$. V prípade podielu predpokladáme, že pre všetky $n \in N$ platí $b_n \neq 0$.

Bod $a \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ sa nazýva **hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$**, ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa členov $a_n \in O(a)$. Navyše $a \in R$ sa nazýva **vlastná hromadná hodnota** a body $\pm\infty$ **nevlastné hromadné hodnoty**.

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu. Označme množinu všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ symbolom E. Suprémum, resp. infimum množiny E nazývame **limes superior** (**horná limita**), resp. **limes inferior** (**dolná limita**) **postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$** a značíme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, resp. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Bod $a \in R^*$ nazývame **limita postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$**, ak je jedinou hromadnou hodnotou tejto postupnosti, t. j. ak $a = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Označujeme ju $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Limitu $a \in R$ nazývame **vlastná limita** a hovoríme, že **postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k** (**číslu**) **a**. Stručne to zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$. Ďalej hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje** (**je konvergentná**) a označujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$.

Limitu $a \pm \infty$ nazývame **nevlastná** a hovoríme, že **postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do ∞**, resp. **$-\infty$**. Stručne to zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \infty$, resp. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto -\infty$.

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, potom hovoríme, že **postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje**.

Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $\pm\infty$ alebo osciluje, potom hovoríme, že **diverguje** (**je divergentná**) a zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow$.

Z definície vyplýva, že ak existuje limita postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom existuje jediná.

Poznámka 2.1.1. *Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, potom je ohraničená. Ak, by bola neohraničená, potom by $\pm\infty$ patrilo medzi jej hromadné body. To je spor s tým, že konverguje. Opačné tvrdenie neplatí. Ohraničená postupnosť nemusí konvergovať. Napríklad postupnosť $\{-1, 1, -1, 1, \dots\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, ale nekonverguje.*

Veta 2.1.1. Ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónna, potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in R^*$.

Ak $c\in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \in R^*$, potom pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel, platí:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \Big|\lim_{n\to\infty} a_n\Big|, \quad \lim_{n\to\infty} (c\cdot a_n) = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n * b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n * \lim_{n\to\infty} b_n,$$

kde $*$ je sčítanie, odčítanie, násobenie alebo delenie.[1]

Dôležité limity: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^n = \mathrm{e}^b$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ pre $a>0$, $b\in R$.

2.1.2 Číselné rady

Číselné rady úzko súvisia s postupnosťami a zovšeobecňujú pojem sčítavania na nekonečný počet sčítancov. Rad je jednoznačne určený postupnosťou. To znamená, že rad môžeme zadať **všeobecným vyjadrením** (**explicitne**) každého člena a_n, $n\in N$ alebo **rekurentným vyjadrením** prvého člena a členov a_n, $n\in N$.

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, potom **nekonečným číselným radom** (**nekonečným radom čísel**), stručne (**číselným**) **radom**, nazývame výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \cdots.$$

Poznámka 2.1.2. *Pre číselné rady nemusia platiť všetky pravidlá, ktoré platia pre konečné počty sčítancov. Neplatí tu komutatívny zákon a ani asociatívny zákon:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \begin{cases} (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+\dots = 0, \\ 1+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1+0+0+\dots = 1. \end{cases}$$

Nech $k\in N$, **k-tým čiastočným súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$** nazývame konečný súčet

$$s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **postupnosťou čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$** a **k-tým zvyškom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$** nazývame nekonečný súčet

$$r_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots.$$

[1] Ak niektorý z daných výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že limita neexistuje. Vtedy ju musíme vypočítať iným spôsobom, napr. vhodnou úpravou.

Vzťah medzi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný. Pre $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2, \quad \ldots, \quad s_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n, \quad \ldots .$$

Ak označíme $s_0 = 0$, potom pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:

$$a_1 = s_1 = s_1 - s_0, \quad a_2 = s_2 - s_1, \quad \ldots, \quad a_n = s_n - s_{n-1}, \quad \ldots .$$

Ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, potom hovoríme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **má súčet** $s \in R^*$ a zapisujeme:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s, \quad \text{resp.} \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto s.$$

Ak $s \in R$, potom hovoríme, že **rad konverguje k číslu** s (**je konvergentný k** s) alebo stručne **rad konverguje** (**je konvergentný**), označujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$.

Ak $s = \infty$, resp. $s = -\infty$, potom hovoríme, že **rad diverguje do** ∞, resp. **do** $-\infty$. Ak rad súčet nemá, t. j. ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, potom hovoríme, že **rad osciluje**.

Ak rad nemá konečný súčet, t. j. ak diverguje do $\pm\infty$ alebo osciluje, potom hovoríme, že **rad diverguje** (**je divergentný**) a označujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longmapsto$.

Príklad 2.1.1. **Geometrický rad** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}$, kde $|q| < 1$.

Riešenie.
$s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = (q^{n-1} + \cdots + q + 1)\frac{q-1}{q-1} = \frac{q^n - 1}{q-1} \to \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$ pre $q \in (-1\,;\,1)$. ■

Veta 2.1.2 (Nutná podmienka). Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôsledok 2.1.2.a. Ak neplatí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi, t. j. nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$, Jeho postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a podľa vety 2.1.1 má limitu. To znamená, že každý **rad s nezápornými členmi má súčet**.

Ak je postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená zhora, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, v opačnom prípade $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\longmapsto$.

Veta 2.1.3 (Porovnávacie kritérium). Ak $0 \leq a_n \leq b_n$ pre všetky $n \in N$, potom

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \longmapsto \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty.$$

Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad a existujú $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, potom sa rovnajú.

Veta 2.1.4 (Podielové d'Alembertovo kritérium). Nech $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$:

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, kde $q \in (0\,;\,1) \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, b) $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$.

Dôsledok 2.1.4.a (Limitný tvar)**.** Nech $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$:

a) $p < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, b) $1 < p \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$,
c) $p = 1 \implies$ nevieme rozhodnúť o konvergencii alebo divergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Veta 2.1.5 (Odmocninové Cauchyho kritérium)**.** Nech $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$:

a) $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, kde $q \in (0\,;\,1) \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, b) $1 \leq \sqrt[n]{a_n} \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$.

Dôsledok 2.1.5.a (Limitný tvar)**.** Nech $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$:

a) $p < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto$, b) $1 < p \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto \infty$,
c) $p = 1 \implies$ nevieme rozhodnúť o konvergencii alebo divergencii radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Príklad 2.1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \longmapsto$ pre $a > 0$, pretože platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1, \quad \text{resp.} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0 < 1.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \longmapsto \infty$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 1.$ ■

2.1.3 Reálne funkcie

V tejto kapitole sa budeme zaoberať zobrazeniami (**funkciami**), ktorých definičný obor a obor hodnôt sú podmnožinami množiny reálnych čísel R.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **na množine $A \subset D(f)$ ohraničená zdola**, resp. **zhora**, **ohraničená**, **neohraničená zdola**, resp. **zhora**, **neohraničená**, ak je ohraničená zdola, resp. zhora, ohraničená, neohraničená zdola, resp. zhora, neohraničená množina $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Je zrejmé, že funkcia f je **ohraničená zdola**, resp. **zhora na množine $A \subset D(f)$** práve vtedy, ak existuje $\alpha \in R$, resp. $\beta \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $\alpha \leq f(x)$, resp. $f(x) \leq \beta$. Napríklad funkcia $y = x^3$ je ohraničená na intervale $\langle 0\,;\,1\rangle$, ale je neohraničená na R.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **ohraničená zdola**, resp. **zhora**, ak existuje $\alpha \in R$, resp. $\beta \in R$ také, že pre všetky $x \in D(f)$ platí $\alpha \leq f(x)$, resp. $f(x) \leq \beta$. Funkcia f sa nazýva **ohraničená**, ak existujú $\alpha, \beta \in R$ také, že pre všetky $x \in D(f)$ platí $\alpha \leq f(x) \leq \beta$,

Poznámka 2.1.3. *Uvedené vlastnosti boli definované na podmnožine $A \subset D(f)$, preto hovoríme o **lokálnych vlastnostiach**. **Globálna vlastnosť** je taká, ktorá platí na celom $D(f)$. Prívlastok „na množine $D(f)$“ potom vynechávame.*

Nech $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $A \subset D(f)$, potom $\inf\limits_{x\in A} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A\} = \inf f(A)$, resp. $\sup\limits_{x\in A} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A\} = \sup f(A)$ nazývame **infimum**, resp. **suprémum funkcie f na množine A**.

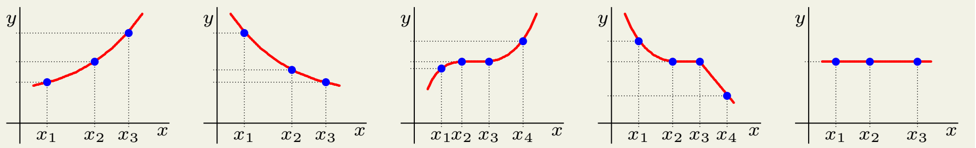
Analogicky $\inf f(x) = \inf\{f(x) : x \in D(f)\}$, resp. $\sup f(x) = \sup\{f(x) : x \in D(f)\}$ nazývame **infimum**, resp. **suprémum funkcie f**. Ak nie je funkcia f ohraničená zdola, resp. zhora, potom $\inf f(A) = -\infty$, resp. $\sup f(A) = \infty$.

Funkcia f nadobúda v bode $x_0 \in A$ minimum (**minimálnu, najmenšiu hodnotu**), resp. **maximum** (**maximálnu, najväčšiu hodnotu**) **na množine A**, ak platí

$f(x_0) = \min f(A)$, resp. $f(x_0) = \max f(A)$, t. j. ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x_0) \leq f(x)$, resp. $f(x) \leq f(x_0)$. Ak pre všetky $x \in A$, $x \neq x_0$ platí $f(x_0) < f(x)$, resp. $f(x) < f(x_0)$ (ostré nerovnosti), potom ich nazývame **ostré minimum**, resp. **maximum**. Súhrnne sa nazývajú **extrémy**, pre $A = D(f)$ **globálne** (**absolútne**) a inak **lokálne**. Lokálne extrémy postačí vyšetrovať v nejakom okolí $O(x_0) \subset D(f)$.

Poznámka 2.1.4. *Ak existuje minimum, resp. maximum funkcie f na množine A, potom* $\min\{f(x) : x \in A\} = \inf\{f(x) : x \in A\}$, *resp.* $\max\{f(x) : x \in A\} = \sup\{f(x) : x \in A\}$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **rastúca** [**neklesajúca**], resp. **klesajúca** [**nerastúca**] **na množine** $A \subset D(f)$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ $[f(x_1) \leq f(x_2)]$, resp. $f(x_1) > f(x_2)$ $[f(x_1) \geq f(x_2)]$. Ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ platí $f(x_1) = f(x_2)$, nazýva sa **konštantná na množine** A. Súhrnne sa funkcia f nazýva **monotónna**, resp. **rýdzo** (**ostro**) **monotónna**, ak je rastúca alebo klesajúca.



Obr. 2.1.1: Rastúca, klesajúca, neklesajúca, nerastúca a konštantná funkcia

Niekedy je výhodné definovať uvedené pojmy v konkrétnom bode množiny.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **rastúca** [**neklesajúca**], resp. **klesajúca** [**nerastúca**] **v bode** $x_0 \in D(f)$, ak ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^-(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$ $[f(x) \leq f(x_0)]$, resp. $f(x) > f(x_0)$ $[f(x) \geq f(x_0)]$ a pre všetky $x \in O^+(x_0)$ platí $f(x_0) < f(x)$ $[f(x_0) \leq f(x)]$, resp. $f(x_0) > f(x)$ $[f(x_0) \geq f(x)]$.

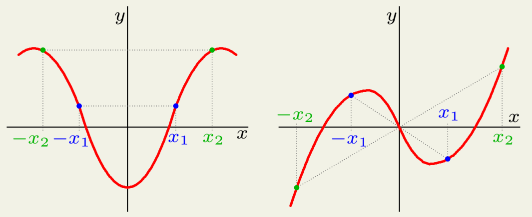
Ako dokazuje nasledujúci príklad, ak je funkcia f rastúca, resp. klesajúca v jednom bode $x_0 \in A$, ešte nemusí byť rastúca, resp. klesajúca v jeho okolí $O(x_0)$.

Príklad 2.1.3. Funkcia f definovaná vzťahmi $f(x) = x$, $x \in Q$ a $f(x) = x^2$, $x \in I$ je rastúca v bode $x_0 = 0$, rastúca na množine Q a na množine I. Na druhej strane je zrejmé, že neexistuje reálny interval, na ktorom je f rastúca. ■

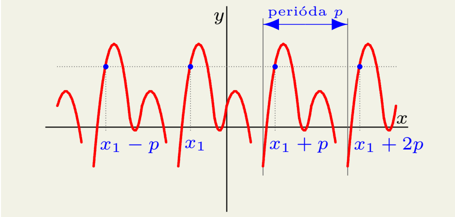
Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **párna**, resp. **nepárna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a navyše $f(x) = f(-x)$, resp. $f(x) = -f(-x)$. Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y a nepárnej podľa počiatku súradnicového systému (obr. 2.1.2).

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **periodická**, ak existuje $p \in R$, $p \neq 0$ (nazývame ho **perióda funkcie** f) také, že pre všetky $x \in D(f)$ platí $x+p \in D(f)$, $x-p \in D(f)$ a $f(x) = f(x+p) = f(x-p)$. Najmenšia kladná perióda funkcie f (pokiaľ existuje) sa nazýva **primitívna** (**základná**).

Je zrejmé, že každý celočíselný násobok periódy je tiež perióda. Ak je funkcia f periodická s periódou $p > 0$, potom ju stačí vyšetrovať na intervale s dĺžkou p. Každý interval s dĺžkou p nazývame **interval periodicity** (obr. 2.1.3).

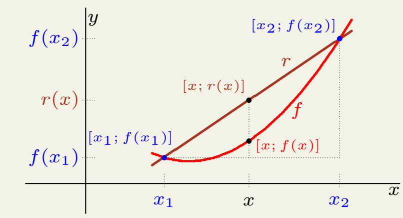


Obr. 2.1.2: Graf párnej a nepárnej funkcie

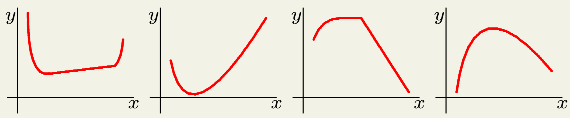


Obr. 2.1.3: Graf periodickej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **na intervale $I \subset D(f)$ konvexná** (**rýdzo konvexná**), resp. **konkávna** (**rýdzo konkávna**), ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí $f(x) \leq r(x)$ $(<)$, resp. $f(x) \geq r(x)$ $(>)$, pričom[2] $r(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) + \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1)$.



Obr. 2.1.4: Konvexná funkcia



Obr. 2.1.5: Grafy konvexnej, rýdzo konvexnej, konkávnej a rýdzo konkávnej funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva (**rýdzo**) **konvexná**, resp. (**rýdzo**) **konkávna v bode $x_0 \in D(f)$**, ak existuje okolie $O(x_0)$, v ktorom je (rýdzo) konvexná, resp. (rýdzo) konkávna. Funkcia f **má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexný bod** (**inflexiu**), ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že v okolí $O^-(x_0)$ je f rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna a naopak v okolí $O^+(x_0)$ je rýdzo konkávna, resp. rýdzo konvexná.

Veta 2.1.6. Funkcia f je konvexná, resp. konkávna na intervale $I \subset D(f)$práve vtedy, ak pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, $p \in (0\,;\,1)$, $q = 1-p$ platí:

$$f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2), \quad \text{resp. } f(px_1 + qx_2) \geq pf(x_1) + qf(x_2).$$

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **nulový bod** (**koreň**) **funkcie $y = f(x)$**, ak platí $f(c) = 0$. Korene funkcie f nájdeme riešením rovnice $f(x) = 0$, $x \in D(f)$.

Nech $A \subset D(f)$. Funkcia $y = h(x)$, $x \in A$ sa nazýva **zúžením** (**reštrikciou**) **funkcie $y = f(x)$ na množinu A**, ak pre všetky $x \in A$ platí $h(x) = f(x)$. Označujeme $h = f|_A$.

Elementárnou funkciou nazývame každú funkciu, ktorú dokážeme utvoriť z funkcií $y =$ konšt., $y = x$, $y = \mathrm{e}^x$, $y = \ln x$, $y = \sin x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ pomocou operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania.

