Edícia vysokoškolských učebníc

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Technická univerzita v Košiciach

MAXIMA

Open source systém počítačovej algebry

Ján Buša

Slovak
Open Source
Initiative

Táto publikácia vznikla s prispením grantovej agentúry SR KEGA v tematickej oblasti „Nové technológie vo výučbe“– projekt: 3/2158/04 – „Využitie Open Source softvéru vo výučbe na vysokých školách“.

Recenzovali: Ladislav Ševčovič
Miloš Šrámek

ISBN 80-8073-640-5

Sadzba programom pdfTEX

Obsah

Úvod

Program MAXIMA patrí medzi tzv. systémy počítačovej algebry (SPA), ktoré umožňujú vykonávanie symbolických aj numerických výpočtov (riešenia rovníc, derivovania, integrovania, a pod.) na počítači. Jedným z prvých SPA bol program Macsyma (projekt MAC's SYmbolic MAnipulator), ktorého vývoj sa začal v roku 1968 v MIT (Massachusetts Institute of Technology), pozri (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004). Medzi ďalšie SPA patrili od začiatku systémy Reduce, CAMAL, Mathlab-68, PM a ALTRAN. Výrazný skok nastal, až keď sa objavili programy Maple (1985) a Mathematica (1988), inšpirované SPA Macsyma. Spomeňme ešte MuPAD a Derive.

Maxima je pokračovateľom SPA Macsyma. Bola navrhnutá a udržiavaná profesorom Williamom F. Schelterom z Univerzity v Texase od roku 1982, až do jeho smrti v roku 2001. V roku 1998 získal od Oddelenia energie (Department of Energy) súhlas na zverejnenie zdrojového kódu programu DOE Macsyma pod licenciou GNU Public License a v roku 2000 inicializoval na SourceForge projekt MAXIMA, na údržbu a vývoj SPA DOE Macsyma pod terajším názvom MAXIMA. MAXIMA teda patrí medzi programy s otvoreným zdrojovým kódom – OPENSOURCE softvér. Program je možné kompilovať v rôznych OS, vrátane Windows, GNU/Linuxu a MacOS X. Predkompilovaný sa dá pre GNU/Linux a Windows bezplatne získať na stránke SourceForge.

Maxima je systém na manipuláciu so symbolickými a numerickými výrazmi, vrátane derivovania, integrovania, výpočtu Taylorovych polynómov, Laplaceovej transformácie, riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc, systémov lineárnych rovníc. Pracuje s polynómami, množinami, zoznamami, vektormi, maticami a tenzormi. Umožňuje získať veľmi presné výsledky použitím presných zlomkov a celých i desatinných čísel s ľubovoľnou presnosťou. Zobrazuje grafy funkcií jednej aj dvoch premenných.

Na stránke `http://maxima.sourceforge.net/` nájdete množstvo zaujímavých informácií, týkajúcich sa nielen programu MAXIMA, ale aj ďalších OPENSOURCE SPA a OPENSOURCE matematického softvéru. Rozsiahla dokumentácia, uvedená aj v zozname použitej literatúry, sa nachádza na stránke `http://maxima.sourceforge.net/docs.shtml`.

Z vyššie uvedeného vyplýva, že SPA MAXIMA sa dá využiť v rôznych oblastiach výskumu a výučby. Každý môže tento systém využívať za rovnakých podmienok (bezplatne) aj po ukončení štúdia. Cieľom tejto učebnice je oboznámiť čitateľa s inštaláciou programu a so základnými úlohami, ktoré sa s jeho pomocou dajú efektívne riešiť. Podrobný popis poskytuje rozsiahly (MAXIMA MANUAL, 2005). Je zrejmé, že mnohé príkazy v stručnej učebnici nebudú ani spomenuté, nielen opísané. Dôležité je urobiť prvý krok. Veríme, že táto knižka Vám tento prvý (ale rozhodný) krok uľahčí.

Chcem sa poďakovať recenzentom Ladislavovi Ševčovičovi a Milošovi Šrámkovi za pozorné prečítanie textu a cenné pripomienky, ktoré zlepšili čitateľnosť textu.

Košice 6. októbra 2006 autor

1 Prvé kroky

1.1 Inštalácia programu MAXIMA

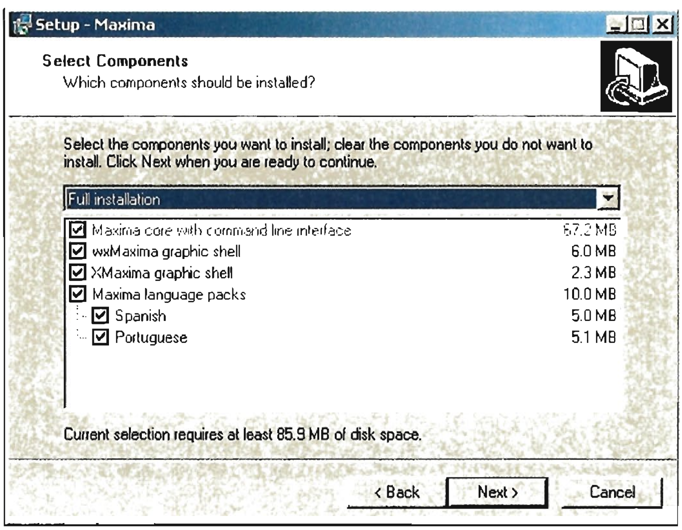
V tomto oddiele popíšeme inštaláciu programu MAXIMA v operačných systémoch Windows a GNU/Linux. Na stránke

`http://sourceforge.net/project/showfiles.php?group_id=4933`

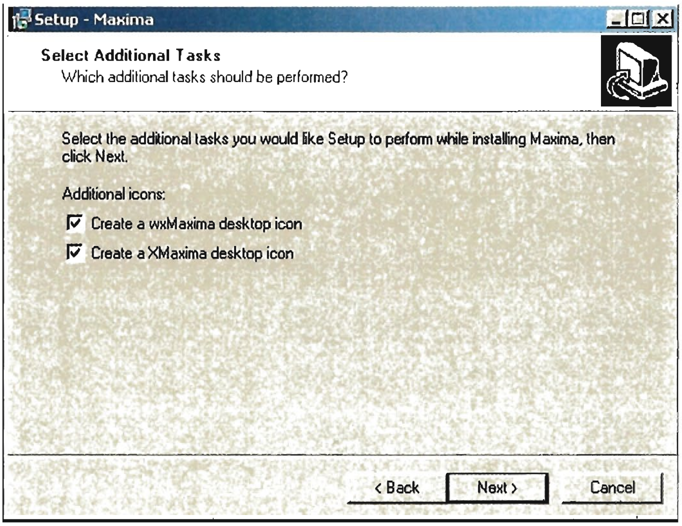
je možné nájsť a stiahnuť si inštalačné `rpm` súbory pre OS GNU/Linux a súbor `maxima-5.10.0.exe` pre OS Windows.

1.1.1 Inštalácia v OS Windows

Proces inštalácie v OS Windows odštartujeme spustením inštalačného súboru. Po začiatočnom odsúhlasení licenčných podmienok a nastavení pracovného priečinka sa na obrazovke objaví výzva:



Potvrdíme voľbu grafického prostredia WXMAXIMA, ktoré zjednodušuje prácu s programom MAXIMA. Objaví sa ďalšie okno, v ktorom môžeme potvrdiť umiestnenie ikonky programu na pracovnej ploche:



Ďalej budeme predpokladať, že ste si program nainštalovali a máte možnosť jednotlivé ukážky overiť samostatne. Nie je to síce nutné, ale takéto štúdium bude určite efektívnejšie.

1.1.2 Inštalácia v OS GNU/Linux

Pri inštalácii programu WXMAXIMA v OS GNU/Linux postavených na Debiane je problém, že program MAXIMA skompilovaný s GNU Lisp-om nebude fungovať s programom WXMAXIMA. Tento nedostatok je možné riešiť skompilovaním programu MAXIMA buď s balíkom `clisp` alebo s balíkom `cmucl`. Uvedieme postup inštalácie s balíkom `cmucl`:

1. odinštalujeme starú verziu programu MAXIMA aj balík `gcl`:
   `sudo apt-get remove --purge gcl maxima`

2. nainštalujeme balík `cmucl`:
   `sudo apt-get install cmucl`

3. stiahneme najnovšie zdrojáky programu MAXIMA:
   `http://prdownloads.sourceforge.net/maxima/maxima-5.10.0.tar.gz?download` (momentálne je najnovšia verzia 5.10.0)

4. skompilujeme program MAXIMA s balíkom `cmucl` namiesto `gcl`:
```
tar xzf maxima-5.10.0.tar.gz
cd maxima-5.10.0
./configure --enable-cmucl
make install
```

5. nainštalujeme program WXMAXIMA (akceptujte všetky závislosti!): `apt-get install wxmaxima`

Týmto je inštalácia ukončená, teraz uz môžeme spustiť program MAXIMA s grafickou nadstavbou `wx`, napr. z príkazového riadku zapísaním príkazu `wxmaxima` a odoslaním klávesom ENTER.

1.1.3 Prostredia programu MAXIMA

V knihe The Maxima Book autorov (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004) sú popísané viaceré prostredia programu MAXIMA. Okrem vyššie spomenutých grafických prostredí WXMAXIMA a XMAXIMA je možné použiť prostredia:

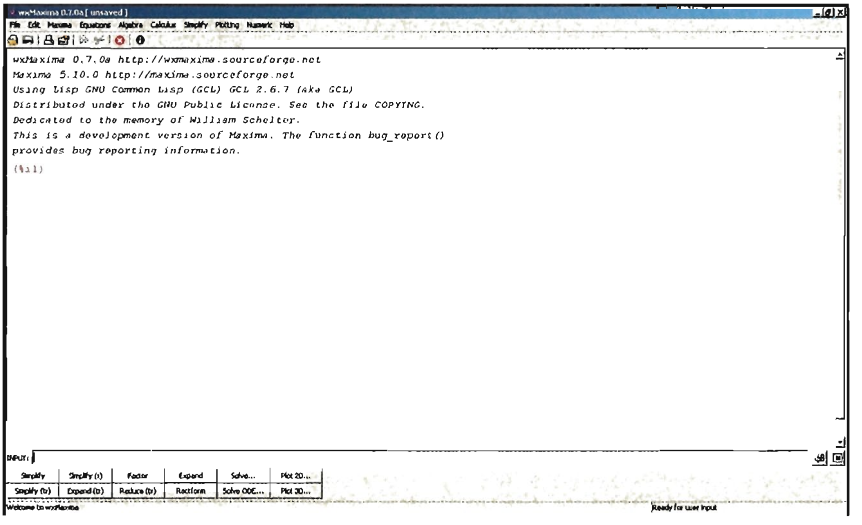
- terminál – pôvodné prostredie, práca v príkazovom riadku,
- editor Emacs – prepracované negrafické prostredie, umožňuje kombinovať vstupy a výstupy programu MAXIMA s textom a po ich kompilácii programom TEX/LATEX vznikne typograficky kvalitný dokument,
- TEXmacs – vedecký WYSIWYG editor, spolupracujúci s rôznymi SPA. Dá sa využívať možnosť výstupu programu MAXIMA vo formáte TEX,
- ďalšie prostredia nie je odporúčané používať, nie sú kvalitne udržiavané.

