**Rudolf Blaško**

# MATEMATICKÁ ANALÝZA I

## ZBIERKA ÚLOH

**Rudolf Blaško**

# MATEMATICKÁ ANALÝZA I

## ZBIERKA ÚLOH

**2007**

beerb@frcatel.fri.uniza.sk, http://frcatel.fri.uniza.sk/~beerb

# Základné pojmy

## Logika

**1.** Vytvorte negáciu a rozhodnite, ktorý z výrokov je pravdivý:

a) „*Všetci ľudia vedia plávať.*“, b) „*Rovnica* $2^x = 4x$ *má kladný koreň* $x$.“,
c) „*Aspoň dve čísla sú kladné.*“, d) „*Najmenej tretina krajín patrí do OSN.*“,
e) „*Práve dve čísla sú kladné.*“, f) „*Každé číslo tvaru* $n^2$, $n \in N$ *je párne.*“.

**2.** Vytvorte negácie nasledujúcich výrokov:

a) $\forall x \in R\colon\ \sin x < 1$, b) $\exists x \in R\colon\ \sin x < 1$, c) $\exists! x \in R\colon\ \sin x < 1$,
d) $\nexists x \in R\colon\ \sin x < 1$, e) $\forall x \in R\colon\ \sin x > 1$, f) $\exists x \in R\colon\ \sin x > 1$,
g) $\exists! x \in R\colon\ \sin x > 1$, h) $\nexists x \in R\colon\ \sin x > 1$, i) $\forall x \in R\colon\ \sin x = 1$,
j) $\exists x \in R\colon\ \sin x = 1$, k) $\exists! x \in R\colon\ \sin x = 1$, l) $\nexists x \in R\colon\ \sin x = 1$.

**3.** Napíšte tabuľky pravdivostných hodnôt pre nasledujúce výroky:

a) $\overline{p \vee \overline{q}}$, b) $\overline{p \wedge \overline{q}}$, c) $\overline{p \vee (q \wedge \overline{p})}$, d) $(\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})$,
e) $\overline{p \Rightarrow q}$, f) $\overline{\overline{p} \Leftrightarrow q}$, g) $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \overline{q}$, h) $(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge \overline{q \Rightarrow p}$,
i) $\overline{p \wedge \overline{q}} \vee p$, j) $\overline{p \wedge \overline{q}} \vee q$, k) $(p \vee q) \Rightarrow \overline{p}$, l) $(p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$.

**4.** Utvorte výroky $p \wedge q$, $p \vee q$ a určte, v ktorých prípadoch sú pravdivé:

a) $p$: „*Daný trojuholník je pravouhlý.*“, $q$: „*Daný trojuholník je rovnoramenný.*“,
b) $p$: „*Celé číslo* $k$ *je párne.*“, $q$: „*Celé číslo* $k$ *je deliteľné tromi.*“,
c) $p$: „*Daná nerovnica platí pre* $x \leq 4$.“, $q$: „*Daná nerovnica neplatí pre* $x \leq 1$.“,
d) $p$: „*Daná kvadratická rovnica nemá reálne riešenie.*“, $q$: „*Daná kvadratická rovnica má absolútny člen s opačným znamienkom ako znamienko kvadratického člena.*“.

**5.** Ku $p \Rightarrow q$ a $p \Leftrightarrow q$ nájdite ekvivalentné formy, ktoré obsahujú iba negáciu a:

a) konjunkciu, disjunkciu, b) konjunkciu, c) disjunkciu.

**6.** Utvorte výroky $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $p \Leftrightarrow q$ a určte, ktoré z nich sú pravdivé. V prípade pravdivej implikácie vytvorte pomocou zákona transpozície obrátenú implikáciu.

a) $p$: „*Dané číslo* $x < 0$“, $q$: „*Dané číslo* $x < 3$“,
b) $p$: „*Bol som v Prahe.*“, $q$: „*Bol som v Čechách.*“,
c) $p$: „*Nemám peniaze.*“, $q$: „*Nepôjdem do kina.*“,
d) $p$: „*Pri ceste rastie čakanka.*“, $q$: „*Pri ceste rastie tráva.*“,
e) $p$: „*Prídem na stanicu včas.*“, $q$: „*Nezmeškám vlak.*“,
f) $p$: „*Pre dané čísla* $x, y$ *platí* $x^2 = y^2$.“, $q$: „*Pre dané čísla* $x, y$ *platí* $x = y$.“,
g) $p$: „$\sin x > 0$.“, $q$: „$x \in (0\,;\pi)$.“,
h) $p$: „*Dané dve kružnice nemajú spoločné body.*“, $q$: „*Dané dve kružnice sú sústredné.*“,
i) $p$: „*Trojuholník* $ABC$ *je pravouhlý.*“, $q$: „*Pre strany trojuholníka platí* $a^2 + b^2 = c^2$.“,
j) $p$: „*Kvadratickú rovnicu môžeme písať v tvare* $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.“, $q$: „*Kvadratická rovnica má korene* $x_1$, $x_2$.“,
k) $p$: „*Dané číslo* $x > 0$.“, $q$: „*Pre dané číslo* $x$ *platí* $\sin x > 0$.“,
l) $p$: „*Dve rôzne priamky* $p_1$, $p_2$ *ležiace v rovine sú rovnobežné.*“, $q$: „*Dve priamky* $p_1$, $p_2$ *ležiace v rovine nemajú spoločný bod.*“.

**7.** Zistite, ktoré z nasledujúcich výrokových foriem sú tautológie:

a) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$, b) $[(q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow p)] \Rightarrow [(q \vee r) \Rightarrow p]$,
c) $[(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow [(\overline{p} \Rightarrow \overline{q}) \wedge p]$, d) $[(q \vee r) \Rightarrow p] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$,
e) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [\overline{r} \Rightarrow (\overline{q} \vee \overline{p})]$, f) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [\overline{r} \Rightarrow (\overline{q} \wedge \overline{p})]$
g) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$, h) $[(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$,
i) $[((\overline{p \wedge q} \Rightarrow r) \Rightarrow \overline{p}) \vee (r \Rightarrow (\overline{p} \vee q))] \Rightarrow [(p \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)]$,
j) $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow \{[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r] \vee [(p \wedge \overline{r}) \Rightarrow q]\}$.

**8.** Dokážte, že nasledujúce výrokové formy sú tautológie:

a) $p \Leftrightarrow p$, b) $p \Rightarrow p$, c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$, d) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$.

**9.** Dokážte de Morganove zákony pre konečný, resp. nekonečný počet výrokov:

a) $\overline{\bigwedge\limits_{k=1}^{n} p_k} \Leftrightarrow \bigvee\limits_{k=1}^{n} \overline{p_k}$, b) $\overline{\bigvee\limits_{k=1}^{n} p_k} \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{k=1}^{n} \overline{p_k}$, c) $\overline{\bigwedge\limits_{k=1}^{\infty} p_k} \Leftrightarrow \bigvee\limits_{k=1}^{\infty} \overline{p_k}$, d) $\overline{\bigvee\limits_{k=1}^{\infty} p_k} \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{k=1}^{\infty} \overline{p_k}$.

**10.** Určte, ktoré z nasledujúcich výrazov sú výroky a svoje tvrdenie odôvodnite:
a) $4 - 1 = 5$, b) $25 \cdot 4$, c) $2x + 1 = 3$,
d) $2(x + 1) = 2x + 2$, e) *„Koľko je hodín?“*, f) *„Pomoc!“*,
g) *„Nebezpečenstvo úrazu“*, h) *„Prší.“*, i) *„Včera pršalo.“*,
j) *„Zajtra bude pršať.“*, k) *„Včera pršalo?“*, l) *„Prší a neprší.“*.

**11.** Uveďte príklady výrazov, ktoré sú v určitej súvislosti výrokmi a v inej súvislosti výrokmi nie sú!

**12.** Z výrokových foriem $p$: *„$x$ je deliteľné dvomi.“*, $q$: *„$x$ je deliteľné tromi.“*, $r$: *„$x$ je deliteľné šiestimi.“* vytvorte v slovnom znení zložené formy $F(x)$, $\overline{F(x)}$:
a) $F(x)\colon\ (p \wedge q) \Leftrightarrow r$, b) $F(x)\colon\ (p \vee q) \Rightarrow r$, c) $F(x)\colon\ \overline{p \vee q} \Rightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$,
d) $F(x)\colon\ (p \Rightarrow q) \vee \overline{p \wedge r}$, e) $F(x)\colon\ (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \overline{q})$, f) $F(x)\colon\ (p \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$.

**13.** Zistite, ktoré z výrokových foriem $F(x)$ z príkladu 12 sú tautológie.

**14.** Zameňme v príklade 12 výrokovú formu $r$ na tvar *„$x$ je deliteľné piatimi.“*. Ktoré z výrokových foriem $F(x)$ sú tautológie v tomto prípade?

**15.** Nech výroková forma $t$ je tautológia a výroková forma $k$ je kontraindikácia. Zistite, ktoré z nasledujúcich výrokových foriem sú tautológie a ktoré kontraindikácie:
a) $\overline{t}$, b) $\overline{k}$, c) $t \Rightarrow k$, d) $k \Rightarrow t$, e) $(t \Rightarrow k) \vee \overline{t \wedge k}$,
f) $t \vee k$, g) $t \wedge k$, h) $\overline{t} \vee \overline{k}$, i) $\overline{t} \wedge \overline{k}$, j) $(t \vee k) \Rightarrow \overline{k \Rightarrow t}$.

**16.** K výrokovej forme $\overline{p \Rightarrow q} \vee (r \Leftrightarrow s)$ nájdite ekvivalentnú formu, ktorá neobsahuje symboly $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$.

**17.** Zjednodušte výrazy tak, aby v nich bol čo najmenší počet symbolov negácie:
a) $\overline{\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}$, b) $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}$, c) $\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}} \vee \overline{r} \vee \overline{s}$.

**18.** Nech $p$, $q$ sú výrokové formy také, že $p \Leftrightarrow q$ je tautológia. Dokážte, že aj $p \Rightarrow q$ je tautológia.

**19.** Dokážte, že výroková forma $\overline{\overline{p \Leftrightarrow q} \Leftrightarrow r} \;\Leftrightarrow\; \overline{p \Leftrightarrow \overline{q \Leftrightarrow r}}$ je tautológia pre ľubovoľné výrokové formy $p$, $q$, $r$.

**20.** Uvažujme výrokovú formu $F(x)$: $2x - 3y = 1$. Ktoré z výrokov sú pravdivé:
a) $\forall x \in R\, \forall y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$, b) $\forall x \in R\, \exists y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$,
c) $\exists x \in R\, \forall y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$, d) $\exists x \in R\, \exists y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$,
e) $\exists y \in (0\,;\,\infty)\, \forall x \in R\colon F(x)$, f) $\forall y \in (0\,;\,\infty)\, \exists x \in R\colon F(x)$.

**21.** Vytvorte negáciu a rozhodnite, ktorý z výrokov je pravdivý:
a) $\forall x \in R\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, b) $\forall x \in R\colon\ \sin^2 x - \cos^2 x = 1$,
c) $\exists x \in R\colon\ \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, d) $\forall x \in R\colon\ \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$,
e) $\exists x \in R\colon x^4 < x^3$, f) $\forall x \in R\, \forall y \in R\colon x^2 + y^2 > 0$,
g) $\exists x \in R\, \forall n \in N : n + 3 < nx$, h) $\forall n \in N\, \exists x \in R\colon n + 3 < nx$.

**22.** Definujme logickú spojku $\oplus$, ktorá vyjadruje tzv. **vylučovaciu alternatívu**, vzťahom $p \oplus q \;\Leftrightarrow\; \overline{p \Leftrightarrow q}$. Pripusťme symbol $\oplus$ vo výrokových formách. Dokážte, že platí $[(p \oplus q) \oplus r] \;\Leftrightarrow\; [p \oplus (q \oplus r)]$.

## Základné prvky matematickej teórie

**23.** Dokážte rôznymi spôsobmi nasledujúce tvrdenia:
a) Pre všetky reálne čísla $a$, $b$ platí $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
b) Súčin dvoch nepárnych čísel je číslo nepárne.
c) Súčin dvoch párnych čísel je číslo párne.
d) Súčin dvoch čísel, z ktorých je aspoň jedno párne, je párny.
e) Súčet dvoch nepárnych čísel je číslo párne.
f) Súčet dvoch párnych čísel je číslo párne.
g) Súčet párneho a nepárnych čísla je číslo nepárne.

**24.** Nech koeficienty rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ sú celé čísla, pričom $a \neq 0$ a $b$ je nepárne číslo, potom rovnica nemá dvojnásobný koreň. Dokážte!

**25.** Dokážte, že $\sqrt{7}$ je iracionálne číslo.

**26.** Dokážte, že celé číslo je deliteľné deviatimi práve vtedy, ak je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi.

**27.** Dokážte: $\forall a, b \in R:\ a \neq b \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 2ab$.

**28.** Dokážte priamo, nepriamo pomocou obrátenej implikácie a sporom:
a) $\forall \alpha, \beta \in (0\,;\,\pi):\ \sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$, b) $\forall x \in \langle 0\,;\,\pi/4):\ 2\operatorname{tg} x < \operatorname{tg} 2x$.

**29.** Dokážte rôznymi spôsobmi, že pre všetky $n \in N$ platí: $3 \nmid n \Rightarrow 3 \,|\, (n^2-1)$.

**30.** Dokážte priamo a potom matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí:
a) $2\,|\,(n^2-n)$, b) $3\,|\,(2n^3+n)$, c) $5\,|\,(n^5-n)$, d) $6\,|\,(n^3-n)$,
e) $6\,|\,(n^3+3n^2+2n)$, f) $6\,|\,(n^7-n)$, g) $7\,|\,(n^7-n)$, h) $7\,|\,(6^{2n}-8)$,
i) $2\,|\,(3n^2+5)$ pre $n$ nepárne, j) $8\,|\,(n^2+2n)$ pre $n$ párne.

**31.** Dokážte priamo a potom matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí:
a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$, b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{n}{2n+1}$,
c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(3j-1)(3j+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$, d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(4j-3)(4j+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

**32.** Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky $n \in N$ platí:
a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 2j = n(n+1)$, b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$, c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{n} = n$,
d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, e) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1}-1$, f) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 3^j = \frac{3^{n+1}-1}{2}$,
g) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^{-j} = 2-2^{-n}$, h) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1)(2j+1) = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)+3}{6}$.

**33.** Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky $n \in N$ platí:
a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j(2j-1) = (-1)^n n$, b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j j = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$,
c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j j^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$,
e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j(2j-1)^2 = \frac{(-1)^n(4n^2-1)-1}{2}$,
g) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n^3+3n^2+2n}{3}$, h) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

**34.** Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 2$ platí:
a) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$,
c) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdots \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, d) $2!\ 4!\ 6!\ \ldots (2n)! > [(n+1)!]^n$.

**35.** Dokážte, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 3$ platí:
a) $n+1 < 2^n$, b) $(2n)! < (2^n n!)^2$, c) $\sqrt{n^n} < n!$, d) $(n+1)^n < n^{n+1}$.

**36.** Dokážte, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 2$ platí $2 < \left(1+n^{-1}\right)^n < 3$.

**37.** Dokážte, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 6$ platí $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$.

**38.** Dokážte, že číslo $2^{100}+10$ je deliteľné trinástimi.

**39.** Dokážte, že existuje 1000 po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré sú zložené.

**40.** Dokážte, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 9$ platí $2^n > (n-1)^2(n-2)$.

**41.** Dokážte, že pre všetky $n \in N$ platí:
a) $4 \big| [n^2+(n+1)^2-1]$,
b) $9 \big| [n^3+(n+1)^3+(n+2)^3]$.

**42.** Pre všetky $k, n \in N \cup \{0\}$, $k \leq n$ definujeme **kombinačné číslo $n$ nad $k$** predpisom $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Kombinačné čísla $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ tvoria postupne prvky $n$-tého riadku tzv. **Pascalovho trojuholníka** (obr. 0.0.1).
Dokážte priamo a matematickou indukciou:
a) Pre všetky $k, n \in N \cup \{0\}$, $k \leq n-1$ platí $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.
b) Pre všetky $n \in N$, $a, b \in R$ platí **binomická veta** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
c) Pre všetky $n \in N$ platí $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
d) Pre všetky $n \in N$, $x \in R$, $x \geq -1$ platí **Bernoulliho nerovnosť** $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\binom{n}{0} \quad \cdots\cdots \quad \binom{n}{k-1} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k+1} \quad \cdots\cdots \quad \binom{n}{n} \\
\binom{n+1}{0} \quad \binom{n+1}{1} \quad \cdots\cdots \quad \binom{n+1}{k} \quad \binom{n+1}{n+1} \quad \cdots\cdots \quad \binom{n+1}{n} \quad \binom{n+1}{n+1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Obr. 0.0.1: Pascalov trojuholník.

**43.** Dokážte matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$, $x \in R$, $x \neq 2k\pi$ platí:
a) $\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \cos jx = \frac{\sin[(2n+1)x/2]}{\sin[x/2]}$,
b) $\sum_{j=1}^{n} j \cos jx = \frac{(n+1)\sin nx - n \sin(n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$.

**44.** Dokážte, že pre všetky $n \in N$: a) $73 \big| (2^{3n} - 3^{4n})$, b) $31 \big| (5^{n+1} + 6^{2n-1})$.

**45.** Predpokladajme, že existujú trojhalierové a päťhalierové mince. Dokážte, že každý nákup s cenou viac ako 7 halierov môžeme zaplatiť týmito mincami.

**46.** Dokážte pomocou matematickej indukcie:
a) Vypuklý $n$-uholník má $(n-3)n/2$ uhlopriečok.
b) Súčet vnútorných uhlov vypuklého $n$-uholníka je $(n-2)\pi$.
c) Súčet vnútorných uhlov ľubovoľného $n$-uholníka je $(n-2)\pi$.
d) $n$ priamok prechádzajúcich jedným bodom delí rovinu na $2n$ častí.
e) $n$ rovín prechádzajúcich jednou rovinou delí priestor na $2n$ častí.
f) $n$ rovín prechádzajúcich jedným bodom, z ktorých žiadne tri nemajú spoločnú priamku, delí priestor na $n(n-1)+2$ častí.

**47.** Dokážte, že pre všetky reálne čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, b_{n+1} = 0$ platí rovnosť $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_j (b_i - b_{i+1})$.

## Množiny

**48.** Dokážte, že pre ľubovoľné množiny $A$, $B$, $C$ platí:
a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$, $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

**49.** Nech $X \neq \emptyset$. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny $A, B, C \subset X$ platí:
a) $[(A \cap C) - B] \cup [(A \triangle B) - C] = \{[A \triangle B] \cup [C \cap (A - B)]\} - [B \cap (C - A)]$,
b) $[(A \cap C) - B] \cup [(A \triangle B) - C] \subset (A - B) \cup (A \cup C)'$.

**50.** Nech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nájdite potenčné množiny $2^A$ a $2^B$.

**51.** Nech $n \in N$ a nech $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Koľko prvkov a koľko podmnožín majú množiny $A_n$, $A_n^2$, $A_n^3$, $\ldots$, $A_n^k$, kde $k \in N$?

**52.** Nech $X \neq \emptyset$ a nech $A, B, C \subset X$. Ktoré z uvedených vzťahov sú pravdivé:
a) $A \subset (A \cap B)$, b) $A \subset (A \cup B)$, c) $(A - B) \subset A$,
d) $(A - B) \subset B$, e) $(A - B) \cup B = B$, f) $(A - B) \cap B = B$,
g) $(A - B) \cup A = A$, h) $(A - B) \cap A = A$, i) $(A - B) \cup B = A$,
j) $(A - B) \cap B = A$, k) $(A - B) \cap A = B$, l) $(A - B) \cap B = \emptyset$.

**53.** Nech $X \neq \emptyset$ a nech pre množiny $A, B, C, D \subset X$ platia vzťahy $A \cup B' \subset C$, $(A \cap B)' \cup D = A' \cup B$. Zistite, ktoré z množín $A' \cup C$, $B \cup (D - A)'$, $D \triangle (A \cap C)$, $(D - B)'$ sú za tohto predpokladu viazané vzťahom inklúzie alebo rovnosti množín.

**54.** Nech $X \neq \emptyset$ a nech $A, B, C \subset X$. Označme $P = [A \triangle (B' - C')] \cap (A \cup B)$, $Q = [A \cup (B' \cap C)] \triangle (B \cup C)'$ a $R = [A - (B' \triangle C)'] \cap (B' \cup C)$. Zistite, či existuje medzi niektorými z množín $P$, $Q$, $R$ vzťah inklúzie alebo rovnosti.

**55.** Nech $X \neq \emptyset$ a nech pre $A, B, C, D \subset X$ platí $(A \triangle B) \subset (C - D)$, $(A \cap D') \cap [A \cup (C \triangle D)] = \emptyset$. Čo môžeme tvrdiť o vzájomných vzťahoch medzi množinami $A \cup B$, $B \cap D'$ a $A \triangle C$?

**56.** Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sú ľubovoľné množiny, dokážte de Morganove zákony:
a) $\left[\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right]' = \bigcup_{k=1}^{n} A'_k$, $\left[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right]' = \bigcap_{k=1}^{n} A'_k$, b) $\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right]' = \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k$, $\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right]' = \bigcap_{k=1}^{\infty} A'_k$.

**57.** Nech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{1, 5, a, b, h\}$. Napíšte všetky prvky množín $A \times B$, $A \times C$, $A \times B \times C$.

**58.** Nech $A$ je množina všetkých ľudí žijúcich v Európe, ktorí sú starší ako 20 rokov. Nech $B$ je množina všetkých ľudí žijúcich na Slovensku, ktorí sú mladší ako 40 rokov. Čo predstavujú množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $A \triangle B$?

**59.** Nech $A = \{x \colon x \in N, x < 9\}$. Napíšte všetky množiny $B$ také, že $B \subset A$ a $B$ obsahuje iba nepárne čísla.

**60.** Nech $A = \{x \colon x \in N, x < 16\}$ a nech $A_2, A_3, A_5 \subset A$ sú také, že $A_2$ obsahuje všetky párne čísla, $A_3$ obsahuje všetky čísla deliteľné tromi a $A_5$ obsahuje všetky čísla deliteľné piatimi. Určte nasledujúce množiny:
a) $A_2 - A_3$, $A_2 - A_5$, $A_3 - A_5$, b) $A_3 - A_2$, $A_5 - A_2$, $A_5 - A_3$,
c) $A_2 \cup A_3$, $A_2 \cup A_5$, $A_3 \cup A_5$, d) $A_2 \cap A_3$, $A_2 \cap A_5$, $A_3 \cap A_5$,
e) $A_2 \cap A_3 \cap A_5$, $A_2 \cup A_3 \cup A_5$, f) $A_2 \triangle A_3$, $A_2 \triangle A_5$, $A_3 \triangle A_5$,
g) $(A_2 \cap A_3) \cup A_5$, $(A_2 \cup A_3) \cap A_5$, h) $(A_2 \cap A_5) \cup A_3$, $(A_2 \cup A_5) \cap A_3$,
i) $(A_3 \cap A_5) \cup A_2$, $(A_3 \cup A_5) \cap A_2$, j) $(A_3 - A_5) \cup A_2$, $(A_3 - A_5) \cap A_2$,
k) $(A_2 \cap A_5) \cup (A_3 \cap A_5)$, l) $(A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_2)$,
m) $(A_2 \cup A_3) - (A_2 \cap A_3)$, n) $(A_2 \cup A_3) \cap (A_3 \cup A_5)$.

**61.** Graficky znázornite množiny a) — n) z príkladu 60.

**62.** Nech $X \neq \emptyset$. Dokážte, že pre všetky $A, B, C, D \subset X$ platí:
a) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B$, b) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A$,
c) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A - B = \emptyset$, d) $A \subset (A \cup B)$, $(A \cap B) \subset A$,
e) $A \subset C, B \subset D \;\Rightarrow\; (A \cup B) \subset (C \cup D)$, f) $A \subset C, B \subset D \;\Rightarrow\; (A \cap B) \subset (C \cap D)$,
g) $A \subset C, B \subset C \;\Rightarrow\; (A \cup B) \subset C$, h) $A \subset B, A \subset C \;\Rightarrow\; A \subset (B \cap C)$,
i) $A \subset B \;\Rightarrow\; (C - B) \subset (C - A)$, j) $A \subset B \;\Rightarrow\; (A - C) \subset (B - C)$.

**63.** Nech $X \neq \emptyset$. Dokážte, že pre všetky $A, B, C \subset X$ platí:
a) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$, b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,
c) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$, d) $A \triangle (A \cap B) = A - B$,

**64.** Nech $X \neq \emptyset$ a nech $A, B, C, D \subset X$. Zistite, ktoré z rovností sú pravdivé:
a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

**65.** Uvažujme množiny $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 7, 9\}$. Rozhodnite, či množiny:
a) $f_1 = \{[1;1], [1;3], [3;1]\}$, b) $f_2 = \{[2;3], [3;2], [1;7], [7;9]\}$,
c) $f_3 = \{[1;1], [3;3], [7;7], [7;9]\}$, d) $f_4 = \{[1;1], [1;3], [1;7], [1;9]\}$
sú reláciami medzi $A$ a $B$, resp. $B$ a $A$. Zistite, v ktorých prípadoch sú zobrazením.

**66.** Uvažujme reláciu $f = \{[x;\, y] \in R \times R;\; x^2 - 4y^2 = 0\}$. Rozhodnite, ktoré z usporiadaných dvojíc $[1;2]$, $[2;1]$, $[1;1]$, $[-1;2]$, $[-2;1]$, $[1;-2]$, $[2;-1]$, $[-1;1]$, $[-2;-1]$ patria do relácie $f$.

**67.** Nech je daná množina $A = \{a, b, c, d, e\}$. Definujte reláciu $f \in A^2$ tak, aby bola:
a) reflexívna, symetrická a tranzitívna,
b) reflexívna, symetrická, nie tranzitívna,
c) reflexívna, tranzitívna, nie symetrická,
d) symetrická, tranzitívna, nie reflexívna.

**68.** Nech $A$ je množina všetkých priamok v rovine. Určte, či sú ekvivalenciami relácie:
a) rovnobežnosť dvoch priamok,
b) kolmosť dvoch priamok.

**69.** Dokážte, že platia nasledujúce ekvivalencie množín:
a) $(0\,;\,1) \sim (0\,;\,1\rangle$,
b) $(0\,;\,1) \sim \langle 0\,;\,1\rangle$,
c) $(0\,;\,1) \sim (-1\,;\,1\rangle$,
d) $(0\,;\,1) \sim R^3$,
e) $(0\,;\,1\rangle \sim \langle 0\,;\,1)$,
f) $(0\,;\,1) \sim \langle 0\,;\,1\rangle$,
g) $R \sim I$,
h) $R \sim R^2$.

**70.** Rozložte množinu prirodzených čísel $N$ na spočítateľne veľa disjunktných množín, ktoré sú: a) konečné, b) nekonečné.

**71.** Rozhodnite, ktoré z množín sú spočítateľné a ktoré nespočíateľné:
a) $(0\,;\,1) \cap Q$,
b) $(0\,;\,1) \cap I$,
c) $\langle 0\,;\,1\rangle \times \{0, 1\}$,
d) $\langle 0\,;\,1\rangle \times Q$.

**72.** Nech $A$ je spočítateľná množina, akú mohutnosť má množina všetkých jej podmnožín $2^A$?

**73.** Dokážte, že množina $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\,;\; a_0, a_1, \ldots, a_n \in Q\}$, t.j. množina všetkých polynómov stupňa najviac $n$ $(n \in N)$ s racionálnymi koeficientami, je spočítateľná.

**74.** Dokážte, že množina $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\,;\; a_0, a_1, \ldots, a_n \in Q,\ n \in N\}$, t.j. množina všetkých polynómov (ľubovoľného stupňa) s racionálnymi koeficientami, je spočítateľná.

## Reálne čísla

### Algebraické vlastnosti reálnych čísel

**75.** Nech $a \in Q$, $b \in I$, potom $(a + b) \in I$. Dokážte.

**76.** Nech $a, b \in Q$, $\sqrt{ab} \in I$, potom $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \in I$. Dokážte.

**77.** Dokážte, že nasledujúce čísla sú iracionálne:
a) $\sqrt{3}$,
b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$,
c) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$,
d) $\sqrt{15}$,
e) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$,
f) $\sqrt{5}$.

**78.** Nech $s_1, s_2, \ldots, s_n \in Q$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Q$, $n \in N$, pričom $\sqrt{n} \notin Q$. Dokážte, že sa dá súčin $(s_1 + t_1\sqrt{n})(s_2 + t_2\sqrt{n}) \cdots (s_n + t_n\sqrt{n})$ vyjadriť v tvare $(s + t\sqrt{n})$, kde $s, t \in N$.

**79.** Dokážte, že pre všetky $a, b \in R$ platí: $a \le b \iff 0 \le b - a \iff -b \le -a \iff a - b \le 0$.

**80.** Dokážte, že pre všetky $a, b \in R$ platia nasledujúce implikácie:
a) $a < 0, 0 \le b \Rightarrow ab \le 0$,
b) $a \le 0, 0 < b \Rightarrow ab \le 0$,
c) $a \le 0, 0 \le b \Rightarrow ab \le 0$,
d) $0 \le a, 0 \le b \Rightarrow 0 \le ab$,
e) $0 \le a, 0 < b \Rightarrow 0 \le ab$,
f) $a \le 0, b \le 0 \Rightarrow 0 \le ab$,
g) $a \le 0, b < 0 \Rightarrow 0 \le ab$.

**81.** Dokážte, že pre všetky $a, b, c, d \in R$, $a \le b$ platí:
a) $c < d \Rightarrow a + c < b + d$,
b) $0 < c \Rightarrow ac \le bc$,
c) $c \le d \Rightarrow a + c \le b + d$,
d) $c < 0 \Rightarrow bc \le ac$.

**82.** Dokážte, že pre všetky $a, b, c, d \in R$, $b < a < 0$, $d < c < 0$ platí nerovnosť $ac < bd$.

**83.** Dokážte, že pre všetky $a, b, c, d \in R$, $0 < a \le b$ platí:
a) $0 < c \le d \Rightarrow ac \le bd$,
b) $d \le c < 0 \Rightarrow bd \le ac$,
c) $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$,
d) $d < c < 0 \Rightarrow bd < ac$.

**84.** Dokážte, že pre všetky $a, b, c, d \in R$, $b \le a < 0$ platí:
a) $d < c < 0 \Rightarrow ac < bd$,
b) $d \le c < 0 \Rightarrow ac \le bd$.

**85.** Dokážte, že pre všetky $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$ platí: $a \le b \iff 1 \le \dfrac{b}{a} \iff \dfrac{1}{b} \le \dfrac{1}{a} \iff \dfrac{a}{b} \le 1$.

**86.** Dokážte, že pre $a, b \in R$ platia nasledujúce tvrdenia:

a) $a < b < -1 \;\Rightarrow\; \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+1}{b+1}$,

c) $a > b,\, b < -1 \;\Rightarrow\; \dfrac{a+1}{b+1} < \dfrac{a}{b}$,

b) $a > b > 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{a+1}{b+1} < \dfrac{a}{b}$,

b) $a > 0,\, b > 0 \;\Rightarrow\; 2 \leq \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$.