Elementárne funkcie majú veľký praktický význam, popisujú sa pomocou nich mnohé prírodné a spoločenské zákonitosti a javy. Patria medzi ne napríklad **polynóm**, **ra-**

[2]Graficky leží $[x; r(x)]$ na priamke spájajúcej body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$ (obr. 2.1.4).

cionálna lomená funkcia, **mocninná funkcia** ($y = x^r$), **exponenciálna funkcia** ($y = a^x$, $a > 0$), **logaritmická funkcia** ($y = \log_a x$, $y = \log_e x = \ln x$), **goniometrické** (**trigonometrické**) **funkcie** ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$), **cyklometrické funkcie** ($y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$), **hyperbolické funkcie** ($y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $y = \operatorname{tgh} x$, $y = \operatorname{cotgh} x$).

2.1.4 Limita funkcie

Pri vyšetrovaní funkcie je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti, t. j. jej chovanie v okoliach daných bodov, napríklad v okolí bodu, v ktorom nie je definovaná.

Funkcia $y = f(x)$ má v bode $a \in R^*$ limitu rovnajúcu sa $b \in R^*$ (**limita funkcie f v bode a sa rovná b**) a označujeme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ak:

Bod a je hromadným bodom množiny $D(f)$.

Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $x_n \neq a$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto b$.

Poznámka 2.1.5. *To znamená, že ak pre postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ platí $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, potom pre postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$).*

Ak $a \in R$, potom hovoríme **o limite vo vlastnom bode a**. Ak $a = \pm\infty$, potom hovoríme **o limite v nevlastnom bode a**. Ak $b \in R$, potom hovoríme o **vlastnej limite** a ak $b = \pm\infty$, hovoríme **o nevlastnej limite**.

Príklad 2.1.4. $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ neexistuje.

Riešenie.
Bod 0 je hromadný bod množiny $D(f) = R - \{0\}$. Nech $n \in N$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\pi+2n\pi}\right\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0$, $\frac{1}{\pi+2n\pi} \neq 0$, $f(x_n) = \cos(\pi+2n\pi) = 0 \Rightarrow \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 0$, $\frac{1}{2n\pi} \neq 0$, $f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1 \Rightarrow \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto 1$. ■

Príklad 2.1.5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x^2 = \begin{cases} a^2, & \text{pre } a \in R, \\ \infty, & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$.

Riešenie.
Každý bod $x = a \in R^*$ je hromadným bodom množiny $D(f) = R$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$, $x_n \in R$, $x_n \neq a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = a$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = a^2 = \begin{cases} a^2, & \text{pre } a \in R, \\ \infty, & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases} ■$$

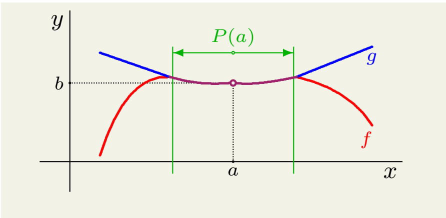
Z definície je zrejmé, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ predstavuje lokálnu záležitosť v nejakých okoliach $O(a)$, $O(b)$. Ak pre $a \in R^*$ platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in R$ (konečná), potom existuje okolie $O(a)$, v ktorom je f ohraničená.

Ak $a \in R^*$ je hromadný bod $D(f)$ a aj $D(g)$ a pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$ (t. j. funkcie sa rovnajú v nejakom prstencovom okolí), potom obe limity buď existujú alebo neexistujú a platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (obr. 2.1.6).

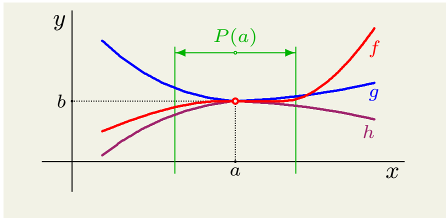
Príklad 2.1.6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x+3)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (2x+3) = 5$.

Využili sme skutočnosť, že pre všetky $x \in R - \{1\}$ platí $\frac{2x^2+x-3}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+3)}{x-1} = 2x+3$. ■

Veta 2.1.7 (Veta o zovretí)**.** Nech $a\in R^*$ je hromadný bod $D(f)$, $D(g)$ a aj $D(h)$ a nech pre všetky $x\in O(a)$, $x\neq a$ platí $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b\in R^*$, $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$, potom existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.



Obr. 2.1.6: Rovnosť limít



Obr. 2.1.7: Veta o zovretí 2.1.7

Príklad 2.1.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Riešenie.
∞ je hromadný bod $D(f)$ funkcie $y=\frac{\sin x}{x}$, pre všetky $x>0$ platí[3] $-1\leq \sin x\leq 1 \;\Rightarrow$

$$-\frac{1}{x}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad 0=-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0. \;\blacksquare$$

Veta 2.1.8 (Limita zloženej funkcie)**.** Nech $a,b,c\in R^*$, $H(f)\subset D(g)$, $g(b)=c$.
Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{u\to b} g(u)=c$, potom platí $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\lim\limits_{u\to b} g(u)=c$.

Ak sme použili pri výpočte limity predchádzajúcu vetu, hovoríme, že sme **použili substitúciu** $u=f(x)$.

Príklad 2.1.8. Substitúcia $z=\sqrt[6]{x}$, t. j. $x=z^6$, $z\to 1$, potom

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{z^6}-1}{\sqrt[3]{z^6}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^2+z+1)}{(z-1)(z+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z+1}{z+1}=\frac{3}{2}. \;\blacksquare$$

Ak $c\in R$, $a\in R^*$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)\in R^*$, potom (analogicky ako pri postupnostiach) pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel, platí:

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\Big|\lim_{x\to a} f(x)\Big|,\ \lim_{x\to a}\big(cf(x)\big)=c\lim_{x\to a} f(x),\ \lim_{x\to a}\big(f(x)*g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)*\lim_{x\to a} g(x),$$

kde $*$ je sčítanie, odčítanie, násobenie alebo delenie.[4]

Nech $a\in R^*$ je hromadný bod $D(f)$, potom $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \iff \lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$.

Ak $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\infty$ (t. j. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nemusí ani existovať), potom $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$.

Ak $f(x)>0$, resp. $f(x)<0$ v nejakom okolí $x\in O(a)-\{a\}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, potom[5] $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty$, resp. $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.

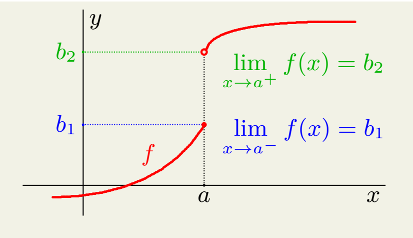
[3] Stačí uvažovať kladné $x>0$, pretože $x\to\infty$.
[4] Ak niektorý z daných výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že limita neexistuje. Vtedy ju musíme vypočítať iným spôsobom, napr. vhodnou úpravou.
[5] $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, ale $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje, pretože $\frac{1}{x}\to\infty$ pre $x>0$ a $\frac{1}{x}\to-\infty$ pre $x<0$.

Označme $D_a^-(f) = D(f) \cap (-\infty\,;\,a)$, $D_a^+(f) = D(f) \cap (a\,;\,\infty)$. **Limitou zľava** a **limitou sprava funkcie f v bode a** nazývame limity (obr. 2.1.8):

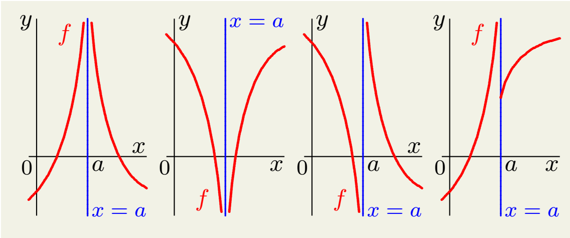
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f|_{D_a^-(f)}(x), \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f|_{D_a^+(f)}(x).$$

$f|_{D_a^-(f)}(x)$ je zúženie funkcie f (vľavo) na interval $(-\infty; a)$ a $f|_{D_a^+(f)}(x)$ je zúženie funkcie f (vpravo) na interval $(a; \infty)$. Súhrnne ich nazývame **jednostranné limity** a limitu $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nazývame **obojstranná limita**. Platí pre ne nasledujúci vzťah:[6]

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$



Obr. 2.1.8: Jednostranné limity



Obr. 2.1.9: Príklady asymptoty bez smernice

Dôležité limity: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ pre $a > 1$, $n \in N$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left[1 + \frac{1}{x}\right]^x = \mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left[1 + \frac{a}{x}\right]^x = \mathrm{e}^a$, $\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ pre $a > 0$.

Príklad 2.1.9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln \mathrm{e}^1 = 1.$ ■

Nech $a \in R^*$ a nech f, g sú definované v nejakom prstencovom okolí $P(a)$. Potom hovoríme, že **funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a** (**funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú**) a označujeme $f \sim g$, $x \to a$ práve vtedy, ak $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú napríklad funkcie:

$$x^2 \sim x,\ x \to 1, \quad \sin x \sim x,\ x \to 0, \quad \sin x \sim 1,\ x \to \pi/2, \quad \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0.$$

Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité preskúmať jej vlastnosti v nevlastných bodoch, t. j. pre $x \to \pm\infty$. A taktiež v okolí bodov $a \in R$, v ktorých je aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ nevlastná, t. j. rovná ∞ alebo $-\infty$.

Ak má funkcia f v bode a aspoň jednu z jednostranných limít nevlastnú, potom priamku $x = a$ nazývame **asymptota bez smernice** (**vertikálna**) **grafu funkcie f**.

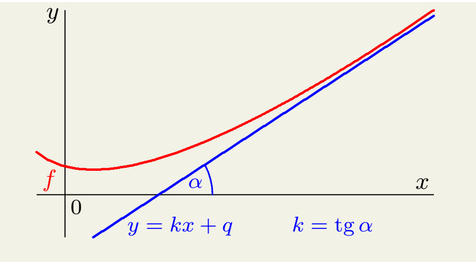
[6] $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje, ale $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

Priamka $y = kx+q$ sa nazýva **asymptota so smernicou grafu funkcie f**, ak platí:

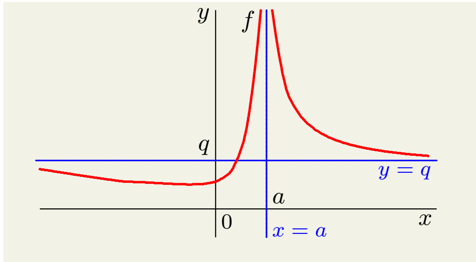
$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0.$$

Pre $k = 0$ sa priamka $y = q$ nazýva **horizontálna** (**vodorovná**) **asymptota**. Číslo k predstavuje smernicu priamky (obr. 2.1.10). Koeficienty vypočítame podľa vzťahu:

$$\lim_{x\to-\infty} \tfrac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = q, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to\infty} \tfrac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$



Obr. 2.1.10: Asymptota so smernicou



Obr. 2.1.11: Asymptoty $y = q$, $x = a$

Uvažujme výraz 0^0, vo všeobecnosti nevieme určiť, čomu sa rovná a nazývame ho neurčitý. S takýmito výrazmi sa stretávame pomerne často a počítame ich pomocou limít. Medzi **neurčité výrazy** patria:

$$\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \tfrac{0}{0}, \quad \tfrac{1}{0}, \quad \tfrac{\pm\infty}{0}, \quad \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad 0^{\pm\infty}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad (\pm\infty)^0.$$

Príklad 2.1.10. $\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+2) - \ln x] = \lim_{x\to\infty} x \ln \frac{x+2}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln \left[1+\frac{2}{x}\right]^x = \ln \mathrm{e}^2 = 2.$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+tx)} = \lim_{x\to 0} \frac{tx}{t\ln(1+tx)} = \begin{bmatrix} tx = z \\ z \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{t\ln(1+z)} = \frac{1}{t} \lim_{z\to 0} \frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\ln \mathrm{e}} = \frac{1}{t}.$

$\lim_{x\to 2} \frac{\arcsin(x-2)}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{\arcsin(x-2)}{x(x-2)} = \begin{bmatrix} \arcsin(x-2) = z \\ x-2 = \sin z, \ z\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\sin z} \cdot \frac{1}{2+\sin z}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin mx}{mx} \cdot \frac{nx}{\sin nx} \cdot \frac{mx}{nx}\right] = 1 \cdot 1 \cdot \frac{m}{n} = \frac{m}{n}$ pre $m, n \in R$. ■

2.1.5 Spojitosť funkcie

S pojmom limity funkcie f v danom bode a úzko súvisí pojem spojitosti tejto funkcie f v bode a. Prírodné deje často prebiehajú spojite. Niekedy môžu samozrejme prebiehať diskrétne alebo v kvantách, ale kvantá sú väčšinou také malé, že nám (ako nedokonalým pozorovateľom) sa celý proces javí ako spojitý.

Príklad 2.1.11. Uvažujme hmotný bod, ktorý sa pohybuje po nejakej dráhe. Veľkosť dráhy závisí od času pohybu. Predpokladajme, že dráhu popisuje funkcia $y = f(t)$, kde t reprezentuje čas. V čase T bude veľkosť dráhy rovná hodnote $f(T)$. Ak sa čas T zmení o malú hodnotu, potom sa dráha $f(T)$ tiež zmení o nejakú malú hodnotu. Ak $t \to T$, potom $f(t) \to f(T)$. To znamená, že ak $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \to T$, potom $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty} \to f(T)$.

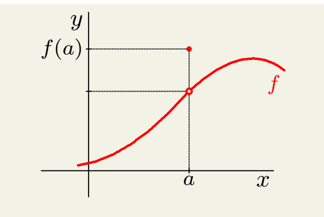
Funkcia $y = f(x)$ je spojitá v bode $a \in D(f)$, ak pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto f(a)$ (t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$).

Poznámka 2.1.6. *Bod $a \in D(f)$ môže byť iba hromadný alebo izolovaný. Ak je bod a izolovaný, potom existuje jediná postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto a$ a teda platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{f(a)\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto f(a)$, t. j.* ***v izolovanom bode a je f spojitá vždy.***

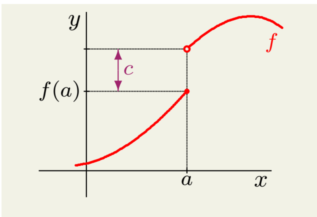
Ak je f spojitá v bode $a \in D(f)$, potom a nazývame **bodom spojitosti funkcie f**. Ak funkcia f nie je spojitá v bode $a \in D(f)$, nazýva sa **nespojitá v bode a** a bod a nazývame **bodom nespojitosti funkcie f**.

Je zrejmé, funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode $D(f)$. Preto rozšírime pojem bodu nespojitosti na všetky hromadné body množiny $D(f)$. **Funkcia $y = f(x)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$ bod:**

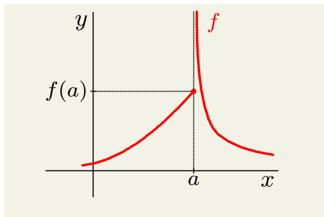
- **odstrániteľnej nespojitosti**, ak existuje konečná $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.
  Ak položíme $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, nespojitosť sa odstráni.
- **neodstrániteľnej nespojitosti 1. druhu**, ak existujú konečné $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
  Číslo $c = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ nazývame **skok funkcie f v bode a**.
- **neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu**, ak aspoň jedna z $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná.



Obr. 2.1.12: Nespojitosť odstrániteľná



Obr. 2.1.13: Nespojitosť neodstrániteľná 1. druhu



Obr. 2.1.14: Nespojitosť neodstrániteľná 2. druhu

Podobne ako limita, je aj spojitosť lokálna záležitosť v nejakom okolí $O(a)$. Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$. Ak porovnáme ich definície, môžeme sformulovať kritérium spojitosti funkcie v bode.

Veta 2.1.9. Nech a je hromadný bod $D(f)$.
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ak sú f, g spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, $r \in R$, potom sú spojité v bode a aj funkcie $|f|$, $f \pm g$, cf, fg, $\frac{f}{g}$ (pre $g(a) \neq 0$) a tiež reštrikcia $g = f|_A$, kde $a \in A$, $A \subset D(f)$.

Ak je funkcia f spojitá v bode $a \in D(f)$, funkcia g spojitá v bode $b = f(a)$, $b \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$, potom zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a.

Podobne ako pri limite, definujeme **jednostrannú spojitosť funkcie f v bode a**. Funkcia f sa nazýva **spojitá zľava**, resp. **sprava v bode a**, ak je spojitá v bode a vzhľadom na množinu $D(f) \cap (-\infty\,;\, a\rangle$, resp. $D(f) \cap \langle a\,;\, \infty)$. Platí pre ne vzťah:

$$f \text{ je spojitá v bode } a \in D(f) \iff f \text{ je spojitá zľava a sprava v bode } a.$$

Pojem spojitosti funkcie v bode môžeme rozšíriť. **Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$**, ak je spojitá v každom bode $a \in A$. Ak $A = D(f)$, potom ju nazývame **spojitá**.