1.2 Spustenie programu MAXIMA

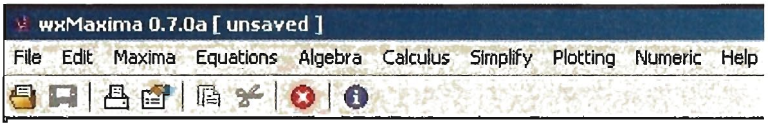
V Linuxe spustíme program MAXIMA v príkazovom riadku terminálu príkazom `maxima` alebo `xmaxima`. Po potvrdení stlačením klávesu ENTER sa otvorí okno programu MAXIMA alebo grafického prostredia `xMaxima`. V OS Windows klikneme na ikonku WXMAXIMA (ďalej budeme popisovať túto možnosť) alebo XMAXIMA, čím zvolíme grafické prostredie programu MAXIMA. Príkazy môžeme zadávať v príkazovom riadku programu alebo použijeme položky menu, ku ktorým sa dostaneme použitím tlačidiel na hornej lište.

Po kliknutí na ikonku program WXMAXIMA sa na obrazovke objaví okno zobrazené na obrázku 1, v hornej časti ktorého sa nachádza lišta so základnou ponukou (obrázok 2).

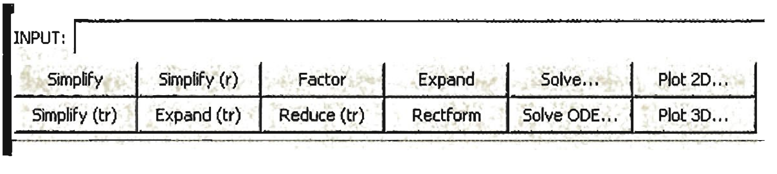
Položky na lište prostredia WXMAXIMA preskúmame neskôr. Nič Vám však nebráni pootvárať ich a presvedčiť sa o bohatých možnostiach SPA MAXIMA.



Obr. 1: Okno grafického prostredia WXMAXIMA



Obr. 2: Položky menu programu MAXIMA



Obr. 3: Príkazový riadok

V dolnej časti sa nachádza *vstupný riadok* (obrázok 3), v ktorom sa zadávajú príkazy programu MAXIMA a pod ním sú umiestnené tlačidlá vybraných funkcií programu MAXIMA.

Môžeme ho vyskúšať a postupne zadať, napríklad, príkazy uvedené v nasledujúcej ukážke v riadkoch, začínajúcich sa znakmi (`%i*`), kde * je poradové číslo vstupného riadku. Zadanie každého riadku potvrdíme klávesom ENTER. V prvom riadku zadávame príkaz na riešenie kvadratickej rovnice $x^2 + 2x + 3 = 0$, ktorá má dva komplexné korene $x_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}$. Výpis je v symbolickom tvare, a preto ďalej vypisujeme 2. riešenie v desatinnom tvare s nastavenými rôznymi presnosťami.

```
(%i1) solve(x^2+2*x+3);
(%o1) [ x = - sqrt(2) %i - 1 , x = sqrt(2) %i - 1 ]
(%i2) %o1[2],float;
(%o2) x = 1.414213562373095 %i - 1
(%i3) fpprec : 4;
(%o3) 4
(%i4) %o1[2],float;
(%o4) x = 1.414213562373095 %i - 1
(%i5) %o1[2],bfloat;
(%o5) x = 1.414b0 %i - 1.0b0
(%i6) fpprec : 50;
(%o6) 50
(%i7) %o1[2],bfloat;
(%o7) x = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753 77b0 %i - 1.0b0
```

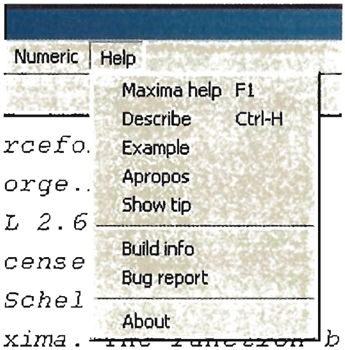
Vidíme, že z dvoch príkazov na výpis čísla s plávajúcou desatinnou bodkou (anglicky floating point) – `float` a `bfloat`, len druhý reaguje na zmenu nastavenia počtu desatinných miest príkazom `fpprec` (floating point precision).

1.3 Help programu MAXIMA

Grafické prostredie WXMAXIMA poskytuje pomocnú informáciu užívateľovi prostredníctvom položky `Help` (obrázok 4).

Online `Maxima help` v prvom riadku otvoríme aj stlačením klávesu F1. Príkazy v ďalších riadkoch – `describe`, `example` a `apropos` – je možné zadávať aj v príkazovom riadku, teda sa dajú využívať aj v terminálovom režime programu MAXIMA. Vyskúšajme ich:[1]

[1] Pri dlhých výpisoch pokračuje MAXIMA v ďalšom riadku. Náš výpis môže byť rozdelený v inom mieste.



Obr. 4: Možnosti položky `Help`

```
(%i8) apropos('pl);
(%o8) [pl,playback,plog,plot,plot2d,plot2dopen,plot2d_ps,
plot3d,plotheight,plotmode,plotting,plot_format,plot_options,
plot_realpart,plus]
```

Všimnite si apostrof ' za otváracou zátvorkou príkazu apropos. Netradične je len jeden, bez párového kamaráta na konci výrazu `pl`. Iste ste už pochopili, že funkcia apropos nám pomáha spomenúť si na presný názov príkazu. Túto funkciu v niektorých systémoch plní kláves TAB, umožňujúci výpis všetkých funkcií, ktorých názvy majú na začiatku daný výraz.

```
(%i9) describe(plot2d);
0: plot2d :(maxima.info)Definitions for Plotting.
1: plot2d_ps :Definitions for Plotting.
Enter space-separated numbers, 'all' or 'none':
Still waiting: 0;
-- Function: plot2d (<expr>, <range>, ..., <options>, ...)
-- Function: plot2d (<parametric_expr>)
-- Function: plot2d (<discrete_expr>)
   ...
   Displays a plot of one or more expressions as a function
   of one variable.
   ...
   See also 'plot_options', which describes plotting options
   and has more examples.
(%o9) false
```

Funkcia `describe("názov")` vypíše popis zadaného príkazu.[2] V tejto ukážke program čaká na špecifikáciu príkazu, keďže výraz `plot2d` je na začiatku názvu dvoch funkcií. Po zadaní voľby a potvrdení klávesom ENTER nasleduje výpis.[3]

Funkcia `example(názov)` poskytne ukážky použitia zadaného príkazu. Nasledujúci príklad ukazuje výsledok rôznych substitúcií, uskutočnených príkazom `subst`.[4] K opisu jeho syntaxe sa ešte vrátime neskôr:

```
(%i10) example(subst);
(%i11) subst(a,y+x,y+(y+x)^2+x)
(%o11) y+x+a^2
(%i12) subst(-%i,%i,b*%i+a)
(%o12) a-%i*b
(%i13) subst(x,y,y+x)
(%o13) 2*x
(%i14) subst(x = 0,diff(sin(x),x))
(%o14) 1
```

1.4 Ukončenie činnosti programu MAXIMA

V terminálovom režime ukončíme prácu programu príkazom `quit();`. Prázdne zátvorky na konci sú *povinné*:

```
(%i15) quit;
(%o15) quit
(%i16) quit();
CLIENT: Lost socket connection ...
Restart maxima with 'Maxima->Restart maxima'.
```

V grafickom režime WXMAXIMA ukončíme činnosť programu MAXIMA prostredníctvom menu – `File/Exit` alebo zadaním Ctrl Q.

[2] Názov je možné zadať aj bez úvodzoviek.

[3] Vynechali sme vyše 80 riadkov rôznych užitočných rád týkajúcich sa použitia funkcie `plot2d`.

[4] Zobrazili sme len neúplný výpis príkladov.

2 Čísla, výrazy a funkcie

2.1 Výrazy a priradenia

Výrazy sa zadávajú pomocou obvyklých znakov operácií a okrúhlych zátvoriek. Umocnenie sa zadáva znakom ^ alebo pomocou **. Na konci príkazu sa zadáva *bodkočiarka* ; alebo, ak chceme potlačiť zobrazenie výstupu, znak dolára $. V jednom riadku môžeme zadať niekoľko príkazov.

```
(%i1) a:3$ b:4$ a+b;
(%i2)
(%i3)
(%o3) 7
(%i4) a**3;
(%o4) 27
```

Ako je vidieť, znakom *priradenia* slúži netradične *dvojbodka* : a nie =! V riadku `%i1` sme premenným a a b priradili hodnoty bez ich zobrazenia, potom sme vypočítali a zobrazili hodnotu $a + b$.

2.2 Rôzne spôsoby zobrazenia výrazov

Zadajme výraz $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$:

```
(%i5)  x/sqrt(x^2+1);
```

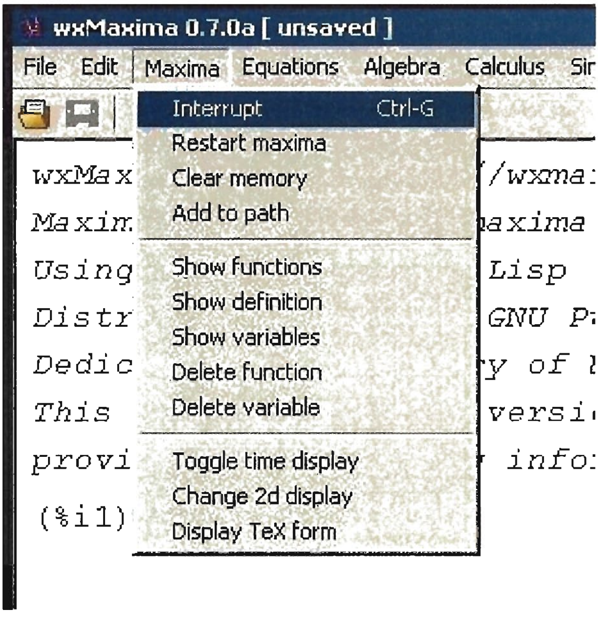
(%o5) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

```
(%i6)
```

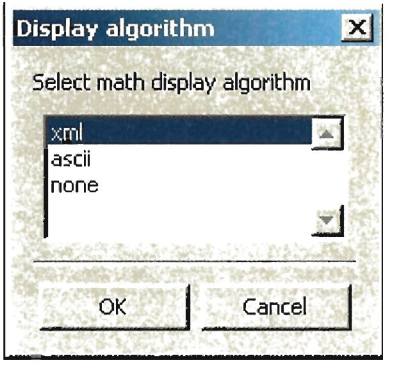
Medzi podpoložkami menu v záložke `Maxima` (obrázok 5) nájdeme možnosť zmeny zobrazovania výstupu kliknutím na `Change 2d display`. Otvorí sa ďalšie okienko, zobrazené na obrázku 6.