**87.** Dokážte, že pre $a, b, c \in R$ platia nasledujúce tvrdenia:

a) $a \leq b,\, 0 < b,\, 0 < c \;\Rightarrow\; \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$,

b) $a > b,\, 0 < b,\, 0 < c \;\Rightarrow\; \dfrac{a+c}{b+c} < \dfrac{a}{b}$,

c) $a < b < -c,\, 0 < c \;\Rightarrow\; \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c}$,

d) $a > b,\, 0 < c,\, b < -c \;\Rightarrow\; \dfrac{a+c}{b+c} < \dfrac{a}{b}$.

**88.** Nájdite infimum a suprémum nasledujúcich množín:

a) $\left\{\dfrac{2n+1}{n};\, n \in N\right\}$,

b) $\left\{\dfrac{2+(-1)^n}{n};\, n \in N\right\}$,

c) $\left\{\dfrac{1+\cdots+n}{n^2};\, n \in N\right\}$,

d) $\left\{\sin\dfrac{1}{n!};\, n \in N\right\}$,

e) $\left\{\dfrac{1}{n+n^{-1}};\, n \in N\right\}$,

f) $\left\{\sqrt{n+\sqrt{n}};\, n \in N\right\}$.

**89.** Nájdite infimum a suprémum nasledujúcich množín:

a) $\{a \in R;\, |2a+1| < a < |a-1|\}$,

b) $\{a \in R;\, |a^2-1| < a < |a+1|\}$.

**90.** Nech $A, B \subset R$ sú neprázdne ohraničené množiny. Označme **súčet**, **súčin množín** $A$, $B$ symbolmi $A+B = \{a+b;\, a \in A, b \in B\}$, $AB = \{ab;\, a \in A, b \in B\}$ a **$n$-tú mocninu množiny** $A$, $n \in N$ symbolom $A^n = \{a^n;\, a \in A\}$. Dokážte, že platí:

a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$,

b) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$,

c) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$,

d) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$,

e) $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$,

f) $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$,

g) $\sup A^n = (\sup A)^n$,

h) $\inf A^n = (\inf A)^n$.

**91.** Nech $A, B \subset R$ sú neprázdne ohraničené množiny. Dokážte, že aj množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A+B$, $AB$, $A^n$ pre $n \in N$ sú ohraničené množiny.

**92.** Dokážte trojuholníkovu nerovnosť $|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$, kde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, $n \in N$.

**93.** Dokážte, že pre všetky $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$, $ab = 1$ platí $2 \leq a+b$.

**94.** Dokážte, že pre $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$, $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ platí $n \leq a_1+a_2+\cdots+a_n$.

**95.** Dokážte, že pre všetky $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$ platí $(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leq (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$. [Návod: Nerovnosť $0 \leq (a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2$ platí pre všetky $x \in R$.]

**96.** Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$, pričom $n \in N$, $n \geq 2$. Dokážte, že platí:

a) $n \leq \dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$,

b) $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

**97.** Dokážte, že pre všetky $n \in N$ platí:

a) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < 2$,

b) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$,

c) $\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} < 3$,

d) $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} + \cdots + \dfrac{1}{3n}$.

**98.** Dokážte, že pre všetky $n \in N$ platí: a) $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!}$, b) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$.

**99.** Dokážte, že pre všetky $n \in N$ platí $\dfrac{n}{2} < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n-1} < n$.

**100.** Riešte v množine $R$ nerovnice:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2} \leq 2$,

b) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2} \geq 2$,

c) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} < 0$,

d) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} > 0$,

e) $|x|+|x+1|+|x+2| \leq 2$,

f) $x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) > 0$.

**101.** Riešte v množine $R$ sústavy nerovníc:
a) $3x-2\le 2x+1<6x-1$,
b) $3x+2<2x-2<3x+5$,
c) $0<2\,|x-3|+3\,|2x-3|<3x-1$,
d) $3x-3<2x+1,\ x-4<3x-2$,
e) $0<x^2-3x+2,\ 0<x^2-4x+3$,
f) $0<x^2-3x+2,\ 0<x^2+2x-1$.

**102.** Riešte v množine $R$ nerovnice:
a) $2x^2-3x+2<0$,
b) $2x^3-3x+1<0$,
c) $2x^2-3x-2<0$,
d) $x^2+x+1<0$,
e) $0<x^2-5x-24$,
f) $0<x^2-14x-24$,
g) $0<x^2-2x+5$,
h) $0<2x^2+3x+4$,
i) $0<x^3+x^2-2x$.

**103.** Riešte v množine $R$ nerovnice:
a) $1+\dfrac{x+4}{x+3}<\dfrac{x+2}{x+1}$,
b) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x+2}{x}\le 3$,
c) $1<\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}$.
d) $\dfrac{x+1}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+6}<0$,
e) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x+4}{x-4}<2$,
f) $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{2x+2}{2x+3}<2$,
g) $0<\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}$,
h) $0<\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$,
i) $\dfrac{|x+2|}{x-2}<\dfrac{|x+3|}{x-3}$.

**104.** Riešte v množine $R$ nerovnice:
a) $0<\dfrac{x-2}{x+4}$,
b) $\dfrac{x(x+2)}{x^2-1}<x$,
c) $\dfrac{x+1}{x+3}\le\dfrac{x+5}{x+7}$,
d) $\dfrac{x+1}{x-1}<\dfrac{x-1}{x+1}$,
e) $1<\dfrac{x-2}{x+4}$,
f) $\dfrac{x+2}{x^2-x}<2$,
g) $\dfrac{x+1}{x-1}\le\dfrac{x-1}{x+1}$,
h) $\dfrac{x+2}{x-2}\le\dfrac{x}{x-1}$.

**105.** Nájdite všetky $x\in R$, pre ktoré predstavujú nasledujúce výrazy reálne čísla:
a) $\sqrt{x-3}+\sqrt{4-x}$,
b) $\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{x}{\sqrt{4-x}}$,
c) $\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{\dfrac{4-x}{4-x}}$.

**106.** Nájdite všetky $x\in R$, pre ktoré predstavujú nasledujúce výrazy reálne čísla:
a) $\sqrt{(1-x)^{-1}}$,
b) $\sqrt{1-\operatorname{sgn}x}$,
c) $\sqrt{\operatorname{sgn}x-1}$,
d) $\sqrt{|x|-x}$,
e) $\sqrt{\dfrac{x}{x\operatorname{sgn}x-x}}$,
f) $\dfrac{x}{\sqrt{x\operatorname{sgn}x-x}}$,
g) $\dfrac{x\operatorname{sgn}x-x}{x\operatorname{sgn}x+x}$,
h) $\dfrac{x^2-2}{3-x^2}$,
i) $\sqrt{x^3+x^2-x}$,
j) $\sqrt{x\operatorname{sgn}x-x}$,
k) $\sqrt{\operatorname{sgn}x-x^2}$,
l) $\sqrt{x+x^3}$.

**107.** Dokážte, že ak $a,b\in R$, potom: a) $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$ b) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n\le\dfrac{a^n+b^n}{2}$.

**108.** Dokážte, že ak $a,b\in R$, $a\le b$, potom $\dfrac{(a-b)^2}{8b}\le\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\le\dfrac{(a-b)^2}{8a}$.

**109.** Do akej množiny patrí číslo $x$, ak platí:
a) $x^2+3x-1\in(2\,;\,3)$,
b) $x^2-4x+1\in\langle 2\,;\,\infty)$,
c) $x^2+x-1\in R-\langle 1\,;\,2)$.

**110.** Určte veľkosti strán pravouhlého trojuholníka, ak rozdiel odvesien je rovný 1 a prepona je dlhšia ako 11.

**111.** Ako musíme zvoliť parameter $a\in R$ v danej rovnici:
a) $ax^2+(2a-1)x-2=0$, aby jej korene boli z intervalu $(-2\,;\,2\rangle$.
b) $x^2+ax+12=0$, aby mala reálne, resp. komplexné korene.
c) $x^2+5x+a=0$, aby mala reálne, resp. komplexné korene.

**112.** Dokážte, že zo všetkých pravouhlých rovnobežníkov s daným obvodom $s$ má najväčší plošný obsah štvorec.

**113.** Dokážte, že zo všetkých pravouhlých rovnobežníkov s daným plošným obsahom $P$ má najmenší obvod štvorec.

## Topologické a metrické vlastnosti reálnych čísel

**114.** Dokážte, že v euklidovskom priestore $R^n$, $n\in N$ je zjednotením konečného počtu otvorených množín otvorená množina a zjednotením konečného počtu uzavretých množín uzavretá množina.

**115.** Dokážte, že pre všetky $x_1, x_2, \dots, x_n$, $y_1, y_2, \dots, y_n \in R$, $n \in N$ platí: $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ (Cauchyho nerovnosť).
[Návod: Pre všetky $t\in R$, $x, y\in R^n$ platí $P(t) = \sum_{i=1}^{n}(tx_i + y_i)^2 \geq 0$. To znamená, že kvadratická rovnica $P(t) = 0$ má najviac jeden reálny koreň, t.j. záporný diskriminant. Iný návod: Pre všetky $x, y\in R^n$ platí $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0$.]

**116.** Nájdite všetky hromadné body množín:
a) $\{m^{-1} + n^{-1}\,;\, m, n\in N\}$, b) $\{m^{-2} + n^{-1}\,;\, m, n\in N\}$, c) $\{n^{-1}\,;\, n\in N\}$,
d) $\{m^{-2} + n\,;\, m, n\in N\}$, e) $\{m^{-1} + n^{2}\,;\, m, n\in N\}$, f) $\{n^{-2}\,;\, n\in N\}$,
g) $\{p^2 + q^2\,;\, p, q\in Q\}$, h) $\{n^{-1} + p^2\,;\, n\in N,\ p\in Q\}$, i) $\{p^{-2}\,;\, p\in Q\}$.

**117.** Dokážte, že každá množina, ktorá má nekonečne veľa prvkov, má aspoň jeden hromadný bod.

**118.** Dokážte, že metrikami v $R^n$ sú tiež zobrazenia $\rho_1$, $\rho_2$ definované pre $x, y\in R^n$, $x = (x_1;\, x_2;\, \dots;\, x_n)$, $y = (y_1;\, y_2;\, \dots;\, y_n)$ vzťahmi

$$\rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad \text{resp.} \qquad \rho_2(x,y) = \max\{|x_i - y_i|\,;\, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

**119.** Zostrojte v priestore $R^n$, $n=2, 3, 4, 5$ s euklidovskou metrikou množinu $A$ s $n+1$ prvkami tak, aby $\{\rho(x,y)\,;\, x, y\in A\} = \{0, 1\}$.

**120.** Nech $R^n$, $n\in N$ je euklidovský metrický priestor. Určte diameter množín $A$, $B$, $A\cap Q^n$, $B\cap Q^n$, kde $A = (0\,;\,1)^n$, $B = \langle 0\,;\,1\rangle^n$ (karteziánsky súčin $n$ intervalov).

**121.** Dokážte, že v euklidovskom priestore $R^n$, $n\in N$ (s euklidovskou metrikou) platí pre ľubovoľnú množinu $A \subset R^n$ a jej uzáver vzťah $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$.

**122.** Dokážte, že v euklidovskom priestore $R^n$, $n\in N$ (s euklidovskou metrikou) je pre každé $x\in R^n$ množina $R^n - \{x\}$ otvorená.

**123.** Dokážte, že v euklidovskom priestore $R$ neexistujú okrem množín $\emptyset$ a $R$ iné obojaké množiny.

**124.** Nech $X = X_1\times X_2$, kde $X_1 \neq \emptyset$ je metrický priestor s metrikou $\rho_1$ a $X_2 \neq \emptyset$ je metrický priestor s metrikou $\rho_2$. Dokážte, že zobrazenie $\rho\colon\ X\times X \to R$ definované predpisom $\rho(x,y) = \rho((x_1;\, x_2)\,,\ (y_1;\, y_2)) = \max\{\rho_1(x_1, y_1),\ \rho_2(x_2, y_2)\}$ je metrika na $X$.

**125.** Nech $X = \{1, 2, 3\}$ a nech $\rho\colon\ X\times X \to R$ je zobrazenie definované vzťahmi $\rho(1,1) = 0$, $\rho(1,2) = 1$, $\rho(1,3) = 2$, $\rho(2,1) = 1$, $\rho(2,2) = 0$, $\rho(2,3) = 3$, $\rho(3,1) = 2$, $\rho(3,2) = 3$, $\rho(3,3) = 0$. Je zobrazenie $\rho$ metrikou na $X$?

**126.** Zostrojte množinu $X\neq\emptyset$ a zobrazenie $\rho\colon\ X\times X \to R$ tak, aby:
a) Zobrazenie $\rho$ malo vlastnosti a), b) a nemalo vlastnosť c) metriky.
b) Zobrazenie $\rho$ malo vlastnosti a), c) a nemalo vlastnosť b) metriky.
c) Zobrazenie $\rho$ malo vlastnosti b), c) a nemalo vlastnosť a) metriky.

**127.** Zvoľte za množinu $X$ v cvičení 126 postupne množiny $R$, $R^2$, $R^3$, $Q$, $Q^2$, $Q^3$ a zostrojte zobrazenie $\rho$ s uvedenými vlastnosťami.

**128.** Nech $X\neq\emptyset$ je množina a nech $\rho\colon\ X\times X \to R$ je zobrazenie také, že pre všetky $x\in X$ platí $\rho(x,x) = 0$ a pre všetky $x, y\in X$, $x\neq y$ platí $\rho(x,y)\neq 0$. Nech pre ľubovoľné $x, y, z\in X$ platí nerovnosť $\rho(z,x) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$. Dokážte, že zobrazenie $\rho$ je metrika na $X$. (Nepredpokladáme nezápornosť a symetriu zobrazenia $\rho$.)

**129.** Nech $X\neq\emptyset$ je metrický priestor s triviálnou metrikou $\rho_a$, kde $a\in R$, $a > 0$.
a) Dokážte, že každá množina $A \subset X$ je obojaká v $X$.
b) Dokážte, že pre každú množinu $A \subset X$ platí $A = \operatorname{int} A$, $\partial A = \emptyset$.

**130.** Nech $\rho_1$ a $\rho_2$ sú dve metriky definované na množine $X\neq\emptyset$. Rozhodnite, či je metrikou na množine $X$ tiež zobrazenie $\rho\colon\ X\times X \to R$ definované pre $x, y\in X$ vzťahom:
a) $\rho(x,y) = \rho_1(x,y) + \rho_2(x,y)$, b) $\rho(x,y) = \max\{\rho_1(x,y),\ \rho_2(x,y)\}$,
c) $\rho(x,y) = \rho_1(x,y)\cdot\rho_2(x,y)$, d) $\rho(x,y) = \min\{\rho_1(x,y),\ \rho_2(x,y)\}$.

**131.** Zostrojte topológiu na množine $X = \{1, 2, 3\}$, aby mala práve:
a) 3 prvky, b) 4 prvky, c) 5 prvkov, d) 6 prvkov, e) 7 prvkov.

**132.** Nech $X$ je ľubovoľná nekonečná množina a nech $\mathcal{S}$ je systém jej podmnožín, ktorý obsahuje $\emptyset$ a každú množinu $A \subset X$ takú, že $A'_X = X - A$ je konečná množina, t.j. $\mathcal{S} = \{A \subset X\,;\, A'_X = X - A \text{ je konečná}\}$. Dokážte, že $\mathcal{S}$ je topológia na $X$.[1]

**133.** Nech $X$ je neprázdna množina a nech $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ sú topológie definované na $X$. Dokážte, že sytémy $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ a $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ sú tiež topológie na $X$.

**134.** Určte, či systém $\mathcal{B}$ tvorí bázu euklidovskej topológie v priestore $R$.

a) $\mathcal{B} = \{(x\,;\,y)\,;\, x, y \in R\}$,
b) $\mathcal{B} = \{O_\delta(x)\,;\, x \in R, \delta = n^{-1},\ n \in N\}$,
c) $\mathcal{B} = \{(x\,;\,y)\,;\, x \in R,\ y \in Q\}$,
d) $\mathcal{B} = \{O_\delta(x)\,;\, x \in Q, \delta = n^{-1},\ n \in N\}$,
e) $\mathcal{B} = \{(x\,;\,y)\,;\, x, y \in Q\}$,
f) $\mathcal{B} = \{(-\infty\,;\,x)\,;\, x \in R\} \cup \{(x\,;\,\infty)\,;\, x \in R\}$.

## Postupnosti reálnych čísel

**135.** Napíšte niekoľko prvých členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vyslovte a dokážte hypotézu o monotónnosti a o ohraničenosti postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre všetky $n \in N$ platí:

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$,
b) $a_n = \dfrac{n+3}{2n-1}$,
c) $a_n = \dfrac{n^2+n}{n^2+1}$,
d) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$,
e) $a_n = n^2 - 1$,
f) $a_n = n^2 - n$,
g) $a_n = (n^3+1)^{-1}$,
h) $a_n = (-n)^{n-2}$,
i) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$,
j) $a_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$,
k) $a_n = \dfrac{n^4-n+1}{n^4+1}$.

**136.** Nájdite množinu hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak:

a) $a_n = 2/(n+3)$ pre $n$ nepárne a $a_n = 3^{-n}$ pre $n$ párne,
b) $a_n = (n+1)/(n-1)$ pre $n$ nepárne a $a_n = 3^n/(1+3^n)$ pre $n$ párne,
c) $a_n = 1 + 3^{-n}$ pre $n$ nepárne a $a_n = n/(n+1)$ pre $n$ párne,
d) $a_n = n/(2n+3)$ pre $n$ nepárne a $a_n = (2n+3)/n$ pre $n$ párne.

**137.** Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a postupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje. Zistite, aké sú postupnosti $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n/a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1/(a_nb_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Uveďte príklady takýchto postupností.

**138.** Predpokladajme, že postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergujú. Zistite, aké sú postupnosti $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1/(a_nb_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Uveďte príklady takýchto postupností.

**139.** Nájdite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \neq 1$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) \neq 0$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \infty$.

**140.** Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadaná rekurentne vzťahmi $a_{n+1} = 1 + a_n - n$, $a_1 = 1$ je nerastúca a ohraničená zhora. Určte a dokážte všeobecný vzorec pre člen $a_n$, $n \in N$ a vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**141.** Nájdite rekurentné vyjadrenie člena $a_n$, $n \in N$ postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

a) $\{2^n+3\}_{n=1}^{\infty}$,
b) $\{1+(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$,
c) $\{1-n\}_{n=1}^{\infty}$,
d) $\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$.

**142.** Nájdite všeobecný vzorec pre $n$-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne:

a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1$,
b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -a_n$,
c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2(n+1)a_n$,

**143.** Nájdite množiny hromadných hodnôt nasledujúcich postupností:

a) $\{(-1)^n \sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$,
b) $\{(-n)^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$,
c) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$,
d) $\{n^{-2n}\}_{n=1}^{\infty}$,
e) $\{n+(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$,
f) $\{(-n)^n\}_{n=1}^{\infty}$,
g) $\{(-1)^n(\sqrt{n^2+1}-n)\}_{n=1}^{\infty}$.

**144.** Na začiatku pokusu v čase $t_0 = 0$ bolo v skúmavke $n_0$ baktérií. Ich počet po $t$ minútach je určený vzťahom $n_t = n_0k^t$, kde $k$ je nejaká konštanta. Na konci druhej minúty bolo v skúmavke $n_2 = 5\,000$ baktérií a na konci piatej minúty ich bolo $n_5 = 625\,000$. Koľko baktérií bolo v skúmavke na začiatku pokusu?

**145.** Nech $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť štvorcov, kde $S_1$ je štvorec so stranou $a_1 = a > 0$ a pre $n \in N$, $n \geq 2$ má štvorec $S_n$ vrcholy umiestnené v stredoch strán štvorca $S_{n-1}$.

a) Určte všeobecný vzorec pre dĺžku strany $a_n$ štvorca $S_n$, $n \in N$.
b) Určte súčet obvodov štvorcov $S_n$.
c) Určte súčet obsahov štvorcov $S_n$.

[1] Množinu $X$ s topológiou $\mathcal{S}$ nazývame **topologický priestor konečných doplnkov**.

**146.** Pre aké $a \in R$ konverguje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (n+1)/n$ pre $n$ párne a $a_n = (1-an)/(2n+1)$ pre $n$ nepárne.

**147.** Určte, ktoré z nasledujúcich rekurentne zadaných postupností konvergujú:

a) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{\sqrt{a_n}+1}$,
b) $a_0 = 11,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n+5}$,
c) $a_0 = 2,\ a_{n+1} = (a_n^2+1)/2$,
d) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = (a_n^2+1)/2$,
e) $a_0 = 0,\ a_{n+1} = \mathrm{e}^{1-a_n}$,
f) $a_0 = 2,\ a_{n+1} = \mathrm{e}^{1-a_n}$,

**148.** Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rekurentne zadaná vzťahmi:

a) $a_{n+1} = \sqrt{a_n+2},\ a_0 > 0$,
b) $a_{n+1} = \sqrt{a_n+12},\ a_0 > 0$,
c) $a_{n+1} = \sqrt{a_n+20},\ a_0 > 0$,
d) $a_{n+1} = (a_n^2+1)/2,\ a_0 \in \langle -1\,;\,1\rangle$,
e) $a_{n+1} = \mathrm{e}^{1-a_n},\ a_0 \in R$.
f) $a_{n+1} = (a_n^2+4)/4,\ a_0 \in \langle -1\,;\,1\rangle$,
g) $a_{n+1} = a_n/(2+a_n),\ a_0 > 0$,
h) $a_{n+1} = 1 + a_n^{-1},\ a_0 = 1$,

**149.** Určte $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, ak pre všetky $n \in N$ platí:

a) $a_n = \dfrac{n \sin n!}{n^2+1}$,
b) $a_n = \dfrac{n \cos n!}{n^2+1}$,
c) $a_n = \dfrac{n \sin n!}{n^2-1}$,
d) $a_n = \dfrac{n \cos n!}{n^2-1}$.

**150.** Určte limity nasledujúcich postupností, t.j. vyjadrite periodické čísla ako zlomky:

a) $\{0,1;\ 0,13;\ 0,135;\ 0,1355;\ \ldots\}$,
b) $\{0,5;\ 0,53;\ 0,533;\ 0,5333;\ \ldots\}$,
c) $\{0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ 0,9999;\ \ldots\}$,
d) $\{0,5;\ 0,50;\ 0,505;\ 0,5050;\ \ldots\}$,
e) $\{0,6;\ 0,66;\ 0,666;\ 0,6666;\ \ldots\}$,
f) $\{0,1;\ 0,12;\ 0,121;\ 0,1212;\ \ldots\}$.

**151.** Určte $a \in R$ tak, aby nasledujúce limity boli vlastné:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a+5}{1+n^3}$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[a+\dfrac{1}{n}\right]^n$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{a+1}{3}\right]^n$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-a^n}{1+a^n}$.

**152.** Nájdite všetky čísla $a, b \in R$ tak, aby platilo:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n}{n+2} + an + b\right] = 0$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2}{n+2} + an + b\right] = 0$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^a}{n^2+1} + bn\right] = 0$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2}{n^a+1} + bn\right] = 0$,

**153.** Nech $a_1 = 1$, $a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$, $n \in N$. Dokážte, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

**154.** Nech $a \in R$, $a \geq 0$. Vypočítajte limitu nasledujúcich postupností:

a) $\left\{\sqrt{2},\ \sqrt{\sqrt{2}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$,
b) $\left\{\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$,
c) $\left\{\sqrt[3]{a},\ \sqrt[3]{\sqrt[3]{a}},\ \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}}, \ldots\right\}$,
d) $\left\{\sqrt{a},\ \sqrt{a+\sqrt{a}},\ \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots\right\}$.

**155.** Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2-1}$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2+1}$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2}{1-n^2}$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+1}$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+4+5+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$,
f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$,
g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$,
h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$.

**156.** Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-n+1}{2n^2+1}$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-n+1}{2n^4+1}$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-n+1}{2n^6+1}$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2}{n+2} - \dfrac{n^2}{n+3}\right]$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{2n^2}{n+2} - 2n\right]$,
f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-3n+2}{3n^2-n+1}$,
g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n - \dfrac{n^2}{n+1}\right]$,
h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-3n^2+2}{n^2+1}$,
i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2}{n-1} - \dfrac{n^2+1}{n+3}\right]$.

**157.** Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3^n}{n-3^n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3^n+1}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-\sqrt{n}}{n-1}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-n}{n^4}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-2}$, j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n n+1}{n!+1}$,

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n\, n!}{(3n)^n}$, n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{n+5}}$, o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n-1}{n+1}\right]^n$, p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n-3}{n}\right]^{\frac{n}{2}}$,

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{2n-1}{2n+1}\right]^n$, r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1-\dfrac{5}{n}\right]^n$, s) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1-\dfrac{1}{3n}\right]^n$, t) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n+6}{n+5}\right]^n$.

**158.** Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1/2)^n}{(1/4)^n-(1/3)^n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n^5+1}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}{n}$.

**159.** Nech $a, b\in R$, $b\geq a>0$. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n-b^n}{a^{n+1}-b^{n+1}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right]^n$.

**160.** Nech $a\in R$. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{a^n+1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^n+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^{2n}+1}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{a+3}{2}\right]^n$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[a+\dfrac{1}{n}\right]^n$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} a^2\sqrt{\dfrac{n-a}{n}}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n-a}{n+a}\right]^n$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1-3^n}$.

**161.** Nech $a, b\in R$. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right]$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n}-\sqrt{n-a}\right]$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n(n-a)}-n\right]$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+1}-n\right]$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+n}-n\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1}-n\right]$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n-\sqrt{n^2-1}\right]$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3-1}-n\right]$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sqrt{n^2+1}-n\right]$,

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{an^2}{n+1}-\dfrac{bn^2}{n-1}\right]$, k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2}{n-a}-\dfrac{n^2}{n-b}\right]$, l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-an^2+3n}{n+5}$.

**162.** Nech $a, b\in R$. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right]$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[3n-\sqrt{9n^2-10n+1}\right]$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+n+1}-\sqrt[3]{n^3-n+1}\right]$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right]$,

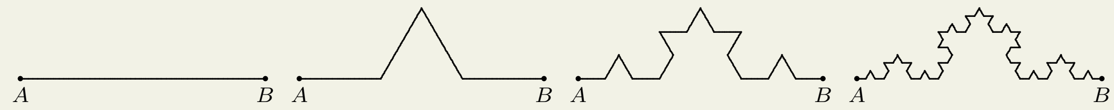
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{(n-a)(n-b)}-n\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n-\sqrt{n+1}}\right]$.

**163.** Nech $a, b\in R$, $a\geq b\geq 0$. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[2\sqrt{a}\right]^n$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a^n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} na^n$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[n\sqrt{a}-1]^2}{[n\sqrt{b}-1]^2}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right]$.

**164.** Na obrázku 0.0.2 je znázornený postup konštrukcie lomenej čiary, ktorá vznikne z úsečky $AB$. Každá jednotlivá úsečka sa postupne rozdelí na tri rovnaké časti, pričom stredná časť sa zväčší na dvojnásobok (dve strany rovnostranného trojuholníka). Tento proces sa opakuje do nekonečna. Vypočítajte dĺžku lomenej čiary, ak $|AB|=1$.




Obr. 0.0.2: Lomená čiara z cvičenia 164.

## Číselné rady

**165.** Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{n}}$,

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$, m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$,

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$, q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$, r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$, s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$, t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$,

u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$, w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$, x) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^2}$, y) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$.

**166.** Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-4)^2}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{3^n}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$,

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n^2}$, p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{3}{8}\right)^n$, s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

u) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$, v) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$, w) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$, x) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n^{\ln n}}$.

**167.** Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{\sqrt{n}}}$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n\cdot n}}$,

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdots n^2}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[2]{3}\sqrt[3]{3}\cdots\sqrt[n]{3}}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}$,

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 11\cdots(10n-9)}{(2n-1)!}$, q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$, r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^4}$.

**168.** Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n}-\sqrt{n-1}]$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{2n-1}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^{2n-1}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!(n+3)!3^n}{(2n)!}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n}\right)$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3-(-1)^n}{(-1)^n 2n}$,

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$, k) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}\right)$, l) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$,

m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{n+1}(n+1)}$, n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$, o) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

p) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$, q) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(n^2+1)\pi}{n}$, r) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$,

s) $\sum_{n=1}^{\infty}n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$, t) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$, u) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$,

v) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$, w) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$, x) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln n}(\ln n)^n$.

**169.** Vyšetrite konvergenciu radov:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n n}{n+1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^n}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+1)!}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}}$, g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}$,

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{101\cdot102\cdot103\cdots(100+n)}$, j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000\cdot1002\cdot1004\cdots(998+2n)}{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdots(3n-2)}$,

k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000\cdot1001\cdot1002\cdots(999+n)}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}$, l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$.

**170.** Vypočítajte súčet radov:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+3}{n}^{-1}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+7)}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right]$, h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$, i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

j) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, k) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{7}\right)^n$, l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

m) $\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}]$, n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n+7)(4n+11)}$.

**171.** Vyšetrite relatívnu a absolútnu konvergenciu radov:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n-1}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3+\ln n}$,

e) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$, g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$,

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{6^n}$, k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$, l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin^2 n}{n}$,

m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$, n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{n+1}$, o) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

**172.** Pre aké $a\in R$ konvergujú rady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+a}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^a$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln a}$, g) $\sum_{n=1}^{\infty}n^a\sin\frac{\pi}{n}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$.

**173.** Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergujú. Čo platí o konvergencii radov:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$.

**174.** Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Čo platí o konvergencii radov:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$.

**175.** Dokážte, že ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom tiež konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

**176.** Dokážte, že ak konvergujú číselné rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, potom konvergujú tiež rady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_nb_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)^2$.

**177.** Dokážte, že ak $\lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, potom číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

**178.** Vypočítajte súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n-n}{3^n}$.

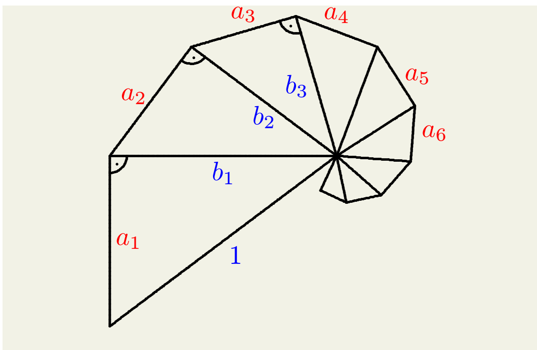
**179.** Vypočítajte súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n+7^{n+1}}{14^n}$.

**180.** Dokážte, že platí $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

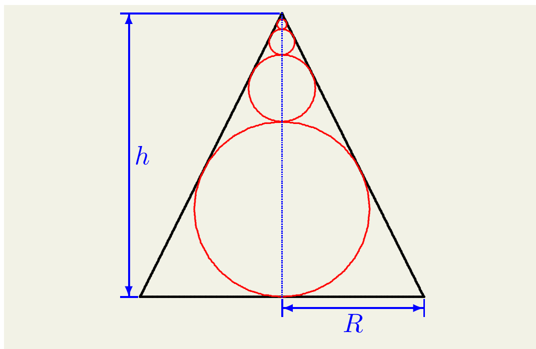
**181.** Dokážte: a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

**182.** Prerovnajte rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, aby divergoval do $\infty$, do $-\infty$ a konvergoval k 0.

**183.** Prerovnajte rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, aby divergoval do $\infty$, do $-\infty$ a konvergoval k 0.




Obr. 0.0.3: Cvičenie 186.




Obr. 0.0.4: Cvičenie 187.