Spojitosť funkcie f na uzavretom intervale $\langle a\,;\, b\rangle \subset D(f)$ znamená obojstrannú spojitosť na $(a\,;\, b)$, spojitosť sprava v bode a, spojitosť zľava v bode b.

Poznámka 2.1.7. *Ak je funkcia f spojitá v bode $a \in D(f)$, potom je lokálne ohraničená (t. j. existuje okolie $O(a)$, v ktorom je f ohraničená).*
Zo spojitosti funkcie f na množine $A \subset D(f)$ ešte nevyplýva jej ohraničenosť na tejto množine. Napríklad $f : y = x^{-1}$, $x > R$ je spojitá, ale nie je ohraničená.

Najčastejšie množiny, s ktorými sa stretávame sú intervaly. Definičný obor funkcie rozdelíme na intervaly a potom funkciu vyšetrujeme na jednotlivých intervaloch.

Veta 2.1.10. Ak je f spojitá na uzavretom intervale $\langle a\,;\, b\rangle$, potom f je na $\langle a\,;\, b\rangle$ ohraničená a nadobúda na ňom svoje extrémy.

Toto neplatí pre iné intervaly. Napríklad funkcia $f : y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ je spojitá, ale nie je ohraničená (pre $x \to 0$ platí $\frac{1}{x} \to \infty$). Ohraničená je napríklad na intervale $\langle 1\,;\, \infty)$, ale aj na intervale $(1\,;\, \infty)$.

Veta 2.1.11. Ak je f spojitá na intervale $I \subset R$, potom $f(I)$ je interval.

Ak je f spojitá a I je uzavretý (a teda aj ohraničený), potom aj interval $f(I)$ je ohraničený a teda aj uzavretý. Platí $f(I) = \langle \alpha\,;\, \beta\rangle$, pričom[7] $\alpha = \min_{x \in I} f(x)$, $\beta = \max_{x \in I} f(x)$.

Ak je f spojitá a I nie je uzavretý alebo ohraničený, potom vo všeobecnosti typ intervalu $f(I)$ určiť nevieme. Napr. pre funkciu $f : y = x$, $x \in R$ platí $f(R) = (-\infty\,;\, \infty)$, pre funkciu $f : y = x^2$, $x \in R$ platí $f(R) = \langle 0\,;\, \infty)$ a pre funkciu $f : y = \sin x$, $x \in R$ platí $f(R) = \langle -1\,;\, 1\rangle$.

Ale ak je funkcia f spojitá a rýdzo monotónna (rastúca alebo klesajúca), potom interval $f(I)$ má rovnaký typ ako I.

Veta 2.1.12 (Spojitosť inverznej funkcie). Ak je funkcia f prostá a spojitá na intervale I, potom inverzná funkcia f^{-1} je spojitá na $f(I)$.

[7] Ak $\alpha = \beta$ dostaneme degenerovaný interval $f(I) = \langle \alpha\,;\, \alpha\rangle = \{\alpha\}$.

2.2 Diferenciálny počet reálnej funkcie

2.2.1 Derivácia reálnej funkcie

Základným pojmom diferenciálneho počtu je derivácia. K zavedeniu derivácie funkcie viedli predovšetkým dva problémy, ktoré sú uvedené v nasledujúcich príkladoch.

Príklad 2.2.1. Pohyb auta pohybujúceho sa po priamke (obr. 2.2.15) je opísaný funkciou $s(t)$, závislou od času t. Čas začneme merať v bode P_0 v čase t_0. V čase $t > t_0$ sa auto nachádza v bode P a $s(t)$ predstavuje dĺžku úsečky P_0P. V čase $t + \Delta t$ $(\Delta t > 0)$ sa auto nachádza v bode Q. Úsečka PQ prestavuje dráhu auta v časovom intervale Δt. Priemernú rýchlosť $\overline{v}$ auta v časovom intervale Δt môžeme vyjadriť vzťahom

$$\overline{v} = \tfrac{\Delta s}{\Delta t} = \tfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}, \quad \text{kde } \Delta s = s(t+\Delta t) - s(t).$$

Ak $\Delta t \to 0$, potom sa bude $\overline{v}$ približovať k okamžitej rýchlosti $v(t)$ v čase t, t. j.

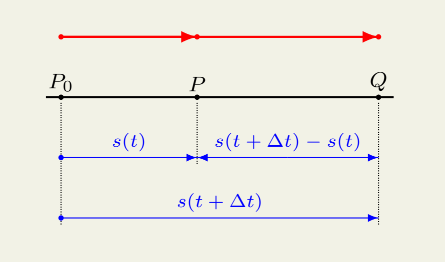
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}. \ \blacksquare$$

Príklad 2.2.2. Uvažujme bod $P = [x_0; f(x_0)]$ ležiaci na grafe spojitej funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$. Rovnica dotyčnice d_P k funkcii f v bode P má tvar (obr. 2.2.16):

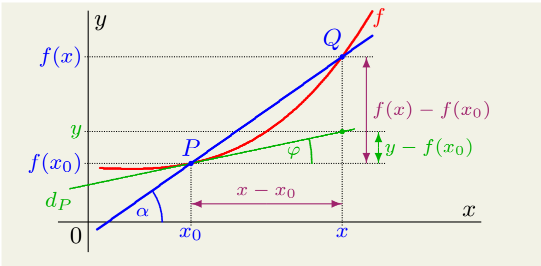
$$y - f(x_0) = k(x - x_0) = \operatorname{tg} \varphi (x - x_0) \ \Rightarrow \ \text{smernica} \ \ k = \operatorname{tg} \varphi = \tfrac{y - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ak bod $Q = [x; f(x)]$ leží na grafe funkcie f, potom $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Ak sa bude bod Q približovať k P, bude sa priamka PQ približovať k dotyčnici d_P, t. j. $x \to x_0$, $f(x) \to f(x_0)$, $\alpha \to \varphi$, $\operatorname{tg} \alpha \to \operatorname{tg} \varphi$. Smernica $\operatorname{tg} \varphi$ má potom tvar:

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\alpha \to \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \ \blacksquare$$



Obr. 2.2.15: Úloha o rýchlosti



Obr. 2.2.16: Úloha o dotyčnici

Funkcia $y = f(x)$ má v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu $f'(x_0)$, ak existuje limita:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad (\text{subst. } h = x - x_0).$$

Podľa toho, či je predchádzajúca limita vlastná alebo nevlastná, hovoríme o **vlastnej** (**konečnej**) alebo **nevlastnej derivácii funkcie f v bode x_0**. Pokiaľ nebude uvedené ináč, budeme pod pojmom derivácia rozumieť vlastnú deriváciu. Často sa používa označenie pomocou tzv. diferenciálov, ktoré zaviedol G. W. Leibniz $\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0)$, resp. $y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x_0)$.

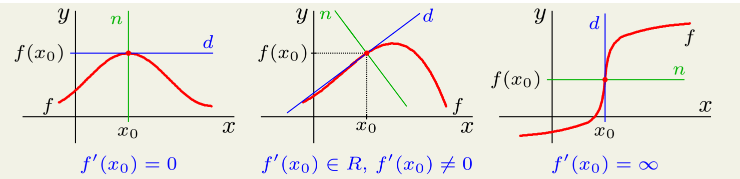
Veta 2.2.1. Ak má funkcia f v bode x_0 konečnú deriváciu, potom je f v bode x_0 spojitá.

Ako dokazuje príklad 2.2.3, opačná implikácia neplatí. To znamená, že spojitosť funkcie v danom bode nezaručuje existenciu derivácie v tomto bode.

Geometricky predstavuje $f'(x_0) \in R$ smernicu priamky, ktorá sa dotýka grafu funkcie f v bode $[x_0; f(x_0)]$ a ktorú nazývame **dotyčnica (so smernicou) ku grafu funkcie f v bode x_0**. Jej rovnica (príklad 2.2.2) má tvar $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Ak $f'(x_0) = \pm\infty$ a f je spojitá v bode x_0, potom **dotyčnicou bez smernice ku grafu funkcie f v bode x_0** nazývame priamku, ktorá je rovnobežná s osou y (kolmá na os x) a prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$, t. j. priamku $x = x_0$ (obr. 2.2.17).

Normálou ku grafu funkcie f v bode x_0 nazývame priamku, ktorá prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$ a je kolmá na dotyčnicu ku grafu funkcie f v tomto bode. Normála ku grafu funkcie f v bode x_0 existuje práve vtedy, ak v tomto bode existuje dotyčnica. Ak $f'(x_0) \in R$, $f'(x_0) \neq 0$, potom má normála tvar[8] $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.



Obr. 2.2.17: Dotyčnica a normála k funkcii f v bode x_0

Deriváciu $f'(x_0)$ nazývame **obojstrannou**. **Jednostranné derivácie** definujeme pomocou jednostranných limít. **Funkcia f má v bode x_0 deriváciu zľava $f'_-(x_0)$**, ak existuje limita $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a **deriváciu sprava $f'_+(x_0)$**, ak existuje limita $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Veta 2.2.2. $f'(x_0)$ existuje práve vtedy, ak existujú $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Príklad 2.2.3. Funkcia $f : y = |x|$ je spojitá v každom bode R, $f'(0)$ neexistuje, pretože:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \quad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \blacksquare$$

Nech $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a nech $A \subset \{x_0 \in D(f) : f'(x_0)$ je konečná$\}$. Ak $A \neq \emptyset$, potom má zmysel funkcia $g : y = f'(x)$, $x \in A$, ktorú nazývame **derivácia funkcie f na množine A** a označujeme symbolmi f', y', resp. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

[8] Priamky $y = kx + a$, $y = qx + b$ (t. j. $kx - y + a = 0$, $qx - y + b = 0$) sú na seba kolmé, ak sú na seba kolmé ich normálové vektory $(k; -1)$, $(q; -1)$. T. j. ak platí $kq + (-1)(-1) = kq + 1 = 0$, resp. $k = -\frac{1}{q}$.

Poznámka 2.2.1. *Derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ je číslo, resp. $\pm\infty$. Na druhej strane derivácia funkcie f na množine $A \subset D(f)$ je funkcia $y = f'(x)$, $x \in A$.*

Derivácia funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ znamená obojstrannú deriváciu $f'(x)$ pre všetky $x \in (a\,;\,b)$ a jednostranné derivácie $f'_+(a)$, $f'_-(b)$.

Veta 2.2.3. Ak má funkcia f na množine A deriváciu f', potom je f na A spojitá.

Pri praktickom výpočte derivácií, t. j. pri **derivovaní** rôznych funkcií spravidla nepoužívame definíciu. Používame rôzne vzorce a pravidlá.

Veta 2.2.4 (Pravidlá derivovania)**.** $A \neq \emptyset$, $c \in R$, $f'(x)$, $g'(x)$ existujú pre $x \in A$, potom[9]

$$(cf)'(x) = cf'(x), \qquad (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \qquad \left[\tfrac{f}{g}\right]'(x) = \tfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Veta 2.2.5 (Zložená funkcia)**.** Nech $y = g(u)$, $u = f(x)$, $H(f) \subset D(g)$, $f'(x_0)$ a $g'(u_0)$ sú vlastné, kde $x_0 \in D(f)$, $u_0 = f(x_0) \in D(g)$, potom[10]

$$[g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(u_0) \cdot f'(x_0).$$

Príklad 2.2.4. Ak $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1\,;\,1)$, potom $F'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1\,;\,1)$.

Riešenie.
$F = g(f)$, $\quad g : y = \sqrt{u}$, $g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, $u > 0$, $\quad f : u = 1 - x^2$, $f'(x) = -2x$.

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1\,;\,1)\,.$$

V praxi jednotlivé funkcie nevypisujeme a priamo píšeme:

$$\left[\sqrt{1-x^2}\right]' = \left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \tfrac{1}{2}\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] \cdot [1-x^2]' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \ \blacksquare$$

Príklad 2.2.5. $[\log_a x]' = \left[\frac{\ln x}{\ln a}\right]' = \frac{[\ln x]'}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$[x^x]' = \left[e^{\ln x^x}\right]' = \left[e^{x \ln x}\right]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = x^x[1 + \ln x]$, $x > 0$.

$[\sin(\sin(\sin x))]' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$, $x \in R$. $\blacksquare$

Nájsť deriváciu danej funkcie v tvare analytického vzorca je pomerne častá a dôležitá úloha pri riešení mnohých problémov nielen v matematike, ale aj v praxi. Základom týchto vzorcov sú derivácie elementárnych funkcií, ktoré sú zhrnuté v tabuľke 2.2.1.

Nech má funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ deriváciu na množine $A_1 \subset D(f)$, $A_1 \neq \emptyset$. Ak má $y = f'(x)$, $x \in A_1$ deriváciu $[f']'$ na $A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$, potom ju nazývame **derivácia druhého rádu** (**druhá derivácia**) **funkcie f na množine A_2** a označujeme $f'' = f^{(2)}$.

Ak má $y = f''(x)$, $x \in A_2$ deriváciu $[f'']'$ na $A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$, potom ju nazývame **derivácia tretieho rádu** (**tretia derivácia**) **funkcie f na množine M_3** a označujeme $[f'']' = f''' = f^{(3)}$. Takto môžeme pokračovať pre $n = 4, 5, 6, \ldots$.

[9] Stručne ich môžeme písať $(cf)' = cf'$, $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

[10] Stručne $F'(x) = [g(f)]'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$, resp. $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, kde $u = f(x)$.

Vzorec	Platnosť	Vzorec	Platnosť
$[c]' = 0,$	$x \in R,\ c \in R$	$[x]' = 1,$	$x \in R$
$[x^n]' = nx^{n-1},$	$x \in R,\ n \in N$	$[x^a]' = ax^{a-1},$	$x > 0,\ a \in R$
$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x,$	$x \in R$	$[a^x]' = a^x \ln a,$	$x \in R,\ a > 0$
$[\ln x]' = \frac{1}{x},$	$x > 0$	$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\ln \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x},$	$x \neq 0$	$[\log_a \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\sin x]' = \cos x,$	$x \in R$	$[\cos x]' = -\sin x,$	$x \in R$
$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x},$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$	$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x},$	$x \neq k\pi,\ k \in Z$
$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1\,;\,1)$	$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1\,;\,1)$
$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2},$	$x \in R$	$[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2},$	$x \in R$
$[\sinh x]' = \cosh x,$	$x \in R$	$[\cosh x]' = \sinh x,$	$x \in R$
$[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x},$	$x \in R$	$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x},$	$x \neq 0$

Tabuľka 2.2.1: Derivácie základných elementárnych funkcií

Predpokladajme, že má funkcia f deriváciu $f^{(n-1)}$ na množine $A_{n-1} \neq \emptyset$. Jej deriváciu na množine $A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ nazývame **derivácia n-tého rádu** (**n-tá derivácia**) **funkcie f na množine A_n** a označujeme $[f^{(n-1)}]' = f^{(n)}$.

Hodnotu derivácie $f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in A_n$ nazývame **derivácia n-tého rádu** (**n-tá derivácia**) **funkcie f v bode x_0**.

Derivácie $f^{(n)}$, $n \in N$ nazývame **deriváciami vyššieho rádu**. Špeciálne $f' = f^{(1)}$ nazývame **prvou deriváciou** (**deriváciou prvého rádu**) a $f = f^{(0)}$ nazývame **nultou deriváciou** (**deriváciou nultého rádu**) **funkcie f**.

Z definície vyplýva, že $y = f(x)$ má v bode $x_0 \in A$ deriváciu $f^n(x_0)$, ak existuje:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}.$$

To znamená, že funkcia $f^{(n-1)}$ musí byť definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$. Výpočet derivácie $f^{(n)}$ môže byť vo všeobecnosti veľmi prácny, pretože musíme začať deriváciou f'.

Veta 2.2.6 (Leibnizov vzorec)**.** *Ak majú funkcie f, g na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in N$ vrátane, potom platí*

$$[fg]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}.$$

2.2.2 Aplikácie diferenciálneho počtu

Diferenciálny počet využívame hlavne na vyšetrovanie vlastností funkcií. Hľadanie extrémov funkcie úzko súvisí s jej derivovaním. Pri výpočte limít v tvare neurčitých výrazov typu $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$ sa často používa l'Hospitalovo pravidlo.

Veta 2.2.7. Ak má funkcia f vo vnútornom bode $c \in D(f)$ lokálny extrém, potom (pokiaľ derivácia existuje) $f'(c) = 0$.

Funkcia môže mať v danom bode extrém a nemusí mať deriváciu. Príkladom je funkcia $f: y = |x|$, ktorá má v bode $c = 0$ lokálne aj globálne minimum, ale $f'(0)$ neexistuje.