Vyberieme, napríklad, voľbu `ascii` a potvrdíme ju. Po opätovnom zadaní vstupu (`%i5`) sa výstup zmení na nasledujúci:

```
(%i6) set_display('ascii)$
(%i7) %i5;
                                   x
(%o7)                        ------------
                                   2
                             sqrt(x  + 1)
```



Obr. 5: Voľby programu MAXIMA



Obr. 6: Režim zobrazovania výsledkov

Pri zadaní voľby none bude zobrazovanie lineárne (jednorozmerné), keď sa výrazy zapisujú do jedného riadku:

```
(%i8) set_display('none)$
(%i9) %i5;
(%o9) x/sqrt(x^2+1)
```

K pôvodnému krajšiemu a príjemnejšiemu zobrazovaniu výsledkov sa v grafickom prostredí WXMAXIMA vrátime voľbou xml:

```
(%i10) set_display('xml)$
```

Na záver spomeňme ešte možnosť zapísať výstup vo formáte typografického programu TEX:

```
(%i11) tex(x/sqrt(x^2+1));
$${{x}\over{\sqrt{x^2+1}}}$$
(%o11) false
(%i12) tex(%o5);
$${{x}\over{\sqrt{x^2+1}}}\leqno{\tt (\%o5)}$$
(%o12) (%o5)
```

Na vstupe funkcie tex môžeme zadať buď samotný výraz alebo jeho odkaz na neho, prípadne jeho názov. Pri volaní funkcie tex je možné výstup zapísať do zadaného súboru.

2.2.1 Príkaz kill

Príkazom kill môžeme odstrániť premenné s ich všetkými priradeniami a vlastnosťami z aktuálneho pracovného prostredia programu MAXIMA:

```
(%i13) kill(a);
(%o13) done
(%i14) a;
(%o14) a
```

2.3 Zápis známych konštánt

V nasledujúcej tabuľke uvádzame zoznam konštánt používaných programom MAXIMA:

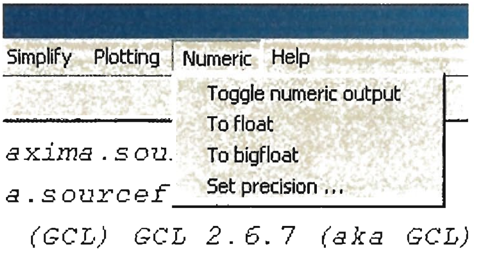
konštanta	MAXIMA
e – Eulerovo číslo	`%e`
i – imaginárna jednotka	`%i`
π – Ludolfovo číslo	`%pi`
∞ – reálne kladné nekonečno	`inf`
$-\infty$ – reálne záporné nekonečno	`minf`
∞ – komplexné nekonečno	`infinity`
lož – logická konštanta	`false`
pravda – logická konštanta	`true`

Aj konštanty, ktoré sú súčasťou vypočítaných výsledkov, uvádza MAXIMA znakom %.

2.4 Voľba presnosti výpočtu a zobrazovania reálnych čísel

MAXIMA dokáže pracovať s presnými reálnymi číslami, zapísanými v symbolickom tvare. O tom, či sa čísla zapisujú v symbolickom tvare alebo v tvare desatinných čísel rozhoduje nastavenie premennej `numer`.

V grafickom prostredí WXMAXIMA môžeme formát výpisu ovplyvniť v záložke `Numeric`, kde sa dá voľbou `Toggle numeric output` prepínať medzi symbolickým a dekadickým zápisom:[5]



Obr. 7: Položka `Numeric`

[5] Z neznámych dôvodov sa to netýka Eulerovho čísla e! V desatinnom tvare ho vypíšeme príkazom `%e,numer` alebo `float(%e)` (sú aj ďalšie možnosti).

```
(%i15) numer:true;
(%o15) true
(%i16) sqrt(5);
(%o16) 2.23606797749979
(%i17) numer:false;
(%o17) false
(%i18) %e;
(%o18) %e
(%i19) %e,numer;
(%o19) 2.718281828459045
```

Maxima zobrazuje štandardne 16 cifier desatinných čísel (medzi nimi sa ešte zobrazuje desatinná bodka). Zmenou hodnoty premennej `fpproc` môžeme dosiahnut' inú presnosť, ktorá sa však prejaví len pri použití výstupu `bfloat` (Big Float, pozri obr. 7), nie `float` – ten zobrazuje vždy rovnako. Presnosť môžeme prakticky neohraničene zvýšiť aj znížiť. Hodnotu `fpprec` je možné zmeniť aj lokálne (pozri riadok `(%i23)`) v rámci jedného príkazu[6]:

```
(%i20) fpprec:40;
(%o20) 40
(%i21) %pi,bfloat;
(%o21) 3.141592653589793238462643383279502884197b0
(%i22) float(%pi);
(%o22) 3.141592653589793
(%i23) bfloat(%pi), fpprec=13;
(%o23) 3.14159265359b0
(%i24) %e, bfloat;
(%o24) 2.718281828459045235360287471352662497757b0
```

2.5 Komplexné čísla

Komplexné čísla môžeme zadať v algebrickom tvare použitím konštanty `%i` – imaginárnej jednotky programu MAXIMA:

```
(%i25) z1:2+3*%i;
(%o25)                        3 %i + 2
(%i26) z2:4-5*%i;
(%o26)                        4 - 5 %i
```

[6] Zhodou okolností by sme rovnaký výsledok získali pri nastavení `fpprec=12`, program MAXIMA po zaokrúhlení nevypísal poslednú nulu.

Výsledok súčinu dvoch čísel by sme radšej videli priamo v zjednodušenom tvare. Toto dosiahneme až použitím príkazu expand alebo príkazu `rectform`:

```
(%i27) z1*z2;
(%o27)                  (4 - 5 %i) (3 %i + 2)
(%i28) expand(%);
(%o28)                        2 %i + 23
(%i29) rectform(z1*z2);
(%o29)                        2 %i + 23
```

V prípade podielu dvoch komplexných čísel však pomôže už len príkaz `rectform`[7]:

```
(%i30) z1/z2;
                              3 %i + 2
(%o30)                        --------
                              4 - 5 %i
(%i31) expand(%);
                            3 %i        2
(%o31)                    -------- + --------
                          4 - 5 %i   4 - 5 %i
(%i32) rectform(z1/z2);
                             22 %i   7
(%o32)                       ----- - --
                              41     41
```

Samozrejme máme k dispozícii reálnu a imaginárnu zložku komplexných čísel:

```
(%i33) realpart(z1);
(%o33)                           2
(%i34) imagpart(z1/z2);
                                22
(%o34)                          --
                                41
```

Komplexné číslo v algebrickom tvare môžeme vypísat' v exponenciálnom tvare:

---

[7]Vyskúšajte samostatne, ako v prípade súčinu aj podielu komplexných čísel funguje funkcia `trigrat`.

```
(%i35) z3:2+2*%i;
(%o35)                          2 %i + 2
(%i36) polarform(z3);
                                   %i %pi
                                   ------
                           3/2       4
(%o36)                    2    %e
```

Príkazmi abs a carg získame absolútnu hodnotu (modul, veľkosť) a argument komplexného čísla:

```
(%i37) abs(z3);
                               3/2
(%o37)                        2
(%i38) carg(z3);
                               %pi
(%o38)                         ---
                                4
```

Ak zadáme komplexné číslo v exponenciálnom tvare, môže byť transformované na algebrický tvar, ak sa to dá urobiť presne (bez použitia funkcií sínus a kosínus). Všimnite si, ako sa číslo z_5 (s iracionálnymi zložkami) zmenilo na približné s racionálnymi zložkami po priradení v riadku `(%i42)`. Porovnajte ešte rozdiel pri použití funkcií `numer` a `float`:

```
(%i39) z4:3*exp(2*%i*%pi/3);
                          sqrt(3) %i    1
(%o39)                 3 (---------- - -)
                              2         2
(%i40) rectform(z4);
                            3/2
                           3    %i   3
(%o40)                     ------- - -
                              2      2
(%i41) z5:exp(2*%i*%pi/17);
                             2 %i %pi
                             --------
                                17
(%o41)                     %e
(%i42) z5:exp(2*%i*%pi/17),numer;
(%o42)          0.36124166618715 %i + 0.93247222940436
```

```
(%i43) z5;
(%o43)              0.36124166618715 %i + 0.93247222940436
(%i44) exp(2*%i*%pi/17),float;
                             0.11764705882353 %i %pi
(%o44)                     %e
```

2.6 Operátory priraďovania

Operátor : používame na priradenie hodnôt alebo výrazov premenným. Týmto spôsobom však nedefinujeme funkcie:

```
(%i45) y:x^2-x+1;
                                    2
(%o45)                             x  - x + 1
(%i46) y(2);
                  2
y evaluates to x  - x + 1
Improper name or value in functional position.
-- an error.  Quitting.  To debug this try debugmode(true);
```

Ako vidíme, $y = x^2 - x + 1$ nie je funkcia, je to len výraz. Ak chceme získať hodnotu výrazu napr. pre $x = 2$, musíme do výrazu y dosadiť číslo 2 namiesto x:

```
(%i47) subst(2,x,y);
(%o47)                                 3
```

Treba si dávať pozor na poradie premenných vo funkcii `subst`. Porozmýšľajte, čo bude výsledkom príkazov `subst(y,x,2)` alebo `subst(x,2,y)`:

```
(%i48) subst(y,x,2);
(%o48)                                 2
(%i49) subst(x,2,y);
                                    x
(%o49)                             x  - x + 1
```

Ak chceme vytvoriť funkciu argumentu x, musíme použiť priradenie s operátorom `:=`. Napríklad:

```
(%i50) f(x):=x^2-x+1;
                                          2
(%o50)                          f(x) := x  - x + 1
(%i51) f(2);
(%o51)                                    3
```

2.7 Funkcie

MAXIMA, podobne ako Mathematica alebo Maple, má oveľa väčší počet rôznych funkcií ako štandardné programovacie jazyky. Ich zoznam je uvedený na stranách 441–451 v knihe (MAXIMA MANUAL, 2005), v ktorej nájdete aj ich popis. Nižšie uvádzame len niektoré z nich. Nezabudnite, že na získanie cenných informácií o príkazoch a funkciách môžete použiť funkcie `describe` a `example`.

2.7.1 Práca s reálnymi číslami

Na prácu s reálnymi číslami má MAXIMA nasledujúce:

funkcie: `bffac`, `bfloat`, `bfloatp`, `bfpsi`, `bfpsi0`, `cbffac`, `float`, `floatnump`, `?round`, `?truncate` a

premenné: `algepsilon`, `bftorat`, `bftrunc`, `float2bf`, `fpprec`, `fpprintprec`.

Popis nájdete v kapitole 10 knihy (MAXIMA MANUAL, 2005).

2.7.2 Trigonometrické funkcie

MAXIMA pozná nasledujúce *trigonometrické* funkcie: `acos`, `acosh`, `acot`, `acoth`, `acsc`, `acsch`, `asec`, `asech`, `asin`, `asinh`, `atan`, `atan2`, `atanh`, `cos`, `cosh`, `cot`, `coth`, `csc`, `csch`, `sec`, `sech`, `sin`, `sinh`, `tan`, `tanh`. Na manipuláciu s výrazmi obsahujúcimi trigonometrické funkcie slúžia funkcie `trigexpand`, `trigreduce`, `trigsimp`, `trigrat`. Balíky `atrig1`, `ntrig` a `spangl` obsahujú ďalšie pravidlá zjednodušovania trigonometrických funkcií. Ak sa chcete dozvedieť viac, prečítajte si kapitolu 15 knihy (MAXIMA MANUAL, 2005).