**184.** Určte súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a jeho $n$-tý člen $a_n$, ak jeho $n$-tý čiastočný súčet je:

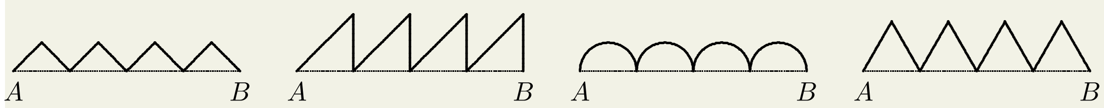
a) $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, b) $s_n = 1 + \frac{1}{2^n}$, c) $s_n = \frac{(-1)^n}{n}$, d) $s_n = \frac{n-2}{2n}$.

**185.** Nájdite súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s chybou menšou ako $\varepsilon$, ak:

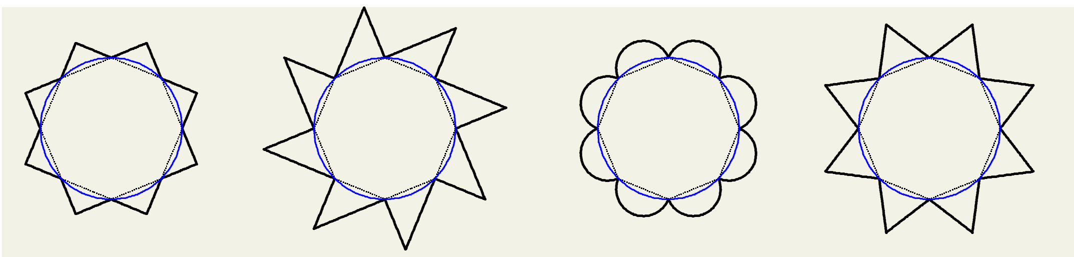
a) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\varepsilon = 0,1$, b) $a_n = \frac{1}{n^3}$, $\varepsilon = 0,01$, c) $a_n = \frac{1}{n^2+2n-3}$, $\varepsilon = 0,03$.

**186.** Nech $a_1 \in (0\,;1)$. Uvažujme pravouhlý trojuholník s preponou 1 a odvesnami $a_1$, $b_1$. Nech $b_1$ predstavuje preponu podobného pravouhlého trojuholníka s odvesnami $a_2$, $b_2$. Nech $b_2$ predstavuje preponu podobného pravouhlého trojuholníka s odvesnami $a_3$, $b_3$. Takto zostrojíme nekonečnú postupnosť podobných pravouhlých trojuholníkov s odvesnami $a_n$, $b_n$ (obr. 0.0.3). Zistite, či rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Ak áno, vypočítajte jeho súčet $a$. Vypočítajte súčet obsahov $P$ týchto trojuholníkov.

**187.** Do rotačného kužeľa s výškou $h$ a polomerom podstavy $R$ sú postupne vpísané gule (obr. 0.0.4). Nájdite súčet objemov týchto gulí.



Obr. 0.0.5: Cvičenie 188.


Obr. 0.0.6: Cvičenie 189.

**188.** Úsečka $AB$ dĺžky $d>0$ je rozdelená deliacimi bodmi na $n \in N$ rovnakých častí. Nad každou z týchto častí zostrojíme (viď obrázok 0.0.5):
a) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou, ktorá leží na úsečke $AB$,
b) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s odvesnou, ktorá leží na úsečke $AB$,
c) polkružnicu, ktorej priemer leží na úsečke $AB$, d) rovnostranný trojuholník.
Vypočítajte dĺžku takto vzniknutej čiary pre $n \to \infty$ a porovnajte ju s hodnotou $d$.

**189.** Do kružnice s polomerom $r>0$ vpíšeme pravidelný $n$-uholník, $n \in N$. Nad každou z jeho strán zostrojíme smerom von z kružnice (viď obrázok 0.0.6):
a) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou, ktorá leží na strane $n$-uholníka,
b) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s odvesnou, ktorá leží na strane $n$-uholníka,
c) polkružnicu s priemerom na strane $n$-uholníka, d) rovnostranný trojuholník.
Vypočítajte dĺžku takto vzniknutej čiary pre $n \to \infty$ a porovnajte s obvodom kružnice $o$.

**190.** Vypočítajte obsah plochy, ktorú ohraničujú obrazce z cvičenia 189 a porovnajte ju s obsahom $P$ vnútra kružnice.

## Komplexné čísla

**191.** Určte $\overline{z}$, $|z|$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$, $z^{-1}$, $z^{-2}$, $z^2$, $z^3$, ak:
a) $z=1+\mathrm{i}$, b) $z=2+3\,\mathrm{i}$, c) $z=-1+\mathrm{i}$, d) $z=-16\,\mathrm{i}$, e) $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$,
f) $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, g) $z=\dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$, h) $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$, i) $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}$, j) $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

**192.** Nech $z=a+\mathrm{i}\,b$, určte $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$ a goniometrický tvar čísla $w=z/\overline{z}$.

**193.** Vypočítajte pre vetky $n \in N$ hodnotu $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$.

**194.** Vyjadrite v goniometrickom tvare komplexné čísla:
a) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{10}$, b) $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}$, c) $(-1+\mathrm{i})^7$, d) $(1+\mathrm{i})^7$, e) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{12}$.

**195.** Dokážte, že pre všetky $z_1, z_2 \in C$ platí $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\,|z_1|^2+2\,|z_2|^2$.

**196.** Pre aké $z_1, z_2 \in C$ platí $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$?

**197.** Vypočítajte $(1-\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)^n$, kde $n \in N$, $\varphi \in R$.

**198.** Zistite, aké musia byť komplexné čísla $z_1$, $z_2$, aby ich súčin, resp. podiel bol:
a) reálny, b) rýdzo imaginárny, c) imaginárny (nie reálny a nie rýdzo imaginárny).

# Reálne funkcie reálnej premennej

## Reálne funkcie

**199.** Rozhodnite, či sú nasledujúce relácie funkciami:
a) $f = \{[x;\, y] \in R^2\,;\; x + |y-1| = 0\}$,
b) $f = \{[x;\, y] \in R^2\,;\; |x-1| + y = 0\}$,
c) $f = \{[x;\, y] \in R^2\,;\; |x| + |y| = 2, y \geq 0\}$,
d) $f = \{[x;\, y] \in R^2\,;\; |x-1| + |y| = 0\}$,
e) $f = \{[x;\, y] \in R^2\,;\; x^2 + y^2 - 2x = 0\}$,
f) $f = \{[x;\, y] \in R^2\,;\; x^2 + y^2 - 2x = -1\}$,
g) $f = \{[x;\, y] \in R^2\,;\; x^2 + y^2 - 2x = -2\}$,
h) $f = \{[x;\, y] \in R^2\,;\; y^2 + 2y + 1 = 0\}$.

**200.** Určte prirodzený definičný obor funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:
a) $y = \arcsin \ln x$,
b) $y = \operatorname{arctg} \operatorname{tg} x$,
c) $y = \arcsin x^{-1}$,
d) $y = \sqrt{\sin x^2}$,
e) $y = \sqrt{x \sin^2 \pi x}$,
f) $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$,
g) $y = \sqrt{\cos \sqrt{x}}$,
h) $y = \sqrt{\cos x^2}$,
i) $y = \dfrac{x+2}{2x^2-1}$,
j) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$,
k) $y = \ln \sin \dfrac{\pi}{x}$,
l) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$,
m) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$,
n) $y = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$,
o) $y = \dfrac{2}{2 - \lfloor x \rfloor}$,
p) $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}$,
q) $y = \sqrt{\sin x + 1}$,
r) $y = \ln \ln \ln x$,
s) $y = \sqrt{\ln \operatorname{tg} x}$,
t) $y = \sqrt{|x| - x}$,
u) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$,
v) $y = \dfrac{x^2}{1+x}$,
w) $y = \ln \dfrac{x}{x+1}$,
x) $y = \ln \dfrac{x+2}{x-3}$.

**201.** Určte prirodzený definičný obor funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:
a) $y = \sqrt{1 - \operatorname{tg} 2x}$,
b) $y = \ln (x^2 - 4)$,
c) $y = \ln (x-2) + \ln (x+2)$,
d) $y = \sqrt{\sin x \cos x}$,
e) $y = \sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x}$,
f) $y = \sqrt{\ln \sin x} + \sqrt{\ln \cos x}$,
g) $y = \arccos (2 \sin x)$,
h) $y = \ln |1 - \sqrt{x}|$,
i) $y = \ln |x^2 - 2x - 6|$,
j) $y = \ln (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$,
k) $y = \ln (1 - \operatorname{tg} x)$,
l) $y = \ln (2 \cos x - \sqrt{3})$,
m) $y = \arcsin \sin x$,
n) $y = \arcsin \cos x$,
o) $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{2+x}$,
p) $y = \sin \arcsin x$,
q) $y = \sin \arccos x$,
r) $y = \cos \arccos x$,
s) $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$,
t) $y = \sqrt{3x - x^3}$,
u) $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{-x}$.

**202.** Určte prirodzený definičný obor funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:
a) $y = \arcsin \dfrac{x-1}{2}$,
b) $y = \arccos \dfrac{2x}{1+x}$,
c) $y = \ln \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$,
d) $y = \arcsin \log \dfrac{x}{10}$,
e) $y = \dfrac{x}{\sin (2x-1)}$,
f) $y = \dfrac{\arcsin (x+1)}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$,
g) $y = \arcsin \dfrac{10x}{x^2 + 16}$,
h) $y = \dfrac{\sqrt{2\,\mathrm{e}^x - 1}}{\ln (2 - \mathrm{e}^x)}$,
i) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} - \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$,
j) $y = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$,
k) $y = \arccos \dfrac{1 - \mathrm{e}^x}{2}$,
l) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \ln x} - 1}$,
m) $y = \sin \ln \dfrac{1}{3x+1}$,
n) $y = \dfrac{\ln (2x-3)}{\sqrt{x^2 - 1}}$,
o) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x+1}$,
p) $y = \arcsin \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$,
q) $y = \dfrac{1}{1 - (-1)^{\lfloor x \rfloor}}$,
r) $y = \arcsin \dfrac{x}{x+1}$.

**203.** Zostrojte graf funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:
a) $y = \lfloor \sin^2 x \rfloor$,
b) $y = \lfloor \cos^2 x \rfloor$,
c) $y = \sin (x+1)$,
d) $y = |x| - |x-1|$,
e) $y = \arcsin 3x$,
f) $y = \sin 3x$,
g) $y = 3 \sin x$,
h) $y = \max \{x, x^2\}$,
i) $y = \mathrm{e}^{\lfloor x \rfloor}$,
j) $y = \lfloor \mathrm{e}^x \rfloor$,
k) $y = \lfloor \ln x \rfloor$,
l) $y = \arcsin x + 1$,
m) $y = x + \sin x$,
n) $y = x \sin x$,
o) $y = x^2 + \sin x$,
p) $y = \arcsin (x+1)$,
q) $y = x^2 \sin x$,
r) $y = x^3 \sin x$,
s) $y = \lfloor \sin x \rfloor$,
t) $y = |x + |x| + 1|$,
u) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$,
v) $y = \dfrac{4}{x-1}$,
w) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$,
x) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$.

**204.** Zostrojte graf parametricky zadanej funkcie $y = f(x)$ a určte jej explictný tvar.
a) $x = 1 - t,\ y = t,\ t \in (-\infty\,;\,\infty)$,
b) $x = t,\ y = t^2,\ t \in (-\infty\,;\,\infty)$,
c) $x = 1 - t^2,\ y = t^2,\ t \in (-\infty\,;\,\infty)$,
d) $x = t^2,\ y = t^3,\ t \in (-\infty\,;\,\infty)$,

e) $x=2\cos t,\ y=\sin t,\ t\in\langle 0\,;\,2\pi)$,
f) $x=2\cos t,\ y=\sin t,\ t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$,
g) $x=t-t^2,\ y=t^2-t^3,\ t\in(-\infty\,;\,\infty)$,
h) $x=\cos^2 t,\ y=\sin^2 t,\ t\in\langle 0\,;\,2\pi)$,
i) $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ t\in R$,
j) $x=\dfrac{t}{1+t^3},\ y=\dfrac{t^2}{1+t^3},\ t\in R-\{-1\}$.

**205.** Zistite, či sa rovnajú funkcie $f$ a $g$, ak platí:
a) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=\dfrac{x}{x^2}$,
b) $f(x)=1,\ g(x)=\dfrac{x}{x}$,
c) $f(x)=x,\ g(x)=(\sqrt{x})^2$.

**206.** Ktoré z funkcií $f\colon\ y=\dfrac{1}{x^2+x},\ g\colon\ y=\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x^2}},\ h\colon\ y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ sa rovnajú?

**207.** Dokážte, že ak sú funkcie $f$, $g$ párne, resp. nepárne, potom sú funkcie $fg$, $f/g$, $g/f$ (pokiaľ sú definované) párne.

**208.** Dokážte, že ak je funkcia $f$ párna a $g$ nepárna, potom sú funkcie $fg$, $f/g$, $g/f$ (pokiaľ sú definované) nepárne.

**209.** Rozhodnite, či je funkcia $y=f(x)$ párna alebo nepárna.
a) $y=x^2+\sin x^2$,
b) $y=\cos(\pi-x)$,
c) $y=x\cosh x$,
d) $y=\sin x+\cos x$,
e) $y=x\ln|x|$,
f) $y=x-x^3$,
g) $y=x-x^2$,
h) $y=\chi(x)-\chi^2(x)$,
i) $y=|x|\,x^{-1}$,
j) $y=x^2+|x|$,
k) $y=x+\sin x$,
l) $y=|x|+\cos x$,
m) $y=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$,
n) $y=\dfrac{\sinh x}{\sin x}$,
o) $y=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$,
p) $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$,
q) $y=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$,
r) $y=x\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$,
s) $y=\dfrac{x}{2^x-1}$,
t) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$,
u) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$,
v) $y=\dfrac{1}{2+\cos^3 x}$,
w) $y=\dfrac{\sin x}{x}$,
x) $y=\dfrac{x+\operatorname{tgh} x}{3+2\cos x}$.

**210.** Nech $y=f(x)$ je ľubovoľná funkcia definovaná na intervale $(-k\,;\,k)$, kde $k\in R$, $k>0$. Dokážte, že funkcia $f(x)+f(-x)$ je párna a funkcia $f(x)-f(-x)$ je nepárna na intervale $(-k\,;\,k)$.

**211.** Rozložte funkciu $y=f(x)$ na súčet párnej a nepárnej funkcie.
a) $y=x+1$,
b) $y=x+|x|$,
c) $y=x^2+|x|$,
d) $y=x^2+x$,
e) $y=\chi(x)$,
f) $y=\mathrm{e}^x$,
g) $y=(x+1)^{-1}$,
h) $y=x^2-2x+1$,
i) $y=x-\lfloor x\rfloor$,
j) $y=x+\lfloor x\rfloor$,
k) $y=(-1)^{\lfloor x-1\rfloor}$,
l) $y=\lfloor x\rfloor+|x|$.

**212.** Doplňte definíciu funkcie $y=f(x)$ tak, aby bola párna, resp. nepárna.
a) $y=x-1,\ x>0$,
b) $y=|x-1|,\ x>0$,
c) $y=\sqrt{x+1},\ x>0$,
d) $y=(x+1)^{-1},\ x>0$,
e) $y=x+\lfloor x\rfloor,\ x>0$,
f) $y=x^2-x,\ x>0$.

**213.** Je funkcia $y=f(x)$ periodická? Ak áno, určte jej primitívnu periódu:
a) $y=|\sin x|$,
b) $y=\sin x^2$,
c) $y=\sin^2 x$,
d) $y=(-1)^{\lfloor x-1\rfloor}$,
e) $y=x-\lfloor x\rfloor$,
f) $y=\lfloor\chi(x)\rfloor$,
g) $y=\chi(\lfloor x\rfloor)$,
h) $y=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$.

**214.** Je funkcia $y=f(x)$ periodická? Ak áno, určte jej primitívnu periódu:
a) $y=\sin x+\cos x$,
b) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$,
c) $y=\operatorname{sgn}(x-\lfloor x\rfloor)$,
d) $y=\sin x+\cos 2x$,
e) $y=\arcsin\sin x$,
f) $y=\cos x-3\sin 4x$,
g) $y=\ln|\sin x+\cos x|$,
h) $y=2^{3+\sin 2x}$,
i) $y=x\arccos x$,
j) $y=\dfrac{1+(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}$,
k) $y=\dfrac{3^{\lfloor x\rfloor}+(-3)^{\lfloor x\rfloor}}{3^{\lfloor x\rfloor}}$,
l) $y=\dfrac{1+(-2)^{\lfloor x\rfloor}}{3^{\lfloor x\rfloor}}$.

**215.** Zostrojte funkciu $y=f(x)$ s primitívnou periódou $p=1$, ak platí:
a) $y=x^2,\ x\in(0\,;\,1\rangle$,
b) $y=x^2,\ x\in(1\,;\,2\rangle$,
c) $y=\sqrt{x},\ x\in(3\,;\,4\rangle$.

**216.** Zostrojte periodickú funkciu $y=f(x)$, $D(f)\subset R$ s primitívnou periódou $p$ a načrtnite jej graf tak, aby funkcia $f(x)$ bola:
a) Párna, rastúca na intervale $\langle 3\,;\,4\rangle$, $p=4$ a $f(1)=0$.
b) Párna, rastúca na intervale $\langle 1\,;\,2\rangle$ a klesajúca na intervale $\langle 6\,;\,8\rangle$.
c) Nepárna, rastúca na intervale $\langle 1\,;\,4)$ a klesajúca na intervale $\langle 7\,;\,9\rangle$.
d) Nepárna, $p=6$, $f(x)=9-x$ pre $x\in\langle 7\,;\,9\rangle$ a interval $\langle 0\,;\,1)\notin D(f)$.
e) Nepárna, $p=6$, $f(x)=9-x$ pre $x\in\langle 7\,;\,9\rangle$ a interval $(0\,;\,1)\notin D(f)$.
f) Párna, $p=8$, $f(x)=3-x$ pre $x\in\langle 0\,;\,3\rangle$ a interval $(3\,;\,4\rangle\notin D(f)$.

**217.** Nech sú funkcie $f$, $g$ periodické s primitívnou periódou $p\neq 0$. Dokážte, že funkcie $f\pm g$, $fg$, $f/g$, $g/f$ (pokiaľ sú definované) sú periodické.

**218.** Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia $y=f(x)$ monotónna:
a) $y=\lfloor x^{-1}\rfloor$, b) $y=(x^2-x)^3$, c) $y=2^{x^2-3x+2}$, d) $y=2^{|x-2|+|x+1|}$,
e) $y=x^2-3x+2$, f) $y=x^4-3x^2+2$, g) $y=x-|x|$, h) $y=\ln^2 x-\ln x$,
i) $y=2-3x$, j) $y=x^3-x$, k) $y=\sqrt{2-3x}$, l) $y=|x+3|-|x|$,
m) $y=x-\lfloor x\rfloor$, n) $y=|x+1|$, o) $y=x+|x|$, p) $y=x+\sqrt{x-1}$,
q) $y=\dfrac{x}{x-3}$, r) $y=\dfrac{x+2}{x-3}$, s) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, t) $y=\ln\dfrac{x^2+3x}{x+2}$.

**219.** Zistite, či je funkcia $y=f(x)$, $x\in D(f)$ ohraničená zhora alebo zdola a určte jej suprémum a infimum, prípadne maximum a minimum, ak existuje.
a) $y=(1+x^2)^{-1}$, $x\in\langle 0\,;\,\infty)$, b) $y=(1+x^2)^{-1}$, $x\in R$,
c) $y=(1+x^2)^{-1}$, $x\in(-1\,;\,1\rangle$, d) $y=1-3x$, $x\in\langle 0\,;\,5)$,
e) $y=x^2-4x+5$, $x\in R$, f) $y=x^2-4x+5$, $x\in\langle 3\,;\,6)$.

**220.** Nájdite maximum a minimum funkcie $y=f(x)$ zadanej predpisom:
a) $y=x^2-3x+1$, b) $y=x^3-3x+1$, c) $y=x^2+|x|$, d) $y=x^2-|x|$,
e) $y=\sin^2 x$, f) $y=\sin x^2$, g) $y=2+\sin x$, h) $y=\sin(x+1)$.

**221.** Nech $f\colon\ y=x$, $g\colon\ y=1-x^2$, $h\colon\ y=\sin x$. Určte funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(h)$, $h(f)$, $g(h)$, $h(g)$, $f[g(h)]$, $f[h(g)]$, $g[f(h)]$, $g[h(f)]$, $h[f(g)]$, $h[g(f)]$.

**222.** Nájdite funkcie $f\pm g$, $fg$, $f/g$, $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$, ak:
a) $f(x)=2x$, $g(x)=4-x$, b) $f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x^2-1$,
c) $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sqrt{1-|x|}$, d) $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sinh x$,
e) $f(x)=\operatorname{argsinh} x$, $g(x)=\cosh x$, f) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$,
g) $f(x)=(x+1)^2$, $g(x)=\sqrt{x}$, h) $f(x)=x^2$, $g(x)=\lfloor x\rfloor$,
i) $f(x)=x+\lfloor x\rfloor$, $g(x)=x^2-x$, j) $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=(x+2)^{-1}$.

**223.** Nájdite funkcie $|g|$, $f+g$, $g^2$, $fg$, $f/g$, $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$ a ich definičné obory, ak $f(x)=x$ pre $x<0$ a $f(x)=x^2$ pre $x\geq 0$ a platí:
a) $g(x)=\begin{cases}1, & \text{pre } x<0,\\ x^2+1, & \text{pre } x\geq 0,\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}x^2, & \text{pre } x<0,\\ x+1, & \text{pre } x\geq 0.\end{cases}$

**224.** Nájdite zložené funkcie $f_2=f(f)$, $f_3=f(f(f))$, $\ldots$, $f_n=f(f(f\cdots f(f)))$, ak funkcia $f_1=f$ je definovaná predpisom:
a) $f(x)=1+x$, b) $f(x)=1-x$, c) $f(x)=\dfrac{1+x}{x}$, d) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,
e) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, f) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, g) $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$, h) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,
i) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, j) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, k) $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$, l) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

**225.** Nech je daná funkcia $y=f(x)$. Nájdite všetky $x\in R$ tak, aby platilo:
a) $y=\dfrac{1+x}{1-x}\leq 1$, b) $y=\dfrac{1+x^2}{(1-x)^2}\geq 2$, c) $y=\dfrac{1-\sqrt{1-2x^2}}{x}<1$.

**226.** Nech $f\colon\ y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $x\in(-1\,;\,1)$. Dokážte, že $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$.

**227.** Nech sú funkcie $f$, $g$ elementárne a nech pre všetky $x\in D(f)$ platí $f(x)>0$. Dokážte, že funkcia $f^g$ je elementárna. [Návod: $f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$.]

**228.** Nájdite inverznú funkciu k funkcii $y=f(x)$ zadanej predpisom:
a) $y=x^2-1$, $x\in\langle 2\,;\,5\rangle$, b) $y=x/(x+3)$, $x\in R-\{3\}$,
c) $y=x^2-8x+16$, $x\in\langle 4\,;\,5\rangle$, d) $y=\sin(3x-1)$, $|3x-1|<\pi/2$,
e) $y=\ln\sqrt{x-1}$, $x\in(1\,;\,\infty)$, f) $y=\ln(\sqrt{x}-1)$, $x\in(1\,;\,\infty)$.

**229.** Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcie $y = f(x)$ tak, aby bola prostá. Potom k nej určte inverznú funkciu $y = f^{-1}(x)$.

a) $y = 1 + 2\,\mathrm{tg}\,x$, b) $y = \arcsin \sin x$, c) $y = \sqrt{1 + \sin x}$, d) $y = \arccos \mathrm{e}^x$,
e) $y = \ln \cos x$, f) $y = \mathrm{e}^{1-x^2} - 1$, g) $y = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$, h) $y = \mathrm{e}^{x-1} - 1$,
i) $y = |x|(-1)^{\lfloor x \rfloor}$, j) $y = x^2 - 2x - 1$, k) $y = x^4 - 1$, l) $y = \sqrt{|x + 1|}$,
m) $y = \dfrac{x-1}{2-3x}$, n) $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, o) $y = \sqrt{\arcsin \dfrac{x}{3}}$, p) $y = \dfrac{1-2^x}{1+2^x}$.

**230.** Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcie $y = f(x)$ tak, aby bola prostá. Potom k nej určte inverznú funkciu $y = f^{-1}(x)$.

a) $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$, b) $y = 1 + \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}$, c) $y = 1 + \arccos(2x - 1)$,
d) $y = \begin{cases} x, & \text{pre } x < 0, \\ 2x, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$ e) $y = \begin{cases} x, & \text{pre } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$ f) $y = \begin{cases} x^2, & \text{pre } x < 0, \\ x, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

**231.** Dokážte vzťahy pre goniometrické funkcie z tabuľky 0.0.1.

**232.** Dokážte vzťahy pre hyperbolické funkcie z tabuľky 0.0.2.

| | $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathrm{tg}\,x$ | $\mathrm{cotg}\,x$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x =$ | $\sin x$ | $\sqrt{1-\cos^2 x}$ | $\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2 x}}$ |
| $\cos x =$ | $\sqrt{1-\sin^2 x}$ | $\cos x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$ | $\dfrac{\mathrm{cotg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2 x}}$ |
| $\mathrm{tg}\,x =$ | $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ | $\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$ | $\mathrm{tg}\,x$ | $\dfrac{1}{\mathrm{cotg}\,x}$ |
| $\mathrm{cotg}\,x =$ | $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$ | $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ | $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}$ | $\mathrm{cotg}\,x$ |

Tab. 0.0.1: Vzťahy medzi jednotlivými goniometrickými funkciami.

| | $\sinh x$ | $\cosh x$ | $\mathrm{tgh}\,x$ | $\mathrm{cotgh}\,x$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sinh x =$ | $\sinh x$ | $\sqrt{\cosh^2 x - 1}$ | $\dfrac{\mathrm{tgh}\,x}{\sqrt{1-\mathrm{tgh}^2 x}}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{cotgh}^2 x - 1}}$ |
| $\cosh x =$ | $\sqrt{\sinh^2 x + 1}$ | $\cosh x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tgh}^2 x}}$ | $\dfrac{\mathrm{cotgh}\,x}{\sqrt{\mathrm{cotgh}^2 x - 1}}$ |
| $\mathrm{tgh}\,x =$ | $\dfrac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$ | $\dfrac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}$ | $\mathrm{tgh}\,x$ | $\dfrac{1}{\mathrm{cotgh}\,x}$ |
| $\mathrm{cotgh}\,x =$ | $\dfrac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x}$ | $\dfrac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$ | $\dfrac{1}{\mathrm{tgh}\,x}$ | $\mathrm{cotgh}\,x$ |

Tab. 0.0.2: Vzťahy medzi jednotlivými hyperbolickými funkciami.

## Limita funkcie

**233.** Nech $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 4)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} x \,\mathrm{cotg}\, x$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{tg}\,2x}$, d) $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{tg}\,2x}$,
e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}$, h) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$,
i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$, j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2/3}-1}{x^{3/5}-1}$, k) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$, l) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, o) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, p) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}$,

q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{b^x-1}$, r) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$, s) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos^2 x}{x}$, t) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$,

u) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3^x}{\sin 3x}$, v) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3^x}{\sin 3x}$, w) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-3^x}{\sin 3x}$, x) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-3^x}{\sin 3x}$.

**234.** Nech $a,b\in R$, $m,n\in N$. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^n}{1-x^m}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-\sqrt[m]{x}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^x}{4x}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^{3x}-1}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{6^x-1}$,

i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$, j) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$, k) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$, l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$,

m) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{\pi}{n}$, n) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\pi}{x}$, o) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x}\right)^x$, p) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$,

q) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-1}$, r) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}$, s) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}$, t) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}$.

**235.** Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$, j) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}$, k) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}$, l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{5}{x}}$, n) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{\sin x}}$, o) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{tgh}x$, p) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{tgh}x$,

q) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$, r) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$, s) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x-2}$, t) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{\arcsin 5x}$,

u) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{3x}$, v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}6x}$, w) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$, x) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg}3x}$.

**236.** Nech $a\in R$, $n\in N$. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$,

g) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$,

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, k) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$,

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$, n) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, o) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$,

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+a}-x\right)$, q) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin 2\pi n$, r) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin 2\pi x$,

s) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x\sin 2\pi x$, t) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{-x}\sin 2\pi x$, u) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{-x}\sin 2\pi x$.

**237.** Nech $n\in N$. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$, e) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$, f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x+4}{x^3-1}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}$, i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$, k) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}$, l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$,

m) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$, n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$, o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$,

p) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$, q) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{2+x}}$, r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$,

s) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, t) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, u) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

v) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$, w) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cotg} x$, x) $\lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}$.

**238.** Nech $a\in R$, $m,n\in R$. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+2x}$, b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$, e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$, f) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x+1}{5x}$, i) $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$, k) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$, l) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^4+2}}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$, o) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$,

p) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\cos x}{1-2\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, q) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$, r) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^4-1}\right)$,

s) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$, t) $\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$, u) $\lim\limits_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

**239.** Nech $a\in R$, $m,n\in R$. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(4x-1)^{100}(3x+1)^{200}}{(6x+5)^{300}}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$, d) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$,

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln x-\ln(x+2)]$, f) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+3)-\ln x]$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+a)-\ln(x-a)]$, h) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+a)-\ln x]$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, j) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$,

k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)$, l) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$,

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$,

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$, p) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

**240.** Dokážte, že funkcie $y=1-x$, $y=1-\sqrt{x}$ a $y=1-\sqrt[3]{x}$ konvergujú v bode 1 k nule rovnako rýchlo. Sú niektoré z nich ekvivalentné v bode 1?

**241.** Dokážte, že neexistujú limity $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\sin x$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^x(1+\sin x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^x(1-\sin x)$.

## Spojitosť funkcie

**242.** Vyšetrite spojitosť a charakter bodov nespojitosti funkcie:

a) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$, b) $y=\dfrac{1}{\sin x}$, c) $y=\dfrac{1}{\ln x}$, d) $y=\dfrac{x}{|x|}$,

e) $y=\lfloor\sin x\rfloor$, f) $y=\lfloor\cos x\rfloor$, g) $y=\ln|\sin x|$, h) $y=\ln|\cos x|$,

i) $y=\sin\dfrac{1}{x}$, j) $y=\cos\dfrac{1}{x}$, k) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, l) $y=\dfrac{x^2}{|x^2|}$,

m) $y=\operatorname{sgn}\sin x$, n) $y=\operatorname{sgn}\cos x$, o) $y=\sqrt{3-x^2}$, p) $y=\sqrt{3-|x|}$,

q) $y=\dfrac{\sin x}{x}$, r) $y=\dfrac{\sin x}{|x|}$, s) $y=\dfrac{x}{\sin x}$, t) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

**243.** Určte $a \in R$ tak, aby bola funkcia $f$ spojitá na svojom $D(f)$, ak:

a) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x < 0, \\ x + 2, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x < 0, \\ a - x, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{pre } x < 1, \\ 2 - x/a, & \text{pre } x \geq 1, \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{pre } x < 0, \\ a - x, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

**244.** Určte $a, b \in R$ tak, aby bola funkcia $f$ spojitá na svojom $D(f)$, ak:

a) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x \in (-\infty\,; 0)\,, \\ x + 2, & \text{pre } x \in (0\,; 2)\,, \\ 3x + b, & \text{pre } x \in \langle 2\,; \infty)\,, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a, & \text{pre } x \in (-\infty\,; b\rangle\,, \\ x + 2, & \text{pre } x \in (b\,; a)\,, \\ 3x + b, & \text{pre } x \in \langle a\,; \infty)\,. \end{cases}$

**245.** Určte $f(0)$ tak, aby bola funkcia $f$ spojitá v bode 0, ak pre $x \neq 0$ platí:

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2x}$, b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{x}$, c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2 - 4}{x}$,

d) $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$, e) $f(x) = x^2 + e^{-1/x^2} - 1$, f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.