Na druhej strane nulová derivácia nezaručuje extrém funkcie v tomto bode, napríklad funkcia $f: y = x^3$ nemá v bode $c = 0$ extrém, aj keď platí $f'(0) = 0$.

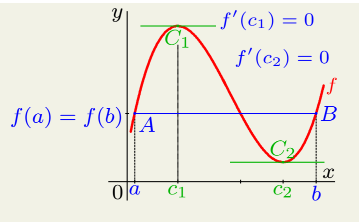
Veta 2.2.8 (Rolle)**.** Ak je funkcia f spojitá na $\langle a\,; b\rangle$, $f(a) = f(b)$, pre všetky $x \in (a\,; b)$ existuje aj nevlastná $f'(x)$, potom existuje aspoň jedno $c \in (a\,; b)$ také, že $f'(c) = 0$.

Veta 2.2.9 (Lagrange)**.** Ak je funkcia f spojitá na $\langle a\,; b\rangle$, pre všetky $x \in (a\,; b)$ existuje aj nevlastná $f'(x)$, potom existuje aspoň jedno $c \in (a\,; b)$ také, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

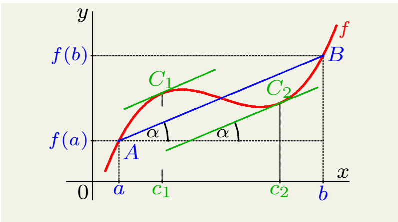
Dôsledok 2.2.9.a. Ak $f'(x) = 0$ pre všetky $x \in (a\,; b)$, potom je f na $(a\,; b)$ konštantná.

Bod $c \in (a\,; b)$ leží na úsečke s koncovými bodmi a, b, preto sa často zvykne vyjadrovať v tvare $c = a + \theta(b-a)$, kde $\theta \in (0\,; 1)$. Geometrický význam viet je ilustrovaný na obrázkoch 2.2.18 a 2.2.19. Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $[c; f(c)]$ zviera s osou x uhol α, pre ktorý platí $\operatorname{tg}\alpha = f'(c) = 0$, resp. $\operatorname{tg}\alpha = f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Výraz $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$ vyjadruje prírastok[11] funkcie f na $\langle a\,; b\rangle$. Ak označíme $b = a+h$, potom $f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h$, kde $\theta \in (0\,; 1)$. Pre dostatočne malé h môžeme predpokladať $f'(a+\theta h) \approx f'(a)$, t. j.[12] $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.



Obr. 2.2.18: Rolleho veta



Obr. 2.2.19: Lagrangeova veta

Veta 2.2.10 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** $a, b \in R^*$, $f'(x), g'(x) \neq 0$ sú konečné na $O(a) - \{a\}$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, resp. $\pm\infty$, potom $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.

Pri praktickom používaní l'Hospitalovho pravidla je veľmi dôležité, aby sme overili všetky predpoklady. V opačnom prípade môžeme dospieť k nesprávnym výsledkom alebo sa k výsledku vôbec nedopátrame. Pravidlo môžeme použiť aj niekoľkokrát za sebou.

Príklad 2.2.6. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$. ■

[11] Lagrangeova veta sa často nazýva **veta o prírastku funkcie**.
[12] Funkciu f aproximujeme v nejakom okolí bodu a pomocou lineárnej funkcie – pomocou dotyčnice.

L'Hospitalovo pravidlo môžeme použiť aj na výpočet neurčitých výrazov iných typov. Musíme ich ale vhodnými úpravami previesť na typ $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.

- **Typ** $\pm\infty \cdot 0 \;\Rightarrow\;$ typ $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$.
  $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, resp. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.
- **Typ** $\infty - \infty \;\Rightarrow\;$ typ $\infty \cdot 0$.
  $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]$.
- **Typ** $\infty^0 \;\Rightarrow\;$ typ $0 \cdot \infty$. **Typ** $0^0 \;\Rightarrow\;$ typ $0 \cdot (-\infty)$. **Typ** $1^{\pm\infty} \;\Rightarrow\;$ typ $\pm\infty \cdot 0$.
  $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$.

2.2.3 Priebeh funkcie

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia monotónna, t. j. rastúca (neklesajúca) alebo klesajúca (nerastúca). Používa sa na to prvá derivácia f'.

Veta 2.2.11. $I \subset R$ je interval, f je spojitá na I, pre všetky $x \in I$ existuje $f'(x)$, potom:

f je **konštantná na** $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$ pre všetky $x \in I$.

f je **rastúca**, resp. **klesajúca na** $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$, resp. $f'(x) \leq 0$ pre všetky $x \in I$, pričom neexistuje podinterval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f'(x) = 0$.

f je **neklesajúca**, resp. **nerastúca na** $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$, resp. $f'(x) \leq 0$ pre všetky $x \in I$.

Ak je f spojitá a rastúca, resp. klesajúca na intervale I, potom môže pre nejaké $x \in I$ platiť $f'(x) = 0$. Ale môžu to byť iba jednotlivé body, nie interval $J \subset I$.

Body, v ktorých má spojitá funkcia lokálne extrémy, úzko súvisia s intervalmi, na ktorých je monotónna. **Ak má funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ lokálny extrém a existuje $f'(x_0)$, potom** (veta 2.2.7) **platí $f'(x_0) = 0$.** Mimo tieto body je derivácia $f'(x_0)$ (pokiaľ existuje) kladná alebo záporná, t. j. funkcia f rastúca alebo klesajúca.

Veta 2.2.12. Ak $f'(x_0) > 0$, resp. $f'(x_0) < 0$ (aj nevlastná), potom je f rastúca, resp. klesajúca v bode $x_0 \in D(f)$.

Ak chceme nájsť lokálne extrémy funkcie f, musíme určiť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(x_0) = 0$. Je zrejmé, že nie vo všetkých týchto bodoch musí mať funkcia f extrém. Ak má funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu a platí $f'(x_0) = 0$, potom sa tento bod nazýva **stacionárnym bodom funkcie f**.

Veta 2.2.13. Nech $f'(x_0) = 0$ a nech existuje $O(x_0)$ tak, že pre všetky $x \in O(x_0)$:

$f'(x) > 0$ pre $x < x_0$, $f'(x) < 0$ pre $x_0 < x \;\Rightarrow\; f$ má **v bode x_0 ostré lokálne maximum**.

$f'(x) < 0$ pre $x < x_0$, $f'(x) > 0$ pre $x_0 < x \;\Rightarrow\; f$ má **v bode x_0 ostré lokálne minimum**.

$f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$ pre $x \neq x_0 \;\Rightarrow\; f$ **nemá v bode x_0 lokálny extrém**.

Niekedy môžeme rozhodnúť o existencii lokálneho extrému pomocou druhej derivácie.

Veta 2.2.14. $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, resp. $f''(x_0) > 0$ je konečná, potom má funkcia f **v bode x_0 ostré lokálne maximum**, resp. **minimum**.

Okrem lokálnych extrémov nás zaujímajú aj **globálne** (**absolútne**) **extrémy funkcie**. Globálne extrémy vo vnútorných bodoch intervalu sú zhodné s lokálnymi. Funkcia môže mať globálne extrémy aj v krajných bodoch intervalu a v bodoch, v ktorých neexistuje derivácia. To znamená, že ich musíme navzájom porovnať.

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia konvexná alebo konkávna.

Veta 2.2.15. Ak má funkcia f na intervale I deriváciu f', potom:

f je **konvexná**, resp. **konkávna na** $I \Leftrightarrow f'$ je na I neklesajúca, resp. nerastúca.

f je **rýdzo konvexná**, resp. **konkávna na** $I \Leftrightarrow f'$ je na I rastúca, resp. klesajúca.

Ak má funkcia f na intervale I druhú deriváciu f'', potom môžeme jej konvexnosť a konkávnosť vyšetrovať pomocou nej.

Veta 2.2.16. Ak má funkcia f na intervale I druhú deriváciu f'', potom:

f je **konvexná**, resp. **konkávna na** $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$, resp. $f''(x) \leq 0$ pre všetky $x \in I$,

f je **rýdzo konvexná**, resp. **konkávna na** $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$, resp. $f''(x) \leq 0$ pre všetky $x \in I$, pričom neexistuje podinterval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f''(x) = 0$.

Pri rýdzej konvexnosti, resp. konkávnosti môže pre nejaké body platiť $f''(x) = 0$. Ale môžu to byť iba jednotlivé body, nie interval $J \subset I$. Je zrejmé, že ak pre všetky $x \in I$ platia ostré nerovnosti $f''(x) > 0$, resp. $f''(x) < 0$, potom je funkcia f na intervale I rýdzo konvexná, resp. konkávna. Z toho vyplýva praktický návod ako postupovať pri určovaní konvexnosti a konkávnosti funkcie f v prípade, že existuje f''. Vyriešime rovnicu $f''(x) = 0$ a nájdeme intervaly, na ktorých je funkcia f'' kladná alebo záporná.

Ak má funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ inflexiu a existuje $f''(x_0)$, potom platí $f''(x_0) = 0$. Inflexné body budeme tiež hľadať ako korene rovnice $f''(x) = 0$. Avšak nie každý takýto bod musí byť inflexný. Na druhej strane môže mať f inflexiu aj v bode, v ktorom f'' neexistuje. To znamená, že musíme brať do úvahy aj tieto body.

Veta 2.2.17. Nech $f'(x_0)$ je konečná a nech existuje $O(x_0)$ tak, že pre všetky $x \in O(x_0)$:

$f''(x) > 0$ pre $x < x_0$, $f''(x) < 0$ pre $x_0 < x \Rightarrow f$ má **v bode x_0 inflexiu**.

$f''(x) < 0$ pre $x < x_0$, $f''(x) > 0$ pre $x_0 < x \Rightarrow f$ má **v bode x_0 inflexiu**.

$f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$ pre $x \neq x_0 \Rightarrow$ **f nemá v bode x_0 inflexiu**.

Ak existuje tretia derivácia $f'''(x_0)$, potom môžeme pomocou nej rozhodnúť, či x_0 je alebo nie inflexným bodom danej funkcie f. **Ak $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, potom x_0 je inflexným bodom funkcie f.** V týchto úvahách môžeme pokračovať ďalej.

Príklad 2.2.7. Označme $f_n(x) = x^n$, $x \in R$, $n \in N$. Pre derivácie platí $f_n'(x) = nx^{n-1}$, $f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, ..., $f_n^{(n-1)}(x) = n(n-1) \cdots 2x$, $f_n^{(n)}(x) = n!$, $f_n^{(n+1)}(x) = \cdots = 0$, t. j. pre všetky $k \in N - \{n\}$ platí $f_n^{(k)}(0) = 0$. Pre n platí $f_n^{(n)}(0) = n! > 0$.
Pre n párne je funkcia f_n v bode 0 rýdzo konvexná a má v bode 0 ostré lokálne minimum.
Ak je n nepárne, f_n je v bode 0 rastúca a má v bode 0 inflexiu. ∎

Veta 2.2.18. Nech $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, $n\in N$, potom:

Ak je n **nepárne**, potom f **nemá v bode x_0 lokálny extrém**.
Ak $f^{(n)}(x_0)>0$, potom f je rastúca v x_0. Ak $f^{(n)}(x_0)<0$, potom f je klesajúca v x_0.

Ak je n **párne**, potom f **má v bode x_0 ostrý lokálny extrém**.
Ak $f^{(n)}(x_0)>0$, potom $f(x_0)$ je minimum. Ak $f^{(n)}(x_0)<0$, potom $f(x_0)$ je maximum.

Veta 2.2.19. Nech[13] $f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, $n\in N$, $n\geq 2$, potom:

Ak je n **nepárne**, potom f **má v bode x_0 inflexiu**.

Ak je n **párne**, potom f **je v bode x_0 rýdzo konvexná** alebo **rýdzo konkávna**.
Ak $f^{(n)}(x_0)>0$, potom f je konvexná v x_0. Ak $f^{(n)}(x_0)<0$, potom f je konkávna v x_0.

Pri vyšetrovaní priebehu danej funkcie skúmame tieto jej vlastnosti:

- Určíme **definičný obor** funkcie (pokiaľ nie je zadaný).
- Určíme, či je funkcia **párna**, **nepárna** alebo **periodická**.
- Určíme **nulové body** funkcie a intervaly, na ktorých je funkcia **kladná** a **záporná**.
- Určíme body **spojitosti** a **nespojitosti** funkcie. V bodoch nespojitosti a v hraničných bodoch definičného oboru (vrátane $\pm\infty$) určíme **jednostranné limity** danej funkcie.
- Určíme **stacionárne** body funkcie, určíme **lokálne** a **globálne extrémy** a intervaly, na ktorých je funkcia **rastúca**, **klesajúca**, resp. **konštantná**.
- Určíme **inflexné** body a intervaly, na ktorých je funkcia **konvexná** a **konkávna**.
- Určíme **asymptoty** grafu funkcie a **načrtneme graf** funkcie.

Najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie nám väčšinou poskytne graf. Pri jeho konštrukcii využívame všetky zistené údaje. Často sú ale nedostatočné, preto ich musíme vhodne doplniť (napr. nulové body prvej alebo druhej derivácie, prípadne iba vhodne zvolené funkčné hodnoty).

<table>
<tr><td>$(-\infty\,;\,0)$</td><td>$(0\,;\,2)$</td><td>$(2\,;\,4)$</td><td>$(4\,;\,6)$</td><td>$(6\,;\,\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="5">0 ... bod nespojitosti 2 ... nulový bod</td></tr>
<tr><td>− záporná −
$f(x)<0$</td><td>− záporná −
$f(x)<0$</td><td colspan="3">+ kladná +
$f(x)>0$</td></tr>
<tr><td colspan="5">4 ... lokálne maximum</td></tr>
<tr><td>↘ klesá ↘
$f'(x)<0$</td><td colspan="2">↗ rastie ↗
$f'(x)>0$</td><td colspan="2">↘ klesá ↘
$f'(x)<0$</td></tr>
<tr><td colspan="5">6 ... inflexný bod</td></tr>
<tr><td>∩ konkávna ∩
$f''(x)<0$</td><td colspan="3">∩ konkávna ∩
$f''(x)<0$</td><td>∪ konvexná ∪
$f''(x)>0$</td></tr>
</table>

Tabuľka 2.2.2: Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x)=\frac{8(x-2)}{x^2}$ z príkladu 2.2.8

[13]Na rozdiel od predchádzajúcej vety nás nezaujíma hodnota $f'(x_0)$.

Príklad 2.2.8. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)=\frac{8(x-2)}{x^2}=\frac{8x-16}{x^2}$.

Riešenie.
$D(f)=R-\{0\}=(-\infty\,;\,0)\cup(0\,;\,\infty)$.
f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna.
f je spojitá na $D(f)$, $f(x)=\frac{8x-16}{x^2}=0 \Leftrightarrow x_1=2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x\in(-\infty\,;\,0) \Rightarrow f(x)<0,\\ x\in(0\,;\,2) \;\;\;\Rightarrow f(x)<0,\\ x\in(2\,;\,\infty) \;\;\Rightarrow f(x)>0.\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{8(x-2)}{x^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{8(x-2)}{x^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty \;\Rightarrow$
$x_2=0$ je neodstániteľný bod nespojitosti 2. druhu, $x=0$ je asymptota bez smernice.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{8x-16}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{8}{x}-\frac{16}{x^2}\right]=\frac{8}{\pm\infty}-\frac{16}{\infty}=0-0=0.$

$x\in R,\ x\neq 0 \;\Rightarrow\; f'(x)=\left[\frac{8x-16}{x^2}\right]'=\frac{8x^2-(8x-16)2x}{x^4}=\frac{32x-8x^2}{x^4}=\frac{32-8x}{x^3}=0 \Leftrightarrow x_3=4.$

f' je spojitá na $R-\{0\} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \;\;\;\;\;\;\;\;\Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f \text{ je klesajúca na } (-\infty\,;\,0),\\ 0<x<4 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f \text{ je rastúca na } (0\,;\,4\rangle,\\ \;\;4<x \;\;\;\;\;\Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f \text{ je klesajúca na } \langle 4\,;\,\infty).\end{cases}$

$\Rightarrow$ f má v bode $x_3=4$ lokálne maximum $f(4)=1$.