MAXIMA pozná aj niektoré hodnoty trigonometrických funkcií. Napríklad:

```
(%i52) ratsimp(sqrt((1-cos(%pi/4))/2));
                              sqrt(sqrt(2) - 1)
(%o52)                        -----------------
                                     3/4
                                    2
(%i53) tan(%pi/8);
(%o53) tan(%pi/8)
(%i54) ratsimp(%);
(%o54) tan(%pi/8)
(%i55) load(spangl);
(%o55) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.10.0/share/
         /trigonometry/spangl.mac
(%i56) tan(%pi/8);
(%o56) sqrt(2)-1
```

Niekedy by sme očakávali, že MAXIMA vydá výsledok trigonometrickej funkčnej hodnoty v algebrickom tvare (čo je síce krajšie a vhodné na ďalšie úpravy, ale možno nie jednoduchšie z hľadiska výpočtovej náročnosti). Napríklad:

```
(%i57) sin(a/2);
(%o57) sin(a/2)
(%i58) sin(%pi/8);
(%o58) sin(%pi/8)
```

Nasledujúcim príkazom sprístupníme použitie vzorcov pre polovičný uhol (treba si však uvedomiť, že vzorec je platný len pre určité uhly):

```
(%i59) halfangles:true$
(%i60) sin(a/2);
(%o60) sqrt(1-cos(a))/sqrt(2)
(%i61) sin(%pi/8);
(%o61) sin(%pi/8)
(%i62) subst(%pi/4,a,%o60);
(%o62) sqrt(1-1/sqrt(2))/sqrt(2)
(%i63) radcan(%o62);
(%o63) sqrt(sqrt(2)-1)/2^(3/4)
```

Hoci program MAXIMA už „pozná" vzorce pre polovičné uhly, nenapadne ho, že ich má v riadku 61 použiť.[8] Poradíme si však tak, že použijeme sub-

[8] Pri príprave textu sa nám podarilo dosiahnuť aj stav, keď program MAXIMA samostatne upravil výraz $\sin(\pi/8)$. Nepodarilo sa nám však tento stav zopakovať znova.

stitúciu za a v riadku 62. Na záver sme ešte použili jeden zo základných spôsobov zjednodušovania výrazov obsahujúcich odmocniny (radikály).

Ak by ste pracovali s trigonometrickými funkciami, je potrebné naštudovať ďalšie bohaté možnosti, na začiatok môžeme odporučiť knihu (MAXIMA MANUAL, 2005).

2.7.3 Špeciálne funkcie

Hoci špeciálne funkcie samozrejme tvoria súčasť programu MAXIMA, nebudeme sa venovať ich popisu. Táto tématika vychádza za rámec tejto úvodnej učebnice. Ak na svoju prácu potrebujete špeciálne funkcie, otvorte kapitoly 16 a 18 knihy (MAXIMA MANUAL, 2005).

2.8 Prostredie `ev`

Všetky operácie programu MAXIMA sa uskutočňujú v nejakom prostredí, v ktorom systém predpokladá platnosť určitých podmienok, ktoré sa dajú meniť. Často potrebujeme zmeniť správanie systému pri nejakých výpočtoch bez toho, aby sme vykonali globálne zmeny. Na to MAXIMA poskytuje príkaz `ev`[9], ktorý je jedným z najvýkonnejších a ktorý umožňuje definovať lokálne prostredie v rámci jedného príkazu. Ak užívateľ zvládne prácu s funkciou `ev` čo najskôr, získa veľkú výhodu a úžitok. V tomto oddieli ukážeme len niektoré možnosti tohoto príkazu. Podľa príručky (RAND, 2005) má táto funkcia nasledujúcu syntax:

```
ev(a,b1,b2,...,bn)
```

Výraz a sa vyhodnotí pri platnosti podmienok b_1, b_2, ..., b_n. Týmito „podmienkami" môžu byť aj rovnice, priradenia, slová (napríklad `numer` alebo `diff`).

Ako prvý uveďme jednoduchý príklad riešenia lineárnej algebrickej rovnice:

```
(%i64) ev(solve(a*x+b=0),x,a:3,b=12);
(%o64) [x=-4]
(%i65) a;
(%o65) a
```

Vidíme, že (rôzne) priradenia hodnôt premenným a a b vo vnútri prostredia `ev` sú len lokálne. V nasledujúcom riadku 65 nemá premenná a priradenú hodnotu.

[9] `ev` je asi skratka od evaluate.

Nasledujúci príklad je prevzatý z príručky (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004), kde nájdete aj ďalšie príklady:

```
(%i66) a:9/4;
(%o66) 9/4
(%i67) exp(a);
(%o67) %e^(9/4)
(%i68) ev(exp(a),float);
(%o68) 9.487735836358526
```

a v podobnom duchu ďalej:

```
(%i69) ev(exp(a*x));
(%o69) %e^((9*x)/4)
(%i70) ev(exp(a*x),float);
(%o70) %e^(2.25*x)
(%i71) ev(exp(a*x),x=2);
(%o71) %e^(9/2)
(%i72) ev(exp(a*x),numer,x=2);
(%o72) 90.01713130052181
```

2.9 Funkcie `assume` a `forget`

V niektorých situáciách je dobré predpokladať splnenie určitých podmienok. Pomocou príkazu `assume` – „predpokladajme" – oznámime programu MAXIMA potrebnú informáciu.[10] Syntax príkazu je

`assume(predikát_1,predikát_2,...,predikát_n)`

Predikáty `predikát_1`, `predikát_2`, ..., `predikát_n` môžu byť len výrazy zadávané pomocou relačných operátorov <, <=, `equal`, `notequal`, >= a >.[11]

Platnosť predpokladu zadaného príkazom `assume(predikát)` zrušíme príkazom `forget(predikát)`:

```
(%i73) sqrt(a^2);
(%o73) |a|
(%i74) assume(a<0);
```

[10] V nápovede SPA MAXIMA sa odporúča zoznámiť sa aj s pojmami `is`, `facts`, `context` a `declare`.

[11] Podmienku $n \neq -1$ zadáme v tvare `notequal(n,-1)`, podobne sa použije operátor `equal`.

```
(%o74) [a<0]
(%i75) assume(a>=0);
(%o75) [inconsistent]
(%i76) assume(a<=0);
(%o76) [redundant]
(%i77) sqrt(a^2);
(%o77) -a
(%i78) log(a^2);
(%o78) 2*log(a)
(%i79) log(-1),numer;
(%o79) 3.141592653589793*%i
(%i80) float(log(1+%i));
(%o81) 0.78539816339745*%i+0.34657359027997
(%i81) forget(a<0)$
(%i82) sqrt(a^2);
(%o82) |a|
```

Riadky 75 a 76 ukazujú reakciu SPA MAXIMA na pokus predefinovať už existujúci predpoklad. Zmenu predpokladu môžeme uskutočniť až po jeho „zabudnutí" príkazom `forget` – zabudni. Riadok 78 svedčí o tom, že MAXIMA neoveruje podmienku kladnosti vstupného argumentu logaritmu. Vysvetlením môže slúžiť riadok 79. Program MAXIMA totiž dokáže pracovať s logaritmami záporných (ale aj komplexných – pozri riadok 80) čísel.[12]

2.10 Príkaz `declare`

Podobnú funkciu ako príkaz `assume` plní príkaz `declare(a1,v1,a2,v2, ...)`, kde „atóm" `ai` má vlastnosť `vi`. Tento príkaz umožňuje definovať veľký počet rôznych vlastností nielen pre premenné, pre ktoré uvedieme niekoľko príkladov. Zrušenie predpokladu (i premennej) môžeme uskutočniť príkazom `kill`.[13]

```
(%i83) (-1)^n;
(%o83) (-1)^n
(%i84) declare(n,even)$
(%i85) (-1)^n;
(%o85) 1
```

[12] Bez hlbšieho štúdia programu MAXIMA je nemožné povedať, ako sa dá zúžiť oblasť vstupných argumentov logaritmu len na kladné reálne čísla, aby sme získali „klasický" logaritmus.

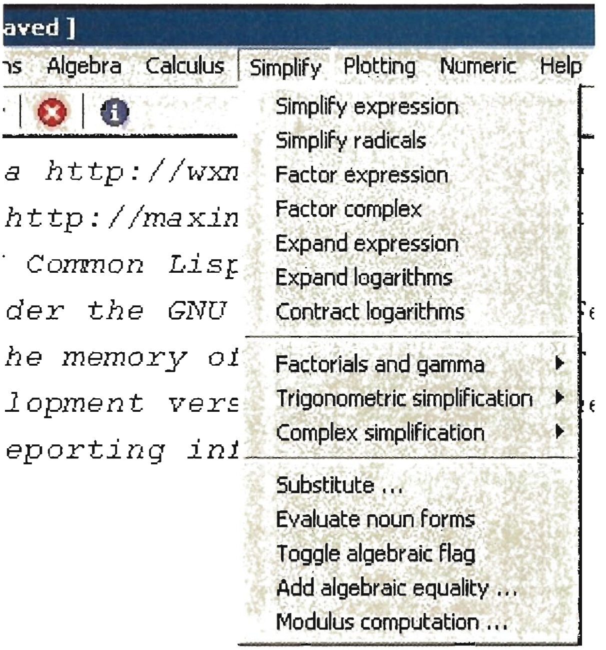
[13] Iný spôsob zrušenia platnosti deklarácie sme zatiaľ nenašli.

```
(%i86) declare(n,odd)$
Inconsistent Declaration: declare(n,odd)
-- an error.  Quitting.  To debug this try debugmode(true);
(%i87) kill(n)$
(%i88) declare(n,odd)$
(%i89) (-1)^n;
(%o89) -1
(%i90) kill(n)$
(%i91) limit(sin(%pi*n),n,inf);
(%o91) ind
(%i92) declare(n,integer)$
(%i93) limit(sin(%pi*n),n,inf);
(%o93) 0
(%i94) abs((-1)^n);
(%o94) |(-1)^n|
```

Riadok 86 svedčí o tom, že deklarácia sa nedá zmeniť opätovným použitím príkazu declare. Hoci výsledok v riadku 93 je očakávaný pre celočíselnú hodnotu n, nie je jasné, prečo MAXIMA nedokáže určiť absolútnu hodnotu v riadku 94.

3 Zjednodušovanie výrazov a substitúcie

Na obrázku 8 vidíme výpis podpoložiek položky `Simplify`. Niektoré z týchto podpoložiek sú umiestnené aj pod príkazovým riadkom SPA MAXIMA. Podrobný popis všetkých možností nie je možný v rámci tejto úvodnej učebnice. Ak potrebujete získať podrobnejšie informácie o jednotlivých možnostiach, využite funkcie `describe` a `example`, prípadne nazrite do odporúčanej literatúry.