**246.** Nech je funkcia $f$ nespojitá v bode $a \in D(f)$. Aká je funkcia $|f|$ v bode $a$?

**247.** Zostrojte funkciu, ktorá je definovaná na množine $R$, je všade spojitá a má práve 0, 1, 2, …, $n$, ($n \in N$), resp. nespočítateľne veľa bodov nespojitosti.

**248.** Zostrojte funkciu, ktorá je definovaná na množine $R$, je všade nespojitá a má práve 0, 1, 2, …, $n$, ($n \in N$), resp. spočítateľne veľa bodov spojitosti.

**249.** Nech sú funkcie $f$, $g$ nespojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode $a$. Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi.

a) $f + g$, b) $g/f$, c) $fg$, d) $f(f)$, e) $f(g)$, f) $|f(g)|$.

**250.** Nech je funkcia $f$ spojitá a funkcia $g$ nespojitá v bode $a \in D(f) \cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode $a$. Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi.

a) $f + g$, b) $g/f$, c) $fg$, d) $g(f)$, e) $f(g)$, f) $|f(g)|$.

**251.** Určte množiny, na ktorých sú spojité funkcie $f(g)$, $g(f)$, ak $f(x) = \operatorname{sgn} x$ a platí:

a) $g(x) = x(1 - x^2)$, b) $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$, c) $g(x) = \operatorname{sgn}(1 - x)$,

d) $g(x) = 1 + x - \lfloor x \rfloor$, e) $g(x) = 1 + x \lfloor x \rfloor$, f) $g(x) = 1 - \chi(x)$.

**252.** Dokážte, že ak sú na množine $A$ spojité funkcie $f$, $g$, potom sú na množine $A$ spojité aj funkcie $y = \min\{f(x), g(x)\}$, $y = \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in A$.

**253.** Metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 0{,}01$ nájdite všetky korene funkcie $f$:

a) $f(x) = x^3 + 2x - 11$, b) $f(x) = e^x + x$, c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x^{-1} + 5$,

d) $f(x) = \ln x - 3 + x$, e) $f(x) = e^{x^2 - 1} - x - 1$, f) $f(x) = \cos x^2 + x - 1$.

**254.** Dokážte, že daná rovnica má riešenie na intervale $I$ a nájdite toto riešenie.

a) $x^4 - 4x^3 + 5x - 1 = 0$, $I = \langle 0\,; 1\rangle$, b) $x^4 - 4x^3 + 5x - 1 = 0$, $I = \langle 1\,; 2\rangle$,

c) $x^3 - x - 1 = 0$, $I = \langle 1\,; 2\rangle$, d) $\cos x - x = 0$, $I = \langle 0\,; 1\rangle$,

e) $x + \arcsin x^2 = 0$, $I = \langle -1\,; 0)$, f) $x + \sin(x - 1) = 0$, $I = \langle 0\,; 1\rangle$.

**255.** Nájdite množinu $f(I)$, ak:

a) $I = \langle \pi\,; 3\pi/2\rangle$, $f(x) = \sin 2x$, b) $I = \langle -2\,; 4\rangle$, $f(x) = x^2 + 2$,

c) $I = \langle 0\,; \infty)$, $f(x) = x\lfloor x \rfloor$, d) $I = \langle 0\,; 4\pi\rangle$, $f(x) = x\lfloor \sin x \rfloor$,

e) $I = \langle 0\,; \infty)$, $f(x) = \chi(x^2 + 1)$, f) $I = (0\,; 1)$, $f(x) = (x^2 - x)^{-1}$.

**256.** Nech je funkcia $f$ spojitá na intervale $(a\,; b)$ a nech $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a\,; b)$, $n \in N$. Dokážte, že existuje $c \in (a\,; b)$ také, že platí $f(c) = [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]/n$.

**257.** Rozhodnite, či je funkcia $f$ rovnomerne spojitá na množine $A$, ak:

a) $f(x) = 2x - 1$, $A = R$, b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $A = \langle -1\,; 1\rangle$,

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $A = (0\,; \pi\rangle$, d) $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$, $A = \langle -1\,; 1\rangle$,

e) $f(x) = \sin x^2$, $A = \langle 0\,; \infty)$, f) $f(x) = x \sin x$, $A = \langle 0\,; \infty)$,

g) $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$, $A = (0{,}1\,; 1)$, h) $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$, $A = (0\,; 1)$,

i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $A = \langle 0\,; \infty)$, j) $f(x) = \ln x$, $A = \langle 1\,; \infty)$.

**258.** Dokážte, že ak je $f$ na $R$ spojitá a periodická, potom je rovnomerne spojitá.

# Diferenciálny počet reálnej funkcie reálnej premennej

## Derivácia reálnej funkcie

**259.** Z definície vypočítajte deriváciu funkcie $y = f(x)$ v bode $x_0$:
a) $y = x^2 + 3$, $x_0 = 0$, b) $y = \cos 2x$, $x_0 = \pi/4$, c) $y = (x-1)^{-1}$, $x_0 = 2$,
d) $y = x(x+2)^2$, $x_0 = 1$, e) $y = \sin 2x$, $x_0 = \pi/4$, f) $y = x^3 \sin(x-\pi)$, $x_0 = \pi$.

**260.** Z definície vypočítajte deriváciu funkcie $y = f(x)$:
a) $y = 2x^2 - 5$, b) $y = \sqrt{x^2+1}$, c) $y = \sqrt{x-1}$, d) $y = x - x^2$,
e) $y = \operatorname{cotg} x$, f) $y = 2 - 3x$, g) $y = (x-1)^{-1}$, h) $y = \mathrm{e}^{-x}$.

**261.** Nech $f\colon\ y = 2x^2 + 1$. Nájdite všetky body, pre ktoré platí $f(x) = f'(x)$.

**262.** Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:
a) $y = 2^{-x^2}$, b) $y = \mathrm{e}^{-\cos x}$, c) $y = \sqrt[x]{x}$, d) $y = \sqrt[3]{x} + 1$, e) $y = 2^{\operatorname{tg} x}$,
f) $y = x^{(\mathrm{e}^x)}$, g) $y = x^{\sin x}$, h) $y = x^{\ln x}$, i) $y = \mathrm{e}^{\operatorname{tgh} x}$, j) $y = [\ln x]^x$,
k) $y = \mathrm{e}^{1/x}$, l) $y = \mathrm{e}^{-1/x}$, m) $y = \mathrm{e}^{x^2-1}$, n) $y = x\sqrt{x}$, o) $y = \sqrt[3]{\cos x}$,
p) $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, q) $y = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}$, r) $y = x^{x+1}$, s) $y = x^{(x^x)}$, t) $y = (x^x)^x$,
u) $y = \dfrac{\sqrt[5]{4x}}{5}$, v) $y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, w) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^4}}$, x) $y = \dfrac{1}{\cos x}$, y) $y = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x^2}$.

**263.** Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:
a) $y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$, b) $y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} \mathrm{e}^x}$, c) $y = \dfrac{3^x}{2^x}$, d) $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$, e) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$,
f) $y = x^5 \mathrm{e}^x$, g) $y = \operatorname{tg}^5 x$, h) $y = \sin x^2$, i) $y = \sqrt{\mathrm{e}^{5x}}$, j) $y = \mathrm{e}^{\sin x}$,
k) $y = |x^3|$, l) $y = x\,|x|$, m) $y = \lfloor x \rfloor$, n) $y = 3^{2x}$, o) $y = |\cos x|$,
p) $y = 3^{\operatorname{cotg} x}$, q) $y = x^{\sqrt{x}}$, r) $y = x^{\cos x}$, s) $y = x^{x^2+1}$, t) $y = \ln x^3$,
u) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, v) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$, w) $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$, x) $y = \dfrac{1}{\ln^2 x}$, y) $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

**264.** Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:
a) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$, b) $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$, d) $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}$,
e) $y = \mathrm{e}^{-\cos^2 x}$, f) $y = \ln \cos x$, g) $y = x^{-5} + x^{-7}$, h) $y = \sqrt{x^5} - \sqrt[3]{x^4}$,
i) $y = \ln \dfrac{2-x}{2+x}$, j) $y = \dfrac{x \ln x}{1 + \ln x}$, k) $y = \ln \left|\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right|$, l) $y = \dfrac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}$,
m) $y = \ln [1 + x^2]$, n) $y = [x^2 - 1]^3$, o) $y = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x^2}$, p) $y = x^5 [\ln x - 1]$,
q) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, r) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$, s) $y = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}$, t) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x+1}$,
u) $y = (1-2x)^4$, v) $y = \ln^2 (x+1)$, w) $y = \ln (x^2+1)$, x) $y = \ln [1 - \sqrt{x}]$.

**265.** Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:
a) $y = \sin \dfrac{1}{x^2}$, b) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$, c) $y = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$, d) $y = \dfrac{1 - \sin x}{\sin x + \cos x}$,
e) $y = \mathrm{e}^{\sin x + \cos x}$, f) $y = \sqrt{1 - x^4}$, g) $y = \operatorname{cotg} \sqrt{x}$, h) $y = (1 - x^2)^{20}$,
i) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, j) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$, k) $y = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}}$, l) $y = \dfrac{x^3}{1+x+x^2}$,
m) $y = x^2 \mathrm{e}^{-1/x}$, n) $y = x^2 \mathrm{e}^x \sin x$, o) $y = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, p) $y = \operatorname{arccotg} \sqrt{x}$,
q) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, r) $y = \dfrac{2x \sin x}{x^2-1}$, s) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$, t) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$,
u) $y = x\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$, v) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, w) $y = x \ln x - 1$, x) $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \sqrt{x-1}$.

**266.** Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:
a) $y = \operatorname{tg} \dfrac{1+x}{x}$, b) $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$, c) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$, d) $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$,
e) $y = \ln^4 [x^2+1]$, f) $y = \ln |\sin 2x|$, g) $y = x \sinh x$, h) $y = \ln \operatorname{arccotg} x^2$,

i) $y=\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$, j) $y=\ln\dfrac{x^8-1}{x^8+1}$, k) $y=\arccos\ln\dfrac{1}{x}$, l) $y=\arccos\dfrac{3x-1}{4}$,
m) $y=[\sin x]^{\cos x}$, n) $y=[\cos x]^{\sin x}$, o) $y=[\cosh x]^{\ln x}$, p) $y=[x^2+1]^{\operatorname{arctg} x}$,
q) $y=\operatorname{argsinh}\dfrac{x^2}{4}$, r) $y=\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, s) $y=\dfrac{3\operatorname{cotgh} x}{\ln(x+1)}$, t) $y=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2}$,
u) $y=[\operatorname{tg} x]^{\operatorname{cotg} x}$, v) $y=3^{\ln[x^2+x+1]}$, w) $y=x^2\ln x-x^3$, x) $y=x+5\cos^2 x$.

**267.** Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y=f(x)$ platí:
a) $y=\arccos\ln x$, b) $y=\ln\sin \mathrm{e}^{2x}$, c) $y=|x^2-1|$, d) $y=\arcsin\ln x$,
e) $y=x\arcsin x$, f) $y=\mathrm{e}^x\cos x$, g) $y=(x-1)\,\mathrm{e}^x$, h) $y=\mathrm{e}^x\arcsin x$,
i) $y=\sqrt{|x-1|}$, j) $y=|x-2|$, k) $y=x\operatorname{cotg} x$, l) $y=\ln\ln\ln\ln x$,
m) $y=\ln|x^2-1|$, n) $y=\ln(x^2-1)$, o) $y=\operatorname{tgh} x-x$, p) $y=\ln\arcsin 5x$,
q) $y=\ln\sin x$, r) $y=\ln\arcsin x$, s) $y=\operatorname{argtgh}\operatorname{tg} x$, t) $y=\operatorname{arccotg}\ln x$,
u) $y=\dfrac{\operatorname{argsinh} x}{x}$, v) $y=\dfrac{x^2}{\cosh x}$, w) $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, x) $y=\operatorname{arccotg}\ln\dfrac{1}{x}$.

**268.** Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y=f(x)$ platí:
a) $y=\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}$, b) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$, c) $y=7x^4+5x^3+3x^2+x$,
d) $y=\dfrac{4x+5}{(x^3+4x-5)^2}$, e) $y=\operatorname{argcosh}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$, f) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$,
g) $y=5\sin^2 x-2\cos x^3$, h) $y=\sqrt[3]{x^2+3x+2}$, i) $y=(x^3+7x^2-x+1)^4$,
j) $y=(x^3-2)\left[\dfrac{1}{x^2}+2\right]$, k) $y=5x\sin 4x-\dfrac{\ln x}{2x^3}$, l) $y=\dfrac{1}{2-x}-\operatorname{arctg}(x-2)$,
m) $y=x^6\ln 2-\sin x$, n) $y=x^6\ln 2-\sin 10$, o) $y=(1-\sqrt{x})(1+x)$,
p) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{2\sin 2x}$, q) $y=\dfrac{x\operatorname{arctg} 2x}{x^2-4}$, r) $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$,
s) $y=x\sin x+\cos x$, t) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$, u) $y=\mathrm{e}^x[x^3+x^2-2x-3]$,
v) $y=\dfrac{x^3}{1+x^6}-\operatorname{arctg} x^3$, w) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$, x) $y=\ln\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

**269.** Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y=f(x)$ platí:
a) $y=x-\sin x\cos x$, b) $y=x^2\sqrt{x}-x\sqrt[3]{x^2}$, c) $y=\mathrm{e}^{-x}[x^4+x^2+1]$,
d) $y=\arcsin^2\dfrac{1}{x-1}$, e) $y=\dfrac{\sin x-\sinh x}{\cos x-\cosh x}$, f) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$,
g) $y=\ln[x+\sqrt{x^2+1}]$, h) $y=\sin\sin\sin\sin x$, i) $y=x+\sqrt[2]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}$,
j) $y=\operatorname{argtgh}\dfrac{2x}{x^2+1}$, k) $y=\operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x^2+1}$, l) $y=\dfrac{1}{x^3+1}+\ln\dfrac{x^3}{x^3+1}$,
m) $y=\ln^2 x-\ln\ln x$, n) $y=\sin\cos\sin\cos x$, o) $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$,
p) $y=\dfrac{\operatorname{argcotgh} x}{1-x^2}$, q) $y=\ln\cos\dfrac{x-1}{x}$, r) $y=\sqrt[3]{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$,
s) $y=|x-1|+|x-2|$, t) $y=\ln|x^2+2x+3|$, u) $y=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arccotg} x$,
v) $y=\operatorname{arccotg}\dfrac{3\operatorname{tg} x+2}{x}$, w) $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+\operatorname{cotg} x$, x) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}+\dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$.

**270.** Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y=f(x)$ platí:
a) $y=\operatorname{arccotg}\operatorname{tg} x$, b) $y=\operatorname{arctg}\operatorname{cotg} x$, c) $y=\arcsin\sin x$,
d) $y=\ln\dfrac{(x-1)^2(x-2)}{x-3}$, e) $y=\ln\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$, f) $y=\sqrt{\dfrac{3\sin x-2\cos x}{5}}$,
g) $y=\operatorname{cotg}\operatorname{arctg} x$, h) $y=\operatorname{tg}\operatorname{arccotg} x$, i) $y=\ln\cos\sqrt{x^2+1}$,
j) $y=\dfrac{1}{3\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos x}$, k) $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, l) $y=\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}[3\ln x-2]$,
m) $y=\arcsin\cos x$, n) $y=\sqrt{\operatorname{cotg} x}-\sqrt{\operatorname{tg} x}$, o) $y=x\sin[\ln x-\pi]$,
p) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, q) $y=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$, r) $y=\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$,
s) $y=\arccos\sqrt{x+1}$, t) $y=\sqrt{\cos x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}$, u) $y=\sqrt{1+\arcsin x}$,
v) $y=\operatorname{arccotg}\operatorname{cotg}^2 x$, w) $y=\operatorname{arccotg}\operatorname{tg}^2 x$, x) $y=\ln\left[x+1+\sqrt{1+x^2}\right]$,

**271.** Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = \dfrac{x\sqrt{2+x^2}}{2} + \ln\left[x + \sqrt{2+x^2}\right]$,
b) $y = \ln\left[x^2+x+1\right] + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$,
c) $y = \sqrt{1+2x-x^2} - \arcsin \dfrac{x-1}{\sqrt{2}}$,
d) $y = \ln \dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$,
e) $y = (x+1)\sqrt{x^2+2\sqrt[3]{x^2+3}}$,
f) $y = \operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x - 4\ln\cos x$,
g) $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{4}\sin 2x - \dfrac{\cos 2x}{8}$,
h) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + \ln\sqrt{1-x^2}$,
i) $y = 2x - (1-x^2)\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,
j) $y = -\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x$,
k) $y = \sin^2 2x + [\cos^2 x - \sin^2 x]^2$,
l) $y = x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \ln\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]$,
m) $y = \dfrac{2\cos 2x}{3} + \dfrac{\cos x \sin^2 x}{3}$,
n) $y = x - \dfrac{\sin 4x}{4} + \dfrac{\sin^3 2x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5}$,
o) $y = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{\ln(x^2-1)}{2}$,
p) $y = \dfrac{\sqrt{x-x^2}}{2} + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$,
q) $y = (x^2+x+1)(x^3+x+1)$,
r) $y = (x^2+x+1)(x^3+x^2+x+1)$,
s) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + \ln\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$,
t) $y = \ln\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$,
u) $y = \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$,
v) $y = \ln\dfrac{1-\sqrt{\sin x}}{1+\sqrt{\sin x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$,
w) $y = \ln\arcsin x + \arcsin\ln x$,
x) $y = x\ln\left[x - \sqrt{x^2-1}\right] + \sqrt{x^2-1}$,
y) $y = \dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)(x+4)}$,
z) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$.

**272.** Určte jednostranné derivácie $f'_-(0)$, $f'_+(0)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí:

a) $y = |\sin x|$,
b) $y = |\sin x^2|$,
c) $y = \sqrt{\sin x^2}$,
d) $y = \lfloor x \rfloor \sin x$,
e) $y = \begin{cases} x^2 \sin x^{-1}, & \text{pre } x \neq 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0, \end{cases}$
f) $y = \begin{cases} x \sin x^{-1}, & \text{pre } x \neq 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0, \end{cases}$
g) $y = \begin{cases} x, & \text{pre } x < 0, \\ \ln(x+1), & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$
h) $y = \begin{cases} 1-x, & \text{pre } x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-x}, & \text{pre } x > 0. \end{cases}$

**273.** Pomocou inverznej funkcie vypočítajte deriváciu funkcie $y = f(x)$:

a) $y = \sqrt[4]{x}$,
b) $y = \log_{10} x$,
c) $y = \sqrt[5]{x} + 1$,
d) $y = \log_2 x - 1$.

**274.** Nech $f$ je reálna funkcia. Dokážte, že platí:

a) Ak $f$ je nepárna, potom $f'$ je párna.
b) Ak $f$ je párna, potom $f'$ je nepárna.
c) Ak $f$ je periodická s periódou $p$, potom $f'$ je periodická s periódou $p$.

**275.** Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $x_0$, ak:

a) $y = x^2$, $x_0 = 2$,
b) $y = 12/x$, $x_0 = 3$,
c) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$,
d) $y = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$,
e) $y = \ln(x+1)$, $x_0 = 0$,
f) $y = \cos 2x$, $x_0 = 0$,
g) $y = \sin 2x$, $x_0 = 0$,
h) $y = \mathrm{e}^x - 1$, $x_0 = 1$,
i) $y = 1/(1+x^2)$, $x_0 = 3$.

**276.** Určte $a \in R$ tak, aby sa graf funkcie $y = x$ dotýkal grafu funkcie $y = a^x$. Nájdite bod, v ktorom sa tieto grafy dotýkajú.

**277.** Pre aké $a \in R$ má funkcia $y = |x^2 - a|$ deriváciu pre všetky $x \in R$?

**278.** Určte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^2 + x + 1$ tak, aby prechádzala počiatkom súradnicového systému, t.j. bodom $[0;0]$.

**279.** Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^2 - 2x + 3$ tak, aby bola:

a) rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$,
b) kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$,
c) prechádzala bodom $[0;0]$,
d) prechádzala bodom $[a;b]$, $a, b \in R$.
e) zvierala s osou $x$ uhol $\pi/4$,
f) zvierala s osou $y$ uhol $\varphi \in (0\,;\pi/2\rangle$.

**280.** Nájdite rovnicu normály ku grafu funkcie $y = x^2 - 2x + 3$ tak, aby bola:

a) rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$,
b) kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$,
c) prechádzala bodom $[1;3]$,
d) zvierala s osou $y$ uhol $\pi/4$.

**281.** Určte všetky dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$, ktoré sú rovnobežné s osou $x$. Určte body, v ktorých sa dotýkajú grafu funkcie $f$, ak:

a) $y = \sin(x+1)$,
b) $y = \cos 2x$,
c) $y = \ln(x+1)$,
d) $y = x^3 - x$,
e) $y = [\ln x]/x$,
f) $y = \sqrt{1-x^2}$,
g) $y = x\ln x$,
h) $y = \mathrm{e}^x/x$.

## Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

**282.** Vypočítajte diferenciál $\mathrm{d}f(x,h)$, ak je funkcia $f$ definovaná predpisom:
a) $y = x\,\mathrm{e}^x$, b) $y = x^3 2^x$, c) $y = x^{-1}$, d) $y = \arcsin x$,
e) $y = 2^{-\frac{\ln x}{x}}$, f) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, g) $y = \dfrac{x}{1-x}$, h) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$,
i) $y = \mathrm{e}^{-x^2}$, j) $y = x\ln x$, k) $y = \operatorname{tg} x$, l) $y = \operatorname{arctg} x$.

**283.** Kruhový výsek má polomer $r = 30$ cm a stredový uhol $\varphi = 60°$. Určte približne, ako sa zmení obsah kruhového výseku, ak:
a) $r$ sa zväčší o 1 cm, b) $r$ sa zmenší o 1 cm, c) $\varphi$ zmenší o 1°.

**284.** Dokážte, že ak je $h$ podstatne menšie ako $x^2$, potom platia približné vzorce:
a) $\sqrt{x^2+h} \approx x + \dfrac{h}{2x}$, $x > 0$, b) $\sqrt[n]{x^n+h} \approx x + \dfrac{h}{nx^{n-1}}$, $x > 0$.

**285.** Určte absolútnu a relatívnu chybu obsahu kruhu s polomerom $r$, ak je polomer daný s absolútnou chybou $\Delta r$.

**286.** Pomocou diferenciálu vypočítajte približne hodnoty:
a) $\cos 61°$, b) $\operatorname{tg} 44°$, c) $\ln 0,9$, d) $\sqrt[11]{2000}$, e) $\arcsin 0,54$,
f) $\sqrt[4]{17}$, g) $\sqrt[4]{267}$, h) $\sqrt{82}$, i) $\sqrt[3]{214}$, j) $\operatorname{arctg} 0,97$,
k) $1,04^5$, l) $2^{1,002}$, m) $\ln 20$, n) $\log 1001$, o) $\operatorname{arctg} 1,05$.

**287.** Tiažové zrýchlenie $g_h$ v nadmorskej výške $h$ je určené vzťahom $g_h = gr^2/(r+h)^2$, kde $g = 9,8065\ \mathrm{ms}^{-1}$ je tiažové zrýchlenie pri povrchu zeme a $r$ je polomer zeme (stredný polomer zeme je $r = 6371$ km). Dokážte, že platí $g_h \approx g(1-2h/r)$.

**288.** Vypočítajte deriváciu tretieho a piateho rádu funkcie $y = f(x)$, ak:
a) $y = x^3\sin x$, b) $y = x^3\cos x$, c) $y = x^3\sin 2x$, d) $y = x^3\cos 2x$,
e) $y = \mathrm{e}^x\sin x$, f) $y = \mathrm{e}^x\cos x$, g) $y = x^5\ln x$, h) $y = x\,\mathrm{e}^x\sin x$.

**289.** Vypočítajte deriváciu $n$-tého rádu, $n\in N$, funkcie $y = f(x)$, ak:
a) $y = \sin^2 x$, b) $y = \cos^3 x$, c) $y = x\sin x$, d) $y = x^{n-1}\ln x$,
e) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, f) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, g) $y = \dfrac{x+\ln x}{x}$, h) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$,
i) $y = x\,\mathrm{e}^x$, j) $y = x\ln x$, k) $y = x + \ln x$, l) $y = x(\ln x - 1)$.

**290.** Dokážte, že funkcia $y = c_1\mathrm{e}^x\cos x + c_2\mathrm{e}^x\sin x + c_3\mathrm{e}^{-x}\cos x + c_4\mathrm{e}^{-x}\sin x$, $x\in R$, kde $c_1, c_2, c_3, c_4$ sú ľubovoľné reálne čísla spĺňa rovnicu $y^{(4)} + 4y = 0$.

**291.** Nech $a > 0$. Dokážte, že funkcia $y = c_1\mathrm{e}^{ax} + c_2\mathrm{e}^{-ax} + c_3\cos ax + c_4\sin ax$, $x\in R$, kde $c_1, c_2, c_3, c_4$ sú ľubovoľné reálne čísla spĺňa rovnicu $y^{(4)} - a^4y = 0$.

## Aplikácie diferenciálneho počtu

**292.** Dokážte, že pre $0 < a < b$, $n\in N$ platí:
a) $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < b - a$, b) $\sqrt{1+a^2} \le 1 + a\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)$,
c) $\frac{\operatorname{arctg} a}{1+a} < \ln(1+a) < a$, d) $1 + \frac{1}{1+\mathrm{e}} < \ln(1+\mathrm{e}) < 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$,
e) $\ln(1+a^2) \le 2a\operatorname{arctg} a$, f) $na^{n-1}(b-a) \le b^n - a^n \le nb^{n-1}(b-a)$,
g) $2 + a^2 \le \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}$, h) $\sin a < a - \frac{a^3}{6} + \frac{a^5}{120}$, i) $1 + a < \mathrm{e}^a$.

**293.** Pomocou vety o strednej hodnote odhadnite nasledujúce výrazy:
a) $\operatorname{tg} 4,2$, b) $\operatorname{arctg} 1,5$, c) $\log_3 18$, d) $\arcsin 0,5$, e) $\arccos 0,5$.

**294.** Rozviňte do Taylorovho polynómu so stredom v bodoch 1, $-1$, 2, $-2$ polynómy:
a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, b) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, c) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$,
d) $x^4 - 2x^3 + 2x + 1$, e) $x^4 + 2x^2 + 2x - 1$, f) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1$,
g) $x^5 - 2x^4 + 2x^2 + 1$, h) $x^5 + 2x^3 + 2x^2 - 1$, i) $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x$,
j) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, k) $x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$,
l) $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, m) $x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$.

**295.** Určte Taylorov polynóm stupňa $n$ so stredom v bode $x_0$ pre funkciu $y=f(x)$:

a) $y=x^{\frac{2}{3}}$, $n=3$, $x_0=1$, b) $y=x^x$, $n=3$, $x_0=1$, c) $y=\frac{1}{x}$, $n=4$, $x_0=2$,
d) $y=\ln x$, $n=4$, $x_0=2$, e) $y=\ln x$, $n=4$, $x_0=3$, f) $y=\frac{1}{x^3}$, $n=3$, $x_0=1$.

**296.** Určte Maclaurinov polynóm stupňa $n$ pre funkciu $y=f(x)$:

a) $y=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $n=3$, b) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, $n=3$, c) $y=\frac{1-x^2}{1+x+x^2}$, $n=3$,
d) $y=\frac{e^x}{e^x+1}$, $n=4$, e) $y=\ln\cos x$, $n=6$, f) $y=\ln\cos x^2$, $n=6$,
g) $y=\operatorname{tg} x$, $n=5$, h) $y=\operatorname{tg}^2 x$, $n=5$, i) $y=\sin^2 x$, $n=5$,
j) $y=\sin^3 x$, $n=5$, k) $y=\cos^2 x$, $n=5$, l) $y=\cos^3 x$, $n=5$.

**297.** Určte Maclaurinov polynóm stupňa $n$ pre funkciu $y=f(x)$:

a) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, b) $y=\cosh x$, c) $y=\sinh x$, d) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

**298.** Pomocou Maclaurinovho vzorca vypočítajte s chybou menšou ako $0,0001$ hodnoty:

a) $\sqrt[10]{1010}$, b) $\operatorname{tg} 4,2$, c) $\sqrt{\pi}$, d) $(1,1)^{1,2}$, e) $\operatorname{arctg} 1,7$,
f) $\arcsin 0,5$, g) $\cos 1,6$, h) $\sin 0,9$, i) $\sqrt[4]{83}$, j) $\sqrt[3]{121}$.

**299.** Vypočítajte pre $m,n\in N$, $a>0$, $b>0$ nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^n-x}{x^n-1}$, b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^m-x}{x^n-x}$, c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$, d) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$, e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}$,
f) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$, g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}$, i) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$, j) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln^x\frac{1}{x}$,
k) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, l) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\operatorname{tg} ax)}{\ln(\operatorname{tg} bx)}$, m) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$, n) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x}\right)$,
o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 5x}{2\operatorname{tg} 3x}$, p) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg} x}$, q) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-2x-1}{\sin^2 3x}$, r) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x}\right)$,
s) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{\sin x}\right)$, t) $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}\right)$, u) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, v) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$,
w) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^2\sin^2 x}$, x) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$, y) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$, z) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$.

**300.** Zistite, či možno použiť L'Hospitalovo pravidlo a vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$, d) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$, e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin x}$.

**301.** Nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je monotónna funkcia $y=f(x)$:

a) $y=\frac{x}{1+x^2}$, b) $y=\frac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$, c) $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, d) $y=(1+\frac{1}{x})^x$,
e) $y=x\,|x|$, f) $y=\ln|x|+1$, g) $y=x^2 e^{-x}$, h) $y=\frac{e^x}{x}+1$,
i) $y=x^2-x+12$, j) $y=x^5-15x^3+3$, k) $y=|x+1|+|x-1|$,
l) $y=\frac{x}{x^2-1}+x+2$, m) $y=\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x}-1$, n) $y=x^2-1+|x^2-1|$,
o) $y=\ln\sqrt{1+x^2}-1$, p) $y=2x^2-\ln x+1$, q) $y=\sin x+\operatorname{tg} x-2x$,
r) $y=\sin x+\cos x+1$, s) $y=\cos x+\frac{\cos 2x}{2}-1$, t) $y=x+\sin x-1$.

**302.** Nájdite všetky extrémy funkcie $y=f(x)$:

a) $y=x^2(x-6)$, b) $y=x-\frac{1}{x}$, c) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^3}$, d) $y=\ln\frac{x^2+4x+2}{x+2}$,
e) $y=x-\lfloor x\rfloor$, f) $y=x^2 e^{-x}$, g) $y=x\,e^{\frac{1}{x}}+1$, h) $y=1+\sqrt{|x|}$,
i) $y=\sqrt{6x-x^2}$, j) $y=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$, k) $y=3-2x^{\frac{3}{2}}$, l) $y=4x-\operatorname{tg} x$,
m) $y=x^2-2x-1$, n) $y=x^4+2x^2-1$, o) $y=x+\frac{2x}{1+x^2}$, p) $y=\frac{1}{4x^3-9x^2+6x}$,
q) $y=|x|\,e^{|x-1|}$, r) $y=\frac{x}{\ln x}+2$, s) $y=x^3-2\,|x|$, t) $y=\operatorname{arctg}|x-1|$,
u) $y=e^{-x}\sin x$, v) $y=e^{-x}\cos x$, w) $y=e^x\sin x$, x) $y=e^x\cos x$.