$x\in R,\ x\neq 0 \Rightarrow f''(x)=\left[\frac{32-8x}{x^3}\right]'=\frac{-8x^3-(32-8x)3x^2}{x^6}=\frac{16x^3-96x^2}{x^6}=\frac{16x-96}{x^4}=0 \Leftrightarrow x_4=6.$

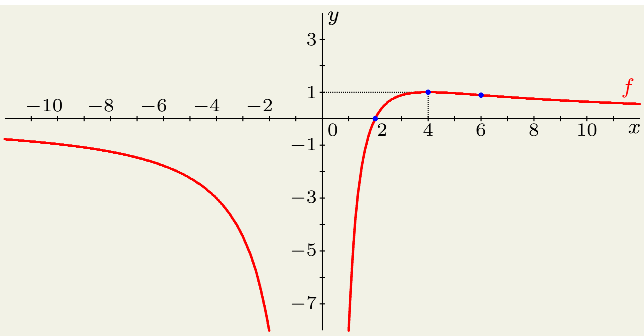
f'' je spojitá na $R-\{0\} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \;\;\;\;\;\;\;\;\Rightarrow f''(x)<0 \Rightarrow f \text{ je konkávna na } (-\infty\,;\,0),\\ 0<x<6 \Rightarrow f''(x)<0 \Rightarrow f \text{ je konkávna na } (0\,;\,6\rangle,\\ \;\;6<x \;\;\;\;\;\Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow f \text{ je konvexná na } \langle 6\,;\,\infty).\end{cases}$

$\Rightarrow$ $x_4=6$ je inflexný bod funkcie f.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x-16}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{8}{x^2}-\frac{16}{x^3}\right]=0-0=0 \;\Rightarrow$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-0\cdot x]=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0 \;\Rightarrow\; y=kx+q=0.$$

$\Rightarrow$ $y=0$ je asymptota so smernicou (obr. 2.2.20, tab. 2.2.2). ■



Obr. 2.2.20: Graf funkcie $f(x)=\frac{8(x-2)}{x^2}$ z príkladu 2.2.8

2.3 Integrálny počet reálnej funkcie

2.3.1 Neurčitý integrál

Zavedenie pojmu derivácie sme motivovali úlohou určiť okamžitú rýchlosť hmotného bodu, ktorý sa pohybuje po priamke. Úlohu môžeme obrátiť a hľadať dráhu hmotného bodu za predpokladu, že poznáme jeho okamžitú rýchlosť v danom čase.

Nech $I \subset R$ je otvorený interval. Hovoríme, že funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I**, ak pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$ a pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 2.3.1. *Z definície vyplýva, že ak $F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I, $c \in R$ je konštanta, potom každá funkcia $G(x) = F(x) + c$ je tiež primitívna k $f(x)$ na I. Z definície ďalej vyplýva, že* ***funkcia F je na intervale I spojitá.***

Všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f(x)$ na intervale I sa navzájom líšia o konštantu a tvoria množinu $\{F(x)+c : c \in R\}$, pričom $F(x)$ je ľubovoľná z primitívnych funkcií. Táto množina sa nazýva **neurčitý integrál funkcie f na intervale I** a označuje:[14]

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \quad x \in I, \quad c \in R.$$

Na určenie neurčitého integrálu funkcie nám postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia. Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva **integrovanie**. Zápis neurčitého integrálu funkcie f na intervale I je určený na začiatku **integračným znakom $\int$** a na konci symbolom $\mathrm{d}x$. Funkcia f sa nazýva **integračná funkcia** alebo **integrand**, x sa nazýva **integračná premenná** a c sa nazýva **integračná konštanta**. Interval I sa nazýva **definičný obor** (**obor definície**) **integrálu**. Ak nie je obor definície integrálu explicitne zadaný, potom myslíme maximálny možný interval, na ktorom integrál existuje.

Je zrejmé, že nie ku každej funkcii $f(x)$, $x \in I$ existuje na intervale I primitívna funkcia. Ale ak je funkcia f spojitá, potom k nej primitívna funkcia existuje. Samozrejme existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie.

Veta 2.3.1. Ak je $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I, potom k nej na I existuje primitívna funkcia.

V tabuľke 2.3.3 sú uvedené základné vzorce pre integrovanie.[15] Pre praktické potreby je vhodné si ich pamätať. Treba ich chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly. Napr. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = ln|x| + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce — pre $x \in (-\infty\,;\,0)$ a pre $x \in (0\,;\,\infty)$. Tieto vzorce sú rovnaké, líšiť sa môžu iba o konštantu.

Derivovanie a integrovanie sú inverzné operácie na intervale I, pre všetky $x \in I$ platí:

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = \big(F(x) + c\big)' = f(x), \qquad \int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Integrovanie je vo všeobecnosti zložitý proces. Aj keď ku každej spojitej funkcii definovanej na intervale existuje na tomto intervale primitívna funkcia, nie vždy ju vieme

[14] Symboly pre množinu sa vynechávajú a namiesto $\{F(x) + c : c \in R\}$ sa stručne píše $F(x) + c$, $c \in R$.
[15] Tieto vzorce úzko súvisia so vzorcami pre derivácie (tab. 2.2.1).

vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Na ich vyjadrenie potrebujeme nekonečné funkcionálne rady. Sú to napríklad integrály ($m\in N\cup\{0\}$, $n\in N$, $m+n\geq 2$):

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}},\quad \int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x},\quad \int\frac{\mathrm{e}^{(\pm x^n)}}{x^m}\,\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\sin(x^n)}{x^m}\,\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\cos(x^n)}{x^m}\,\mathrm{d}x.$$

Vzorec [$a\in R$]	Platnosť	Vzorec [$a\in R$]	Platnosť
$\int \mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + c,$	$x\in R$	$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,$	$a\neq -1,\ x\in R-\{0\}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + c,$	$x\in R-\{0\}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + c,$	$f(x)\neq 0,\ x\in D(f)$
$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c,$	$a>0,\ a\neq 1,\ x\in R$
$\int \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$	$\int \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotg} ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R,$ $x\neq \frac{k\pi}{a},\ k\in Z$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R,$ $x\neq \frac{(2k+1)\pi}{2a},\ k\in Z$
$\int \sinh ax\,\mathrm{d}x = \frac{\cosh ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$	$\int \cosh ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotgh} ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R-\{0\}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{tgh} ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c_1 = -\frac{1}{a}\operatorname{arccotg}\frac{x}{a} + c_2,$	$a\neq 0,\ x\in R$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c,$	$a\neq 0,\ x\in R-\{\pm a\}$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_1 = -\arccos\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_2,$	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}},$ $a\neq 0,\ x\in(-\lvert a\rvert\,;\,\lvert a\rvert)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c,$	$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}},$ $a\neq 0,\ x\in(-\infty\,;\,-\lvert a\rvert)\cup(\lvert a\rvert\,;\,\infty)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c,$	$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}},$ $a\neq 0,\ x\in R$

Tabuľka 2.3.3: Neurčité integrály základných elementárnych funkcií

Základom integovania je rozklad integrandov na jednoduchšie funkcie a transformácia integrandov na iné, ľahšie integrovateľné funkcie (per partes, substitúcia). Niekedy môžeme integrál dopredu odhadnúť a bez integrovania dopočítať neznáme parametre (metóda neurčitých koeficientov). Jednotlivé metódy môžeme navzájom kombinovať. Existujú aj tabuľky integrálov [56] a softvérové aplikácie na symbolické výpočty (`Maxima`, `Maple`, `Wolfram Mathematica`, ...), ktoré môžeme pri výpočte integrálov použiť. Ale aby sme tieto pomôcky mohli účinne využiť, musíme vedieť integrovať.

Ak sú F, G primitívne funkcie k funkciám f, g na intervale I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$, potom môžeme integrovanie funkcie $af(x) + bg(x)$ rozložiť (**metóda rozkladu**) a platí:

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x) + bG(x) + c, \ \ x \in I, \ c \in R.$$

Príklad 2.3.1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \big(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\big)\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$, pričom[16] $x \in R$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$, $c \in R$. ■

Pri výpočte integrálov sa často používa **metóda per partes**, ktorá je prakticky obráteným postupom k derivovaniu súčinu $[uv]' = u'v + uv'$, t. j. $\int uv' = \int [uv]' - \int u'v$. Ak majú funkcie u, v spojité derivácie u', v' na intervale I, potom platí:

$$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x, \ \ x \in I.$$

Často sa využíva taktiež **metóda substitúcie**. Ak je F primitívna k f na intervale I a vykonáme substitúciu $x = \varphi(t)$, $t \in J$, $\varphi(J) \subset I$, potom pre deriváciu zloženej funkcie (veta 2.2.5) platí $f(x) = [F(x)]' = [F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$, t. j.

$$\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c, \ \ t \in J, c \in R.$$

Je samozrejmé, že pre všetky $t \in J$ musí existovať $\varphi'(t)$. Substitúcia $x = \varphi(t)$ je v tomto prípade zvolená tak, aby sme nemuseli používať inverznú substitúciu.

Ak navyše pre všetky $t \in J$ platí $\varphi'(t) \neq 0$ a existuje inverzná funkcia $t = \varphi^{-1}(x)$, potom môžeme predchádzajúci vzťah rozšíriť:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + c = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + c, \ \ x \in I, c \in R,$$

pričom funkcia $G(t)$ je primitívna k funkcii $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ na intervale J, resp. $G\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I.

Príklad 2.3.2. $\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c$, $x > 0$, $c \in R$.

$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+1} = \left[\begin{array}{cc} t = x^4, & x \in R \\ 4x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t, & t \in R \end{array}\right] = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^4 + c$, $x \in R$, $c \in R$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{c} x = \sin t, \ t = \arcsin x, \quad (\sin t)' = \cos t \neq 0, \quad x \in (-1\,;\,1), \quad t \in \big(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\big) \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t = t + c = \arcsin x + c, \ x \in (-1\,;\,1), \ c \in R. \ ■$$

[16]Namiesto zápisu $\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ sa tiež používa $\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$.

Pri integrovaní sa často rôzne metódy kombinujú, pričom ich niekedy treba použiť aj viackrát za sebou. Ak použijeme pri integrovaní rôzne postupy, môžeme dospieť „k zdanlivo rôznym výsledkom“. Ale zdanie klame. Pokiaľ sme sa nepomýlili, **výsledky musia byť rovnaké**, môžu byť vyjadrené v rôznych tvaroch a líšiť sa môžu iba o integračnú konštantu. O správnosti sa presvedčíme napríklad spätným derivovaním výsledku.

2.3.2 Riemannov určitý integrál

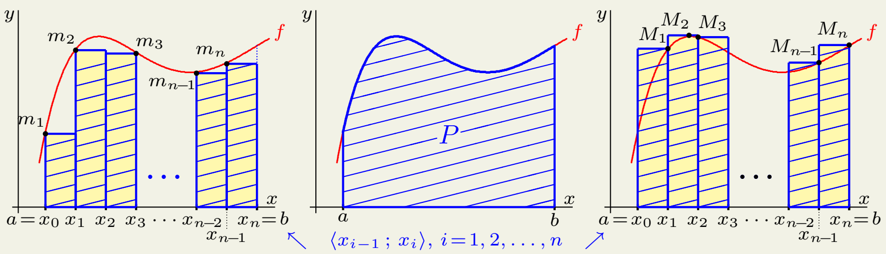
V tejto časti sa budeme zaoberať určitým integrálom funkcie, ktorý na rozdiel od neurčitého integrálu nie je funkcia, ale konkrétna hodnota (číslo alebo $\pm\infty$). Určitý integrál môžeme definovať viacerými spôsobmi. V tejto časti zjednodušene vysvetlíme pojem **Riemannovho** (**určitého**) **integrálu**, ktorý sa definuje pomocou tzv. integrálnych súčtov, ukážeme spôsoby ako ho vypočítať a možnosti, kde sa dá využiť.

Príklad 2.3.3. Nech $f(x)$, $x \in \langle a\,;\, b\rangle$ je kladná spojitá funkcia, $a, b \in R$, $a < b$. Určte plošný obsah množiny[17] $P = \big\{[x;y] \in R^2 : x \in \langle a\,;\, b\rangle\,, 0 \leq y \leq f(x)\big\}$ (obr. 2.3.21 v strede).

Riešenie.
S našimi doterajšími vedomosťami môžu byť pri určovaní obsahu P problémy. Plochu P môžeme približne nahradiť (aproximovať) neprekrývajúcimi sa obdĺžnikmi a odhadnúť ju pomocou súčtu ich obsahov (na obrázku sú aproximácie zdola a zhora).
Rozdeľme $\langle a\,;\, b\rangle$ pomocou bodov $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $n \in N$ na n intervalov s rovnakou dĺžkou $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Minimum a maximum funkcie f na každom z týchto intervalov označme m_i a M_i. Plochu P môžeme potom odhadnúť zhora a zdola hodnotami:

$$D_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x \leq P \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x = H_P.$$

Je zrejmé, že pre $\Delta x \to 0$ bude platiť $D_P \to P \leftarrow H_P$. ■



Obr. 2.3.21: Krivočiary lichobežník P určený funkciou f na intervale $\langle a;\, b\rangle$ a jeho aproximácia pomocou dolných a horných integrálnych súčtov

Delením intervalu $\langle a\,;\, b\rangle$, $a < b$, nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}\,,\ n \in N,$$

[17] Množinu P nazývame **krivočiary lichobežník** určený funkciou f a intervalom $\langle a\,;\, b\rangle$.

takú, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Body x_0, x_1, …, x_n sa nazývajú **deliace** a jednoznačne určujú delenie D. Dĺžky intervalov $d_i = \langle x_{i-1}\,;\, x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$ (nemusia byť rovnako dlhé) označujeme Δx_i, pre ich súčet platí $\Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n = b - a$. Číslo $\mu(D) = \max\{\Delta x_i : i=1,2,\ldots,n\}$ nazývame **norma delenia D**. Ak platí $D \subset D^*$, potom delenie D^* nazývame **zjemnenie delenia D**. Množinu obsahujúcu všetky delenia intervalu $\langle a\,;\, b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$.

Poznámka 2.3.2. *Každé delenie D má nekonečne veľa zjemnení. Ak $x \in \langle a\,;\, b\rangle$ je ľubovoľný bod, ktorý nepatrí do D, potom $D \cup \{x\}$ je zjemnením D.*
Je zrejmé, že $D^* \cup D^\star$ je (spoločným) zjemenením oboch delení D^*, $D^\star$.

Nech $f(x)$ je ohraničená funkcia na intervale $\langle a\,;\, b\rangle$, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n \in N$. Označme $m = \inf\{f(x) : x \in \langle a\,;\, b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in \langle a\,;\, b\rangle\}$, $m_i = \inf\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}\,;\, x_i\rangle\}$, $M_i = \sup\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}\,;\, x_i\rangle\}$ pre $i = 1,2,\ldots,n$. Potom čísla[18]

$$S_D(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i, \quad \text{resp. } S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i.$$

nazývame **dolný**, resp. **horný Riemannov súčet** funkcie f pri delení D.

Z konštrukcie Riemannových súčtov vyplýva, že ak zjemníme delenie, potom sa dolný súčet nezmenší (zväčší) a horný súčet nezväčší (zmenší). T. j. pre $D \subset D^*$ platí

$$m(b-a) \le S_D(f,D) \le S_D(f,D^*) \le S_H(f,D^*) \le S_H(f,D) \le M(b-a).$$

Ak uvážime poznámku 2.3.2, potom pre každé dve delenia $D^*, D^\star \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ platí

$$S_D(f,D^*) \le S_D(f,D^{*\star}) \le S_H(f,D^{*\star}) \le S_H(f,D^\star) \;\Rightarrow\; S_D(f,D^*) \le S_H(f,D^\star),$$

kde $D^{*\star} = D^* \cup D^\star$. To znamená, že množina všetkých dolných súčtov je ohraničená zhora, množina všetkých horných súčtov je ohraničená zdola a **vždy existujú čísla**

$$S_D(f,\langle a\,;\,b\rangle) = \sup\left\{S_D(f,D) : D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\right\}, \quad S_H(f,\langle a\,;\,b\rangle) = \inf\left\{S_H(f,D) : D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\right\}.$$

Nerovnosť $S_D(f,\langle a\,;\,b\rangle) \le S_H(f,\langle a\,;\,b\rangle)$ je splnená vždy. Ak platí rovnosť, potom číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_D(f,\langle a\,;\,b\rangle) = S_H(f,\langle a\,;\,b\rangle)$$

nazývame **Riemannov (určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$**. Ak existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, potom f nazývame **riemannovsky integrovateľná na $\langle a\,;\,b\rangle$** a označujeme $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$. Je zrejmé, že ak $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, potom pre $\langle c\,;\,d\rangle \subset \langle a\,;\,b\rangle$ tiež platí $f \in R_{\langle c\,;\,d\rangle}$.