Obr. 8: Položka `Simplify` hlavného menu

3.1 Funkcia `ratsimp`

Nahliadnime do príkladov, ktoré ponúka príkaz `example(ratsimp)`: [14]

```
(%i1) example(ratsimp);
(%i2) sin(x/(x+x^2)) = %e^((1+log(x))^2-log(x)^2)
```

[14] V tomto príklade sme zvolili ASCII formát zobrazenia.

```
                                              2        2
                           x         (log(x) + 1)  - log (x)
(%o2)               sin(------) = %e
                          2
                         x  + x
(%i3) ratsimp(%)
                                          1          2
(%o3)                           sin(-----) = %e x
                                        x + 1


(%i4) a+b*x+b*(a/b-x)
                                        a
(%o4)                           b x + b (- - x) + a
                                        b
(%i5) ratsimp(%)
(%o5)
                                         2 a
(%i6) ((x-1)^(3/2)-(1+x)*sqrt(x-1))/sqrt(x-1)/sqrt(1+x)
                                  3/2
                         (x - 1)    - sqrt(x - 1) (x + 1)
(%o6)                    --------------------------------
                             sqrt(x - 1) sqrt(x + 1)
(%i7) ratsimp(%)
                                          2
(%o7)                               - -----------
                                      sqrt(x + 1)
(%i8) ev(x^(1/a+a),ratsimpexpons)
                                        2
                                       a  + 1
                                       ------
                                         a
(%o8)                                  x
```

3.2 Funkcia radcan

S príkazom `radcan` sme sa už stretli vyššie v oddiele 2.7.2 na strane 25. Táto funkcia slúži na zjednodušovanie výrazov obsahujúcich logaritmy, exponenty a odmocniny (radikály), ktoré konvertuje na kanonický tvar.

3.3 Funkcie `expand`, `factor` a `gfactor`

Uveďme jednoduchuchý príklad použitia príkazov `expand`, `factor` a `gfactor`:

```
(%i9) v:expand((x+1)*(x-2)*(x^2+9));
                             4    3      2
(%o9)                       x  - x  + 7 x  - 9 x - 18
(%i10) factor(v);
                                               2
(%o10)                       (x - 2) (x + 1) (x  + 9)
(%i11) gfactor(v);
(%o11)                 (x - 2) (x + 1) (x - 3 %i) (x + 3 %i)
```

Ako vidíme, príkaz `expand` dokáže, napríklad, roznásobiť (expandovať) výrazy uvedené v zátvorkách. Opačným príkazom, ktorý dokáže výrazy napísať v tvare súčinu (faktorizovať ich)[15], je príkaz `factor`. V uvedenom príklade sme príkazom `factor(v)` získali rozklad polynómu v na súčin koreňových činiteľov **nad poľom reálnych čísel**. Príkaz `gfactor` vykonal rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov **nad poľom komplexných čísel**.

Funkcia `factor` pre celočíselný vstupný argument vráti rozklad celého čísla na súčin prvočísel:

```
(%i12) factor(1440);
(%o12) 2^5*3^2*5
```

Popis funkcie `factor` pomocou príkazu `describe` je rozsiahly – má 20 podpoložiek.

Príkazom `expand(v,p,n)` rozvinieme len členy, ktorých mocniny sú od $-n$ po p:[16]

```
(%i13) expand((x+2)^2*(x-1)^3*(x+3)^4/(x-2)^2/(x+1),3,1);
(%o13) (x^5*(x+3)^4)/((x-2)^2*x+(x-2)^2)+
       (x^4*(x+3)^4)/((x-2)^2*x+(x-2)^2)-
       (5*x^3*(x+3)^4)/((x-2)^2*x+(x-2)^2)-
       (x^2*(x+3)^4)/((x-2)^2*x+(x-2)^2)+
       (8*x*(x+3)^4)/((x-2)^2*x+(x-2)^2)-
       (4*(x+3)^4)/((x-2)^2*x+(x-2)^2)
```

[15] Koeficienty po faktorizácii musia byť racionálne alebo jednoduché radikály.

[16] Výpis v okne WXMAXIMA je na jednom riadku.

Činnosť príkazu `expand`, resp. správanie programu MAXIMA ovplyvňujú nastavenia rôznych systémových premenných. Pozrime sa, napríklad, na spracovanie výrazov obsahujúcich logaritmy pri rôznych hodnotách premennej `logexpand`:[17]

```
(%i14) log(a^b);
(%o14) log(a)*b
(%i15) log(x*b^2/y^3);
(%o15) log((b^2*x)/y^3)
```

Po zmene premennej `logexpand` dostaneme:

```
(%i16) logexpand:false$
(%i17) log(a^b);
(%o17) log(a^b)
(%i18) log(x*b^2/y^3);
(%o18) log((b^2*x)/y^3)
```

a nakoniec nastavenie na hodnotu `super`:

```
(%i19) logexpand:super$
(%i20) log(a^b);
(%o20) log(a)*b
(%i21) log(x*b^2/y^3);
(%o21) -3*log(y)+log(x)+2*log(b)
```

Poznámka 3.1 Podobne ako pri iných úpravách, aj v tomto prípade si treba uvedomiť, že aplikácia daného vzorca nemusí byť správna. V uvedenom príklade je nesprávna napríklad v prípade $b < 0$, keď vstup riadku 21 má zmysel a výstup nie (vymyslite ešte iný prípad, kedy je táto úprava nesprávna).

Funkcia `logcontract` slúži na spájanie viacerých logaritmov do jedného:

```
(%i22) log(a)+log(b);
(%o22) log(b)+log(a)
(%i23) logcontract(%);
(%o23) log(a*b)
```

[17] Implicitná hodnota tejto premennej je `true`.

Podobne môžeme ovplyvniť správanie činnosti SPA MAXIMA zmenou nastavenia hodnoty `trigexpand`[18], ktorej prednastavená hodnota je `false`:

```
(%i24) trigexpand;
(%o24) false
(%i25) sin(3*x+y);
(%o25) sin(y+3*x)
(%i26) trigexpand(sin(3*x+y));
(%o26) cos(3*x)*sin(y)+sin(3*x)*cos(y)
(%i27) trigexpand:true$
(%i28) sin(2*x+y);
(%o28) (cos(x)^2-sin(x)^2)*sin(y)+2*cos(x)*sin(x)*cos(y)
```

Informácie o ďalších systémových premenných (napríklad `besselexpand`, `expandwrt_denom`, `faceexpand`, `psexpand`, `radexpand`, `ratexpand`, `sumexpand`, `taylor_logexpand`, `trigexpandplus`, `trigexpandtimes`) a rôznych funkciách súvisiacich s úpravami výrazov nájdete v knihe (MAXIMA MANUAL, 2005).

3.4 Funkcie `subst` a `ratsubst`

Funkciu `subst` sme použili v oddiele 2.7.2 na strane 25 na výpočet hodnoty $\sin(\pi/8)$ a predtým pri definovaní výrazov obsahujúcich premenné. Príkaz má nasledujúcu syntax:

```
subst(vyraz1,vyraz2,vyraz3)
```

kde `vyraz1` bude dosadený za `vyraz2` do výrazu `vyraz3`. V najjednoduchšom prípade dostávame napríklad:

```
(%i29) subst(2*b,a,a^2+b^2);
(%o29) 5*b^2
```

Nahradený môže byť celý výraz, nielen premenná:

```
(%i30) subst(p,x+y,x+(x+y)^2+y);
(%o30) y+x+p^2
(%i31) subst(p,x+y,x+y+(x+y)^2);
(%o31) y+x+p^2
(%i32) ratsubst(p,x+y,x+(x+y)^2+y);
(%o32) p^2+p
```

[18]Rovnaký názov `trigexpand` majú systémová premenná aj funkcia!

V riadku 30 sme sa pokúsili nahradiť výraz $x + y$ premennou p. Keďže premenné x a y boli oddelené výrazom v zátvorke, pokúsili sme sa situáciu zlepšiť zmenou zápisu vstupného výrazu. Ako vidieť, nepomohlo to. Funkcia `ratsubst` si s touto situáciou poradila.

Substitúciu môžeme použiť aj na vytvorenie komplexne združeného čísla:

```
(%i33) subst(-%i,%i,a-3*%i);
(%o34) a+3*%i
```

Na mieste výrazu `vyraz3` môže byť aj nejaký operátor, ktorý sa najskôr vykoná a potom bude vykonaná substitúcia:

```
(%i35) subst(%pi/2,x,diff(sin(2*x),x));
(%o35) -2
```

V časti o integrovaní sa ešte vrátime k substitúciám pri výpočte integrálov. Ďalšie informácie o substitúciách nájdete v odporúčanej literatúre.

3.4.1 Zadanie pravidiel zjednodušovania výrazov

V predošlom sme pomocou príkazu `ratsubst` zjednodušili výraz `(%i32)`. Ak chceme podobnú operáciu vykonávať častejšie, môžeme zadať pravidlo zjednodušovania výrazov, ktoré potom využije funkcia `ratsimp`:[19]

```
(%i36) tellrat(x+y=p);
(%o36) [y+x-p]
(%i37) ratsimp(x^2-y^2+x+(x+y)^2+2*y);
(%o37) (2*p-1)*x+2*p
```

V tomto prípade nie je jednoduché dopredu získať rovnaký výsledok, aký nachádzame v riadku 37. O jeho správnosti sa presvedčíme tým, že vykonáme to isté iným spôsobom:

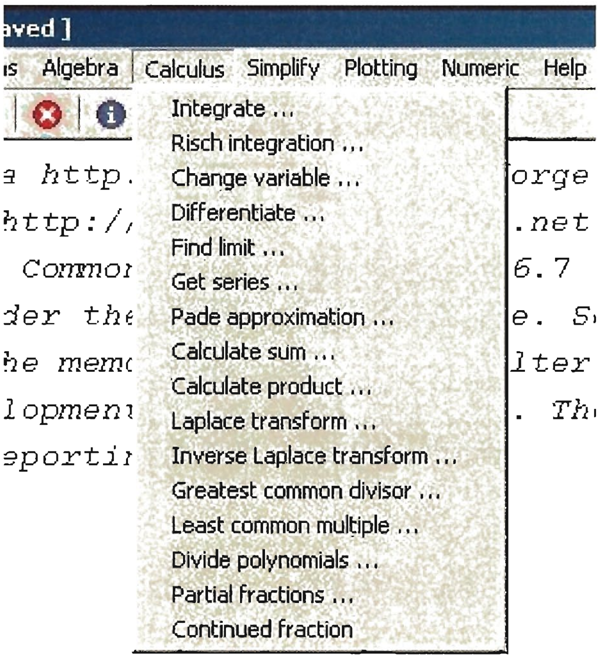
```
(%i38) subst(p-x,y,x^2-y^2+x+(x+y)^2+2*y);
(%o38) x^2+x-(p-x)^2+2*(p-x)+p^2
(%i39) ratsimp(%);
(%o39) (2*p-1)*x+2*p
```

[19] Príkaz `untellrat` by mal SPA MAXIMA pomôcť zabudnúť na zadefinované pravidlo. Žiaľ, zabudnúť nám pomohol až príkaz `kill(all)`!

4 Riešenie úloh matematickej analýzy

V tejto kapitole ukážeme, ako sa pomocou SPA MAXIMA riešia štandardné úlohy matematickej analýzy, anglicky nazývané tiež calculus (u nás tiež diferenciálny a integrálny počet).

Funkcie, určené na riešenie týchto úloh, nájdeme v položke menu `Calculus` (pozri obrázok 9).



Obr. 9: Položka `Calculus` hlavného menu

Tieto úlohy sa učia riešiť najmä študenti prvých ročníkov vysokých škôl (niektoré sa čiastočne preberajú aj na gymnáziách). Sú to:

- výpočet limít,
- derivovanie funkcií,
- výpočet Taylorovho polynómu funkcií,
- vyšetrovanie priebehu funkcií,
- integrovanie funkcií,

- vyšetrovanie extrémov funkcií viacerých premenných,
- posudzovanie konvergencie číselných radov,
- riešenie diferenciálnych rovníc,
- Laplaceova transformácia.