**303.** Nájdite všetky extrémy funkcie $y=f(x)$:

a) $y=\sin x+\cos x+1$, b) $y=4x^3-3x^2-36x-5$, c) $y=4x^3-18x^2+27x$,
d) $y=x(x-1)^2(x-2)^3$, e) $y=x-\ln(1+x)-1$, f) $y=|x+4|-|x|+|x-1|$,
g) $y=-\ln(1+x-4x^2)$, h) $y=\ln^2 x-3\ln x+2$, i) $y=\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$.
j) $y=x^x$, $x\in(0;\infty)$, k) $y=x^2\ln x$, $x\in\langle1;e\rangle$, l) $y=x-2\ln x$, $x\in\langle1;e\rangle$,
m) $y=x+\frac{1}{x-1}$, $x\in\langle-4;1)$, n) $y=x+\frac{2x}{x^2-1}$, $x\in\left\langle\frac{3}{2};3\right\rangle$, o) $y=\frac{2x}{x^2-1}$, $x\in\left\langle\frac{11}{10};3\right\rangle$.

**304.** Nájdite všetky extrémy funkcie $y=f(x)$:

a) $y=\sqrt[3]{x^4-2x^3+x^2}$, $x\in\langle -3\,;\,2\rangle$,
b) $y=\cos 2x-2x+11$, $x\in\langle -\pi\,;\,\pi\rangle$,
c) $y=\sin x+\sin^2 x+1$, $x\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$,
d) $y=\sin x-\sin^2 x+1$, $x\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$,
e) $y=x^2-6x+10$, $x\in\langle -1\,;\,5\rangle$,
f) $y=x^3-3x+20$, $x\in\langle -3\,;\,4\rangle$,
g) $y=|x^2-6x+5|$, $x\in\langle -2\,;\,2\rangle$,
h) $y=|x^2-6x+5|$, $x\in\langle -6\,;\,6\rangle$,
i) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $x\in\langle -1\,;\,1\rangle$,
j) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $x\in R$.

**305.** Rozložte číslo $a>0$ na súčet dvoch kladných čísel $x_1$, $x_2$ tak, aby:

a) $x_1x_2$ bolo maximálne,
b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ bolo minimálne,
c) $x_1^n+x_2^n$ bolo minimálne pre $n\in N$,
d) $x_1^nx_2^n$ bolo maximálne pre $n\in N$.

**306.** Nájdite $x>0$ tak, aby jeho súčet s jeho obrátenou hodnotou bol minimálny.

**307.** Do trojuholníka s najdlhšou stranou $a>0$ a výškou $v>0$ vpíšte obdĺžnik tak, aby jedna jeho strana ležala na strane $a$ a aby mal maximálny obsah.

**308.** Určte rozmery trojuholníka, ktorý má jednu stranu $a>0$ a obvod $s>2a$, tak aby mal maximálny obsah.

**309.** Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obvodu $s>0$, aby jeho uhlopriečka bola minimálna.

**310.** Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obsahu $P>0$, aby jeho obvod bol minimálny.

**311.** Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obvod $s>0$, aby jeho obsah bol maximálny.

**312.** Do elipsy s poloosami $0<a<b$ vpíšte pravouhlý rovnobežník so stranami rovnobežnými s osami elipsy tak, aby mal maximálny obsah.

**313.** Do gule s polomerom $r>0$ vpíšte válec tak, aby mal:

a) maximálny objem,
b) maximálny povrch,
c) maximálny plášť.

**314.** Do gule s polomerom $r>0$ vpíšte kolmý kužeľ tak, aby mal:

a) maximálny objem,
b) maximálny povrch,
c) maximálny plášť.

**315.** Do kužeľa s výškou $h>0$, polomerom $r>0$ vpíšte válec s maximálnym objemom.

**316.** Na priamke $p$ nájdite bod tak, ktorý je najbližšie k bodu $A=[1;2]$:

a) $p\colon\ y=3x-1$,
b) $p\colon\ y=3x+2$,
c) $p\colon\ y=3x+1$,
d) $p\colon\ y=3x-2$.

**317.** Na parabole $p$ nájdite bod tak, ktorý je najbližšie k bodu $A=[1;2]$:

a) $p\colon\ y=4x-x^2$,
b) $p\colon\ y=x+x^2$,
c) $p\colon\ y=-4x+2x^2$,
d) $p\colon\ y=-3x-x^2$.

**318.** Silážna jama má mať tvar pravouhlého rovnobežnostena (bez hornej steny) s objemom $V=1000\ \text{m}^3$. Dĺžka podstavy má byť 4–krát väčšia ako jej šírka. Náklady na vybudovanie 1 $\text{m}^2$ podstavy sú 2–krát menšie ako náklady na vybudovanie 1 $\text{m}^2$ steny. Určte rozmery silážnej jamy, aby náklady na jej vybudovanie boli minimálne.

**319.** Drôt s dĺžkou 10 m máme rozdeliť na dve časti, z ktorých prvá sa zohne do štvorca a druhá do kruhu. Kde má byť rez, aby súčet obsahov štvorca a kruhu bol minimálny.

**320.** Kartón má tvar obdĺžnika s rozmermi $30\times 14$ cm. V rohoch vystrihneme rovnaké štvorce a zvyšok ohneme do otvorenej krabice. Aká veľká má byť strana vystrihnutých štvorcov, aby mala krabica maximálny objem.

**321.** Okno, ktoré má tvar rovinného obrazca zloženého z obdĺžnika a polkruhu zostrojeného nad jednou jeho stranou, má obvod $s>0$. Aké majú byť rozmery obdĺžnika a polkruhu, aby malo okno maximálny obsah.

**322.** Dva splavné, na seba kolmé kanály, sú široké 4 m a 6 m. Vypočítajte dĺžku najdlhšieho trámu, ktorý môže preplávať z jedného kanálu do druhého.

**323.** Nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je funkcia $y=f(x)$ konvexná alebo konkávna a nájdite všetky jej inflexné body:

a) $y=5x^2+20x+7$, b) $y=3x^5-5x^4+4$, c) $y=2-|x^2-2|$, d) $y=x^2+x^{\frac{2}{3}}-1$,
e) $y=x(1-x)^2+1$, f) $y=x+x^{\frac{5}{3}}+1$, g) $y=3-(x+2)^{\frac{7}{5}}$, h) $y=x-\cos x$,
i) $y=x\operatorname{arctg} x$, j) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+1$, k) $y=x\ln x+1$, l) $y=x+\sin x$,
m) $y=x+\frac{1}{x^2}+1$, n) $y=x+\frac{2x}{1-x^2}$, o) $y=\frac{x}{1+x^2}+1$, p) $y=\frac{x^3}{x^2+27}+27$,
q) $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}$, r) $y=x^3-12x^2-5x+2$, s) $y=(x-1)^{\frac{5}{2}}+5(x+1)^{\frac{3}{2}}$,
t) $y=|x^2-1|+|x^2+1|$, u) $y=12-\ln(x^2-9)$, v) $y=x^4+2x^3-12x^2-5x$.

**324.** Dokážte, že všetky inflexné body funkcie $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ ležia na priamke $x-4y=0$.

**325.** Dokážte, že pre pravouhlé súradnice každého inflexného bodu funkcie $y=x\sin x$ platí $(x^2+4)y^2=4x^2$.

**326.** Dokážte, že každý polynóm nepárneho stupňa $n>1$ má inflexný bod.

**327.** Pre aké $b\in R$ má funkcia $y=\mathrm{e}^x+bx^3$ inflexný bod?

**328.** Určte asymptoty ku grafu funkcie $y=f(x)$:

a) $y=\frac{x}{x-1}+1$, b) $y=\frac{1}{1-x^2}+1$, c) $y=\frac{x^2+2}{x^2-4}+1$, d) $y=\frac{x\sin x}{1+x^2}+1$,
e) $y=3x+\frac{3}{x-2}$, f) $y=x+\frac{2x}{x^2-1}$, g) $y=2x-\frac{\cos x}{x}$, h) $y=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$,
i) $y=x+\frac{\ln x}{x}$, j) $y=x\operatorname{arctg} x$, k) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+1$, l) $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)$,
m) $y=\frac{\sin x}{x}+12$, n) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+12$, o) $y=x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+12$, p) $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$.

**329.** Vyšetrite priebeh funkcie $y=f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y=3x^5-5x^3$, b) $y=-x^4+6x^2-5$, c) $y=(\frac{x^2}{6}+x)^2$, d) $y=(\frac{x^3}{8}-1)^3$,
e) $y=(1-x^2)^2$, f) $y=(x^2-1)3x$, g) $y=x^6-x^3+1$, h) $y=x^6-x^4-1$,
i) $y=x^3+\frac{1}{x^2}$, j) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$, k) $y=x^3+\frac{1}{x^3}$, l) $y=x^2+\frac{1}{x^3}$,
m) $y=\frac{2x}{x^2-1}+x$, n) $y=\frac{\ln x}{x}+1$, o) $y=x-\ln x$, p) $y=x+2\operatorname{arctg} x$,
q) $y=x+\operatorname{arccotg} x$, r) $y=(2-x)\,\mathrm{e}^{x-1}$, s) $y=x^2\,\mathrm{e}^{-x}+1$, t) $y=x^2\,\mathrm{e}^{x+2}-1$,
u) $y=x\,\mathrm{e}^{-x^2}+1$, v) $y=x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1$, w) $y=x-\mathrm{e}^{-x}+1$, x) $y=x^2-\mathrm{e}^{-x}-1$.

**330.** Vyšetrite priebeh funkcie $y=f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-1}$, b) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$, c) $y=(x-4)\sqrt[3]{x}$, d) $y=(x+4)\sqrt[3]{x^2}$,
e) $y=\arcsin\frac{1-x}{1+x}$, f) $y=\operatorname{cotgh}\frac{1-x}{1+x}$, g) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$, h) $y=x+\frac{\sin x}{x}$,
i) $y=x^3+3x$, j) $y=16x(x-1)^3$, k) $y=|16-x^2|$, l) $y=x^2-2|x|$,
m) $y=\sqrt{|x-1|}$, n) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$, o) $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$, p) $y=\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$,
q) $y=x\ln x+1$, r) $y=x+\mathrm{e}^{-x}$, s) $y=\ln(4-x^2)$, t) $y=\sin x+\cos x$,
u) $y=x^2\sin\frac{1}{x}$, v) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+1$, w) $y=x\operatorname{arctg} x$, x) $y=\arcsin|x|$.

**331.** Vyšetrite priebeh funkcie $y=f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y=\frac{x-1}{x+1}$, b) $y=\frac{x^3+4}{x^6}$, c) $y=\frac{x^2+1}{x}$, d) $y=\frac{2x^3}{x^2+1}$, e) $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$,
f) $y=\frac{x-1}{x-2}$, g) $y=\frac{x^2}{x-1}$, h) $y=\frac{x+1}{x^2}$, i) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, j) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$,
k) $y=\frac{x-3}{x-2}$, l) $y=\frac{2x^5-3}{x^2}$, m) $y=\frac{2-x}{(x-1)^2}$, n) $y=\frac{x^2+4}{x^2+3}$, o) $y=\frac{x^2+2}{x^2+3}$,
p) $y=\frac{x+1}{x-1}$, q) $y=\frac{x-2}{x^3}$, r) $y=\frac{x^2-3}{x^3}$, s) $y=\frac{1-x^4}{x^2}$, t) $y=\frac{1-x^3}{x^4}$,
u) $y=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, v) $y=\left|\frac{x^2}{x-1}\right|$, w) $y=\left|\frac{x-1}{x^2}\right|$, x) $y=\left|\frac{(x-1)^2}{1-x^2}\right|$, y) $y=\left|\frac{1+x^2}{1-x}\right|$.

**332.** Vyšetrite priebeh funkcie $y=f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{10}$, b) $y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$, c) $y=\frac{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}}{3}$,
d) $y=\cos^3 x-3\cos x+1$, e) $y=(x+2)^2(x+5)$, f) $y=(1-x)^3(1+x)^4$,
g) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, h) $y=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, i) $y=\sinh x+\sinh(1-x)$,
j) $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}$, k) $y=2(x+1)-3(x-1)^{\frac{2}{3}}$, l) $y=\cos x-\ln\cos x$,
m) $y=x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+12$, n) $y=\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$, o) $y=x-2\operatorname{arctg} x$, p) $y=x-|\sin x|$.

**333.** Nájdite explicitný tvar funkcie $y=f(x)$ definovanej parametricky:

a) $x=t+1,\ y=1-2t-t^2,\ t\in(1\,;\,4)$,
b) $x=3\cosh t,\ y=2\sinh t,\ t\in\langle 0\,;\,\infty)$,
c) $x=4\cos t,\ y=3\sin t,\ t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$,
d) $x=4\cos^2 t,\ y=9\sin^2 t,\ t\in\langle 0\,;\,\frac{\pi}{2}\rangle$.

**334.** Určte množiny hodnôt pre parameter $t$ tak, aby dané parametrické rovnice určovali spojitú funkciu $y=f(x)$. Elimináciou parametra $t$ určte jej explicitný tvar:

a) $x=2t^2-1,\ y=4t^2-1$,
b) $x=2t-1,\ y=4t-1$,
c) $x=4t^2+1,\ y=3t+2$,
d) $x=2\sin\frac{\pi t}{3},\ y=\cos\frac{\pi t}{3}$,
e) $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$,
f) $x=3t+2,\ y=4t^2+1$.

**335.** Zistite, aké krivky sú dané parametrickými rovnicami pre $a\in R,\ a>0$:

a) $x=\cos t,\ y=a\sin t,\ t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$,
b) $x=\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$,
c) $x=\cos^2 t,\ y=a\sin^2 t,\ t\in\langle 0\,;\,\frac{\pi}{2}\rangle$,
d) $x=\sin^3 t,\ y=a\cos^3 t,\ t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$.

**336.** Preveďte uvedený implicitný tvar krivky na parametrický tvar (položte $y=tx$):

a) $x^3+y^3-axy=0,\ a>0$,
b) $x^2+y^2=x^3+y^3$,
c) $x^2+y^2=x^4+y^4$.

**337.** Určte deriváciu funkcie $y=f(x)$ definovanej parametricky:

a) $x=\frac{4t^3}{3},\ y=\frac{t^2}{2},\ t\in(-\infty\,;\,\infty)$,
b) $x=\frac{1-t}{1+t},\ y=\frac{2t}{1+t},\ t\in R-\{-1\}$,
c) $x=\frac{2\sin t}{1+2\cos t},\ y=\frac{4\cos t}{1+2\cos t},\ t\in\left(-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right)$,
d) $x=\arcsin\frac{1}{1+t^2},\ y=\arccos\frac{1}{1+t^2},\ t\in R$,
e) $x=t-\cos t,\ y=1+\sin t,\ t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$,
f) $x=4\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t,\ t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$,
g) $x=e^{2t}\cos^2 t,\ y=e^{2t}\sin^2 t,\ t\in\langle 0\,;\,\frac{\pi}{2}\rangle$,
h) $x=2\cosh t,\ y=4\sinh t,\ t\in(0\,;\,\infty)$.

**338.** Určte $f'$, $f''$, $f'''$ pre funkciu $y=f(x)$ určenú parametricky:

a) $x=4t+t^2,\ y=t^3+t,\ t\in\langle 0\,;\,\infty)$,
b) $x=\ln t,\ y=\sin 2t,\ t\in(0\,;\,\infty)$,
c) $x=4\sin t,\ y=4\cos t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$,
d) $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t,\ t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$,
e) $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t,\ t\in R$,
f) $x=e^t,\ y=\arcsin t,\ t\in(-1\,;\,1)$.

**339.** Nájdite rovnice dotyčnice a normály ku grafu $y=f(x)$ určenej parametricky:

a) $x=4t+t^2,\ y=t^3+t,\ t\in\langle 0\,;\,\infty)$ v bodoch $[0;0]$, $[5;2]$, $[12;10]$, $[21;30]$, $[32;68]$,
b) $x=t^2-4t+4,\ y=t^2-3t+2,\ t\in\langle 2\,;\,\infty)$ v bodoch $[1;2]$, $[4;6]$, $[9;12]$, $[16;20]$, $[25;30]$,
c) $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ t\in R$ v bodoch $[-\pi;2]$, $\left[\frac{2-\pi}{2};1\right]$, $[0;0]$, $\left[\frac{\pi-2}{2};1\right]$, $[\pi;2]$,
d) $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$ v bodoch $[1;0]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $[0;1]$, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $[-1;0]$,
e) $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$ v bodoch $[1;0]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$, $[0;1]$, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$, $[-1;0]$.

**340.** Nájdite inflexné body funkcie $y=f(x)$ zadanej parametricky:

a) $x=3t+t^3+1,\ y=t^2+1,\ t\in R$,
b) $x=\sin t,\ y=e^t,\ t\in\left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

**341.** Zistite priebeh krivky určenej parametricky:

a) $x=2t-t^2,\ y=3t-t^3$,
b) $x=\cos^4 t,\ y=\sin^4 t$,
c) $x=t\,e^t,\ y=t\,e^{-t}$,
d) $x=\frac{\ln t}{t},\ y=t\ln t$,
e) $x=\frac{t^2}{1-t^2},\ y=\frac{1}{1+t^2}$,
f) $x=\frac{3t}{1+t^3},\ y=\frac{3t^2}{1+t^3}$.

# Výsledky cvičení

### Základné pojmy

**1.** a) *„Nie je pravda, že všetci ľudia vedia plávať.“*, resp. *„Nie všetci ľudia vedia plávať.“*, resp. *„Existuje človek, ktorý nevie plávať.“*. b) Rovnica $2^x = 4x$ nemá kladný koreň $x$. c) Najviac jedno číslo je kladné. d) Menej ako tretina krajín patrí do OSN. e) Nie je pravda, že práve dve čísla sú kladné. Žiadne, jedno alebo viac ako tri čísla nie sú kladné. f) Exisuje číslo tvaru $n^2$, $n \in N$, ktoré nie je párne. **2.** a) $\exists x \in R$: $\sin x \geq 1$, b) $\forall x \in R$: $\sin x \geq 1$, c) $\exists! x \in R$: $\sin x \geq 1$, d) $\exists x \in R$: $\sin x < 1$, e) $\exists x \in R$: $\sin x \leq 1$, f) $\forall x \in R$: $\sin x \leq 1$, g) $\exists! x \in R$: $\sin x \leq 1$, h) $\exists x \in R$: $\sin x > 1$, i) $\exists x \in R$: $\sin x \neq 1$, j) $\forall x \in R$: $\sin x \neq 1$, k) $\exists! x \in$: $\sin x \neq 1$, l) $\exists x \in R$: $\sin x = 1$. **3.** Ak $pq$ sú postupne $PP$, $PN$, $NP$, $NN$, potom výsledné pravdivostné hodnoty sú: a) $NNPN$, b) $PNPP$, c) $NNNP$, d) $NPPN$, e) $PPPN$, f) $PNNP$, g) $PPPN$, h) $NNPN$, i) $PPPP$, j) $PNPP$, k) $NNPP$, l) $PPNN$. **4.** a) záleží od trojuholníka, v oboch prípadoch môže byť $P$ alebo $N$, b) záleží od $k$, v oboch prípadoch môže byť $P$ alebo $N$, c) záleží od nerovnice, v oboch prípadoch môže byť $P$ alebo $N$, d) vždy $N$, v závislosti od nerovnice môže byť $P$ alebo $N$. **5.** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p \wedge \overline{q}} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$, resp. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [\overline{p \wedge \overline{q}} \wedge \overline{\overline{p} \wedge q}] \Leftrightarrow [(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})] \Leftrightarrow \overline{\overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p \vee \overline{q}}} \Leftrightarrow \overline{(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)}$. **7.** a) áno, b) áno, c) nie, d) áno, e) áno, f) áno, g) áno, h) áno, i) nie, j) áno. **10.** a) áno, b) nie, c) nie, d) nie, e) nie, f) nie, g) nie, h) áno, i) áno, j) nie, k) nie, l) áno. **12.** a) *„$x$ je deliteľné dvomi alebo tromi práve vtedy, ak je deliteľné šiestimi.“*, neg. $(p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (r \wedge \overline{p \wedge q})$: *„$x$ je deliteľné dvomi, tromi a nie šiestimi alebo je deliteľný šiestimi a nie dvomi a tromi zároveň“*, b) *„Ak je $x$ deliteľné dvomi alebo tromi, potom je deliteľné šiestimi.“*, neg. $(p \vee q) \wedge \overline{r}$: *„$x$ je deliteľné dvomi alebo tromi a nie šiestimi.“*, c) *„Ak neplatí, že $x$ je deliteľné dvomi alebo tromi, potom $x$ nie je deliteľné dvomi ani tromi.“*, neg. $\overline{p \vee q} \wedge (p \vee q)$: *„Neplatí, že $x$ je deliteľné dvomi alebo tromi a zároveň platí, že $x$ je deliteľné dvomi alebo tromi.“*, d) *„Platí, že ak je $x$ deliteľné dvomi potom je deliteľné aj tromi alebo neplatí, že $x$ je deliteľné dvomi a tromi.“*, neg. $p \wedge \overline{q} \wedge r$: *„$x$ je deliteľné dvomi a nie tromi a šiestimi.“*, e) *„Implikácia, ak $x$ je deliteľné dvomi, potom je deliteľné aj tromi, platí práve vtedy, ak je $x$ deliteľné dvomi alebo nie je deliteľné tromi.“*, neg. $(\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})$: *„Buď je $x$ deliteľné dvomi a nie tromi, alebo je $x$ deliteľné tromi a nie dvomi.“*, f) *„Ak je $x$ deliteľné dvomi alebo šiestimi potom je $x$ deliteľné dvomi alebo romi.“*, neg. $(p \vee r) \wedge \overline{p} \wedge \overline{q}$: *„$x$ je deliteľné dvomi alebo šiestimi a zároveň nie je deliteľné dvomi ani tromi.“*. **13.** a) áno, b) nie, c) áno, d) áno, e) nie, f) áno. **14.** a) nie, b) nie, c) áno, d) nie, e) nie, f) nie. **15.** Tautológie: b), d), e), f), h), kontraindikácie: a), c), g), i), j). **16.** $\overline{p \wedge \overline{q} \wedge \overline{\overline{r \wedge \overline{s}}} \wedge \overline{\overline{s \wedge \overline{r}}}}$. **17.** a) $\overline{(p \wedge q) \vee r \vee s}$, b) $(p \wedge q) \wedge \overline{r \vee s}$, c) $(p \vee q) \vee \overline{r \wedge s}$. **20.** a) nie, b) nie, c) nie, d) áno, e) nie, f) áno. **21.** Pravdivosť pôvodných výrokov: a) áno, b) nie, c) áno, d) nie, e) áno, f) nie, g) áno, h) áno.

**50.** Do množiny $2^A$ patria $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $A$. Do množiny $2^B$ patria $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $B$. **51.** $2^{(n^k)}$. **52.** a) nie, b) áno, c) áno, d) nie, e) nie, f) nie, g) áno, h) nie, i) nie, j) nie, k) nie, l) áno. **53.** $A \subset B \cap D$, $A' \cup C = X$, $B \cup (D - A)' = (D - B)'$, $D \triangle (A \cap C) = D - A$. **54.** $R \subset P$. **55.** $A \cup B = B$, $B \cap D' = B - A$, $B \cap D' \subset A \triangle C$, $B \cap D' \subset A \cup B$. **59.** Všetky podmnožiny množiny $\{1, 3, 5, 7\}$ okrem $\emptyset$. **60.** a) $\{2, 4, 8, 10, 14\}$, $\{2, 4, 6, 8, 12, 14\}$, $\{3, 6, 9, 12\}$, b) $\{3, 9, 15\}$, $\{5, 15\}$, $\{5, 10\}$, c) $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$, $\{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15\}$, $\{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$, d) $\{6, 12\}$, $\{10\}$, $\{15\}$, e) $\emptyset$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$, f) $\{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15\}$, $\{2, 4, 5, 6, 8, 12, 14, 15\}$, $\{3, 5, 6, 9, 10, 12\}$, g) $\{5, 6, 10, 12, 15\}$, $\{10, 15\}$, h) $\{3, 6, 9, 10, 12, 15\}$, $\{6, 12, 15\}$, i) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15\}$, $\{6, 10, 12\}$, j) $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$, $\{6, 12\}$, k) $\{10, 15\}$, l) $\{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15\}$, m) $\{2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15\}$, n) $\{3, 6, 9, 10, 12, 15\}$. **64.** Obidve. **65.** a) relácia medzi $A$ a $B$, aj $B$ a $A$, b) nie, c) relácia medzi $A$ a $B$, d) relácia medzi $A$ a $B$, zobrazenie z $B$ do $A$. **66.** $[\pm 2; \pm 1]$. **67.** a) $f = \{[a;a], [a;b], [a;c], [a;d], [a;e], [b;a], [b;b], [b;c], [b;d], [b;e], [c;a], [c;b], [c;c], [c;d], [c;e], [d;a], [d;b], [d;c], [d;d], [d;e], [e;a], [e;b], [e;c], [e;d], [e;e]\}$, b) $f = \{[a;a], [a;b], [a;e], [b;a], [b;b], [b;c], [c;b], [c;c], [c;d], [d;c], [d;d], [d;e], [e;a], [e;d], [e;e]\}$, c) $f = \{[a;a], [a;c], [a;e], [b;b], [c;c], [c;e], [d;d], [e;e]\}$, d) $f = \{[a;a], [a;c], [a;e], [c;a], [c;c], [c;e], [e;a], [e;c], [e;e]\}$. **68.** a) áno, b) nie. **70.** a) pre všetky $n \in N$ množiny $\{n\}$, b) pre všetky prvočísla $p$ množiny $\{kp\colon k \in N\}$, pričom 1 priradíme do niektorej z nich. **71.** a) spočítateľná, b) nespočítateľná, c) nespočítateľná, d) nespočítateľná. **72.** Nespočítateľná.

### Reálne čísla

**88.** a) 2 a 3, b) 0 a 3/2, c) 0 a 1, d) 0 a $\sin 1$, e) 0 a 1/2, f) 1 a $\infty$. **89.** a) $-1/3$ a $1/2$, b) $(\sqrt{5} - 1)/2$ a $\infty$. **100.** a) $\emptyset$, b) $(4{,}83478; \infty)$, c) $(-\infty; -2) \cup (-\sqrt{5/2}; -1) \cup (0; 1) \cup (\sqrt{5/2}; 2)$, d) $(-2; -1) \cup (1; 2)$, e) $\{1\}$, f) $(-2; -1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$. **101.** a) $(1/2; 3)$, b) $(-7; -4)$, c) $(16/11; 2)$, d) $(-1; 4)$, e) $(-\infty; 1) \cup (3; \infty)$, f) $(-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}; 1) \cup (2; \infty)$. **102.** a) $\emptyset$, b) $(-\infty; (-1 - \sqrt{3})/2) \cup ((-1 + \sqrt{3})/2; \infty)$, c) $(-1/2; 2)$, d) $\emptyset$, e) $(-\infty; -3) \cup (8; \infty)$, f) $(-\infty; 7 - \sqrt{73}) \cup (7 + \sqrt{73}; \infty)$, g) $R$, h) $R$, i) $(-2; 0) \cup (1; \infty)$. **103.** a) $(-2 - \sqrt{3}; -3) \cup (-1; -2 + \sqrt{3})$, b) $(-\infty; -1 - \sqrt{5}) \cup (-2; 0) \cup (1 + \sqrt{5}; \infty)$, c) $(-1 - \sqrt{7}; -1) \cup (1; 1 + \sqrt{7})$, d) $(-9; \infty)$, e) $(-\infty; -3) \cup (24/7; 4)$ f) $(-3; -2) \cup (-3/2; \infty)$, g) $(-4; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; \infty)$, h) $(-4; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; \infty)$, i) $(-\infty; -\sqrt{6}) \cup (0; 2) \cup (3; \infty)$. **104.** a) $(-\infty; -4) \cup (2; \infty)$, b) $((1 - \sqrt{13})/2; -1) \cup (0; (1 + \sqrt{13})/2) \cup (2; \infty)$, c) $(-\infty; -7) \cup (-3; \infty)$, d) $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$, e) $(-\infty; -4)$, f) $(-\infty; -1/2) \cup (0; 1) \cup (2; \infty)$, g) $(-\infty; -1) \cup \langle 0; 1)$, h) $(-\infty; -2/3\rangle \cup (1; 2)$. **105.** a) $\langle 3; 4\rangle$, b) $(3; 4)$, c) $(3; 4) \cup (4; \infty)$. **106.** a) $(-\infty; 1)$, b) $R$, c) $(0; \infty)$, d) $R$, e) $\emptyset$, f) $(-\infty; 0)$, g) $(0; \infty)$, h) $R - \{\pm\sqrt{3}\}$, i) $\langle(-1 - \sqrt{5})/2; 0\rangle \cup \langle(-1 + \sqrt{5})/2; \infty)$, j) $R$, k) $\langle 0; 1\rangle$, l) $\langle 0; \infty)$. **109.** a) $(-4; (-3 - \sqrt{21})/2) \cup ((-3 + \sqrt{21})/2; 1)$, b) $(-\infty; 2 - \sqrt{5}\rangle \cup \langle 2 + \sqrt{5}; \infty)$, c) $(-\infty; (-1 - \sqrt{13})/2) \cup (-2; 1) \cup ((-1 + \sqrt{13})/2; \infty)$. **110.** Dlhšia odvesna väčšia ako $(1 + \sqrt{241})/2$. **111.** a) $(-\infty; -1/2\rangle \cup (1/2; \infty)$, b) komplexné pre $(-4\sqrt{3}; 4\sqrt{3})$, c) komplexné pre $(25/4; \infty)$.

**116.** a) $\{0\} \cup \{n^{-1}; n \in N\}$, b) $\{0\} \cup \{n^{-1}; n \in N\} \cup \{n^{-2}; n \in N\}$, c) $\{0\}$, d) $N \cup \{\infty\}$, e) $\{n^2; n \in N\} \cup \{\infty\}$, f) $\{0\}$, g) $R^*$, h) $R^*$, i) $R^*$. **119.** V $R^2$ vrcholy rovnostranného trojuholníka so stranou 1, v $R^3$ vrcholy pravidelného štvorstena, atď. **120.** $\sqrt{n}$ pre všetky. **125.** Áno. **126.** a) $X = R$, $\rho(x, y) = 1$, b) $X = R$, $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, x) = ||x| - y|$, c) $X = R$, $\rho(x, y) = |x - y| + 1$. **130.** a) áno, b) áno, c) nie, d) nie. **131.** a) $\{\emptyset, \{1\}, X\}$, b) $\nexists$, c) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\}$, d) $\nexists$, e) $\nexists$, f) $\nexists$. **134.** a) áno, b) áno, c) áno, d) áno, e) áno, f) nie.