Príklad 2.3.4. Uvažujme Dirichletovu funkciu $\chi(x) = \begin{cases} 1, \; x \in \langle 0\,;\,1\rangle, \; x \in Q, \\ 0, \; x \in \langle 0\,;\,1\rangle, \; x \notin Q. \end{cases}$
Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0\,;\,1\rangle}$, $n \in N$ a každé $i = 1,2\ldots,n$ platí $m_i = 0$, $M_i = 1$ a teda

$$S_D(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0, \quad S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1.$$

To znamená, že $S_D(\chi,\langle 0\,;\,1\rangle) = 0$, $S_H(\chi,\langle 0\,;\,1\rangle) = 1$, t. j. $\int_0^1 \chi(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje. ■

---

[18] $m(b-a) = m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = M(b-a).$

Ak $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ a pre postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$, potom

$$\lim_{k\to\infty} \big[S_H(f, D_k) - S_D(f, D_k)\big] = 0, \quad \text{t. j.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k).$$

Uvažujme delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n \in N$. Na každom z čiastkových intervalov zvoľme ľubovoľné $t_i \in \langle x_{i-1}\,;\, x_i\rangle$. Pre tieto body platí $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom pre každú voľbu bodov t platí

$$S_D(f, D) \leq S_T(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i \leq S_H(f, D).$$

Číslo $S_T(f, D)$ nazývame **Riemannovým** (**integrálnym**) **súčtom** funkcie f pri delení D a voľbe bodov $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.

Ak $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ a zvolíme $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ tak, aby $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$, potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k).$$

Delenia $D_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k\}$, $k \in N$ môžeme voliť napríklad ako v príklade 2.3.3, t. j. $\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{k}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ (interval rozdelíme na rovnako dlhé podintervaly).

Poznámka 2.3.3. *Vo všeobecnosti nie je každá funkcia riemannovsky integrovateľná, ale **každá spojitá funkcia $f(x)$, $x \in \langle a\,;\, b\rangle$ je riemannovsky integrovateľná**. Taktiež **každá monotónna funkcia na $\langle a\,;\, b\rangle$ je riemannovsky integrovateľná**.*

Geometricky predstavuje Riemannov určitý integrál na intervale $\langle a\,;\, b\rangle$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a\,;\, b\rangle$. Pod osou x (t. j. ak je f záporná) je táto plocha záporná. Hodnota Riemannovho integrálu je závislá od integrovanej funkcie, ale aj od intervalu integrovania $\langle a\,;\, b\rangle$.

Ak $f, g \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $c \in R$, potom cf, $f+g$, $|f|$, $fg \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b \big[f(x) + g(x)\big]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

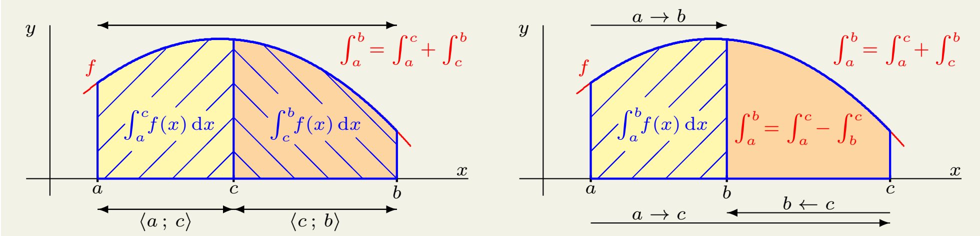
Ak je navyše g kladná, resp. záporná na intervale $\langle a\,;\, b\rangle$, potom $f/g \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$. Ak je funkcia $x = \varphi(t) \in R_{\langle \alpha\,;\,\beta\rangle}$, potom zložená funkcia $f(\varphi) \in R_{\langle \alpha\,;\,\beta\rangle}$.

Riemannov integrál má niektoré zaujimavé vlastnosti:

- **Nezápornosť.** $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre $x \in \langle a\,;\, b\rangle$, potom $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- **Monotónnosť.** $f, g \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $f(x) \leq g(x)$ pre $x \in \langle a\,;\, b\rangle$, potom $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
- **Aditívnosť.** $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $c \in (a\,;\, b)$ práve vtedy, ak $f \in R_{\langle a\,;\,c\rangle}$, $f \in R_{\langle c\,;\,b\rangle}$ a platí
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ \text{ (obr. 2.3.22 vľavo).}$$

Riemannov integrál môžeme definovať aj pre $a \geq b$. To znamená, že dolná hranica integrovania **môže byť väčšia** ako horná hranica. Označenie $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ bude naďalej znamenať riemannovsku integrovateľnosť na $\langle a\,;\, b\rangle$, t. j. pre $a < b$. Pre $a, b \in R$ definujeme

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \text{ pre všetky } f, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \text{ pre } a \geq b \text{ pokiaľ } f \in R_{\langle b\,;\,a\rangle}.$$



Obr. 2.3.22: Aditívnosť integrálu

Aditívnosť integrálu nie je závislá na vzájomnej polohe bodov a, b, c (obr. 2.3.22 vpravo).[19] Ak $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, potom z uvedenej definície vyplýva vzťah $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Pojem Riemannovho integrálu rozšírime na zjednotenie konečného počtu nedegenerovaných ohraničených intervalov $A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, $k \in N$, ktoré sú navzájom disjunktné, t. j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$. Ak je f riemannovsky integrovateľná na každom z nich, potom

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{I_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{I_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{I_k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazývame **Riemannov (určitý) integrál funkcie f na množine A**.

V praxi sa na výpočet určitého integrálu používa **Newton–Leibnizov vzorec**. Ak $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ a F je (ľubovoľná) primitívna funkcia k f na $\langle a\,;\,b\rangle$, potom platí a zapisujeme (konštanta c prislúchajúca k primitívnej funkcii sa nepíše)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

Príklad 2.3.5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[\cos x\Big]_0^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$ ■

Na určenie primitívnej funkcie môžeme použiť všetky poznatky a metódy z predchádzajúcej časti o neurčitom integráli. **Metódu per partes** môžeme upraviť a určitý integrál počítať priamo. Ak platí $u, v \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $u', v' \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, potom

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pri **metóde substitúcie** sa nemusíme vracať k pôvodným premenným, okrem integrandu sa transformujú aj hranice. Ak je f spojitá na intervale I, $x = \varphi(t)$, $t \in \langle\alpha\,;\,\beta\rangle$, $\varphi(\langle\alpha\,;\,\beta\rangle) \subset I$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, φ' je spojitá na $\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$, potom $f(\varphi)\varphi' \in R_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle}$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{pričom } \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b.$$

[19] Aditívnosť Riemannovho integrálu môžeme názorne ilustrovať na vektoroch. Integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ si môžeme predstaviť ako vektory $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$ na reálnej osi.

Príklad 2.3.6. $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\cos x & v=\sin x \end{array}\right] = \Big[x\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x =$

$$= \Big(2\pi\sin 2\pi - 0\cdot\sin 0\Big) - \Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} = 0 - \Big(-\cos 2\pi + \cos 0\Big) = -1+1=0.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{l|l} x=\sin t,\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & \sin\pi=0 \\ t\in\left\langle\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right\rangle,\ x\in\langle 0\,;\,1\rangle & \sin\frac{\pi}{2}=1 \end{array}\right] = \int_1^0 x^3\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{x^4}{4}\Big]_1^0 = 0-\tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{4}. \blacksquare$$

Ak $f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ a použijeme substitúciu $x=\varphi(t)=-t$, potom $f\in R_{\langle -b\,;\,-a\rangle}$ a platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} x=-t,\ x\in\langle a\,;b\rangle,\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t \\ t\in\langle -b\,;-a\rangle,\, a\mapsto -a,\, b\mapsto -b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

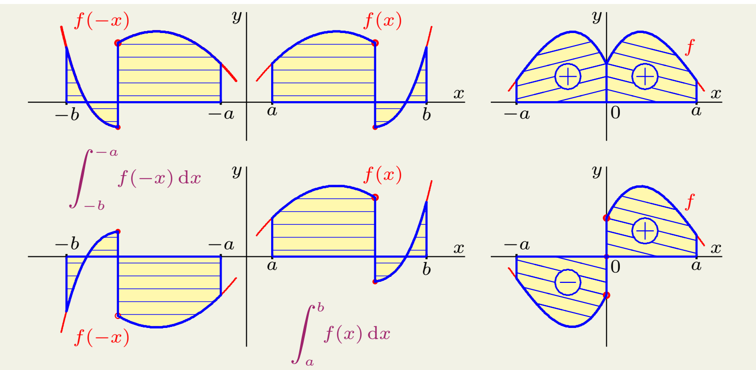
f je párna: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

f je nepárna: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a}\big[-f(x)\big]\,\mathrm{d}x = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Príklad 2.3.7. $f\in R_{\langle -a\,;\,a\rangle}$, $a>0$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

f je párna: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{-(-a)} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

f je nepárna: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{-(-a)} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \blacksquare$

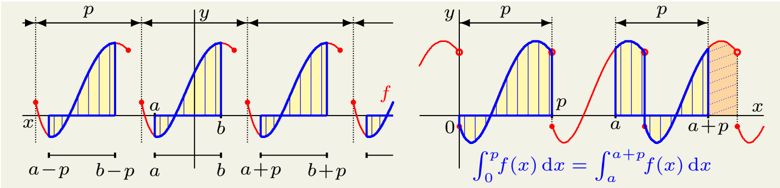


Obr. 2.3.23: Integrovanie párnej a nepárnej funkcie

Ak $f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ je periodická s periódou $p>0$, $k\in Z$, potom $f\in R_{\langle a+kp\,;\,b+kp\rangle}$ a platí:

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x=t+kp,\quad \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \\ x\in\langle a+kp\,;b+kp\rangle,\ t\in\langle a\,;b\rangle \\ a+kp\mapsto a,\quad b+kp\mapsto b \end{array}\right] = \int_a^b f(t+kp)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

t. j. hodnota Riemannovho integrálu funkcie f je na každom intervale $\langle a+kp\,;\,b+kp\rangle$, $k\in Z$ rovnaká. Špeciálne platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$



Obr. 2.3.24: Integrovanie periodickej funkcie

V praxi v mnohých prípadoch nedokážeme primitívnu funkciu vyjadriť v jednoduchom tvare (str. 67), alebo jej vyjadrenie je priveľmi prácne, resp. neúčelné. Často (najmä pri technických výpočtoch) nám postačí približná hodnota, ktorá sa od presnej hodnoty nelíši viac ako maximálna (dovolená) chyba. V takýchto prípadoch používame na výpočet Riemannovho integrálu **približné**, tzv. **numerické metódy**. Numerické integrovanie sa niekedy v literatúre nazýva **numerická kvadratúra**. Uvedieme tri základné metódy.

Nech $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$. Delenie D_n, $n \in N$ zvoľme tak, aby rozdelilo $\langle a\,;\,b\rangle$ na n rovnako dlhých intervalov, t. j. $D_n = \big\{x_i = a + i\frac{b-a}{n}\big\}_{i=0}^{n}$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $\lim_{n\to\infty} \mu(D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0$. Pre zjednodušenie budeme značiť $y_i = f(x_i) = f(a + i\frac{b-a}{n})$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

- **Obdĺžniková metóda.** Integrál aproximujeme integrálnymi súčtami (geometricky predstavujú obdĺžniky). Potom pre voľbu $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ pre $n \to \infty$ platí

$$S_T(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(t_i) = \tfrac{b-a}{n}\big(f(t_1) + \cdots + f(t_n)\big) \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ak $t_i = x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $f(t_i) = f(x_{i-1}) = y_{i-1}$ (ľavé hranice intervalov), potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = \tfrac{b-a}{n}\big(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}\big).$$

Ak $t_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $f(t_i) = f(x_i) = y_i$ (pravé hranice intervalov), potom

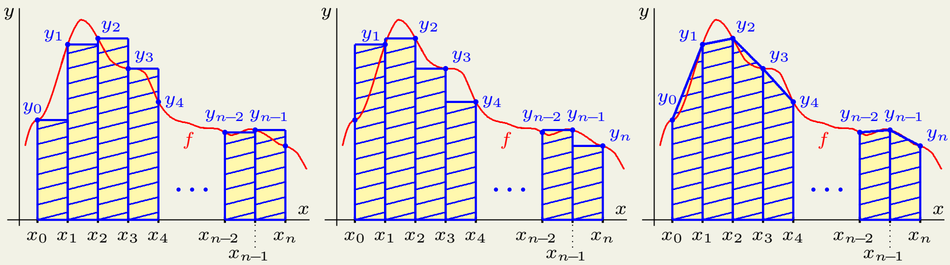
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = \tfrac{b-a}{n}\big(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\big).$$

Ak je f' ohraničená, potom pre chybu oboch vzorcov platí $R_n \leq \delta_1 \frac{(b-a)^2}{n}$, pričom $|f'(x)| \leq \delta_1$ pre $x \in \langle a\,;\,b\rangle$.

- **Lichobežníková metóda.** Integrál aproximujeme pomocou lichobežníkov, ktoré sú určené intervalmi $\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$ (výška) a hodnotami y_{i-1}, y_i (základne). Ich obsahy sa rovnajú $P_i = \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x = \frac{b-a}{2n}(y_{i-1} + y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) = \tfrac{b-a}{2n}\big(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\big).$$

Ak je f'' ohraničená, pre chybu platí $R_n \leq \delta_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$, pričom $|f''(x)| \leq \delta_2$ pre $x \in \langle a\,;\,b\rangle$.



Obr. 2.3.25: Obdĺžniková metóda (ľavé a pravé body), lichobežníková metóda

- **Simpsonova metóda.** Potrebujeme párny počet deliacich intervalov, t. j. n musí byť párne. Funkciu f nahrádzame na $\langle x_{2i-2}\,;\,x_{2i}\rangle$, $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$ kvadratickou funkciou (parabolou), ktorá prechádza bodmi y_{2i-2}, y_{2i-1}, y_{2i}. Platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{3n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}) =$$
$$= \tfrac{b-a}{3n}\big(y_0+4y_1+2y_2+4y_1+2y_2+\cdots+4y_{n-3}+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\big).$$

Ak je $f^{(4)}$ ohraničená, pre chybu platí $R_n \le \delta_4\frac{(b-a)^5}{180n^4}$, pričom $\left|f^{(4)}(x)\right| \le \delta_4$ pre $x\in\langle a\,;\,b\rangle$.

Príklad 2.3.8. $\displaystyle\int_1^2 \tfrac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0,693147.$

$f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in\langle 1\,;\,2\rangle$, použijeme delenie $D=\big\{1+\frac{i}{10}\big\}_{i=0}^{10} \subset D_{\langle 1\,;\,2\rangle}$, t. j. 10 intervalov. Platí $x_i = 1+\frac{i}{10} = \frac{10+i}{10}$, $y_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i} = \frac{10}{10+i}$, $i=0,1,2,\ldots,10$, t. j. $y_0=\frac{10}{10}=1,000000$, $y_1=\frac{10}{11}=0,909091$, $y_2=\frac{10}{12}=0,833333$, …, $y_9=\frac{10}{19}=0,526316$, $y_{10}=\frac{10}{20}=0,500000$.

Obdĺžniková metóda. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $|f'(x)| \le 1 = \delta_1$ pre $x\in\langle 1\,;\,2\rangle$, t. j. predpovedaná chyba výpočtu je $R_{10} \le 1\frac{(2-1)^2}{10} = 0,1$ (najprv ľavé a potom pravé hranice intervalov).

$$\int_1^2 \tfrac{\mathrm{d}x}{x} \approx \tfrac{2-1}{10}(1,000000+0,909091+0,833333+\cdots+0,526316) = 0,718772.$$

Skutočná chyba výpočtu je $|0,718772-0,693147| = 0,025625$.

$$\int_1^2 \tfrac{\mathrm{d}x}{x} \approx \tfrac{2-1}{10}(0,909091+0,833333+\cdots+0,526316+0,500000) = 0,668772.$$

Skutočná chyba výpočtu je $|0,668772-0,693147| = 0,024375$.

Lichobežníková metóda. $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $|f''(x)| \le 2 = \delta_2$ pre $x\in\langle 1\,;\,2\rangle$, t. j. predpovedaná chyba výpočtu je $R_{10} \le 2\frac{(2-1)^3}{12\cdot 10^2} = 0,001667$.

$$\int_1^2 \tfrac{\mathrm{d}x}{x} \approx \tfrac{2-1}{2\cdot 10}(1,000000+2\cdot 0,909091+\cdots+2\cdot 0,526316+0,500000) = 0,693771.$$

Skutočná chyba výpočtu je $|0,693771-0,693147| = 0,000624$.

Simpsonova metóda $f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$, $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$, $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 24 = \delta_4$ pre $x \in \langle 1\,;\,2\rangle$, t. j. predpovedaná chyba výpočtu je $R_{10} \leq 24\frac{(2-1)^5}{180\cdot 10^4} = 0{,}000013$.