4.1 Výpočet limít

Príklad 4.1 Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Riešenie. Daná limita je typu $\left[\frac{0}{0}\right]$, preto rozložíme čitateľa na súčin koreňových činiteľov:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

V programe MAXIMA použijeme funkciu `limit(funkcia,premenna,bod)`:

```
(%i1) limit((x^2-1)/(x-1),x,1);
(%o1) 2
```

Príklad 4.2 Vypočítajme limitu

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+1}{x+1}.$$

Riešenie. Na výpočet použijeme funkciu `limit`:

```
(%i2) limit((x^2+1)/(x+1),x,-1);
(%o2) und
```

SPA MAXIMA nám oznámila, že táto limita neexistuje (skratka anglického *undefined*). O dôvode neexistencie limity sa presvedčíme výpočtom jednostranných limít (`minus` znamená „zo strany mínusu", teda zľava):

```
(%i3) limit((x^2+1)/(x+1),x,-1,minus);
(%o3) -inf
(%i4) limit((x^2+1)/(x+1),x,-1,plus);
(%o4) inf
```

Teda limity zľava aj sprava sú nevlastné ($-\infty$ resp. $+\infty$) a rôzne.

Na záver tejto časti uveďme ešte jeden príklad na výpočet limity typu $[1^\infty]$.

Príklad 4.3 Vypočítajme limity

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+2}{n+3}\right]^{n+4}$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+2n}{1+3n}\right]^{1+4n}.$$

Riešenie.

```
(%i5) limit(((n+2)/(n+3))^(n+4),n,inf);
(%o5) %e^(-1)
(%i6) limit(((1+2*n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);
(%o6) 0
```

Poznámka 4.2 Apostrof na začiatku príkazu spôsobí, že sa príkaz nevykoná, len sa (v prostredí wxMaxima) zobrazí:

```
(%i7)  'limit(((1+2*n)/(1+3*n))^(1+4*n),n,inf);
```

(%o7) $$\lim_{n \to inf}\left(\frac{2\,n+1}{3\,n+1}\right)^{4\,n+1}$$

Toto zobrazenie môžeme uložiť na spracovanie programom TEX príkazom:

```
(%i8) tex(%)$
$$\lim_{n\rightarrow \infty }{\left({{2\,n+1}\over{3\,n+1}}
  \right)^{4 \,n+1}}\leqno{\tt(\%o7)}$$
```

Po kompilácii programom pdfTEX získame:

(%o7) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\,n+1}{3\,n+1}\right)^{4\,n+1}$$

4.2 Výpočet derivácií a parciálnych derivácií

Výpočet derivácii (obyčajných i parciálnych) sa využíva pri riešení viacerých úloh, napríklad pri určovaní extrémov funkcií. Pozrime si na úvod zopár príkladov.

Príklad 4.4 Vypočítajme deriváciu funkcie $\sqrt{\sin(x^2)+1}$.

Riešenie. MAXIMA poskytuje na výpočet derivácií funkciu `diff`:[20]

```
(%i9) diff(sqrt(sin(x^2)+1),x);
```

(%o9) $$\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2+1}}$$

Príklad 4.5 Vypočítajme deriváciu funkcie $\ln(x+\sqrt{x^2+a})$.

Riešenie. Zjednodušený výsledok získame až po niekoľkých úpravách:[21]

```
(%i10) diff(log(x+sqrt(x^2+a)),x);
```

(%o10) $$\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1}{\sqrt{x^2+a}+x}$$

```
(%i11) subst(b,x+sqrt(x^2+a),%);
```

(%o11) $$\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1}{b}$$

```
(%i12) radcan(%);
```

(%o12) $$\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{b\sqrt{x^2+a}}$$

```
(%i13) subst(b,x+sqrt(x^2+a),%);
```

(%o13) $$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

Poznámka 4.3 Prirodzený logaritmus sa v programe MAXIMA označuje `log`, podobne ako v jazyku C alebo v MATLABe. Iné logaritmy nie sú k dispozícii.

Príklad 4.6 Vypočítajme 2. deriváciu funkcie $x\cdot\sin(x)$.

Riešenie. Porovnajme nasledujúce dva spôsoby:

[20] Výstupy programu MAXIMA budeme zobrazovať v LaTeXu, čo sa podobá na výstup v prostredí WXMAXIMA.

[21] Je možné, že by stačilo správne nastaviť niektoré systémové premenné.

```
(%i14) diff(diff(x*sin(x),x),x);
(%o14) 2*cos(x)-x*sin(x)
(%i15) diff(x*sin(x),x,2);
(%o15) 2*cos(x)-x*sin(x)
```

Príklad 4.7 Uvažujme funkciu $f(z) = 1/z$ komplexnej premennej $z = x + \mathrm{i}\, y$. Overme, že reálna zložka $u(x, y)$ funkcie f je harmonická funkcia, t. j. $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

```
(%i16) z:x+%i*y$
(%i17) u:realpart(1/z);
```

(%o17) $$\frac{x}{y^2 + x^2}$$

```
(%i18) diff(u,x,2)+diff(u,y,2);
```

(%o18) $$-\frac{8\,x}{\left(y^2 + x^2\right)^2} + \frac{8\,x\,y^2}{\left(y^2 + x^2\right)^3} + \frac{8\,x^3}{\left(y^2 + x^2\right)^3}$$

```
(%i19) radcan(%);
(%o19) 0
```

Príklad 4.8 Vypočítajme zmiešanú parciálnu deriváciu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ druhého rádu funkcie u.

```
(%i20) diff(diff(u,x),y);
```

(%o20) $$\frac{8\,x^2\,y}{\left(y^2 + x^2\right)^3} - \frac{2\,y}{\left(y^2 + x^2\right)^2}$$

```
(%i21) diff(u,x,1,y,1);
```

(%o21) $$\frac{8\,x^2\,y}{\left(y^2 + x^2\right)^3} - \frac{2\,y}{\left(y^2 + x^2\right)^2}$$

4.3 Výpočet Taylorovho polynómu funkcií

Výpočet Taylorovho polynómu hladkej funkcie v okolí daného bodu je síce teoreticky priehľadný, ale aj dostatočne náročný, vzhľadom na nutnosť výpočtu derivácií vyšších rádov. Taylorov polynóm pritom poskytuje efektívny prostriedok na aproximáciu funkcie v okolí daného bodu (výpočtovo) jednoduchým polynómom, čo má význam, napríklad, pri riadení v reálnom čase.

Ako je známe, ak funkcia $f(x)$ má $n+1$ spojitých derivácií na intervale $\langle a,b\rangle$, potom jej Taylorov polynóm n-tého stupňa so stredom v bode $x_0 \in (a,b)$ je daný vzťahom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{4.1}$$

kde $f^{(k)}(x_0)$ je k-ta derivácia funkcie $f(x)$ v bode x_0 a $f^{(0)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$.

Otázke odhadu absolútnej hodnoty odchýlky Taylorovho polynómu od funkcie $f(x)$ sa v tejto učebnici nebudeme venovať.

Príklad 4.9 Vypočítajme Taylorov polynóm 5. stupňa so stredom v bode $x_0 = 0$ funkcie $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x^2+2x+3}$.

Riešenie. Príkaz `taylor`, ktorý použijeme na riešenie daného príkladu, sa dá zadať rôznymi spôsobmi. Nebudeme však presne popisovať jeho syntax, veríme, že je jasná zo zadania úlohy a samotného príkazu.

```
(%i22) taylor(sin(x^2)/(x^2+2*x+3),x,0,5);
```

(%o22) $$\frac{x^2}{3} - \frac{2\,x^3}{9} + \frac{x^4}{27} + \frac{4\,x^5}{81} + \cdots$$

Poznámka 4.4 Ak si predstavíme výpočet derivácie danej funkcie $f(x)$, je zrejmé, že vyššiu deriváciu ako 2. by sme „ručne" len neradi počítali.

Príklad 4.10 Vypočítajme rozvoj polynómu $p(x) = x^5 - 4x^3 + 2x$ so stredom v bode $x_0 = -2$.

Riešenie.

```
(%i23) t:taylor(x^5-4*x^3+2*x,x,-2,7);
```

(%o23)

$$-4 + 34\,(x+2) - 56\,(x+2)^2 + 36\,(x+2)^3 - 10\,(x+2)^4 + (x+2)^5 + \cdots$$

Bodky na konci výrazu t vyvolávajú dojem, že sa nejedná o polynóm.[22] Na druhej strane príkaz expand svedčí o tom, že by to polynóm mohol byť:

```
(%i24) expand(t);
(%o24) x^5-4*x^3+2*x
```

Ku jednotlivým koeficientom polynómu t sa dostaneme použitím funkcie `coeff`. Napríklad:

```
(%i25) coeff(t,x+2,2);
(%o25) -56
```

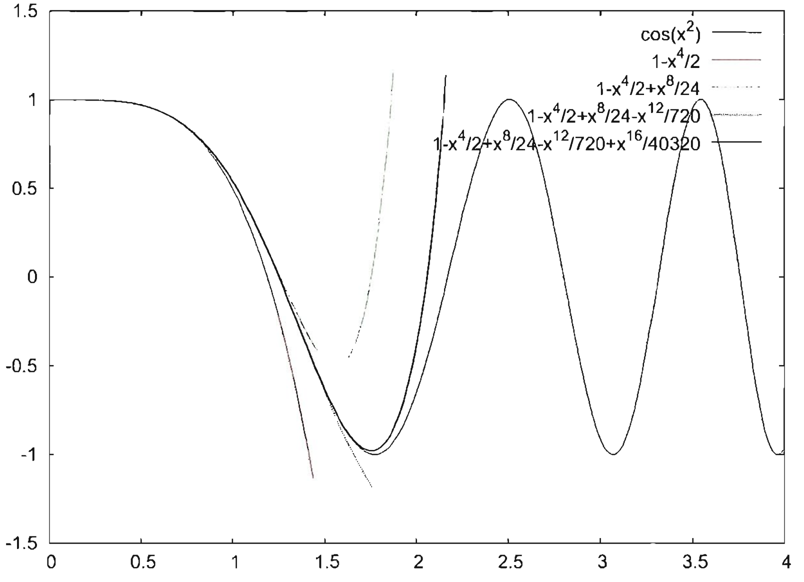
Príklad 4.11 Porovnajme kvalitu aproximácie funkcie $\cos(x^2)$ na intervale $\langle 0, 4\rangle$ pomocou Taylorovych polynómov stupňov 4, 8, 12 a 16.

Riešenie. Po výpočte Taylorovych polynómov na zobrazenie funkcií využijeme príkaz `plot2d`. Na to môžeme najprv použiť ponuku menu `Plotting`. Obrázok uložíme do súboru vo formáte Encapsulated PostScript (rozšírenie `eps`) a zaradíme ho do textu (výsledok vidíte na obrázku 10):

```
(%i26) t4:taylor(cos(x^2),x,0,4);
(%o26) 1-x^4/2+...
(%i27) t8:taylor(cos(x^2),x,0,8);
(%o27) 1-x^4/2+x^8/24+...
(%i28) t12:taylor(cos(x^2),x,0,12);
(%o28) 1-x^4/2+x^8/24-x^12/720+...
(%i29) t16:taylor(cos(x^2),x,0,16);
(%o29) 1-x^4/2+x^8/24-x^12/720+x^16/40320+...
(%i30) plot2d([cos(x^2),t4,t8,t12,t16], [x,0,4],
       [y,-1.2,1.2], [gnuplot_term, ps], [gnuplot_out_file,
       "D:/Users/Busa/Kega/Maxima/cosx2.eps"])$
```

Ako vidieť, polynóm stupňa 16 aproximuje dobre funkciu na intervale $\langle 0, 1.5\rangle$.