**135.** a) rastúca, ohraničená zhora číslom 1, b) klesajúca, ohraničená zdola číslom 1/2, c) klesajúca, ohraničená zdola číslom 1, d) rastúca, nie je ohraničená zhora, e) rastúca, nie je ohraničená zhora, f) rastúca, nie je ohraničená zhora, g) klesajúca, ohraničená zdola číslom 0, h) nie je monotónna, nie je ohraničená zdola ani zhora, i) nie je monotónna, ohraničená zdola číslom 0 a zhora číslom 3, j) rastúca, ohraničená zhora číslom 0, k) rastúca, ohraničená zhora číslom 1. **136.** a) $\{0\}$, b) $\{1\}$, c) $\{1\}$, d) $\{1/2, 2\}$. **137.** $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = 0$, $b_n = n$), resp. diverguje (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$), $\{a_n / b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$), diverguje (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$ pre $n$ párne a $b_n = n^{-1}$ pre $n$ nepárne), $\{b_n / a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje, $\{1/(a_n b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = 1$, $b_n = n$), diverguje (napr. $a_n = n^{-2}$, $b_n = n$). **138.** $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = n$, $b_n = \mp n$), diverguje (napr. $a_n = n$, $b_n = \pm n$), $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, 1, 0, 1, \ldots\}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$), resp. diverguje (napr. $a_n = n$, $b_n = n$), $\{a_n / b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = n$, $b_n = n$), diverguje (napr. $a_n = n^2$, $b_n = n$), $\{1/(a_n b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n = n$, $b_n = n$), diverguje (napr. $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$). **139.** a) napr. $\{0, 1, 0, 1, \ldots\}$, $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$, b) napr. $a_n = n^{-1}$, $b_n = n^{-2}$, c) napr. $a_n = n + 4$, $b_n = n$, d) neexistujú. **140.** $a_n = -(n^2 - 3n + 4)/2$. **141.**

a) $a_{n+1} = 2a_n - 3$, b) $a_{n+1} = 2 - a_n$, c) $a_{n+1} = a_n - 1$, d) $a_{n+1} = a_n/(a_n + 1)$. **142.** a) $a_n = n$, b) $a_n = (-1)^{n+1}$, c) $a_n = 2^{n-1}n!$. **143.** a) $\pm 1$, b) $0$, c) $\pm 1$, d) $0$, e) $\infty$, f) $\pm\infty$, g) $0$. **144.** $200$. **145.** a) $a_n = a(\sqrt{2}/2)^{n-1}$, b) $8a/(2-\sqrt{2})$, c) $2a^2$. **146.** $-2$. **147.** a) áno, b) áno, c) nie, d) áno, e) áno, f) áno. **148.** a) $2$, b) $4$, c) $5$, d) $1$, e) $1$, f) $2$, g) $0$, h) $(1+\sqrt{5})/2$. **149.** a) $0$, b) $0$, c) $0$, d) $0$. **150.** a) $61/450$, b) $8/15$, c) $1$, d) $50/99$, e) $2/3$, f) $4/33$. **151.** a) $a \le 3$, b) $-1 < a \le 1$, c) $-4 < a \le 2$, d) $a > -1$. **152.** a) $a = 0$, $b = -1$, b) $a = -1$,$b = 2$, c) $a < 2$, $b = 0$, resp. $a = 3$, $b = -1$, d) $a > 2$, $b = 0$. **154.** a) $1$, b) $2$, c) $1$, d) $(1+\sqrt{1+4a})/2$. **155.** a) $1$, b) $1$, c) $-5$, d) $0$, e) $1/6$, f) $1/3$, g) $4/3$, h) $2$. **156.** a) $\infty$, b) $1/2$, c) $0$, d) $1$, e) $-4$, f) $5/3$, g) $1$, h) $\infty$, i) $4$. **157.** a) $-1$, b) $-1$, c) $0$, d) $1$, e) $\infty$, f) $1$, g) $\infty$, h) $0$, i) $0$, j) $1$, k) $0$, l) $0$, m) $0$, n) $1$, o) $\mathrm{e}^{-2}$, p) $\mathrm{e}^{-3/2}$, q) $\mathrm{e}^{-1}$, r) $\mathrm{e}^{-5}$, s) $\mathrm{e}^{-1/3}$, t) $\mathrm{e}$. **158.** a) $1/3$, b) $\infty$, c) $-\infty$, d) $1$, e) $1$, f) $1/\sqrt{2}$, g) $0$, h) $2$. **159.** a) $1/b$, b) $1/b$, c) $\sqrt{ab}$. **160.** a) $a$ pre $-1 < a < 1$, $1/2$ pre $a = 1$, $0$ pre $a > 1$, resp. $a < -1$, $\nexists$ pre $a = -1$, b) $0$ pre $-1 < a < 1$, $1/2$ pre $a = 1$, $1$ pre $a > 1$, resp. $a < -1$, $\nexists$ pre $a = -1$, c) $0$ pre $a \neq 1$, $1/2$ pre $a = 1$, $\nexists$ pre $a = -1$, d) $0$ pre $-5 < a < 1$, $1$ pre $a = -1$, $\infty$ pre $a > -1$, $\nexists$ pre $a \le -5$, e) $0$ pre $-1 < a < 1$, $\mathrm{e}$ pre $a = 1$, $\infty$ pre $a > 1$, $\nexists$ pre $a \le -1$, f) $a^2$, g) $\mathrm{e}^{-2a}$, h) $0$ pre $-3 < a < 3$, $-1$ pre $a = 3$, $-\infty$ pre $a > 3$, $\nexists$ pre $a \le -3$. **161.** a) $0$, b) $0$, c) $a/2$, d) $0$, e) $1/2$, f) $-\infty$, g) $0$, h) $0$, i) $1/2$, j) $\infty$ pre $a > b$, $-2a$ pre $a = b$, $-\infty$ pre $a < b$, k) $a - b$, l) $\infty$ pre $a < 1$, $3$ pre $a = 1$, $-\infty$ pre $a > 1$. **162.** a) $1$, b) $5/3$, c) $0$, d) $2/3$, e) $(a+b)/2$, f) $1$. **163.** a) $\infty$ pre $a > 1/4$, $1$ pre $a = 1/4$, $0$ pre $a < 1/4$, b) $1$ pre $a \le 1$, $a$ pre $a > 1$, c) $a$, d) $0$ pre $a < 1$, $\infty$ pre $a \ge 1$, e) $\ln a$ pre $a > 0$, $0$ pre $a = 0$, f) $a/b$ pre $b > 0$, $\infty$ pre $b = 0$, g) $\ln a - \ln b$ pre $a \ge b > 0$, $\infty$ pre $a > b = 0$, $0$ pre $a = b = 0$. **164.** $\infty$.

**165.** a) diverguje, b) konverguje, c) diverguje, d) diverguje, e) konverguje, f) diverguje, g) konverguje, h) konverguje, i) diverguje, j) diverguje, k) diverguje, l) diverguje, m) diverguje, n) diverguje, o) diverguje [ukážte, že $a_{n+1}/a_n > 1$], p) konverguje, q) konverguje, r) diverguje, s) konverguje, t) konverguje, u) konverguje, v) diverguje, w) diverguje, x) diverguje, y) konverguje. **166.** a) diverguje, b) diverguje, c) diverguje, d) konverguje, e) konverguje, f) konverguje, g) konverguje, h) konverguje, i) diverguje, j) diverguje, k) diverguje, l) diverguje, m) konverguje n) diverguje o) konverguje p) diverguje, q) konverguje, r) konverguje, s) konverguje, t) diverguje, u) konverguje, v) diverguje, w) diverguje, x) konverguje [porovnajte s radom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^a$]. **167.** a) konverguje, b) diverguje, c) konverguje, d) konverguje, e) diverguje, f) diverguje, g) diverguje, h) konverguje, i) konverguje, j) diverguje, k) konverguje, l) konverguje, m) diverguje, n) konverguje, o) diverguje, p) konverguje, q) konverguje, r) konverguje. **168.** a) konverguje, b) diverguje, c) diverguje, d) konverguje, e) konverguje, f) konverguje, g) konverguje, h) diverguje, i) diverguje, j) diverguje, k) konverguje, l) diverguje, m) konverguje, n) konverguje, o) konverguje, p) konverguje, q) konverguje, r) konverguje, s) konverguje, t) konverguje, u) konverguje, v) diverguje, w) konverguje, x) konverguje. **169.** a) diverguje, b) konverguje, c) konverguje, d) konverguje, e) konverguje, f) diverguje, g) diverguje, h) diverguje, i) konverguje, j) konverguje, k) konverguje, l) konverguje. **170.** a) $1/2$, b) $1/2$, c) $\infty$, d) $319/1680$, e) $1$, f) $1/24$, g) $3/2$, h) $3$, i) $1/4$, j) $2/5$, k) $-5/12$, l) $1/3$, m) $1-\sqrt{2}$, n) $8/4928$. **171.** a) relatívne konverguje, b) relatívne konverguje, c) relatívne konverguje, d) absolútne konverguje, e) relatívne konverguje, f) relatívne konverguje, g) diverguje, h) diverguje, i) absolútne konverguje, j) absolútne konverguje, k) absolútne konverguje, l) relatívne konverguje, m) relatívne konverguje, n) diverguje, o) relatívne konverguje. **172.** a) $a > 3/2$, b) $a > 2$, c) $a > 1$, d) $a > 1$, e) $a > \mathrm{e}$, f) $0 < a < \mathrm{e}^{-1}$, g) $a < 0$, h) $a > 1/2$. **173.** a) konvergujú (napr. $a_n = -b_n$), resp. divergujú (napr. $a_n = b_n = n$), b) konvergujú (napr. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \{0,1,0,1,\ldots\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \{1,0,1,0,\ldots\}$), resp. divergujú (napr. $a_n = b_n = n$), c) konvergujú (napr. $a_n = n$, $b_n = a^2$), resp. divergujú (napr. $a_n = b_n$), d) konvergujú (napr. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \{0,-1,0,-1,\ldots\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \{-1,0,-1,0,\ldots\}$), resp. divergujú (napr. $a_n = b_n = n$). **174.** a) diverguje, b) konverguje (napr. $a_n = 0$, $b_n = 1$), resp. diverguje (napr. $a_n = 1/n^2$, $b_n = n$), c) konverguje (napr. $a_n = 1/n^2$, $b_n = n$), resp. diverguje (napr. $a_n = 1/n^2$, $b_n = 1/n$), d) konverguje (napr. $a_n = 0$, $b_n = -1/n$), resp. diverguje (napr. $a_n = 0$, $b_n = 1/n$). **178.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [1+(-1)^n]/3^n = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/9^n = 1/4$. **179.** $14 + 14/17$. **184.** a) $s = 1$, $a_n = 1/2^n$, b) $s = 1$, $a_1 = 3/2$, $a_n = -1/2^n$, c) $s = 0$, $a_1 = -1$, $a_n = (-1)^n(2n-1)/(n^2-n)$ pre $n \ge 2$, d) $s = 1/2$, $a_1 = -1/2$, $a_n = 1/(n^2-n)$ pre $n \ge 2$. **185.** a) $1{,}6 < s < 1{,}7$, b) $1{,}206 < s < 1{,}207$, c) $0{,}12 < s < 0{,}15$. **186.** konverguje, $a_n = a_1\sqrt{(1-a_1^2)^{(n-1)}}$, $a = a_1/[1-\sqrt{1-a_1^2}]$, $P = \sqrt{1-a_1^2}/(2a_1)$. **187.** $2\pi h^3R^2/(12R^2+9h^2)$. **188.** a) $\sqrt{2}d$ (nezávisí od $n$), b) $(\sqrt{2}+1)d$ (nezávisí od $n$), c) $\pi d/2$ (nezávisí od $n$), d) $2d$ (nezávisí od $n$). **189.** a) $\sqrt{2}o = 2\sqrt{2}\pi r$, b) $(\sqrt{2}+1)o = (\sqrt{2}+1)2\pi r$, c) $\pi o/2 = \pi^2 r$, d) $2o = 4\pi r$. **190.** a) $P + 0 = P$, b) $P + 0 = P$, c) $P + 0 = P$, d) $P + 0 = P$.

**191.** Porade $z$, $\overline{z}$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$, $z^{-1}$, $z^{-2}$, $z^2$, $z^3$: a) $1+\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$, $\sqrt{2}$, $\pi/4$, $(1-\mathrm{i})/2$, $-\mathrm{i}/2$, $2\mathrm{i}$, $-2+2\mathrm{i}$, b) $2+3\mathrm{i}$, $2-3\mathrm{i}$, $\sqrt{13}$, $\operatorname{arctg}(3/2)$, $(2-3\mathrm{i})/13$, $(-5-12\mathrm{i})/169$, $-5+12\mathrm{i}$, $-46+9\mathrm{i}$, c) $-1+\mathrm{i}$, $-1-\mathrm{i}$, $\sqrt{2}$, $3\pi/4$, $(-1-\mathrm{i})/2$, $\mathrm{i}/2$, $-2\mathrm{i}$, $2+2\mathrm{i}$, d) $-16\mathrm{i}$, $16\mathrm{i}$, $16$, $-\pi/2$, $\mathrm{i}/16$, $-1/256$, $-256$, $4096\mathrm{i}$, e) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$, $\sqrt{3}-\mathrm{i}$, $2$, $\pi/6$, $(\sqrt{3}-\mathrm{i})/4$, $(1-\sqrt{3}\mathrm{i})/8$, $2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$, $8\mathrm{i}$, f) $\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$, $1$, $\pi/2$, $-\mathrm{i}$, $-1$, $-1$, $-\mathrm{i}$, g) $2+\mathrm{i}$, $2-\mathrm{i}$, $\sqrt{5}$, $\operatorname{arctg}(1/2)$, $(2-\mathrm{i})/5$, $(3-4\mathrm{i})/25$, $3+4\mathrm{i}$, $2+11\mathrm{i}$, h) $(1+\mathrm{i})/2$, $(1-\mathrm{i})/2$, $\sqrt{2}/2$, $\pi/4$, $1-\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$, $\mathrm{i}/2$, $(-1+\mathrm{i})/4$, i) $(7+6\mathrm{i})/17$, $(7-6\mathrm{i})/17$, $\sqrt{5/17}$, $\operatorname{arctg}(6/7)$, $(7-6\mathrm{i})/5$, $(13-84\mathrm{i})/25$, $(13+84\mathrm{i})/289$, $(-413+666\mathrm{i})/4913$, j) $(1-\mathrm{i})/2$, $(1+\mathrm{i})/2$, $\sqrt{2}/2$, $\pi/4$, $1-\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$, $\mathrm{i}/2$, $(-1+\mathrm{i})/4$. **192.** $(a^2-b^2)/(a^2+b^2)$, $2ab/(a^2+b^2)$, $\operatorname{arctg}(2ab/(a^2-b^2))$. **193.** $0$ pre $n = 2k$ párne, $(-1)^{(k-1)(k+1)}2^k$ pre $n = 2k-1$ nepárne. **194.** a) $2^{10}(\cos(-5\pi/3) + \mathrm{i}\sin(-5\pi/3))$, b) $2^{10}(\cos(-10\pi/3) + \mathrm{i}\sin(-10\pi/3))$, c) $\sqrt{2^7}(\cos(21\pi/4) + \mathrm{i}\sin(21\pi/4))$, d) $\sqrt{2^7}(\cos(7\pi/4) + \mathrm{i}\sin(7\pi/4))$, e) $2^{12}(\cos 4\pi + \mathrm{i}\sin 4\pi)$. **196.** $\arg z_1 = \arg z_2$. **197.** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi)$. **198.** a) $\arg z_1 = \arg(\pm\overline{z_2})$, resp. $\arg z_1 = \arg(\pm z_2)$, b) $\arg z_1 = \arg(\pm\mathrm{i}\,\overline{z_2})$, resp. $\arg z_1 = \arg(\pm\mathrm{i}\,z_2)$, c) v ostatných prípadoch ako a) a b).

### Reálne funkcie

**199.** a) nie, b) áno, c) áno, d) áno, e) nie, f) áno, g) áno, h) áno. **200.** a) $\langle \mathrm{e}^{-1}; \mathrm{e}\rangle$, b) $R - \{\pi/2 + 2k\pi\,;\, k\in Z\}$, c) $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$, d) $\langle\sqrt{0+2k\pi}; \sqrt{\pi+2k\pi}\rangle$, $k\in Z$, e) $Z \cup \langle 0; \infty)$, f) $\langle(2k\pi)^2; (2k+1)^2\pi^2\rangle$, $k = 0, 1, \ldots$ g) $\langle 0; \pi^2/4\rangle \cup \langle(-\pi^2+2k\pi)^2; (\pi^2+2k\pi)^2\rangle$, $k\in Z$, h) $\langle\sqrt{(4k-1)\pi/2}; \sqrt{(4k+1)\pi/2}\rangle \cup \langle-\sqrt{(4k+1)\pi/2}; -\sqrt{(4k-1)\pi/2}\rangle$, $k = 0, 1, \ldots$, i) $R - \{\pm\sqrt{1/2}\}$, j) $(0; \infty) - N$, k) $(1; \infty) \cup ((-2k+1)^{-1}; (-2k)^{-1}) \cup ((2k+1)^{-1}; (2k)^{-1})$, $k\in N$, l) $(-\infty; -1\rangle \cup (1; \infty)$, m) $(-\infty; 0)$, n) $(-1; 1)$, o) $R - \langle 2; 3)$, p) $\langle 2; \infty) - \{4\}$, q) $R$, r) $(\mathrm{e}; \infty)$, s) $\langle\pi/4 + k\pi; \pi/2 + k\pi)$, $k\in Z$, t) $(-\infty; 0\rangle$, u) $(-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty)$, v) $R - \{-1\}$, w) $(-\infty; -1) \cup (0; \infty)$, x) $(-\infty; -2) \cup (3; \infty)$. **201.** a) $(-\pi/4 + k\pi/2; \pi/8 + k\pi/2\rangle$, $k\in Z$, b) $R - \langle -2; 2\rangle$, c) $(2; \infty)$, d) $\langle k\pi; \pi/2 + k\pi\rangle$, $k\in Z$, e) $\langle 0+2k\pi; \pi/2+2k\pi\rangle$, $k\in Z$, f) $\emptyset$, g) $\langle -5\pi/6 + k\pi; 5\pi/6 + k\pi\rangle$, $k\in Z$, h) $\langle 0; 1) \cup (1; \infty)$, i) $R - \{1\pm\sqrt{7}\}$, j) $(0; \infty)$, k) $(-\pi/2 + k\pi; \pi/4 + k\pi)$, $k\in Z$, l) $(-\pi/6 + 2k\pi; \pi/6 + 2k\pi)$, $k\in Z$, m) $R$, n) $R$, o) $\langle -2; 4\rangle$, p) $\langle -1; 1\rangle$, q) $\langle -1; 1\rangle$, r) $\langle -1; 1\rangle$, s) $\langle 0; 4\rangle$, t) $(-\infty; \sqrt{3}\rangle \cup \langle 0; \sqrt{3}\rangle$, u) $\langle -4; 0\rangle$. **202.** a) $\langle -1; 3\rangle$, b) $\langle -1/3; 1\rangle$, c) $(-1; 1) \cup (2; \infty)$, d) $\langle 1; 100\rangle$, e) $R - \{(1+k\pi)/2\,;\, k\in Z\}$, f) $\emptyset$, g) $(-\infty; -8\rangle \cup \langle -2; 2\rangle \cup \langle 8; \infty)$, h) $\langle -\ln 2; \ln 2)$, i) $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$, j) $R - \{3\pi/2 + 2k\pi\,;\, k\in Z\}$, k) $(-\infty; \ln 3\rangle$, l) $\langle 1/\mathrm{e}; \infty) - \{1\}$, m) $(-1/3; \infty)$, n) $(3/2; \infty)$, o) $(-\infty; \infty) - \{-1\}$, p) $\langle 0; \infty)$, q) $\langle -2k+1; -2k+2)$, $k\in Z$, r) $\langle -1/3; 1\rangle$. **205.** a) áno, b) nie, c) nie. **206.** $f = h$. **209.** a) párna, b) párna, c) nepárna, d) ani párna ani nepárna, e) nepárna, f) nepárna, g) ani párna ani nepárna, h) párna a aj nepárna, i) nepárna, j) párna, k) nepárna, l) párna, m) nepárna, n) párna, o) párna, p) nepárna, q) nepárna, r) párna, s) ani párna ani nepárna, t) ani párna ani nepárna, u) nepárna, v) párna, w) párna, x) nepárna. **211.** Párna, nepárna: a) $1$, $x$, b) $|x|$, $x$, c) $x^2 + |x|$, $0$, d) $x^2$, $x$, e) $\chi(x)$, $0$, resp. $0$, $\chi(x)$, resp. $\chi(x)/2$, $\chi(x)/2$, f) $\cosh x$, $\sinh x$, g) $1/(1-x^2)$, $-x/(1-x^2)$, h) $x^2+1$, $-2x$, i) $-(\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor)/2$, $(2x - \lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor)/2$, j) $(\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor)/2$, $(2x + \lfloor x\rfloor - \lfloor -x\rfloor)/2$, k) $((-1)^{\lfloor x-1\rfloor} + (-1)^{\lfloor -x-1\rfloor})/2$, $((-1)^{\lfloor x-1\rfloor} - (-1)^{\lfloor -x-1\rfloor})/2$, l) $(\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor + 2|x|)/2$, $(\lfloor x\rfloor - \lfloor -x\rfloor)/2$. **212.** Párna, resp. nepárna: a) $y = |x| - 1$, $x\in R$, resp. $y = x - 1$, $x > 0$, $y = x + 1$, $x < 0$, b) $y = |x-1|$, $x > 0$, $y = |x+1|$, $x < 0$, resp. $y = |x-1|$, $x > 0$, $y = -|x+1|$, $x < 0$, c) $y = \sqrt{x+1}$, $x > 0$, $y = \sqrt{-x+1}$, $x < 0$, resp. $y = \sqrt{x+1}$, $x > 0$, $y = -\sqrt{-x+1}$, $x < 0$, d) $y = (x+1)^{-1}$, $x > 0$, $y = (-x+1)^{-1}$, $x < 0$, resp. $y = (x+1)^{-1}$, $x > 0$, $y = (x-1)^{-1}$, $x < 0$, e) $y = x + \lfloor x\rfloor$, $x > 0$, $y = -x + \lfloor -x\rfloor$, $x < 0$, resp. $y = x + \lfloor x\rfloor$, $x > 0$, $y = x - \lfloor -x\rfloor$, $x < 0$, f) $y = x^2 - x$, $x > 0$, $y = x^2 + x$, $x < 0$, resp. $y = x^2 - x$, $x > 0$, $y = -x^2 - x$, $x < 0$. **213.** a) áno, $\pi$, b) nie, c) áno, $\pi$, d) áno, $2$, e) áno, $1$, f) áno, nemá (všetky $p\in R$), g) áno, nemá (všetky $p\in R$), h) áno, $2$. **214.** a) áno, $2\pi$, b) áno, $\pi$, c) nie, d) áno, $2\pi$, e) áno, $2\pi$, f) áno, $2\pi$, g) áno, $\pi$, h) áno, $\pi$, i) nie, j) áno, $2$, k) áno, $2$, l) nie. **215.** a) $y = (x-k)^2$, $x\in(k; k+1\rangle$, $k\in Z$, b) $y = (x+1-k)^2$, $x\in(k; k+1\rangle$, $k\in Z$, c) $y = \sqrt{x+3-k}$, $x\in(k; k+1\rangle$, $k\in Z$. **216.** Uvedieme iba definíciu funkcie na intrevale periodicity: a) napr. $y = 1 - x$ pre $x\in\langle 0; 1\rangle$, $y = 0$ pre $x\in\langle 1; 3\rangle$ a $y = x - 3$ pre $x\in\langle 3; 4\rangle$, b) napr. $p = 9$, $y = x - 1$ pre $x\in\langle 1; 3\rangle$, $y = 2$ pre $x\in\langle 3; 6\rangle$, $y = 8 - x$ pre $x\in\langle 6; 8\rangle$ a $y = 0$ pre $x\in\langle 8; 10\rangle$, c) napr. $p = 8$, $y = x + 2$ pre $x\in\langle -4; -1\rangle$, $y = -x$ pre $x\in\langle -1; 1\rangle$, $y = x - 2$ pre $x\in\langle 1; 4)$, d) neexistuje, e) napr. $f(0) = 0$, $f(x) = 3 - x$ pre $x \in \langle 1; 5\rangle$, f) napr. $f(x) = 3 - x$ pre

$x\in\langle 0;\,3\rangle$ a $f(x)=x-5$ pre $x\in\langle 5;\,8\rangle$. **218.** a) na $(-\infty;\,-1\rangle$, $(1;\,\infty)$, $(1/(k+1);\,1/k\rangle$, $k\in Z-\{0,-1\}$ je konštantná, b) na $(-\infty;\,1/2\rangle$ klesá, na $\langle 1/2;\,\infty)$ rastie, c) na $(-\infty;\,3/2\rangle$ klesá, na $\langle 3/2;\,\infty)$ rastie, d) na $(-\infty;\,-1\rangle$ klesá, na $\langle -1;\,2\rangle$ je konštantná a na $\langle 2;\,\infty)$ rastie, e) na $(-\infty;\,3/2\rangle$ klesá, na $\langle 3/2;\,\infty)$ rastie, f) na $(-\infty;\,-\sqrt{3/2}\rangle$ a $\langle 0;\,\sqrt{3/2}\rangle$ klesá a na $\langle -\sqrt{3/2};\,0\rangle$ a $\langle\sqrt{3/2};\,\infty)$ rastie, g) na $(-\infty;\,0\rangle$ rastie a na $\langle 0;\,\infty)$ je konštantná, h) na $(0;\,\sqrt{e}\rangle$ klesá a na $\langle\sqrt{e};\,\infty)$ rastie, i) klesá na $R$, j) na $(-\infty;\,-\sqrt{1/3}\rangle$ a $\langle\sqrt{1/3};\,\infty)$ rastie a na $\langle -\sqrt{1/3};\,\sqrt{1/3}\rangle$ klesá, k) klesá na $(-\infty;\,2/3\rangle$, l) na $(-\infty;\,-3\rangle$ a $\langle 0;\,\infty)$ je konštantná a na $\langle -3;\,0\rangle$ rastie, m) rastie na $\langle k;\,k+1)$, $k\in Z$, n) na $(-\infty;\,-1\rangle$ klesá a na $\langle -1;\,\infty)$ rastie, o) na $(-\infty;\,0\rangle$ je konštantná a na $\langle 0;\,\infty)$ rastie, p) rastie na $\langle 1;\,\infty)$, q) klesá na $(-\infty;\,3)$ a $\langle 3;\,\infty)$, r) klesá na $(-\infty;\,3)$ a $\langle 3;\,\infty)$, s) rastie na $\langle 0;\,\infty)$, t) rastie na $(0;\,\infty)$. **219.** a) ohraničená zdola, $\inf f(x)=0$, $\sup f(x)=\infty$, b) ohraničená zdola, $\inf f(x)=0$, $\sup f(x)=\infty$, c) ohraničená, $\inf f(x)=\min f(x)=1/2$, $\sup f(x)=\max f(x)=1$, d) ohraničená, $\inf f(x)=-14$, $\sup f(x)=\max f(x)=1$, e) ohraničená zdola, $\inf f(x)=\min f(x)=1$, $\sup f(x)=\infty$, f) ohraničená, $\inf f(x)=\min f(x)=2$, $\sup f(x)=17$. **220.** a) $\min f(x)=3/2$, $\sup f(x)=\infty$, b) $\inf f(x)=-\infty$, $\sup f(x)=\infty$, c) $\min f(x)=0$, $\sup f(x)=\infty$, d) $\min f(x)=-1/4$, $\sup f(x)=\infty$, e) $\min f(x)=0$, $\max f(x)=1$, f) $\min f(x)=-1$, $\max f(x)=1$, g) $\min f(x)=1$, $\max f(x)=3$, h) $\min f(x)=-1$, $\max f(x)=1$. **221.** $f(g)=g(f)\colon\ y=1-x^2$, $f(h)=h(f)\colon\ y=\sin x$, $h(g)=f[h(g)]=h[f(g)]=h[g(f)]\colon\ y=\sin(1-x^2)$, $g(h)=f[g(h)]=g[f(h)]=g[h(f)]\colon\ y=1-\sin^2 x$. **222.** Porade $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$: a) $8-2x$, $4-2x$, $4x$, $x$, b) $1-x^2+x^4$, $2x+3x^2+2x^3+x^4$, $3+3x+4x^2+2x^3+x^4$, $-2x^2+x^4$, c) $\ln\sqrt{1-|x|}$, $\sqrt{1-|\ln x|}$, $\ln\ln x$, $\sqrt{1-|\sqrt{1-|x|}|}$, d) $\ln\sinh x$, $(-1+x^2)/(2x)$, $\ln\ln x$, $\sinh\sinh x$, e) $\operatorname{argsinh}\cosh x$, $\sqrt{1+x^2}$, $\cosh\operatorname{argsinh} x$, $\cosh\cosh x$, f) $x$, $x$, $x^4$, $\sqrt[4]{x}$, g) $(\sqrt{x}+1)^2$, $x+1$, $4+8x+8x^2+4x^3+x^4$, $\sqrt[4]{x}$, h) $x^2\pm\lfloor x\rfloor$, $x^2\lfloor x\rfloor$, $x^2/\lfloor x\rfloor$, $\lfloor x\rfloor^2$, $\lfloor x^2\rfloor$, $x^4$, $\lfloor x\rfloor$, i) $-x+x^2+\lfloor x^2-x\rfloor$, $-x+x^2-\lfloor x\rfloor+2x\lfloor x\rfloor+\lfloor x\rfloor^2$, $x+\lfloor x\rfloor+\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor$, $x-2x^3+x^4$, j) $\sqrt{(5+2x)/(2+x)}$, $1/(2+\sqrt{x+2})$, $\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$, $(2+x)/(5+2x)$. **223.** a) $|g|=g$, $f+g\colon y=x+1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=2x^2+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g^2\colon y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x^2+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $fg\colon y=x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4+x^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f/g\colon y=x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2/(x^2+1)$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(g)\colon y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x^2+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(f)\colon y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(f)\colon y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(g)\colon y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x^2+1)^2+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, b) $|g|=g$, $f+g\colon y=x+x^2$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2+x+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g^2\colon y=x^2$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $fg\colon y=x^3$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^3+x$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f/g\colon y=1/x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2/(x+1)$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(g)\colon y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(f)\colon y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(f)\colon y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(g)\colon y=x^4$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x+2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$. **224.** Pre $n\in N\cup\{0\}$: a) $f_n(x)=x+n$, b) $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, c) $f_n(x)=(a_n+xa_{n+1})/(a_{n-1}+xa_n)$, kde $a_n$ je $n$-tý člen Fibonacciho postupnosti, d) $f_n(x)=x/(1+nx)$, e) $f_{4n}(x)=x$, $f_{4n+1}(x)=f(x)$, $f_{4n+2}(x)=-1/x$, $f_{4n+3}(x)=-1/f(x)$, f) $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, g) $f_n(x)=x/(1-nx)$, h) $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, i) $f_{4n}(x)=x$, $f_{4n+1}(x)=f(x)$, $f_{4n+2}(x)=-1/x$, $f_{4n+3}(x)=-1/f(x)$, j) $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, k) $f_n(x)=(a_n-xa_{n+1})/(-a_{n-1}+xa_n)$, kde $a_n$ je $n$-tý člen Fibonacciho postupnosti, l) $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$. **225.** a) $R-(0\,;\,1\rangle$, b) $R-\big(2-\sqrt{3}\,;\,2+\sqrt{3}\big)$, c) $(-\infty\,;\,2/3)$. **228.** a) $y=\sqrt{x+1}$, $x\in\langle 3\,;\,24\rangle$, b) $y=3x/(1-x)$, $x\in R-\{1\}$, c) $y=4+\sqrt{x}$, $x\in\langle 0\,;\,1\rangle$, d) $y=(\arcsin x+1)/3$, $x\in(-1\,;\,1)$, e) $y=e^{2x}+1$, $x\in R$, f) $y=1+2e^x+e^{2x}$, $x\in R$. **229.** a) $D(f)=(-\pi/2;\,\pi/2)$, $f^{-1}\colon y=\operatorname{arctg}(x/2-1/2)$, b) $D(f)=(-\pi/2;\,\pi/2)$, $f^{-1}\colon y=x$, c) $D(f)=(-\pi/2;\,\pi/2)$, $f^{-1}\colon y=\arcsin(1-x^2)$, d) $D(f)=(-\infty;\,0\rangle$, $f^{-1}\colon y=\ln\cos x$, e) $D(f)=\langle 0;\,\pi/2)$, $f^{-1}\colon y=\arccos e^x$, f) $D(f)=\langle 0;\,\infty)$, $f^{-1}\colon y=\sqrt{1-\ln(1+x)}$, g) $D(f)=R$, $f^{-1}\colon y=\ln(e^x-1)$, h) $D(f)=R$, $f^{-1}\colon y=1+\ln(x+1)$, i) $D(f)=\langle -1;\,1\rangle$, $f^{-1}\colon y=x$, j) $D(f)=\langle 1;\,\infty)$, $f^{-1}\colon y=1+\sqrt{2+x}$, k) $D(f)=\langle 0;\,\infty)$, $f^{-1}\colon y=\sqrt[4]{x+1}$, l) $D(f)=\langle -1;\,\infty)$, $f^{-1}\colon y=-1+x^2$, m) $D(f)=(2/3;\,\infty)$, $f^{-1}\colon y=(1+2x)/(1+3x)$, n) $D(f)=\langle 0;\,\pi)$, $f^{-1}\colon y=\arccos((1-x)/(1+x))$, o) $D(f)=\langle 0;\,3\rangle$, $f^{-1}\colon y=3\sin x^2$, p) $D(f)=R$, $f^{-1}\colon y=\ln(1/2)\ln((1-x)/(1+x))$. **230.** a) $D(f)=(3;\,\infty)$, $H(f)=R$, $f^{-1}\colon y=(5+\sqrt{1+4e^x})/2$, b) $D(f)=R$, $H(f)=\langle 0;\,\infty)$, $f^{-1}\colon y=\ln\sqrt{x^2-2x}$, c) $D(f)=\langle 0;\,1\rangle$, $H(f)=\langle 0;\,\pi+1\rangle$, $f^{-1}\colon y=\cos((1-x^2)/2)$, d) $D(f)=R$, $H(f)=R$, $f^{-1}\colon y=x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x/2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, e) $D(f)=R$, $H(f)=R$, $f^{-1}\colon y=x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, f) $D(f)=\langle 0;\,\infty)$, $H(f)=\langle 0;\,\infty)$, $f^{-1}\colon y=\sqrt{x}$, resp. $f^{-1}\colon y=x$.