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \approx \frac{2-1}{3\cdot 10}(1{,}000000 + 4\cdot 0{,}909091 + 2\cdot 0{,}833333 + 4\cdot 0{,}769231 + \cdots$$
$$\cdots + 4\cdot 0{,}588235 + 2\cdot 0{,}555556 + 4\cdot 0{,}526316 + 0{,}500000) = 0{,}693150.$$

Skutočná chyba výpočtu je $|0{,}693150 - 0{,}693147| = 0{,}000003$. ■

Riemannov integrál sme definovali pre ohraničenú funkciu na ohraničenom intervale, preto ho tiež niekedy nazývame **vlastný Riemannov integrál**. V mnohých praktických aplikáciach (matematických, fyzikálnych, technických, ekonomických, ...) sa vyžaduje integrovanie na neohraničenom intervale a mnohokrát aj integrovanie funkcie, ktorá nie je ohraničená. Preto rozšírime pojem Riemannovho integrálu aj na tieto prípady a integrál budeme nazývať **nevlastný**.

Príklad 2.3.9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$

Primitívna funkcia $2\sqrt{x}$ je síce spojitá a ohraničená na $(0;\,1\rangle$, ale problém je v tom, že pôvodna funkcia $\frac{1}{\sqrt{x}}$ nie je na tomto intervale ohraničená a v bode 0 nie je definovaná. Ak zvolíme $\varepsilon \in (0\,;\,1)$ ľubovoľne, potom $\frac{1}{\sqrt{x}}$ je ohraničená na $\langle \varepsilon\,;\,1\rangle$ a platí (obr. 2.3.26)

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \implies \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right] = 2.$$

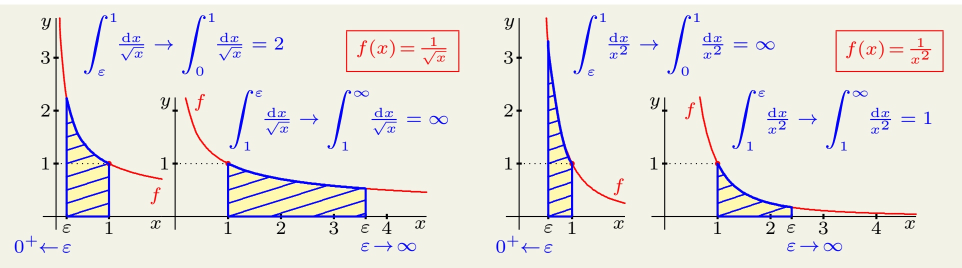
Na neohraničenom intervale $x \in \langle 1\,;\,\infty)$ môžeme analogicky zvoliť $\varepsilon \in (1\,;\,\infty)$, potom

$$\int_1^\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_1^\varepsilon = 2\sqrt{\varepsilon} - 2 \implies \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_1^\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \left[2\sqrt{\varepsilon} - 2\right] = \infty.$$

V nasledujúcom prípade je situácia analogická.

$$\varepsilon \in (0\,;\,1) \implies \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right] = \infty.$$

$$\varepsilon \in (1\,;\,\infty) \implies \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_1^\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to\infty} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + 1\right] = 1.\ ■$$



Obr. 2.3.26: Príklad 2.3.9

Nech $a, b \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$. Bod c nazývame **singulárny bod funkcie $f(x)$, $x \in (a\,;\, b)$ vplyvom funkcie**, ak je f neohraničená v nejakom okolí $O(c)$. Hraničné body ∞, resp. $-\infty$ nazývame **singulárne body funkcie f vplyvom hranice**. Ak má funkcia f aspoň jeden singulárny bod $c \in \langle a\,;\, b\rangle$, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sa nazýva **nevlastný integrál** (**vplyvom funkcie**, resp. **vplyvom hranice**).

Najprv budeme predpokladať, že má funkcia f práve jeden singulárny bod na hranici intervalu integrovania. Sú štyri možnosti.

Nevlastné integrály vplyvom hranice:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_a^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to-\infty} \int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{-\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nevlastné integrály vplyvom funkcie:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to b^-} \displaystyle\int_a^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x, & f \text{ je neohraničená v } O(b), \\ \lim\limits_{\varepsilon\to a^+} \displaystyle\int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x, & f \text{ je neohraničená v } O(a). \end{cases}$$

V takto definovanom nevlastnom integráli je zachovaná jedna zo základných vlastností Riemannovho integrálu – **aditívnosť**. Pre ľubovoľnú voľbu bodu $d \in (a\,;\, b)$, $a, b \in R^*$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 2.3.4. *Nevlastné integrály majú podobné vlastnosti ako vlastné Riemannove integrály. Na ich výpočet môžeme použiť rovnaké metódy a tiež Newton–Leibnizov vzorec. Ak použijeme zápis $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, potom $F(a)$, resp. $F(b)$ v singulárnych bodoch predstavuje príslušnú limitu, napríklad:*

$$\Big[\ln x\Big]_0^\infty = \ln\infty - \ln 0^+, \quad \text{t. j.}\ \Big[\ln x\Big]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \lim_{x\to 0^+} \ln x = \infty - (-\infty) = \infty.$$

Ak má $f(x)$, $x \in (a\,;\, b)$, $a, b \in R^*$ konečný počet singulárnych bodov $c_1, c_2, \ldots, c_k$, $k \in N$, $a \le c_1 < c_2 < \cdots < c_k \le b$, zvolíme (ľubovoľné) body $d_1, d_2, \ldots, d_k, d_{k+1}$, aby $a \le d_1 < c_1 < d_2 < c_2 < d_3 < \cdots < c_k < d_{k+1} \le b$. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{d_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d_1}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{d_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d_2}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots$$
$$\cdots + \int_{c_{k-1}}^{d_k} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d_k}^{c_k} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_k}^{d_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{d_{k+1}}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 2.3.5. *V budúcnosti nebudeme rozlišovať medzi zápismi vlastných a nevlastných integrálov. To znamená, že pri vyšetrovaní integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ musíme najprv nájsť všetky singulárne body funkcie f na intervale $(a\,;\, b)$, potom integrál rozdeliť na príslušné nevlastné integrály s jedným singulárnym bodom, a tie vypočítať.*

Príklad 2.3.10. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_{-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \big[-\cos x\big] - \lim\limits_{x\to-\infty} \big[-\cos x\big] \ldots \nexists.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} x \,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{x^2}{2}\Big]_{-\infty}^{0} + \Big[\tfrac{x^2}{2}\Big]_{0}^{\infty} = \big[0 - \tfrac{(-\infty)^2}{2}\big] + \big[\tfrac{\infty^2}{2} - 0\big] = -\infty + \infty \ldots \nexists.$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \begin{bmatrix} 0 \ldots \text{ singulárny bod} \\ \text{vplyvom funkcie} \end{bmatrix} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{0}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{0} + \Big[\ln|x|\Big]_{0}^{2} =$$
$$= (\ln 0^{+} - \ln 1) + (\ln 2 - \ln 0^{+}) = (-\infty - 0) + (\ln 2 - (-\infty)) = -\infty + \infty \ldots \nexists.$$

$$\int_{0}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = \Big[x \ln x\Big]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \mathrm{d}x = 1 \cdot \ln 1 - \lim_{x\to 0^{+}} x \ln x - \int_{0}^{1} \mathrm{d}x =$$
$$= \Big[\lim_{x\to 0^{+}} x \ln x = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0^{+}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^{+}} x = 0\Big] = -\int_{0}^{1} \mathrm{d}x = -\Big[x\Big]_{0}^{1} = -1. \blacksquare$$

Príklad 2.3.11. Vypočítajte $I_n = \int_{0}^{\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

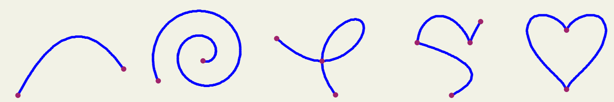
Riešenie.

$$I_0 = \int_{0}^{\infty} x^0 \,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{0}^{\infty} = -\mathrm{e}^{-\infty} + \mathrm{e}^{0} = 0 + 1 = 1 = 0!.$$

$$I_n = \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^{-x} & v = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right] = \Big[-x^n \,\mathrm{e}^{-x}\Big]_{0}^{\infty} + n\int_{0}^{\infty} x^{n-1} \,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \Big[\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0\Big] =$$
$$= -0 + 0^n \cdot \mathrm{e}^0 + n\int_{0}^{\infty} x^{n-1} \,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n!\, I_0 = n!. \blacksquare$$

Z geometrického hľadiska predstavuje Riemannov určitý integrál (vlastný i nevlastný) plochu krivočiareho lichobežníka. To znamená, že určitý integrál môžeme použiť na výpočet obsahov rovinných útvarov. Pomocou Riemannovho integrálu môžeme vypočítať nielen obsahy týchto útvarov, ale aj ich obvody, statické momenty, prípadne ťažiská. Tiež môžeme vypočítať objemy a povrchy telies, ktoré vzniknú ich rotáciou v priestore.

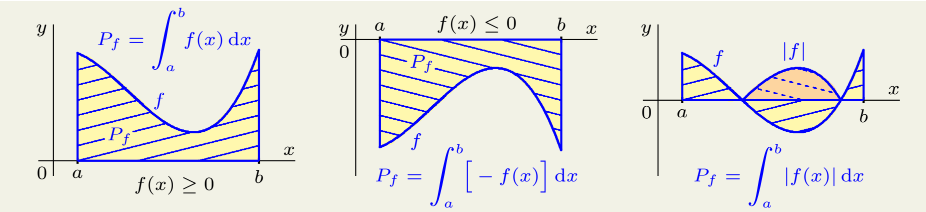
Vo všeobecnosti môžeme plochy v rovine ohraničiť grafmi reálnych funkcií alebo krivkami. Názorne si môžeme krivku predstaviť ako (obvykle spojitú) čiaru v rovine s určitými vlastnosťami, napr. ako dráhu nejakého pohybu hmotného bodu. Pri krivke môže byť priradených jednému vzoru x viacero obrazov y. To znamená, že ju môžeme rozdeliť na niekoľko funkcií. Krivky sa najčastejšie sa vyjadrujú parametricky pomocou pomocných funkcií. Množina $f = \{[x; y] \in R^2 : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in J\}$, pričom $\varphi, \psi \colon J \to R$ sú spojité funkcie a J je interval, sa nazýva **parametrické vyjadrenie krivky** f.



Obr. 2.3.27: Príklady kriviek v rovine

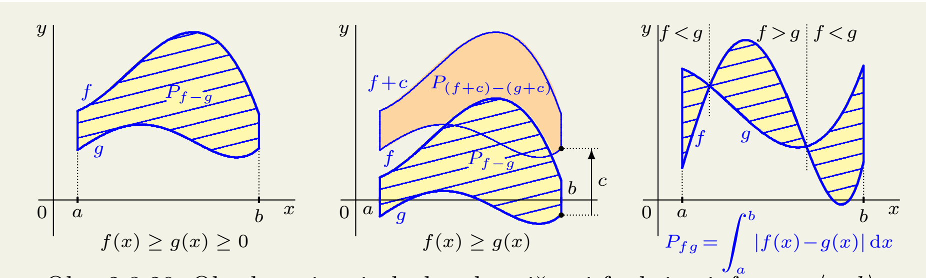
Poznámka 2.3.6. *V ďalších úvahách budeme predpokladať, že funkcia $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, resp. je parametrizovaná spojitými funkciami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, pričom $\varphi'(t) > 0$ (φ je rastúca), $J = \langle \alpha\,;\,\beta\rangle$, resp. $\varphi'(t) < 0$ (φ je klesajúca), $J = \langle \beta\,;\,\alpha\rangle$.*

- **Obsah rovinnej plochy** ohraničenej funkciou, resp. krivkou je vždy kladný.
  Pre obsah plochy P_f ohraničenej funkciou $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ a osou x na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ platí
  $$P_f = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left[\begin{matrix}\text{subst. } x = \varphi(t)\\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\end{matrix}\right] = \int_\alpha^\beta |\psi(t)|\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(obr. 2.3.28).}$$



Obr. 2.3.28: Obsah rovinnej plochy ohraničenej funkciou f a osou x na $\langle a;\, b\rangle$

Pre obsah plochy P_{fg} ohraničenej funkciami $f, g \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ platí[20]
$$P_{fg} = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \text{(obr. 2.3.29).}$$



Obr. 2.3.29: Obsah rovinnej plochy ohraničenej funkciami f, g na $\langle a;\, b\rangle$

Príklad 2.3.12. Určte obsah plochy P ohraničenej funkciou $y = \sin x$, $x \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$ a osou x.

Riešenie.
$P = \int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} = -1-(-1) = 0.$ — Nesprávne, plochy sa vynulujú.
$$P = \int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} \big(-\sin x\big)\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_\pi^{2\pi} =$$
$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = -(-1)+1+1-(-1) = 4 \quad \text{(obr. 2.3.30).} \ \blacksquare$$

Príklad 2.3.13. Odvoďte vzorec pre obsah P kruhu K s polomerom $r>0$ (obr. 2.3.31).

Riešenie.
Explicitne je kruh K ohraničený funkciami $f(x) = \pm\sqrt{r^2-x^2}$, $x \in \langle -r\,;\,r\rangle$.

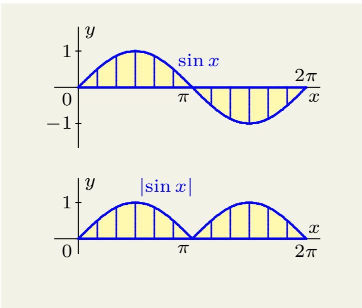
[20] Na obrázku vľavo je situácia pre $f(x) \geq g(x) \geq 0$. V prípade $f(x) \geq g(x)$ sa plocha pre posunuté funkcie $f(x)+c \geq g(x)+c$ nezmení, iba sa obrázok posunie o hodnotu c v kladnom smere osi y.

$$P = \int_{-r}^{r} \Big[\sqrt{r^2-x^2} - \big(-\sqrt{r^2-x^2}\big)\Big]\,\mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 2\Big[\tfrac{r^2}{2}\arcsin\tfrac{x}{r} + \tfrac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}\Big]_{-r}^{r} = 2\Big[\tfrac{r^2}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2} + 0 - \tfrac{r^2}{2}\cdot\tfrac{-\pi}{2} - 0\Big] = \pi r^2.$$

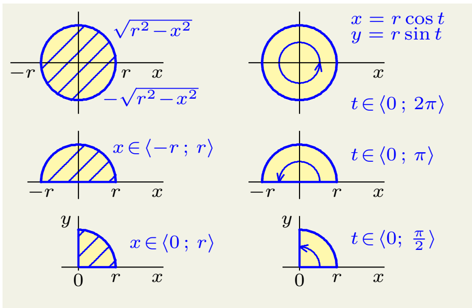
Parametricky je kruh K ohraničený uzavretou krivkou $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$.

$$P = \int_{0}^{2\pi} \Big| r\cos t \cdot \big[r\sin t\big]' \Big|\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{2\pi} \big| r^2\cos^2 t \big|\,\mathrm{d}t = r^2\int_{0}^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$
$$= r^2\int_{0}^{2\pi} \tfrac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = r^2\Big[\tfrac{t}{2} + \tfrac{\sin 2t}{4}\Big]_{0}^{2\pi} = r^2\Big[\tfrac{2\pi}{2} + 0 - 0 - 0\Big] = \pi r^2.$$

Obsah môžeme vypočítať aj ako dvojnásobok polkruhu, resp. štvornásobok štvrťkruhu. ■



Obr. 2.3.30: Príklad 2.3.12



Obr. 2.3.31: Príklad 2.3.13

- **Objem rotačného telesa — funkcia f rotuje okolo osi x**

  Ak necháme rotovať okolo osi x krivočiary lichobežník (plochu) určený funkciou f a intervalom $\langle a\,;\,b\rangle$, vznikne v priestore xyz rotačné teleso, ktoré má objem[21]

$$V_x = \pi\int_{a}^{b} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c}\text{subst.}\quad x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right] = \pi\int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

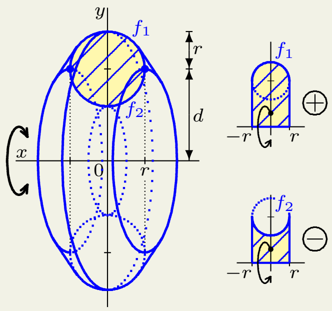
Príklad 2.3.14. Vypočítajte objem anuloidu s polomermi $d \pm r$, $d > r > 0$.

Riešenie.