[22] Ak chceme získať polynóm bez bodiek, môžeme po načítaní balíka `load(revert)$` použiť príkaz `revert` dvakrát za sebou. Zmysel tohoto príkazu autorovi uniká, skúste sami šťastie pri jeho naštudovaní.



Obr. 10: Taylorove polynómy funkcie $\cos(x^2)$ stupňov 4, 8, 12 a 16

4.4 Vyšetrovanie priebehu funkcie

Jednou z najdôležitejších úloh, ktorej riešenie by mali zvládat' študenti vysokej školy, je vyšetrovanie priebehu funkcie. SPA môže zjednodušit' riešenie viaceré čiastočné úlohy.

Príklad 4.12 Vyšetrime priebeh funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2}.$$

Riešenie. Pri jednotlivých krokoch využijeme rôzne funkcie programu MAXIMA.

Funkciu najprv zadefinujeme:

```
(%i31) f(x):=(x^2-x-2)/x^2;
```

(%o31) $$f(x) := \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$$

4.4.1 Definičný obor

Keďže funkcia má tvar zlomku, zistíme, kedy sa menovateľ, ktorý určíme príkazom `denom` (anglicky denominator), rovná nule:

```
(%i32) men:denom(f(x));
(%o32) x^2
(%i33) solve(men=0);
(%o33) [x=0]
```

Vidíme, že bod $x = 0$ nepatrí do definičného oboru.

4.4.2 Nulové body

Priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami určíme, keď zistíme, kedy sa čitateľ rovná nule. Čitateľa určíme príkazom `num` (anglicky numerator).

```
(%i34) cit:num(f(x));
(%o34) x^2-x-2
(%i35) factor(cit);
(%o35) (x-2)*(x+1)
(%i36) solve(cit=0);
(%o36) [x=2,x=-1]
```

Keďže čitateľ je polynóm, môžeme sa pokúsiť určiť jeho rozklad na súčin koreňových činiteľov. Ten však nie je možný pre každú kvadratickú rovnicu. Riešením rovnice $x^2 - x - 2 = 0$ dosiahneme to isté, ako o tom svedčí príkaz `solve`. Týmto spôsobom však úlohu vyriešime vždy.

4.4.3 Body nespojitosti a asymptoty bez smernice

Ako sme zistili vyššie, bodom nespojitosti je bod $x = 0$. Vyšetríme správanie sa funkcie v okolí bodu nespojitosti:

```
(%i37) limit(f(x),x,0);
(%o37) -inf
```

V bode $x = 0$ existuje nevlastná (obojstranná) limita rovná $-\infty$. Teda priamka $x = 0$ bude **asymptotou bez smernice**.

4.4.4 Asymptoty so smernicou v bodoch $\pm\infty$

Asymptoty so smernicou v tvare $y = k_{\pm}\, x + q_{\pm}$ určujeme pomocou vzorcov:

$$k_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - k_{\pm}\, x].$$

```
(%i38) km:limit(f(x)/x,x,minf);
(%o38) 0
(%i39) qm:limit(f(x)-km*x,x,minf);
(%o39) 1
(%i40) kp:limit(f(x)/x,x,inf);
(%o40) 0
(%i41) qp:limit(f(x)-kp*x,x,inf);
(%o41) 1
```

Všimnite si, že bod $-\infty$ sa v limite zadáva skratkou `minf` (anglicky minus infinity). Teda funkcia má spoločnú **asymptotu so smernicou** (nulovou) $y = 1$.

4.4.5 Určovanie stacionárnych bodov

```
(%i42) g:diff(f(x),x);
```

(%o42) $$\frac{2\,x-1}{x^2} - \frac{2\,\left(x^2-x-2\right)}{x^3}$$

```
(%i43) factor(g);
```

(%o43) $$\frac{x+4}{x^3}$$

Vidíme, že funkcia $f(x)$ má jediný stacionárny bod $x = -4$. Jeho charakter vyšetríme v ďalšej časti.

4.4.6 Určovanie inflexných bodov

Na určenie inflexných bodov je potrebná druhá derivácia funkcie. Ak je druhá derivácia v stacionárnom bode kladná, funkcia má v tomto bode minimum a ak je záporná, funkcia má maximum.

```
(%i44) h:diff(f(x),x,2);
```

(%o44) $$\frac{6\,(x^2-x-2)}{x^4}-\frac{4\,(2\,x-1)}{x^3}+\frac{2}{x^2}$$

```
(%i45) h:factor(h);
```

(%o45) $$-\frac{2\,(x+6)}{x^4}$$

Ako vidíme, funkcia má jediný inflexný bod $x = -6$.[23] Vyšetrime charakter stacionárneho bodu $x = -4$:

```
(%i46) subst(-4,x,h);
(%o46) -1/64
(%i47) f(-4);
(%o47) 9/8
```

Keďže druhá derivácia v stacionárnom bode je záporná, funkcia nadobúda v bode $x = -4$ lokálne maximálnu hodnotu $f(-4) = 9/8 > 1$. Maximálny bod grafu sa teda nachádza nad asymptotou so smernicou $y = 1$.

4.4.7 Zobrazenie grafu funkcie jednej premennej

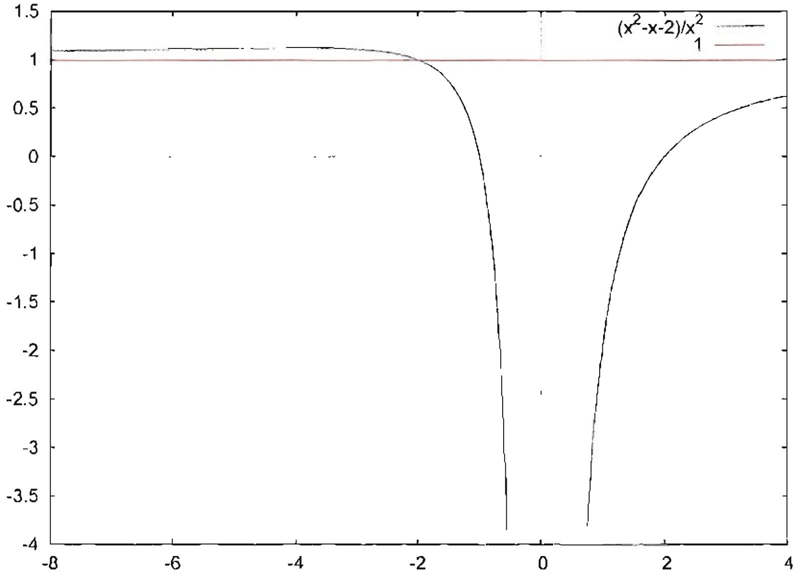
Po predchádzajúcich výpočtoch je zrejmé, že graf funkcie stačí zobraziť na intervale $\langle -8, 4\rangle$, na ktorom sa nachádzajú všetky nulové body, bod nespojitosti, lokálne maximum aj inflexný bod. Hodnoty y môžeme zvoliť, napríklad, z intervalu $\langle -4, 4\rangle$, ktorý zrejme obsahuje všetky „zaujímavé" funkčné hodnoty. Spolu s grafom funkcie $f(x)$ zobrazíme aj asymptotu so smernicou a osi. Predtým, ako graf uložíme do súboru, môžeme si ho pozrieť na obrazovke programu Gnuplot:

```
(%i48) plot2d([f(x),p(x)], [x,-8,4], [y,-4,4],
       [gnuplot_preamble, "set zeroaxis;"],
       [gnuplot_term, ps], [gnuplot_out_file,
       "D:/Users/Busa/Kega/Maxima/TeX/fx.eps"])$
```

Na obrázku 11 je znázornený graf funkcie $f(x)$.[24]

[23] Dokázať by sme to mohli pomocou 3. derivácie.

[24] Z neznámeho dôvodu je maximálna hodnota na osi y rovná 1.5 a nie 4, ako sme zadali :(!



Obr. 11: Graf funkcie $(x^3 - x - 2)/x^2$

4.5 Výpočet neurčitých a určitých integrálov

V tomto oddiele len uvedieme niekoľko príkladov výpočtu integrálov.[25]

Príklad 4.13 Vypočítajme neurčitý integrál $\int x \cdot \ln(x^2 + 3x + 4)\, dx$.

Riešenie. Tento integrál už iste nepatrí medzi triviálne, aj keď je to štandardný príklad na použitie metódy „per partes – po častiach" a následného integrovania racionálnej funkcie.

```
(%i49) integrate(x*log(x^2+3*x+4), x);
(%o49)
```

$$\frac{x^2 \log\left(x^2 + 3x + 4\right)}{2} - \frac{\frac{\log\left(x^2+3x+4\right)}{2} + \frac{21 \arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{7}} + \frac{2x^2-6x}{2}}{2}$$

Poznámka 4.5 Vo výsledku aj v zadaní je namiesto funkcie ln funkcia log, o čom sme už písali vyššie. V našich krajoch tiež namiesto označenia

[25] V prostredí WXMAXIMA môžeme integrál (ale aj ďalšie funkcie v ponuke menu) zadať príjemnejším spôsobom cez položku menu `Calculus/Integrate`.

arctan používame označenie arctg. Navyše vo výsledku chýba konštanta C, čo však nie je nejaká vážna chyba.

SPA MAXIMA je pozorný a ak mu niečo nie je jasné, môže Vás požiadať o doplňujúce informácie. Výsledkom môže byť, napríklad, nasledujúci „dialóg":

```
(%i50) integrate(x^n, x);
Is  n+1  zero or nonzero?
      zero;
(%o50) log(x)
(%i51) integrate(x^n, x);
Is  n+1  zero or nonzero?
      nonzero;
```

(%o51) $$\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Poznámka 4.6 V tomto príklade sme naše odpovede umiestnili na samostatný riadok, na obrazovke prostredia WXMAXIMA sú zobrazené hneď za otázkou, ktorú vypíše MAXIMA. Odpoveď zadávame v príkazovom riadku.

Poznámka 4.7 Príkazom `assume(notequal(n,-1))` popísaným v oddiele 2.9 na strane 26 by sme v tomto prípade predišli zadaniu otázky, či je $n+1$ nulové.

Príklad 4.14 Určme dĺžku oblúka krivky, ktorý tvorí časť grafu funkcie $\ln x$ pre x od 0,5 po 3.