**233.** a) $0$, b) $1$, c) $1$, d) $e^{-1}$, e) $9$, f) $-1$, g) $\nexists$, h) $1/2$, i) $4$, j) $10/9$, k) $1$, l) $-1$, m) $\nexists$, n) $-\sqrt{2}/2$, o) $\sqrt{2}/2$, p) $\sqrt{2}/2$, q) $\ln a/\ln b$, r) $0$, s) $0$, t) $2$, u) $-\ln 3/3$, v) $\nexists$, w) $\nexists$, x) $-2/\sin 3$. **234.** a) $n/m$, b) $m/n$, c) $a$, d) $a-b$, e) $1/2$, f) $1/2$, g) $1/3$, h) $\ln 3/\ln 6$, i) $e^a$, j) $0$, k) $1$, l) $3$, m) $\pi$, n) $\pi$, o) $1$, p) $1/4$, q) $3$, r) $\nexists$, s) $-\infty$, t) $\infty$. **235.** a) $1$, b) $1/\sqrt{e}$, c) $1$, d) $1/e$, e) $e^3$, f) $0$, g) $1$, h) $1$, i) $\nexists$, j) $1$, k) $-1$, l) $-12$, m) $e^5$, n) $e^5$, o) $-1$, p) $1$, q) $1/12$, r) $1/3$, s) $\pi$, t) $3/5$, u) $1/3$, v) $5/6$, w) $3/5$, x) $4/3$. **236.** a) $1$, b) $0$, c) $(2a)^{-1}$, d) $\sqrt{2}/4$, e) $\sqrt{2}/4$, f) $0$, g) $-2/5$, h) $-1$, i) $1/8$, j) $\nexists$, k) $4$, l) $5/2$, m) $0$, n) $1/2$, o) $-\infty$, p) $\infty$, q) $0$, r) $\nexists$, s) $0$, t) $0$, u) $\nexists$. **237.** a) $1/8$, b) $4$, c) $-1$, d) $15/2$, e) $1/4$, f) $-2/3$, g) $1/n$, h) $11/3$, i) $\sqrt[3]{2}/3$, j) $1$, k) $-\sqrt{2}/2$, l) $2$, m) $-1$, n) $2$, o) $1/2$, p) $1$, q) $\sqrt{2/3}$, r) $1$, s) $1/\sqrt[3]{e^2}$, t) $\sqrt[3]{e^2}$, u) $1$, v) $2/\pi$, w) $1$, x) $2/\sqrt{3}$. **238.** a) $3/2$, b) $3/2$, c) $0$, d) $6$, e) $1$, f) $1/2$, g) $6\sqrt{2}$, h) $\infty$, i) $-1/2$, j) $3/2$, k) $(a-1)/(3a^2)$, l) $1$, m) $-1/4$, n) $(n^2-m^2)/2$, o) $\cos x$, p) $\sqrt{e^3}$, q) $-1$, r) $1/2$, s) $\nexists$, t) $-\pi/2$, u) $\pi/2$. **239.** a) $0$, b) $1/6^{100}$, c) $1/4$, d) $-1/2$, e) $-2$, f) $3$, g) $2a$, h) $a$, i) $6$, j) $0$, k) $0$, l) $0$, m) $2$, n) $1$, o) $2\cos a$, p) $2\cos x$. **240.** Nie.

**242.** Body nespojitosti: a) $0$ odstrániteľný, b) $k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, c) $1$ neodstrániteľný 2. druhu, d) $0$ neodstrániteľný 1. druhu, e) $k\pi$, $\pi/2+2k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, f) $2k\pi$, $\pi/2+k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, g) $k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, h) $\pi/2+k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, i) $0$ neodstrániteľný 2. druhu, j) $0$ neodstrániteľný 2. druhu, k) nie sú, l) $0$ odstrániteľný, m) $k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, n) $\pi/2+k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, o) nie sú, p) nie sú, q) $0$ odstrániteľný, r) $0$ neodstrániteľný 1. druhu, s) $0$ odstrániteľný, resp. $k\pi$, $k\in Z-\{0\}$ neodstrániteľný 2. druhu, t) $0$ neodstrániteľný 2. druhu. **243.** a) $2$, b) $a\in R$, c) $1$, d) $1$. **244.** a) $a=2$, $b=-2$, b) $a=7/4$, $b=-3/2$. **245.** a) $1/2$, b) $1/4$, c) $4$, d) $e^2$, e) $-1$, f) $3/2$. **246.** Spojitá (napr. $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$), resp. nespojitá (napr. $f(x)=2$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$). **247.** Napr. $1/[x(x-1)\cdots(x-n)]$, resp. $\lfloor x\rfloor$. **248.** Napr. $f(x)=0$ pre $x\in Q$, $f(x)=x(x-1)\cdots(x-n)$ pre $x\notin Q$, resp. $f(x)=0$ pre $x\in Q$, $f(x)=\sin x$ pre $x\notin Q$. **249.** a) spojitá (napr. $f=-g$), resp. nespojitá (napr. $g=f$), b) spojitá (napr. $f=g$), resp. nespojitá (napr. $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$, $g(x)=2$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$), c) spojitá (napr. $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=0$ pre $x<a$, $g(x)=0$ pre $x\geq a$, $f(x)=1$ pre $x<a$), resp. nespojitá (napr. $f=g$, $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=0$ pre $x<a$), d) spojitá (napr. pre $a=0$, $f(x)=1$ pre $x\geq 0$, $f(x)=0$ pre $x<0$), resp. nespojitá (napr. pre $a=0$, $f(x)=1$ pre $x>0$, $f(x)=2$ pre $x\leq 0$), e) spojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x\geq 0$, $f(x)=0$ pre $x<0$), resp. nespojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x>0$, $f(x)=2$ pre $x\leq 0$), f) spojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x\geq 0$, $f(x)=0$ pre $x<0$), resp. nespojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x>0$, $f(x)=2$ pre $x\leq 0$). **250.** a) nespojitá, b) nespojitá, c) spojitá (napr. $f(x)=0$), resp. nespojitá (napr. $f(x)=1$), d) spojitá (napr. $f(x)=$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x)=x$), e) spojitá (napr. $f(x)=$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x)=x$), f) spojitá (napr. $f(x)=$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x)=x$, $g(x)=0$ pre $x\geq 0$, $g(x)=1$ pre $x<0$). **251.** Funkcia $f(g)$: a) $(-\infty\,;\,-1)$, $(-1\,;\,0)$, $(0\,;\,1)$, $(1\,;\,\infty)$, b) $(k\,;\,k+1)$, $k\in Z$ c) $(-\infty\,;\,1)$, $(1\,;\,\infty)$, d) $R$, e) $R$, f) všade nespojitá. Funkcia $g(f)$: a) $R$, b) $R$, c) $(-\infty\,;\,0)$, $(0\,;\,\infty)$, d) $R$, e) $(-\infty\,;\,0)$, $(0\,;\,\infty)$, f) $R$. **253.** a) $1{,}92627032$, b) $-0{,}56714329$, c) $-0{,}73512111$, resp. $-0{,}21180469$, resp. $1{,}09808432$, resp. $5{,}84884147$, d) $2{,}20794003$, e) $-0{,}51859913$, resp. $1{,}36393887$, f) $1{,}41298437$, resp. $1{,}89713947$. **254.** a) $0{,}20669990$, resp. $-1{,}08004724$, resp. $1{,}22919369$, resp. $3{,}64415368$, b) $1{,}22919369$, resp. $-1{,}08004724$, resp. $0{,}20669990$, resp. $3{,}64415368$, c) $1{,}32471796$, d) $0{,}73908513$, e) $-0{,}87672622$, resp. $0$, f) $0{,}48902657$. **255.** a) $\langle 0\,;\,1\rangle$, b) $\langle 0\,;\,18\rangle$, c) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\langle n^2\,;\,n^2+n)\cup\{0\}$, d) $(-\pi\,;\,-2\pi)\cup(-3\pi\,;\,-4\pi)\cup\{0;\ \pi/2;\ 3\pi/2\}$, e) $\{0,1\}$, f) $(-\infty\,;\,-4\rangle$. **257.** a) áno, b) áno, c) áno, d) áno, e) nie, f) nie, g) áno, h) nie, i) nie, j) nie.

### Diferenciálny počet reálnej funkcie

**259.** a) $0$, b) $-2$, c) $-1$, d) $15$, e) $0$, f) $\pi^3$. **260.** a) $4x$, b) $x/\sqrt{x^2+1}$, c) $1/(2\sqrt{x-1})$, d) $1-2x$, e) $-1/\sin^2 x$, f) $-3$, g) $-1/(x-1)^2$, h) $-e^{-x}$. **261.** $1\pm 1/\sqrt{2}$. **262.** a) $-2x\ln 2\,2^{-x^2}$, b) $\sin x\,e^{-\cos x}$, c) $\sqrt[x]{x}(1-\ln x)/x^2$, d) $x^{-2/3}/3$, e) $2^{\operatorname{tg} x}\ln 2/\cos^2 x$, f) $e^x\,x^{e^x-1}(1+x\ln x)$, g) $x^{\sin x-1}(x\cos x\ln x+\sin x)$, h) $2x^{\ln x-1}\ln x$, i) $e^{\operatorname{tgh} x}/\cosh^2 x$, j) $[\ln x]^{x-1}+[\ln x]^x\ln\ln x$, k) $-e^{1/x}/x^2$, l) $e^{-1/x}/x^2$, m) $2e^{x^2-1}x$, n) $3\sqrt{x}/2$, o) $-\sin x/(3\sqrt[3]{\cos^2 x})$, p) $e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$, q) $e^{\operatorname{arctg} x}/(1+x^2)$, r) $x^x(1+x+x\ln x)$, s) $x^{-1+x+x^x}(1+x\ln x+x\ln^2 x)$, t) $(x^x)^x(x+x\ln x+\ln x^x)$, u) $2(2/5)/(25x(4/5))$, v) $-2\operatorname{cotg} x/\sin^2 x$, w) $-2\sqrt[3]{4}/(3x^{7/3})$, x) $\operatorname{tg} x/\cos x$, y) $-\sin 2x/\cos x+2x\cos^2 x\operatorname{tg} x^2/\cos x^2$. **263.** a) $\operatorname{cotg} x-x/\sin^2 x$, b) $\operatorname{cotg} e^x-x\,e^x/\sin^2 e^x$, c) $3^x(\ln x-\ln 2)/2^x$, d) $(e^x(-3+x))/x^4$, e) $-1/(1+x^2)$, f) $e^x\,x^4\,e^x(5+x)$, g) $5\operatorname{tg}^4 x/\cos^2 x$, h) $2x\cos x^2$, i) $5e^{5x}/(2\sqrt{e^{5x}})$, j) $e^{\sin x}\cos x$, k) $3x^2\operatorname{sgn} x$, l) $2|x|$, m) $0$, n) $2\,3^{2x}\ln 3$, o) $-\sin x$ pre $x\in(-\pi/2+2k\pi\,;\,\pi/2+2k\pi)$, $\sin x$ pre $x\in(\pi/2+2k\pi\,;\,3\pi/2+2k\pi)$, p) $-3^{\operatorname{cotg} x}\ln 3/\sin^2 x$, q) $x^{\sqrt{x}-1/2}(2+\ln x)/2$,

r) $\cos x/x^{2\sin^2(x/2)} - x^{\cos x}\ln x\sin x$, s) $x^{(x^2)}(1+x^2+2x^2\ln x)$, t) $3/x$, u) $-1/\sin^2 x$, v) $x(2\ln x-1)/\ln^2 x$, w) $-2/\mathrm{e}^{2x}$, x) $-2/(x\ln^3 x)$,
y) $-1/((1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x)$. **264.** a) $2/(x-1)^2$, b) $\operatorname{tg}(x/2)/\cos^2(x/2)$, c) $2x^2[(1-x^3)/(1+x^3)]^{2/3}/(x^3-1)^2$, d) $2[(1-x)/(1+x)]^{2x/(1-x)}/(x^2-1)+$
$2[(1-x)/(1+x)]^{(1+x)/(1-x)}\ln[(1-x)/(1+x)]/(x-1)^2$, e) $\sin 2x/\mathrm{e}^{\cos^2 x}$, f) $-\operatorname{tg} x$, g) $-7/x^8-5/x^6$, h) $-4x^{1/3}/3+5x^4/(2\sqrt{x^5})$, i) $4/(x^2-4)$,
j) $(1+\ln x+\ln^2 x)/(1+\ln x)^2$, k) $1/\sin x$, l) $-2/(1-\sin 2x)$, m) $2x/(1+x^2)$, n) $6x(x^2-1)^2$, o) $-\mathrm{e}^{-x}-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, p) $x^4(-4+5\ln x)$, q) $-(1+2x)^{-3/2}$,
r) $-1/(1+x^2)$, s) $-2\,\mathrm{e}^x/(\mathrm{e}^x-1)^2$, t) $1/(1+x^2)$, u) $-8(1-2x)^3$, v) $2\ln(1+x)/(1+x)$, w) $2x/(1+x^2)$, x) $1/[2(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}]$. **265.** a) $-2\cos x^{-2}/x^3$,
b) $(-2-2x+x^2)/(-1+x)^2$, c) $4\,\mathrm{e}^{2x}/(1+\mathrm{e}^{2x})^2$, d) $(-1-\cos x+\sin x)/(1+\sin 2x)$, e) $\mathrm{e}^{\cos x+\sin x}(\cos x-\sin x)$, f) $-2x^3/\sqrt{1-x^4}$, g) $-1/(2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x})$,
h) $40x(-1+x^2)^{19}$, i) $4x/(1+x^2)^2$, j) $1/(2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2)$, k) $-(1+3x^2)/(2x^{3/2})$, l) $(x^2(3+2x+x^2))/(1+x+x^2)^2$, m) $(1+2x)/\mathrm{e}^{1/x}$,
n) $x\,\mathrm{e}^x(x\cos x+2\sin x+x\sin x)$, o) $(1-2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$, p) $-1/(2\sqrt{x}(1+x))$, q) $(3-x)/(2\sqrt{(1-x)^3})$, r) $2(-x\cos x+x^3\cos x-\sin x-x^2\sin x)/(-1+x^2)^2$,
s) $(1-\sqrt{2})/[2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2]$, t) $1/[\sqrt{(-1+x)/(1+x)}(1+x)^2]$, u) $\mathrm{e}^{1-x^2}(1-2x^2)$, v) $7x^{-1/8}/8$, w) $1+\ln x$, x) $\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(-1+\sqrt{x}+x)/(2\sqrt{x(x-1)})$. **266.**
a) $-1/(x^2\cos^2(1+1/x))$, b) $-1/(2\sin^2(x/2))$, c) $-\operatorname{tg}(x/2)/(2\cos^2(x/2))$, d) $-1/[2\sqrt{x(1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})^2]$, e) $8x\ln^3(1+x^2)/(1+x^2)$,
f) $2\operatorname{cotg} 2x$, g) $x\cosh x+\sinh x$, h) $-2x/[(1+x^4)\operatorname{arccotg} x^2]$, i) $-2\operatorname{cotg} x/\sin^2 x$, j) $16x^7/(-1+x^16)$, k) $1/(x\sqrt{1-\ln^2 x})$, l) $-\sqrt{3}/\sqrt{5+2x-3x^2}$,
m) $-\ln\sin x[\sin x]^{2\cos^2(x/2)}+\cos^2 x/[\sin x]^{2\sin^2(x/2)}$, n) $[\cos x]^{1+\sin x}\ln\cos x-[\cos x]^{-1+\sin x}\sin^2 x$, o) $[\cosh x]^{-1+\ln x}(\cosh x\ln\cosh x+x\ln x\sinh x)/x$,
p) $(1+x^2)^{-1+\operatorname{arctg} x}(2x\operatorname{arctg} x+\ln(1+x^2))$, q) $2x/\sqrt{16+x^4}$, r) $\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x+x)/(1+\mathrm{e}^x)^2$, s) $-3\operatorname{cotgh} x/[(1+x)\ln^2(1+x)]-3/(\ln(1+x)\sinh^2 x)$,
t) $2/(x^3\sqrt{-x^{-4}+2x^{-2}})$, u) $2[\operatorname{tg} x]^{-1+\operatorname{cotg} x}/\sin 2x-\ln\operatorname{tg} x\sin^2 x\;[\operatorname{tg} x]^{\operatorname{cotg} x}$, v) $3^{\ln[1+x+x^2]}(1+2x)\ln[3])/(1+x+x^2)$, w) $x(1-3x+2\ln x)$, x) $1-5\sin 2x$.
**267.** a) $-1/(x\sqrt{1-\ln^2 x})$, b) $2\,\mathrm{e}^{2x}\operatorname{cotg}\mathrm{e}^{2x}$, c) $-2x$ pre $x\in(-1;1)$, $2x$ pre $x\in R-\langle-1;1\rangle$, d) $1/[x\sqrt{1-\ln^2 x}]$, e) $x/\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, f) $\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$,
g) $x\,\mathrm{e}^x$, h) $\mathrm{e}^x/\sqrt{1-x^2}+\mathrm{e}^x\arcsin x$, i) $1/(2\sqrt{x-1})$ pre $x>1$, $-1/(2\sqrt{1-x})$ pre $x<1$, j) $1$ pre $x>2$, $-1$ pre $x<2$, k) $\operatorname{cotg} x-x/\sin^2 x$,
l) $1/[x\ln x\ln\ln x\ln\ln\ln x]$, m) $2x/(-1+x^2)$, n) $2x/(-1+x^2)$, o) $-\operatorname{tgh}^2 x$, p) $5/[\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x]$, q) $\operatorname{cotg} x$, r) $1/[\sqrt{1-x^2}\arcsin x]$, s) $1/\cos 2x$,
t) $-1/(x+x\ln^2 x)$, u) $1/(x\sqrt{1+x^2})-\operatorname{argsinh} x/x^2$, v) $2x/\cosh x-x^2\operatorname{tgh} x/\cosh x$, w) $1/(-1+x^2)+x\arccos x/\sqrt{(1-x^2)^3}$, x) $1/(x-x\ln^2 x)$. **268.**
a) $3/(4x^{3/4})+2/(3^{2/3})+1/(2x^{1/2})$, b) $x/\sqrt{x^2(1-x^2)}$, c) $1+6x+15x^2+28x^3$, d) $2(30+8x+15x^2+10x^3)/(5-4x-x^3)^3$, e) $2\operatorname{sgn} x/(1-x^2)$, f) $2/\sqrt{1+x^2}$,
g) $5\sin 2x+6x^2\sin x^3$, h) $(3+2x)/(3(2+3x+x^2)^{2/3})$, i) $4(-1+14x+3x^2)(1-x+7x^2+x^3)^3$, j) $1+4/x^3+6x^2$,
k) $-1/(2x^4)+20x\cos 4x+3\ln x/(2x^4)+5\sin 4x$, l) $1/[(-2+x)^2(5-4x+x^2)]$, m) $-\cos x+6x^5\ln 2$, n) $6x^5\ln 2$, o) $1-1/(2\sqrt{x})-3\sqrt{x}/2$,
p) $-(3\cos x+\cos 3x-3\sin x+\sin 3x)/(4\sin^2 2x)$, q) $2x/(-4-15x^2+4x^4)-2x^2\operatorname{arctg} 2x/(-4+x^2)^2+\operatorname{arctg} 2x/(-4+x^2)$,
r) $(-1+x^2)/[(1+x^2)^2\sqrt{(1+x^4)/(1+x^2)^2}]$, s) $x\cos x$, t) $-3\cos^2 x\sin x+3\cos x\sin^2 x$, u) $\mathrm{e}^x(-5+4x^2+x^3)$, v) $-6x^8/(1+x^6)^2$, w) $-2/(1-\sin 2x)$,
x) $-1/[2\sqrt{1+x}(2+x)\operatorname{arctg}(1+x)^{-1/2}]$. **269.** a) $2\sin^2 x$, b) $(-5x^(2/3))/3+(5x^(3/2))/2$, c) $\mathrm{e}^{-x}[-1+2x-x^2+4x^3-x^4]$,
d) $-2\arcsin[1/(-1+x)]/(\sqrt{1-(-1+x)^{-2}}(-1+x)^2)$, e) $2(1-\cos x\cosh x)/(\cos x-\cosh x)^2$, f) $-1/2$, g) $1/\sqrt{1+x^2}$,
h) $\cos x\cos\sin x\cos\sin\sin x\cos\sin\sin\sin x$, i) $1+1/(6x^{5/6})+1/(4x^{3/4})+1/(2x^{1/2})$, j) $2/(1-x^2)$, k) $2x/(2+2x^2+x^4)$, l) $3/[x(1+x^3)^2]$,
m) $(-1+2\ln^2 x)/(x\ln x)$, n) $\cos\cos x\cos\cos\sin\cos x\sin x\sin\sin\cos x$, o) $2\sqrt{1-x^2}$, p) $(1+2x\operatorname{argcotgh} x)/(-1+x^2)^2$, q) $-\operatorname{tg}[1-1/x]/x^2$,
r) $2\cos x/(3[\sin x]^{1/3})+2\operatorname{tg} x/\cos^2 x$, s) $-2$ pre $x<1$, $0$ pre $x\in(1;2)$, $2$ pre $x>2$, t) $(2+2x)/(3+2x+x^2)$, u) $0$,
v) $-[-2/x^2+3/(x\cos^2 x)-3\operatorname{tg} x)/x^2]/[1+(2+3\operatorname{tg} x)^2/x^2]$, w) $-\operatorname{cotg}^2 x/\sin x-1/\sin^2 x-1/\sin^3 x$, x) $(\arcsin x-\arccos x)(\arcsin x+\arccos x)^2/$
$(\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x\arcsin^2 x)$. **270.** a) $-1$, b) $-1$, c) $|\cos x|/\cos x$, d) $(13-11x+2x^2)/(-6+11x-6x^2+x^3)$, e) $3(-1+x^2)/(1-x-x^3+x^4)$,
f) $(3\cos x+2\sin x)/(2\sqrt{5(-2\cos x+3\sin x)})$, g) $-x^{-2}$, h) $-x^{-2}$, i) $-x\operatorname{tg}\sqrt{1+x^2}/\sqrt{1+x^2}$, j) $(4\sin x-3\sin 2x)/(6\cos^3 x)$, k) $1/(1+x^2)$, l) $3\sqrt{x^3}\ln x/x$,
m) $-|\sin x|/\sin x$, n) $-1/(2\sqrt{\operatorname{cotg} x}\sin^2 x)-1/(2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos^2 x)$, o) $-\cos\ln x-\sin\ln x$, p) $[1+(1+1/(2\sqrt{x}))/(2\sqrt{\sqrt{x}+x})]/[2(x+\sqrt{\sqrt{x}+x})^{1/2}]$,
q) $(\sin(x/2)-\cos(x/2))/\;[(\cos(x/2)+\sin(x/2))^3\sqrt{(1-\sin x)/(1+\sin x)}]$, r) $1/[24\sqrt{x}(1+(1+\sqrt{x})^{1/3})^{3/4}(1+\sqrt{x})^{2/3}]$, s) $-1/(2\sqrt{-x}\sqrt{1+x})$,
t) $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}(\cos x-\sqrt{1+x}\sin x)/[2\sqrt{1+x}\sqrt{\cos x}]$, u) $1/(2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x})$, v) $4\sin 2x/(3+\cos 4x)$, w) $-4\sin 2x/(3+\cos 4x)$,
x) $(1+x/\sqrt{1+x^2})/(1+x+\sqrt{1+x^2})$. **271.** a) $\sqrt{2+x^2}$, b) $2(1+x)/(1+x+x^2)$, c) $-x/\sqrt{1+2x-x^2}$, d) $\sqrt{2}(3-x^2)/(1+x^4)$,
e) $2x(1+x)\sqrt{2+x^2}/(3(3+x^2)^{2/3})+x(1+x)(3+x^2)^{1/3}/\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2+x^2}(3+x^2)^{1/3}$, f) $4\operatorname{tg}^5 x$, g) $x\sin^2 x$, h) $\arcsin x/(1-x^2)^{3/2}$, i) $2x\ln[(1+x)/(1-x)]$,
j) $x\operatorname{arctg} x$, k) $0$, l) $2(1-x^2+x\sqrt{-1+x^2})/\sqrt{-1+x^2}$, m) $-\sin x/12-4\sin 2x/3+\sin 3x/4$, n) $1-\cos 4x-\cos x\sin^4 x+2\cos 2x\sin^2 2x$,
o) $-1/(1+x)^2+x/(-1+x^2)$, p) $(-1/2+x)/(2\sqrt{1-x}\sqrt{x})+(1-2x)/(4\sqrt{x-x^2})+\arcsin\sqrt{x}$, q) $2+4x+6x^2+4x^3+5x^4$, r) $2+6x+9x^2+8x^3+5x^4$,
s) $4x^2/(-16+x^4)$, t) $(5-3x^2)/[2(1+x^2+x^4)]$, u) $\arcsin x/(1-x^2)^{3/2}$, v) $-2\sqrt{\sin x}/\cos x$, w) $1/[\sqrt{1-x^2}\arcsin x]+1/[x\sqrt{1-\ln^2 x}],\ln[x-\sqrt{-1+x^2}]$,
x) $-2(1+9x+6x^2+x^3)/[(2+x)^2(3+x)^2(4+x)^2]$, y) $-\sqrt{1+x}[1/(2\sqrt{1+x})+1/(2\sqrt{2+x})+1/(2\sqrt{3+x})]/\;[\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{3+x}]^2+$
$1/[2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{3+x})]$. **272.** a) $-1$, $1$, b) $0$, $0$, c) $-1$, $1$, d) $-1$, $0$, e) $0$, $0$ f) neexistujú, g) $1$, $1$, h) $-1$, $-1$. **273.** a) $x^{-3/4}/4$, b) $1/(x\ln 10)$,
c) $x^{-4/5}/5$, d) $1/(x\ln 2)$. **275.** a) $y=4x-4$, b) $y=-4x/3$, c) $y=x/4+1$, d) $y=3x$, e) $y=x$, f) $y=1$, g) $y=2x$, h) $y=\mathrm{e}\,x-1$, i) $50y=14-3x$. **276.**
$a=\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, $[\mathrm{e};\mathrm{e}]$. **277.** $a\le 0$. **278.** $y=3x$, resp. $y=-x$. **279.** a) $y=(3x-13)/4$, b) $y=x+3/4$, c) $y=2x(\sqrt{3}-1)$, resp. $y=-2x(\sqrt{3}+1)$,
d) $y=2a-2a^2-2a\sqrt{a^2-2a-b+3}+b+2x(-1+a+\sqrt{a^2-2a-b+3})$, resp. $y=2a-2a^2+2a\sqrt{a^2-2a-b+3}+b+2x(-1+a-\sqrt{a^2-2a-b+3})$ kde
$b\le a^2-2a+3$, e) $y=x+3/4$, resp. $y=-x+11/4$, f) $y=2+\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi/4-x\operatorname{tg}\varphi$, resp. $y=2-\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi/4+x\operatorname{tg}\varphi$. **280.** a) $y=3x-77/36$,
b) $y=x+7/4$, c) $y=3+(1-x)/\sqrt{2}$, resp. $y=3-(1-x)/\sqrt{2}$, d) $y=x+7/4$. **281.** a) $y=1$ v bodoch $[\pi/2+2k\pi;1]$, $k\in Z$, resp. $y=-1$ v bodoch
$[-\pi/2+2k\pi;1]$, $k\in Z$, b) $y=1$ v bodoch $[k\pi;1]$, $k\in Z$, resp. $y=-1$ v bodoch $[\pi/2+k\pi;1]$, $k\in Z$, c) neexistuje, d) $y=2\sqrt{3}/9$ v bode $[-1/\sqrt{3};2\sqrt{3}/9]$,
resp. $y=-2\sqrt{3}/9$ v bode $[1/\sqrt{3};-2\sqrt{3}/9]$, e) $y=1/\mathrm{e}$ v bode $[\mathrm{e};1/\mathrm{e}]$, f) $y=1$ v bode $[0;1]$, g) $y=-1/\mathrm{e}$ v bode $[1/\mathrm{e};-1/\mathrm{e}]$ h) $y=\mathrm{e}$ v bode $[1;\mathrm{e}]$.