Anuloid vznikne rotáciou kružnice s polomerom $r > 0$ okolo priamky vzdialenej od jej stredu o hodnotu d (obr. 2.3.32). Jeho objem vypočítame ako rozdiel objemov telies, ktoré vzniknú rotáciami polkružníc $f_{1,2}(x) = d \pm \sqrt{r^2-x^2}$, $x \in \langle -r\,;\,r\rangle$ okolo osi x. Platí:

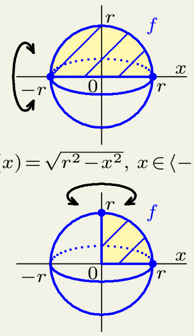
$$V = \pi\int_{-r}^{r} f_1^2(x)\,\mathrm{d}x - \pi\int_{-r}^{r} f_2^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_{-r}^{r} \big[f_1^2(x) - f_2^2(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \pi\int_{-r}^{r} \Big[\big(d + \sqrt{r^2-x^2}\big)^2 - \big(d - \sqrt{r^2-x^2}\big)^2\Big]\,\mathrm{d}x =$$
$$= \pi\int_{-r}^{r} \Big[\big(d^2 + 2d\sqrt{r^2-x^2} + r^2-x^2\big) - \big(d^2 - 2d\sqrt{r^2-x^2+r^2-x^2}\big)^2\Big]\,\mathrm{d}x =$$

[21] Je zrejmé, že nezáleží na tom, či je funkcia f kladná alebo záporná. Pri rotácii funkcií f, $-f$, resp. $|f|$ vznikne rovnaké teleso.



$f_{1,2}(x) = d \pm \sqrt{r^2 - x^2},\ x \in \langle -r\,;\, r \rangle$

Obr. 2.3.32: Anuloid (príklady 2.3.14, 2.3.19)



$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2},\ x \in \langle 0\,;\, r \rangle$

Obr. 2.3.33: Objem gule rotácia okolo osi x a y

$$= 4\pi d \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = 4\pi d \Big[\tfrac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2} + \tfrac{r^2}{2} \arcsin \tfrac{x}{|r|} \Big]_{-r}^{r} =$$
$$= 4\pi d \big[0 + \tfrac{r^2}{2} \arcsin \tfrac{r}{r} - 0 - \tfrac{r^2}{2} \arcsin \tfrac{-r}{r} \big] = 4\pi d \big[\tfrac{r^2}{2} \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{r^2}{2} \tfrac{-\pi}{2} \big] = 2\pi^2 d r^2. \ \blacksquare$$

Príklad 2.3.15. Odvoďte vzorec pre objem V gule G s polomerom $r > 0$.

Riešenie.
Guľa G vznikne rotáciou polkružnice $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r\,;\, r \rangle$ okolo osi x (obr. 2.3.33):

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \big(\sqrt{r^2 - x^2} \big)^2\, \mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, \mathrm{d}x = \pi \Big[r^2 x - \tfrac{x^3}{3} \Big]_{-r}^{r} = \pi \big[r^3 - \tfrac{r^3}{3} + r^3 - \tfrac{r^3}{3} \big] = \tfrac{4\pi r^3}{3}. \ \blacksquare$$

- **Objem rotačného telesa — funkcia f rotuje okolo osi y**

  Ak necháme rotovať okolo osi y krivočiary lichobežník (plochu) určený funkciou f a intervalom $\langle a\,;\, b \rangle$, vznikne v priestore xyz rotačné teleso, ktoré má objem

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\, |f(x)|\, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \text{subst.} & x = \varphi(t) \\ & \mathrm{d}x = \varphi'(t)\, \mathrm{d}t \end{bmatrix} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, |\psi(t)|\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Príklad 2.3.16. Objem gule (jej polovicu) s polomerom $r > 0$ môžeme vypočítať aj pomocou rotácie štvrťkružnice $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle 0\,;\, r \rangle$ okolo osi y (obr. 2.3.33). Platí

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} -x^2 = t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ -2x\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t & x = r \Rightarrow t = -r^2 \end{array} \right] = -2\pi \int_0^{-r^2} \sqrt{r^2 + t}\, \mathrm{d}t =$$
$$= -2\pi \int_0^{-r^2} (t + r^2)^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t = -2\pi \Big[\tfrac{(t + r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big]_0^{-r^2} = -\tfrac{4\pi}{3} \Big[0 - r^3 \Big] = \tfrac{4\pi r^3}{3}. \ \blacksquare$$

- **Dĺžka krivky**

  Pre dĺžku krivky $d(f)$, resp. grafu funkcie f (napr. obvod kružnice) platí

$$d(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \text{subst.} & x = \varphi(t) \\ & \mathrm{d}x = \varphi'(t)\, \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t.$$

Príklad 2.3.17. Odvoďte vzorec pre obvod o kružnice K s polomerom $r>0$.

Riešenie.
K sa skladá z polkružníc $\pm f(x) = \pm\sqrt{r^2-x^2}$, $x \in \langle -r\,;\, r\rangle$, ktorých dĺžka je rovnaká. Platí $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}$, $1+[f'(x)]^2 = 1+\frac{x^2}{r^2-x^2} = \frac{r^2}{r^2-x^2}$, $\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$, potom

$$o = 2\int_{-r}^{r} \frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}} = 2r\int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}} = 2r\Big[\arcsin\frac{x}{r}\Big]_{-r}^{r} = 2r\big[\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{-\pi}{2}\big] = 2\pi r.$$

Parametricky je kružnica K definovaná rovnicami $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$ a platí

$$o = \int_0^{2\pi} \sqrt{\big[-r\sin t\big]^2 + \big[r\cos t\big]^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\,\mathrm{d}t = r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi r. \ \blacksquare$$

- **Povrch rotačného telesa — funkcia f rotuje okolo osi x**

  Ak necháme rotovať okolo osi x krivku f, vytvorí v priestore xyz rotačnú plochu. Pre obsah tejto rotačnej plochy P_x, t. j. povrch plášťa (bez podstáv) takto vzniknuvšieho rotačného telesa platí

$$P_x = 2\pi\int_a^b |f(x)|\,\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_\alpha^\beta |\psi(t)|\,\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Príklad 2.3.18. Odvoďte vzorec pre povrch S gule G s polomerom $r>0$.

Riešenie.
Guľa G vznikne rotáciou polkružnice $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\langle -r\,;\,r\rangle$ okolo osi x (pr. 2.3.17)

$$S = 2\pi\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,\frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}} = 2\pi r\int_{-r}^{r} \mathrm{d}x = 2\pi r\Big[x\Big]_{-r}^{r} = 2\pi r\big[r-(-r)\big] = 4\pi r^2.$$

V parametrickom tvare má polkružnica f tvar $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$ a platí

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} |r\sin t|\,\sqrt{\big[-r\sin t\big]^2+\big[r\cos t\big]^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi r\int_0^{\pi} \sin t\,\sqrt{r^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2\pi r^2\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2\pi r^2\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = -2\pi r^2\Big[\cos t\Big]_0^{\pi} = -2\pi r^2\big[-1-1\big] = 4\pi r^2. \ \blacksquare$$

Príklad 2.3.19. Vypočítajte povrch anuloidu s polomermi $d\pm r$, $d>r>0$.

Riešenie.
Anuloid vznikne rotáciou kružnice s polomerom $r>0$ okolo priamky vzdialenej od jej stredu o hodnotu d (obr. 2.3.32). Jeho povrch vypočítame ako súčet plôch telies, ktoré vzniknú rotáciami polkružníc $f_{1,2}(x) = d\pm\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\langle -r\,;\,r\rangle$ okolo osi x.
Platí $|f_1|+|f_2| = f_1+f_2 = 2d$ a na základe príkladu 2.3.17 aj $f'_{1,2}(x) = \frac{\mp x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$, potom

$$P = 2\pi\int_{-r}^{r} |f_1|\,\sqrt{1+[f_1'(x)]^2}\,\mathrm{d}x + 2\pi\int_{-r}^{r} |f_2|\,\sqrt{1+[f_2'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-r}^{r} \frac{(|f_1|+|f_2|)r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}} =$$
$$= 2\pi 2dr\int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}} = 4\pi dr\Big[\arcsin\frac{x}{r}\Big]_{-r}^{r} = 4\pi dr\big(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{-\pi}{2}\big) = 4\pi^2 dr. \ \blacksquare$$

Register

Literatúra

[1] Bartsch H. J., *Matematické vzorce,* 3. revidované vydání, Praha, Mladá fronta 2000.

[2] Berman G. N., *Zbierka úloh z matematickej analýzy,* Bratislava, ŠNTL 1955.

[3] Bican, L., *Lineární algebra,* Praha, SNTL 1979.

[4] Birkhoff, G., Bartee, T., *Modern applied algebra,* New York, Mc Graw – Hill Book Company 1970, (Slov. preklad: *Aplikovaná algebra*, Bratislava, ALFA 1981).

[5] Birkhoff, G., Mac Lane, S., *A Survey of Modern Algebra,* New York, The Macmillan Company 1965, (Slov. preklad: *Prehľad modernej Algebry*, Bratislava, SNTL a ALFA 1979).

[6] Blaško R., *Matematická analýza 1,* Žilina, EDIS 2009, ISBN 978-80-554-0119-5.

[7] Borůvka, O., *Základy teorie matic,* Praha, Academia 1971.

[8] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., *Matematická analýza I,* Praha, SNTL ALFA 1985.

[9] Demidovič B. P., *Zadači i upražnenija po matematičeskomu analizu dlja vtuzov,* izdanie pjatoe, Moskva, NAUKA 1966.

[10] Demidovič B. P., *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu,* izdanie devjatoe, Moskva, Izdateľstvo NAUKA 1977.

[11] Demlová M., Nagy J., *Algebra,* Matematika pro VŠT, sešit III, Praha, SNTL 1985.

[12] Drábek, J., Križalkovič, K., Liška, J., Viktora, V., *Základy elementárni aritmetiky,* Praha, SPN 1984.

[13] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1., 2., 3. a 4. časť,* Bratislava, ALFA 1970–72.

[14] Frank L. a kolektiv autorů, *Matematika,* Praha, SNTL 1973.

[15] Gantmacher, F. P., *Teorija matric,* Moskva, Nauka 1966.

[16] Geľfand, I. M., *Lekcii po linejnoj algebre,* Moskva, Nauka 1971.

[17] Göhler W., Ralle B., *Lexikón vyššej matematiky,* Vzorce, Bratislava, ALFA 1992.

[18] Golovina, L. I., *Linejnaja algebra i nekotoryje jejo priloženija,* Moskva, Nauka 1979.

[19] Goult, R. J., *Applied Linear Algebra,* New York, E. Horwood 1978.

[20] Havel, V., Holenda, J., *Lineární algebra,* Praha, SNTL a ALFA 1984.

[21] Hlaváček A., *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, I. a II. díl,* 2. změněné vydání, Praha, SPN 1971.

[22] Holenda J., *Řady,* Matematika pro VŠT, sešit XII, Praha, SNTL 1990.

[23] Horský Z., *Diferenciální počet,* Matematika pro VŠT, sešit V, Praha, SNTL 1981.

[24] Horský, Z., *Vektorové prostory,* Praha, SNTL 1980.

[25] Hruša K., Kraemer E., Sedláček J., Vyšín J., Zelinka R., *Přehled elementární matematiky,* Praha, SNTL 1957.

[26] Jarník V., *Integrální počet I, II,* Praha, Nakladatelství ČSAV 1956.

[27] Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z., *Sbírka řešených příkladů z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1982.

[28] Kluvánek I., *Prípravka na diferenciálny a integrálny počet, I. časť,* skriptá VŠDS, Žilina 1991.

[29] Kluvánek I., Mišík L., Švec M., *Matematika pre štúdium technických vied, I. a II. diel,* Bratislava, SVTL 1965.

[30] Knichal V., Bašta A., Pišl M., Rektorys K., *Matematika II,* Praha, SNTL SVTL 1966.

[31] Kolář J., Štěpánková O., Chytil M., *Logika, algebry a grafy,* Praha, SNTL 1989.

[32] Kolektiv autorů za redakce Nečase J., *Aplikovaná matematika I (A—L) a II (M—Ž),* odborové encyklopedie, Praha, SNTL 1978.

[33] Kořínek, V., *Základy algebry,* Praha, NČSAV 1953.

[34] Kučera, L., Nešetřil, J., *Algebraické metody diskrétní matematiky,* Praha, SNTL 1989.

[35] Kuroš, A. G., *Kurs vyššej algebry,* Moskva, Nauka 1968.

[36] Kuroš, A. G., *Lekcii po obščej algebre,* Moskva, Nauka 1973.

[37] Mac Lane, S., Birkhoff, G., *Algebra,* New York, The Macmillan Company 1968 (Slov. preklad: *Algebra*, Bratislava, ALFA 1973).

[38] Lipschutz, S., *Algèbre linéaire,* Auckland, Mc Graw – Hill 1979.

[39] Maľcev, A. I., *Osnovy linejnoj algebry,* Moskva, Gostechizdat 1956.

[40] Míka S., *Numerické metody algebry,* Matematika pro VŠT, sešit IV, Praha, SNTL 1985.

[41] Mikola M., *Algebra,* 2. vydanie, skriptá ŽU, Žilina 1998.

[42] Nagy J., Nováková E., Vacek M., *Integrální počet,* Matematika pro VŠT, sešit VI, Praha, SNTL 1984.

[43] Nekvinda M., Šrubař J., Vild J., *Úvod do numerické matematiky,* Praha, SNTL 1976.

[44] Neubrunn T., Vencko J., *Úvod do matematickej analýzy,* skriptá MFF UK, Bratislava 1981.

[45] Neubrunn T., Vencko J., *Matematická analýza II,* skriptá MFF UK, Bratislava 1984.

[46] Novoselov, S. I., *Speciaľnyj kurs elementarnoj algebry,* Moskva, Izd. Vysšaja škola 1962.

[47] Pondělíček, B., *Algebraické struktury s binárními operacemi,* Praha, SNTL 1977.

[48] Prágerová A., *Cvičení z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1987.

[49] Přikryl P., *Numerické metody matematické analýzy,* Matematika pro VŠT, sešit XXIV, Praha, SNTL 1985.

[50] Procházka, L. a kol., *Algebra,* Praha, Academia 1990.

[51] Schmidtmayer, J., *Maticový počet a jeho použití v technice,* Praha, SNTL 1974.

[52] Schwarz, Š., *Základy náuky o riešení rovníc,* Bratislava, Vyd. SAV 1968.

[53] Strang, G., *Linear Algebra and its applications,* New York, Acad. Press 1976.

[54] Šalát, T. a kol., *Algebra a teoretická aritmetika,* Bratislava, SNTL a ALFA 1986.

[55] Šilov G. J., *Matematická analýza,* Bratislava, ALFA 1974.

[56] Smoljanskij M. L., *Tabuľky neurčitých integrálov,* Bratislava, ALFA 1963.

[57] Švec M., Šalát T., Neubrunn T., *Matematická analýza funkcií reálnej premennej,* Bratislava, ALFA SNTL 1987.

[58] Vitásek E, *Numerické metódy,* Praha, SNTL 1987.

[59] Výborný R., *Matematická indukce,* Škola mladých matematiků, Praha, Mladá fronta 1963.

[60] Van Der Waerden, B. L., *Algebra I, II,* Berlin — Heidelberg — New York, Springer Verlag 1967, 1971. (Ruský preklad: *Algebra*, Moskva, Nauka 1979).

[61] Znám, Š. a kol., *Pohľad do dejín matematiky,* Bratislava, SNTL a ALFA 1986.

[62] Blaško, R., *Matematická analýza I*, http://frcatel.fri.uniza.sk/~beerb/ma1/sa1.pdf, (skriptum MA1) 2007.

[63] Blaško, R., *Matematická analýza I*, http://frcatel.fri.uniza.sk/~beerb/ma1/ma1.pdf, (učebnica MA1) 2014.

[64] Blaško, R., *Nurčitý a určitý integrál reálnej funkcie*, http://frcatel.fri.uniza.sk/~beerb/ma1/sa2.pdf, (učebnica MA2) 2014.

[65] Blaško, R., *Zbierka úloh z matematickej analýza I*, http://frcatel.fri.uniza.sk/~beerb/ma1/cv1.pdf, 2007.

[66] Drexel University, Math Forum, http://mathforum.org/.

[67] Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics, http://members.aol.com/jeff570/mathword.html.

[68] Elsevier Mathematics, http://www.elseviermathematics.com/mathematicsweb/show/Index.htt.

[69] EMIS, The European Mathematical Information Service, http://www.emis.de/.

[70] Excellent Matematika, http://matematika.host.sk/index2.htm.

[71] GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra, http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/.

[72] Geometry the online learning center, http://www.geometry.net/.

[73] On-line Mathematics Dictionary, http://pax.st.usm.edu/cmi/inform_html/glossary.html.

[74] The Math Forum, Internet Mathematics Library, http://mathforum.org/library/.

[75] Turnbull WWW Server, http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/.

[76] Turnbull, The MacTutor History of Mathematics archive, http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/.

[77] World of mathematics, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/.