**282.** a) $\mathrm{e}^x(1+x)h$, b) $x^2 2^x(3+x\ln 2)h$, c) $-h/x^2$, d) $h/\sqrt{1-x^2}$, e) $2^{-\ln x/x}\ln 2(\ln x-1)h-x^2$, $x>0$, f) $(2-\ln x)h/(2\sqrt{x^3})$, $x>0$, g) $h/(x-1)^2$,
h) $2h/(x^2-1)$, i) $-2xh\,\mathrm{e}^{-x^2}$, j) $h(1+\ln x)$. k) $h/\cos^2 x$, l) $h/(1+x^2)$. **283.** a) $\Delta S\approx r\alpha\delta r=10\pi$ cm$^2$, b) $\Delta S\approx r\alpha\delta r=10\pi$ cm$^2$, c) $\Delta S\approx r^2\Delta\alpha/2=2,5\pi$
cm$^2$. **285.** $\Delta S=2\pi r\Delta r$, $\delta S=2\delta r$. **286.** a) $0,4848096$, b) $0,9656887$, c) $-0,1053605$, d) $1,9956925$, e) $0,5704371$, f) $2,0305432$, g) $4,0422932$,
h) $9,0553851$, i) $5,981424$, j) $0,7701709$, k) $1,2166529$, l) $2,0027745$, m) $2,9957323$, n) $3,0004341$, o) $0,8097835$. **288.**
a) $y^{(3)}=18x\cos x-x^3\cos x+6\sin x-9x^2\sin x$, $y^{(5)}=-60x\cos x+x^3\cos x-60\sin x+15x^2\sin x$, b) $y^{(3)}=6\cos x-9x^2\cos x-18x\sin x+x^3\sin x$,
$y^{(5)}=-60\cos x+15x^2\cos x+60x\sin x-x^3\sin x$, c) $y^{(3)}=36x\cos 2x-8x^3\cos 2x+6\sin 2x-36x^2\sin 2x$,
$y^{(5)}=-480x\cos 2x+32x^3\cos 2x-240\sin 2x+240x^2\sin 2x$, d) $y^{(3)}=6\cos 2x-36x^2\cos 2x-36x\sin 2x+8x^3\sin 2x$,
$y^{(5)}=-240\cos 2x+240x^2\cos 2x+480x\sin 2x-32x^3\sin 2x$, e) $y^{(3)}=2\,\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$, $y^{(5)}=-4\,\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)$, f) $y^{(3)}=-2\,\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)$,
$y^{(5)}=-4\,\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$, g) $y^{(3)}=x^2(47+60\ln x)$, $y^{(5)}=274+120\ln x$, h) $y^{(3)}=2\,\mathrm{e}^x(3\cos x+x\cos x-x\sin x)$, $y^{(5)}=-4\,\mathrm{e}^x(x\cos x+5\sin x+x\sin x)$.
**289.** a) $-2^{n-1}\cos(2x+n\pi/2)$, b) $[3\cos(x+n\pi/2)+3^n\cos(3x+n\pi/2)]/4$, c) $x\sin(x+n\pi/2)-n\cos(x+n\pi/2)$, d) $(n-1)!/x$, e) $2(-1)^n n!/(x-1)^{n+1}$,
f) $2(-1)^{n+1}n!/(x+1)^{n+1}$, g) $(-1)^n n![\ln x-(1+1/2+1/3+\cdots+1/n)]/x^{n+1}$, h) $(-1)^n n![(x+1)^{-n-1}+(x-1)^{-n-1}]/2$, i) $\mathrm{e}^x(x+n)$,
j) $(-1)^{n-1}(n-2)!/x^{n-1}$ pre $n\ge 2$, k) $(-1)^{n+1}(n-1)!/x^n$ pre $n\ge 2$, l) $(-1)^{n-1}(n-2)!/x^{n-1}$ pre $n\ge 2$.

**294.** Koeficienty pre 1,-1,2,-2: a) $[1,5,10,10,5]$, $[1,-3,4,-2,1]$, $[1,9,31,49,31]$, $[1,-7,19,-23,11]$, b) $[1,5,8,6,1]$, $[1,-3,2,2,-3]$, $[1,9,29,41,21]$,
$[1,-7,17,-15,1]$, c) $[1,3,4,2,1]$, $[1,-5,10,-10,5]$, $[1,7,19,23,11]$, $[1,-9,31,-49,31]$, d) $[1,2,0,0,2]$, $[1,-6,12,-8,2]$, $[1,6,12,10,5]$, $[1,-10,36,-54,29]$,
e) $[1,4,8,10,4]$, $[1,-4,8,-6,0]$, $[1,8,26,42,27]$, $[1,-8,26,-38,19]$, f) $[1,2,2,2,0]$, $[1,-6,14,-14,4]$, $[1,6,14,16,7]$, $[1,-10,38,-64,39]$, g) $[1,3,2,0,1,2]$,
$[1,-7,18,-20,9,0]$, $[1,8,24,34,24,9]$, $[1,-12,56,-126,136,-55]$, h) $[1,5,12,18,15,4]$, $[1,-5,12,-14,7,-2]$, $[1,10,42,94,112,55]$, $[1,-10,42,-90,96,-41]$,
i) $[1,3,4,4,2,0]$, $[1,-7,20,-28,18,-4]$, $[1,8,26,44,39,14]$, $[1,-12,58,-140,167,-78]$, j) $[1,7,21,35,35,21,7]$, $[1,-5,22,-23,9,-3,1]$,
$[1,13,71,209,351,321,127]$, $[1,-11,51,-127,179,-135,43]$, k) $[1,5,11,15,13,7,1]$, $[1,-7,21,-33,27,-9,-1]$, $[1,11,51,129,189,153,53]$,
$[1,-13,71,-207,337,-287,97]$ , l) $[1,8,28,56,70,56,28,8]$, $[1,-6,16,-24,22,-12,4,0]$, $[1,15,97,351,769,1023,769,255]$,
$[1,-13,73,-229,433,-493,313,-85]$, m) $[1,6,14,16,10,4,2,0]$, $[1,-8,26,-44,42,-24,10,-4]$, $[1,13,71,211,369,381,217,53]$,
$[1,-15,95,-329,673,-815,545,-159]$. **295.** a) $1+2(x-1)/3-(x-1)^2/9+4(x-1)^3/81$, b) $1+(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3/2$,
c) $1/2-(x-2)/4+(x-2)^2/8-(x-2)^3/16+(x-2)^4/32$, d) $\ln 2+(x-2)/2-(x-2)^2/8+(x-2)^3/24-(x-2)^4/64$,

e) $\ln 3 + (x-3)/3 - (x-3)^2/18 + (x-3)^3/81 - (x-3)^4/324$, f) $1 - 3(x-1) + 6(x-1)^2 - 10(x-1)^3$. **296.** a) $1 + 2x + 2x^2$, b) $1 - 2x + 2x^2$, c) $1 - x - x^2 + 2x^3$, d) $1/2 + x/4 - x^3/48$, e) $-x^2/2 - x^4/12 - x^6/45$, f) $-x^4/4$, g) $x + x^3/3 + 2x^5/15$, h) $x^2 + 2x^4/3$, i) $x^2 - x^4/3$, j) $x^3 - x^5/2$, k) $1 - x^2 + x^4/3$, l) $1 - 3x^2/2 + 7x^4/8$. **297.** a) $a_{2n} = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n}/2^n/n!$, $n \in N \cup \{0\}$, b) $a_{2n} = x^{2n}/(2n)!$, $n \in N \cup \{0\}$, c) $a_{2n+1} = x^{2n+1}/(2n+1)!$, $n \in N \cup \{0\}$, d) $a_{2n+1} = 2x^{2n+1}/(2n+1)$, $n \in N \cup \{0\}$. **299.** a) $(n-1)/n$, b) $(m-1)/(n-1)$, c) $1/6$, d) $1$, e) $\ln a - \ln b$, f) $0$, g) $\infty$, h) $0$ pre $a > 1$, $\infty$ pre $a \leq 1$, i) $1/\mathrm{e}$, j) $1$, k) $a^2/b^2$, l) $1$, m) $1/3$, n) $-\infty$, o) $3/10$, p) $0$, q) $2/9$, r) $\infty$, s) $-\infty$, t) $0$, u) $1/2$, v) $1$, w) $1/12$, x) $\sqrt{3/8}$, y) $(n^2 - m^2)/2$, z) $2$. **300.** a) nie, $1$, b) nie, $\nexists$, c) áno, $-1/2$, d) áno, $1$, e) áno, $1$. **301.** a) rastúca na $\langle -1\,;\,1\rangle$, klesajúca na $(-\infty\,;\,-1\rangle$, $\langle 1\,;\,\infty)$, b) rastúca na $\langle -1/3\,;\,\infty)$, klesajúca na $(-\infty\,;\,-1/3\rangle$, c) rastúca na $(-\infty\,;\,-5\rangle$, $(-1\,;\,\infty)$, klesajúca na $\langle -5\,;\,-1)$, d) rastúca na $(-\infty\,;\,-1)$, $(0\,;\,\infty)$, e) rastúca na $R$, f) rastúca na $(0\,;\,\infty)$, klesajúca na $(-\infty\,;\,0)$, g) rastúca na $\langle 0\,;\,2\rangle$, klesajúca na $(-\infty\,;\,0\rangle$, $\langle 2\,;\,\infty)$, h) rastúca na $\langle 1\,;\,\infty)$, klesajúca na $(-\infty\,;\,0)$, $(0\,;\,1\rangle$, i) rastúca na $\langle 1/2\,;\,\infty)$, klesajúca na $(-\infty\,;\,1/2\rangle$, j) rastúca na $(-\infty\,;\,-3\rangle$, $\langle 3\,;\,\infty)$, klesajúca na $\langle -3\,;\,3\rangle$, k) rastúca na $\langle 1\,;\,\infty)$, klesajúca na $(-\infty\,;\,-1\rangle$, konštantná na $\langle -1\,;\,1\rangle$, l) rastúca na $\big(-\infty\,;\,-\sqrt{3}\big\rangle$, $\big\langle\sqrt{3}\,;\,\infty\big)$, klesajúca na $\big\langle -\sqrt{3}\,;\,-1\big)$, $(-1\,;\,1)$, $\big(1\,;\,\sqrt{3}\big\rangle$, m) rastúca na $(2/3\,;\,1)$, $(1\,;\,2\rangle$, klesajúca na $(-\infty\,;\,0)$, $(0\,;\,2/3)$, $\langle 2\,;\,\infty)$, n) rastúca na $\langle 1\,;\,\infty)$, klesajúca na $(-\infty\,;\,-1\rangle$, konštantná na $\langle -1\,;\,1\rangle$, o) rastúca na $\langle 0\,;\,\infty)$, klesajúca na $(-\infty\,;\,0\rangle$, p) rastúca na $\langle 1/2\,;\,\infty)$, klesajúca na $(0\,;\,1/2\rangle$, q) rastúca na $(\pi/2 + k\pi\,;\,3\pi/2 + k\pi)$, $k \in Z$, r) rastúca na $\langle -3\pi/4 + 2k\pi\,;\,\pi/4 + 2k\pi\rangle$, klesajúca na $\langle \pi/4 + 2k\pi\,;\,5\pi/4 + 2k\pi\rangle$, $k \in Z$, s) rastúca na $\langle 2\pi/3 + 2k\pi\,;\,\pi + 2k\pi\rangle$, $\langle 4\pi/3 + 2k\pi\,;\,2\pi + 2k\pi\rangle$, klesajúca na $\langle 0 + 2k\pi\,;\,2\pi/3 + 2k\pi\rangle$, $\langle \pi + 2k\pi\,;\,4\pi/3 + 2k\pi\rangle$, $k \in Z$, t) rastúca na $R$. **302.** a) l min $f(4) = -32$, l max $f(0) = 0$, b) $\nexists$, c) l min $f(\sqrt[5]{24}) = 5\sqrt[5]{2/27}$, d) $\nexists$, e) lg min $f(k) = 0$, $k \in Z$, f) l min $f(0) = 0$, l max $f(2) = 4/\mathrm{e}^2$, g) l min $f(1) = 1 + \mathrm{e}$, h) lg min $f(0) = 1$, i) g min $f(0) = f(6) = 0$, lg max $f(3) = 3$, j) g min $f(-1) = f(1) = 0$, k) g max $f(0) = 3$, l) l min $f(-\pi/3 + k\pi) = \sqrt{3} - 4\pi/3 + 4k\pi$, l max $f(\pi/3 + k\pi) = 4\pi/3 - \sqrt{3} + 4k\pi$, $k \in Z$, m) lg min $f(1) = -2$, n) lg min $f(0) = -1$, o) $\nexists$, p) l min $f(1/2) = 4/5$, l max $f(1) = 1$, q) lg min $f(0) = 0$, r) l min $f(\mathrm{e}) = 2 + \mathrm{e}$, s) l min $f\big(\sqrt{2/3}\big) = -\sqrt{32/27}$, l max $f(0) = 0$, t) lg min $f(1) = 0$, u) l min $f(5\pi/4 + k\pi) = -\mathrm{e}^{-5\pi/4}\,\mathrm{e}^{-k\pi}/\sqrt{2}$, l max $f(\pi/4 + 2k\pi) = \mathrm{e}^{-\pi/4}\,\mathrm{e}^{-k\pi}/\sqrt{2}$, $k \in Z$, v) l min $f(3\pi/4 + k\pi) = -\mathrm{e}^{-3\pi/4}\,\mathrm{e}^{-k\pi}/\sqrt{2}$, l max $f(-\pi/4 + 2k\pi) = \mathrm{e}^{\pi/4}\,\mathrm{e}^{-k\pi}/\sqrt{2}$, $k \in Z$, w) l min $f(5\pi/4 + k\pi) = -\mathrm{e}^{5\pi/4}\,\mathrm{e}^{k\pi}/\sqrt{2}$, l max $f(\pi/4 + 2k\pi) = \mathrm{e}^{\pi/4}\,\mathrm{e}^{k\pi}/\sqrt{2}$, $k \in Z$, x) l min $f(3\pi/4 + k\pi) = -\mathrm{e}^{3\pi/4}\,\mathrm{e}^{k\pi}/\sqrt{2}$, l max $f(-\pi/4 + 2k\pi) = \mathrm{e}^{-\pi/4}\,\mathrm{e}^{k\pi}/\sqrt{2}$, $k \in Z$ (l=lokálny, g=globálny). **303.** a) lg min $f(-3\pi/4 + 2k\pi) = 1 - \sqrt{2}$, lg max $f(\pi/4 + 2k\pi) = 1 + \sqrt{2}$, b) l min $f(2) = -57$, l max $f(-3/2) = 115/4$, c) $\nexists$, d) l min $f((5 - \sqrt{13})/6) = -(587 + 143\sqrt{13})/1458$, $f((5 + \sqrt{13})/6) = (143\sqrt{13} - 587)/1458$, l max $f(1) = 0$, e) lg min $f(0) = -1$, f) lg min $f(-4) = 1$, l min $f(1) = 4$, l max $f(0) = 5$, g) lg min $f(1/8) = \ln 16 - \ln 17$, h) lg min $f(\mathrm{e}^{3/2}) = -1/4$, i) lg max $f(1) = \pi/4 - \ln 2/2$, j) lg min $f(1/\mathrm{e}) = 1/\sqrt[\mathrm{e}]{\mathrm{e}}$ k) g min $f(1) = 0$, g max $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2$, l) lg min $f(2) = 2 - \ln 4$, g max $f(1) = 1$, m) lg max $f(0) = -1$, n) lg min $f\big(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\big) = \sqrt{3}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, g max $f(3/2) = 39/10$, o) g min $f(3) = 3/4$, g max $f(11/10) = 220/21$ (l=lokálny, g=globálny). **304.** a) lg min $f(0) = f(1) = 0$, l max $f(1/2) = 1/\sqrt[3]{16}$, g max $f(-3) = \sqrt[3]{144}$, b) g min $f(\pi) = 12 - 2\pi$, g max $f(-\pi) = 12 + 2\pi$, c) g min $f(0) = f(\pi) = 0$, lg max $f(\pi/2) = 3$, d) lg min $f(\pi/2) = 1$, g min $f(0) = f(\pi) = 1$, lg max $f(\pi/4) = f(3\pi/4) = (1 + \sqrt{2})/2$, e) lg min $f(3) = 1$, g max $f(-1) = 17$, f) l min $f(1) = 18$, g min $f(-3) = 2$, l max $f(-1) = 22$, g max $f(4) = 72$, g) lg min $f(1) = 0$, g max $f(-2) = 21$, h) lg min $f(1) = f(5) = 0$, l max $f(3) = 4$, g max $f(-6) = 77$, i) g min $f(-1) = -10$, g max $f(1) = 2$, j) l min $f(3) = -26$, l max $f(1) = 2$ (l=lokálny, g=globálny). **305.** a) $x_1 = x_2 = a/2$, b) $x_1 = x_2 = a/2$, c) $x_1 = x_2 = a/2$, d) $x_1 = x_2 = a/2$. **306.** $x = 1$. **307.** Strany $a/2$, $h/2$. **308.** Rovnoramenný s ramenami $(s - a)/2$. **309.** Štvorec so stranou $s/4$. **310.** Štvorec so stranou $\sqrt{P}$. **311.** Štvorec so stranou $s/4$. **312.** Strany $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **313.** a) polomer podstavy $x = \sqrt{2}r/\sqrt{3}$, výška $v = 2r/\sqrt{3}$, b) polomer podstavy $x = r\sqrt{(5 + \sqrt{5})/10} \approx 0,850651r$, výška $v = r\sqrt{2(5 - Sqrt5)/5} \approx 1,051462$, c) polomer podstavy $x = 2r/\sqrt{2}$, výška $v = \sqrt{2}r$. **314.** a) polomer podstavy $x = 4\sqrt{2}r/3$, výška $v = 4r/3$, b) polomer podstavy $x = 4\sqrt{2}r/3$, výška $v = 4r/3$, c) polomer podstavy $x = \sqrt{95 + 7\sqrt{17}}r/\sqrt{128} \approx 0,983702r$, výška $v = (23 - \sqrt{17})r/16 \approx 1,179806$. **315.** Polomer podstavy $x = r/2$, výška $v = h/2$. **316.** a) $[1;2]$, b) $[1/10;23/10]$, c) $[2/5;11/5]$, d) $[13/10;19/10]$. **317.** a) $\big[(3 - \sqrt{3})/2;(6 - \sqrt{3})/2\big]$, b) $[1;2]$, c) $\big[1 - \sqrt{30}/4;7/4\big]$, d) $[-1/2;5/4]$. **318.** Dĺžka $20\sqrt[3]{5}$ m, šírka $5\sqrt[3]{5}$ m, výška $2\sqrt[3]{5}$ m. **319.** Na kruh treba $10\pi/(4 + \pi) \approx 4,399010$ m. **320.** 6 cm. **321.** Strany obdĺžnika $4s/(8 + 3\pi)$, $(4 + \pi)s/(8 + 3\pi)$, polomer kruhu $2s/(8 + 3\pi)$. **322.** $\sqrt{52 + 36\sqrt[3]{12} + 24\sqrt[3]{18}}$ m. **323.** a) nemá inflexné body, konvexná na $R$, b) inflexný bod 1, konvexná na $\langle 1\,;\,\infty)$, konkávna na $(-\infty\,;\,1\rangle$, c) inflexné body $\pm\sqrt{2}$, konvexná na $\big\langle -\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\big\rangle$, konkávna na $\big(-\infty\,;\,-\sqrt{2}\big\rangle$, $\big\langle\sqrt{2}\,;\,\infty\big)$, d) inflexný bod $\sqrt{3}/9$, konvexná na $\big\langle\sqrt{3}/9\,;\,\infty\big)$, konkávna na $\big\langle 0\,;\,\sqrt{3}/9\big\rangle$, e) inflexný bod 0, konvexná na $(-\infty\,;\,0\rangle$, konkávna na $\langle 0\,;\,\infty)$, f) nemá inflexné body, konvexná na $\langle 0\,;\,\infty)$, g) nemá inflexné body, konkávna na $\langle -2\,;\,\infty)$, h) inflexné body $\pi/2 + k\pi$, konvexná na $\langle -\pi/2 + 2k\pi\,;\,\pi/2 + 2k\pi\rangle$, konkávna na $\langle \pi/2 + 2k\pi\,;\,3\pi/2 + 2k\pi\rangle$, $k \in Z$, i) nemá inflexné body, konvexná na $R$, j) nemá inflexné body, konvexná na $(0\,;\,\infty)$, konkávna na $(-\infty\,;\,0)$, k) nemá inflexné body, konvexná na $(0\,;\,\infty)$, l) inflexné body $k\pi$, konvexná na $\langle 2k\pi\,;\,\pi + 2k\pi\rangle$, konkávna na $\langle \pi + 2k\pi\,;\,2\pi + 2k\pi\rangle$, $k \in Z$, m) nemá inflexné body, konvexná na $(-\infty\,;\,0)$, $(0\,;\,\infty)$, n) inflexný bod 0, konvexná na $(-\infty\,;\,-1)$, $\langle 0\,;\,1)$, konkávna na $(-1\,;\,0\rangle$, $(1\,;\,\infty)$, o) inflexné body 0, $\pm\sqrt{3}$, konvexná na $\big(-\infty\,;\,-\sqrt{3}\big\rangle$, $\big\langle 0\,;\,\sqrt{3}\big\rangle$, konkávna na $\big\langle -\sqrt{3}\,;\,0\big\rangle$, $\big\langle\sqrt{3}\,;\,\infty\big)$, p) inflexné body 0, $\pm 9$, konvexná na $(-\infty\,;\,-9)$, $\langle 0\,;\,9)$, konkávna na $(-9\,;\,0\rangle$, $(9\,;\,\infty)$, q) nemá inflexné body, konkávna na $\langle 1\,;\,\infty)$, r) inflexný bod 4, konvexná na $\langle 4\,;\,\infty)$, konkávna na $(-\infty\,;\,4\rangle$, s) nemá inflexné body, konvexná na $\langle 1\,;\,\infty)$, t) nemá inflexné body, konvexná na $(-\infty\,;\,-1\rangle$, $\langle 1\,;\,\infty)$, u) nemá inflexné body, konvexná na $(-\infty\,;\,-9)$, $(9\,;\,\infty)$, v) inflexné body $-2$, 1, konvexná na $(-\infty\,;\,-2\rangle$, $\langle 1\,;\,\infty)$, konkávna na $\langle -2\,;\,1\rangle$. **327.** Pre všetky okrem $b \in \langle -\mathrm{e}/6\,;\,0\rangle$. **328.** a) $x = 1$, $y = 2$, b) $x = \pm 1$, $y = 1$, c) $x = \pm 2$, $y = 2$, d) $y = 1$, e) $y = 3x$, f) $x = \pm 1$, $y = x$, g) $x = 0$, $y = 2x$, h) $y = \pm 1/2$, i) $y = x$, j) $y = \pm\pi x/2 - 1$, k) $x = 0$, $y = 1$, l) $y = x + 1/\mathrm{e}$, m) $y = 12$, n) $x = 0$, $y = 13$, o) $x = 0$, $yx+ = 13$, p) $x = \pm 1$, $y = 0$. **333.** a) $y = 2 - x^2$, $x \in (2\,;\,5)$, b) $y = \sqrt{4x^2/9 - 4}$, $x \in \langle 3\,;\,\infty)$, c) $y = \sqrt{9 - 9x^2/16}$, $x \in \langle -4\,;\,4\rangle$, d) $y = 9 - 9x/4$, $x \in \langle 0\,;\,4\rangle$. **334.** a) $t \in \langle 0\,;\,\infty)$, $y = 2x + 1$, $x \in \langle -1\,;\,\infty)$, b) $t \in R$, $y = 2x + 1$, $x \in R$, c) $t \in \langle 0\,;\,\infty)$, $y = 2 + 3\sqrt{x - 1}/2$, $x \in \langle 0\,;\,\infty)$, resp. $t \in (-\infty\,;\,0\rangle$, $y = 2 - 3\sqrt{x - 1}/2$, $x \in \langle 0\,;\,\infty)$, d) $t \in \langle -3/2 + 6k\,;\,3/2 + 6k\rangle$, $y = \sqrt{1 - x^2/4}$, $x \in \langle -2\,;\,2\rangle$, resp. $t \in \langle 3/2 + 6k\,;\,9/2 + 6k\rangle$, $y = -\sqrt{1 - x^2/4}$, $x \in \langle -2\,;\,2\rangle$, $k \in Z$, e) $t \in \langle 0 + 2k\pi\,;\,\pi + 2k\pi\rangle$, $y = (1 - \sqrt[3]{x^2})^(3/2)$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$, resp. $t \in \langle \pi + 2k\pi\,;\,2\pi + 2k\pi\rangle$, $y = -(1 - \sqrt[3]{x^2})^(3/2)$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$, $k \in Z$, f) $t \in R$, $y = 4(x - 2)^2/9 + 1$, $x \in R$. **335.** a) elipsa $x^2 + y^2/a^2 = 1$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$, t.j. $y = \pm a\sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$, b) hviezdica $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2/a^2} = 1$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$, t.j. $y = \pm a(1 - \sqrt[3]{x^2})^{3/2}$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$, c) úsečka $y = a - ax$, $x \in \langle 0\,;\,1\rangle$, d) hviezdica $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2/a^2} = 1$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$, t.j. $y = \pm a(1 - \sqrt[3]{x^2})^{3/2}$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$. **336.** a) $x = at/(1 + t^3)$, $y = at^2/(1 + t^3)$, $t \in R$, b) $x = (1 + t^2)/(1 + t^3)$, $y = (t + t^3)/(1 + t^3)$, $t \in R$, c) $x = (1 + t^3)/(1 + t^4)$, $y = (t + t^4)/(1 + t^4)$, $t \in R$. **337.** a) $x = 4t^3/3$, $y' = 1/(4t)$, $t \in R - \{0\}$, b) $x = (1 - t)/(1 + t)$, $y' = -1$, $t \in R - \{-1\}$ , c) $x = 2\sin t/(1 + 2\cos t)$, $y' = -2\sin t/(2 + \cos t)$, $t \in (-\pi/3\,;\,\pi/3)$, d) $x = \arcsin(1 + t^2)^{-1}$, $y' = -1$, $t \in R$, e) $x = t - \cos t$, $y' = \cos t/(1 + \sin t)$, $t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle - \{3\pi/2\}$, f) $x = 4\cos^3 t$, $y' = -\operatorname{tg} t$, $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle - \{\pi/2\}$, g) $x = \mathrm{e}^{2t}\cos^2 t$, $y' = (1 - \cos 2t + \sin 2t)/(1 + \cos 2t - \sin 2t)$, $t \in \langle 0\,;\,\pi/2) - \{\pi/4\}$, h) $x = 2\cosh t$, $y' = 2\operatorname{cotgh} t$, $t \in (0\,;\,\infty)$. **338.** a) $x = 4t + t^2$, $y' = (1 + 3t^2)/2/(2 + t)$, $y'' = (-1 + 12t + 3t^2)/4/(2 + t)^3$, $y''' = 3(9 - 4t - t^2)/8/(2 + t)^5$, $t \in \langle 0\,;\,\infty)$, b) $x = \ln t$, $y' = 2t\cos 2t$, $y'' = t(2\cos 2t - 4t\sin 2t)$, $y''' = 2t(\cos 2t - 4t^2\cos 2t - 6t\sin 2t)$, $t \in (0\,;\,\infty)$, c) $x = 4\sin t$, $y' = -\operatorname{tg} t$, $y'' = -1/(4\cos^3 t)$, $y''' = -3\sin t/(16\cos^5 t)$, $t \in (-\pi/2\,;\,\pi/2)$, d) $x = 2\cos^3 t$, $y' = -\operatorname{tg} t$, $y'' = 1/(6\sin t\cos^4 t)$, $y''' = (5\cos 2t - 3)/(72\sin^3 t\cos^7 t)$, $t \in (0\,;\,\pi) - \{\pi/2\}$, e) $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y' = (\sin t - \cos t)/(\sin t + \cos t)$, $y'' = -2\,\mathrm{e}^t/(\sin t + \cos t)^3$, $y''' = -4\,\mathrm{e}^{2t}(\cos t - 2\sin t)/(\sin t + \cos t)^5$, $t \in R - \{3\pi/4 + k\pi, k \in Z\}$, f) $x = \mathrm{e}^t$, $y' = \mathrm{e}^{-t}/\sqrt{1 - t^2}$, $y'' = \mathrm{e}^{-2t}(-1 + t + t^2)/\sqrt{(1 - t^2)^3}$, $y''' = \mathrm{e}^{-3t}(3 - 3t - 2t^2 + 3t^3 + 2t^4)/\sqrt{(1 - t^2)^5}$, $t \in (-1\,;\,1)$. **339.** a) $d\colon y = x/4$, $n\colon y = -4x$ v bode $[0;0]$, $d\colon y = (2x - 4)/3$, $n\colon y = (19 - 3x)/2$ v bode $[5;2]$, $d\colon y = (13x - 76)/8$, $n\colon y = (226 - 8x)/13$ v bode $[12;10]$, $d\colon y = (14x - 144)/5$, $n\colon y = (210 - 5x)/14$ v bode $[21;30]$, $d\colon y = (49x - 752)/12$, $n\colon y = (3716 - 12x)/49$ v bode $[32;68]$, b) $d\colon y = (1 + 3x)/2$, $n\colon y = (8 - 2x)/3$ v bode $[1;2]$, $d\colon y = (5x + 4)/4$, $n\colon y = (46 - 4x)/5$ v bode $[4;6]$, $d\colon y = (7x + 9)/6$, $n\colon y = (138 - 6x)/7$ v bode $[9;12]$, $d\colon y = (9x + 16)/8$, $n\colon y = (308 - 8x)/9$ v bode $[16;20]$, $d\colon y = (11x + 25)/10$, $n\colon y = (580 - 10x)/11$ v bode $[25;30]$, c) $d\colon y = 2$, $n\colon x = -\pi$ v bode $[-\pi;2]$, $d\colon y = (4 - \pi - 2x)/2$, $n\colon y = (\pi + 2x)/2$ v bode $[(2 - \pi)/2;1]$, $d\colon x = 0$, $n\colon y = 0$ v bode $[0;0]$, $d\colon y = (4 - \pi + 2x)/2$, $n\colon y = (\pi - 2x)/2$ v bode $[(\pi - 2)/2;1]$, $d\colon y = 2$, $n\colon x = \pi$ v bode $[\pi;2]$, d) $d\colon x = 1$, $n\colon y = 0$ v bode $[1;0]$, $d\colon y = \sqrt{2} - x$, $n\colon y = x$ v bode $\big[\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\big]$, $d\colon y = 1$, $n\colon x = 0$ v bode $[0;1]$, $d\colon y = \sqrt{2} + x$, $n\colon y = -x$ v bode $\big[-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\big]$, $d\colon x = -1$, $n\colon y = 0$ v bode $[-1;0]$, e) $d\colon y = 0$, $n\colon x = 1$ v bode $[1;0]$, $d\colon y = 1/\sqrt{2} - x$, $n\colon y = x$ v bode $\big[\sqrt{2}/4;\sqrt{2}/4\big]$, $d\colon x = 0$, $n\colon y = 1$ v bode $[0;1]$, $d\colon y = 1/\sqrt{2} + x$, $n\colon y = -x$ v bode $\big[-\sqrt{2}/4;\sqrt{2}/4\big]$, $d\colon y = 0$, $n\colon x = -1$ v bode $[-1;0]$. **340.** a) $t = -1$, $x = -3$, $y = 2$, resp. $t = 1$, $x = 5$, $y = 2$, b) $\nexists$.