Riešenie. Na výpočet dĺžky oblúka pre $x \in \langle a, b\rangle$ môžeme použiť známy vzorec:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Pre funkciu $f(x) = \ln x$ a zadaný interval po úprave dostaneme:

$$L = \int_{0,5}^{3} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx = \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{10}} \frac{t^2}{t^2-1}\, dt = \left[t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{10}}.$$

V programe MAXIMA riešime úlohu nasledujúcim spôsobom:

```
(%i52) f(x):=log(x)$
(%i53) integrate(sqrt(1+(diff(f(x),x))^2), x, 0.5, 3);
'rat' replaced 2.5 by 5//2 = 2.5
...
'rat' replaced 2.5 by 5//2 = 2.5
(%o53)
```

$$-\frac{\log\left(\sqrt{10}+1\right)}{2}+\frac{\log\left(\sqrt{10}-1\right)}{2}+\sqrt{10}+0.32560148642892$$

```
(%i54) float(%o31);
(%o54) 3.160428996360036
```

Ak porovnáme náš výsledok s výsledkom v riadku 53, vidíme, že sa prakticky zhodujú. Niektoré členy však SPA MAXIMA nahradil ich číselnými hodnotami. Po dosadení by sme sa však presvedčili, že číselné hodnoty obidvoch výsledkov sú zhodné.

O správnosti výsledku sa ešte presvedčíme numerickým integrovaním:[26]

```
(%i55) romberg((sqrt(x^2+1))/x, x, 0.5, 3);
(%o55) 3.160429989460405
```

Príklad 4.15 Vypočítajme hodnotu $\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie. Integrál sa nedá vypočítať pomocou elementárnych funkcií. Pozrime sa, ako si s touto situáciou poradí MAXIMA:

```
(%i56) integrate(exp(x^2),x,0,2);
(%o56)
```

$$-\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{i}\,\mathrm{erf}\,(2\,\mathrm{i})}{2}$$

SPA MAXIMA použil špeciálnu funkciu `erf` – z anglického Error function. Vo výsledku sa objavila imaginárna jednotka, pretože funkcia chyby je definovaná vzťahom[27]

$$\mathrm{erf}\,(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

[26] K príkazu `romberg` sme sa dopracovali cez menu `Calculus/Integrate`.

[27] Ak sa o funkcii chyby chcete dozvedieť viac, otvorte si internetovskú stránku `http://mathworld.wolfram.com/Erf.html`.

Znamienko mínus v exponente funkcie teda získame po substitúcii $x = i \cdot t$ v našom integrále. Žiaľ, tento výsledok je nepoužiteľný, pretože MAXIMA nám neprezradí číselnú hodnotu svojho výsledku[28]:

```
(%i57) float(%o56);
(%o57) -0.88622692545276*%i*erf(2.0*%i)
```

V tejto situácii nás zachráni numerické integrovanie:

```
(%i58) romberg(exp(x^2), x, 0, 2);
(%o58) 16.45262913575137
```

4.5.1 Substitúcia v integráloch

Niekedy je vhodné použiť určitú substitúciu na transformáciu integrálu[29] z jedného tvaru na druhý. Nato slúži funkcia

`changevar (<integrál>, <f(x,y)>, <y>, <x>),`

kde $f(x, y)$ je výraz určujúci substitúciu zadaný v explicitnom alebo v implicitnom tvare, y je nová premenná a x je pôvodná premenná. K príkazu `changevar` sme sa dopracovali cez menu `Calculus/Change variable`. Na potlačenie výpočtu integrálu použijeme apostrof `'` pred príkazom `integrate`:

```
(%i59) changevar('integrate(sqrt(x^2+1)/x, x),t^2-x^2-1,t,x);
```

(%o59) $$\int \frac{t\ |t|}{t^2-1}\ dt$$

Poznámka 4.8 Keďže danému implicitnému tvaru vyhovuje viac substitúcií (napríklad $t = \pm\sqrt{x^2+1}$), vo výsledku sa správne objavila absolútna hodnota $|t|$. Absolútna hodnota sa vo výsledku neobjaví, ak predtým zadáme príkaz `assume(t>0)`.

Podobne v prípade určitého integrálu dostávame:

```
(%i60) changevar('integrate(x^3*sin(x^2), x, 2,3),t=x^2,t,x);
(%o60) integrate(t*sin(t),t,4,9)/2
```

[28] Možno však existuje nejaká možnosť sa k tomuto číslu dopracovať :).

[29] Alebo súčtu.

alebo

(%o60)
$$\frac{\int_4^9 t\,\sin t\; dt}{2}$$

v závislosti od nastaveného režimu zobrazovania výsledkov.

4.6 Výpočet extrémov funkcií viac premenných

Pri vyšetrovaní extrémov funkcií viac premenných sa využije celá škála rôznych funkcií systému MAXIMA. Stretávame sa tu s parciálnymi deriváciami funkcie viac premenných, s riešením **nelineárnych** sústav (algebrických) rovníc, ako aj s hlavnými minormi (subdeterminantmi) Hessovej matice druhých derivácií.

Príklad 4.16 Určme lokálne extrémy funkcie $f(x,y) = \ln x - y^2 - \dfrac{y}{x}$.

Riešenie. Začneme definíciou funkcie a výpočtom parciálnych derivácií funkcie podľa jednotlivých premenných:

```
(%i61) f(x,y):=log(x)-y^2-y/x$
(%i62) diff(f(x,y),x);
```

(%o62)
$$\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}$$

```
(%i63) diff(f(x,y),y);
```

(%o63)
$$-2\,y - \frac{1}{x}$$

Ďalej určíme **stacionárne body** riešením sústavy **nelineárnych** rovníc $\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$:

```
(%i64) stac:algsys([%o62, %o63], [x,y]);
```

(%o64)
$$\left[\left[x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \left[x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right]$$

```
(%i65) xs:last(stac[2][1]);
(%o65) 1/sqrt(2)
(%i66) ys:last(stac[2][2]);
(%o66) -1/sqrt(2)
```

Z dvojice stacionárnych bodov, ktoré určil program MAXIMA, jeden nepatrí do definičného oboru funkcie $f(x, y)$, vzhľadom na podmienku $x > 0$.

Poznámka 4.9 Všimnite si príkaz `last` v riadkoch 65 a 66. Výsledkom riešenia sústavy je zoznam (anglicky list) `stac`, ktorý obsahuje rovnosti, ako sa o tom môžete presvedčiť pri pohľade na riadok (%o64). Premennú `xs` získame ako pravú stranu rovnosti prvku [2][1] tohoto zoznamu (anglicky last term – posledný člen).

Ďalej vypočítame Hessovu maticu[30] druhých parciálnych derivácií funkcie $f(x, y)$, určíme jej hlavné minory Δ_1, Δ_2 a rozhodneme o type stacionárneho bodu:

```
(%i67) H:matrix([diff(f(x,y),x,2),diff(f(x,y),x,1,y,1)],
                 [diff(f(x,y),x,1,y,1),diff(f(x,y),y,2)]);
```

(%o67) $$\begin{bmatrix} -\frac{2y}{x^3} - \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & -2 \end{bmatrix}$$

```
(%i68) d1:subst(ys,y,subst(xs,x,H[1][1]));
(%o68) 2
(%i69) d:determinant(H);
```

(%o69) $$-2\left(-\frac{2y}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^4}$$

```
(%i70) d2:subst(ys,y,subst(xs,x,d));
(%o70) -8
```

Keďže $\Delta_2 < 0$, funkcia $f(x, y)$ nemá žiaden lokálny extrém.

Príklad 4.17 Určme lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = x^3 + y^3$ pri väzbe $x + y - 4 = 0$.

Riešenie. Úlohu budeme riešiť metódou Lagrangeovych multiplikátorov. Najprv zadefinujeme Lagrangeovu funkciu a určíme jej stacionárne body:

```
(%i71) f(x,y):=x^3+y^3$
(%i72) v(x,y):=x+y-4$
(%i73) l(x,y,lambda):=f(x,y)+lambda*v(x,y)$
(%i74) diff(l(x,y,lambda),x);
```

[30] K príkazu `matrix` sme sa prepracovali cez položku menu `Algebra/Enter Matrix`.

```
(%o74) lambda+3*x^2
(%i75) diff(l(x,y,lambda),y);
(%o75) lambda+3*y^2
(%i76) diff(l(x,y,lambda),lambda);
(%o76) y+x-4
(%i77) stac:algsys([%o74, %o75, %o76], [x,y,lambda]);
(%o77) [[x=2,y=2,lambda=-12]]
```

Lagrangeova funkcia má teda jediný stacionárny bod $(x^*, y^*, \lambda^*) = (2, 2, -12)$. Zostavíme podmaticu druhých derivácií Lagrangeovej funkcie podľa premenných x a y a určíme jej hlavné minory:

```
(%i78) H:matrix([diff(l(x,y,lambda),x,2),
                 diff(l(x,y,lambda),x,1,y,1)],
                [diff(l(x,y,lambda),x,1,y,1),
                 diff(l(x,y,lambda),y,2)]);
(%o78) matrix([6*x,0],[0,6*y])
(%i79) xs:last(stac[1][1])$
(%i80) ys:last(stac[1][2])$
(%i81) d1:subst(ys,y,subst(xs,x,H[1][1]));
(%o81) 12
(%i82) d2:subst(ys,y,subst(xs,x,determinant(H)));
(%o82) 144
(%i83) f(xs,ys);
(%o83) 16
```

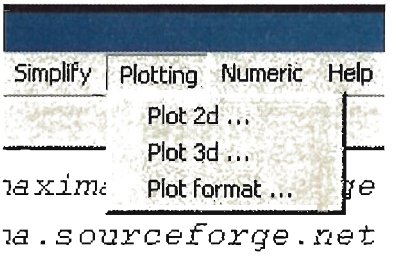
Keďže $\Delta_2 = 144 > 0$, funkcia $f(x, y)$ má pri danej väzbe lokálny extrém. Vzhľadom na to, že $\Delta_1 = 12 > 0$, funkcia nadobúda na priamke $x + y - 4 = 0$ lokálne minimum v bode $(2, 2)$, pričom sa minimálna funkčná hodnota rovná 16.

4.6.1 Zobrazenie grafu funkcie dvoch premenných

V prostredí WXMAXIMA sa nemusíme obávať vytvorenia grafu funkcie dvoch premenných. Môžeme znova využiť menu, tentoraz klikneme na položku `Plotting`, zobrazenú na obrázku 12.

Vyššie sme túto položku použili pri vytvorení grafu funkcie jednej premennej. Teraz využijeme položku `Plotting/Plot 3D` a zadáme vstupné údaje. Ďalej už môžeme modifikovať údaje aj v príkazovom riadku.

Príklad 4.18 Zobrazme funkciu $f(x, y) = \ln x - y^2 - y/x$ v okolí stacionárneho bodu $(x^*, y^*) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.



Obr. 12: Položka menu `Plotting`

Riešenie. Po zadaní funkcie pomocou menu sme získali zobrazenie grafu. Všimli sme si, že tento graf je možné rotovať a našli sme vhodný pohľad. Ak si uvedomíme, že MAXIMA pri vytváraní grafov spolupracuje s programom Gnuplot, je jasné, že nastal čas nazrieť do učebnice Gnuplotu (DOBOŠ, 2006). Na strane 35 objavíme príklad použitia príkazu `view`.

```
(%i84) plot3d(log(x)-x^2-y/x, [x,0.6,0.8], [y,-0.8,-0.6],
   [gnuplot_preamble, "set view 37,26"], [gnuplot_term, ps],
[gnuplot_out_file, "D:/Users/Busa/Kega/Maxima/logxyn.eps"])$
```

Na obrázku 13 sa môžeme uistiť, že stacionárny bod $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \approx$ $\approx (0{,}707; 0{,}707)$ nie je bodom lokálneho extrému ale môže byť len sedlovým bodom.

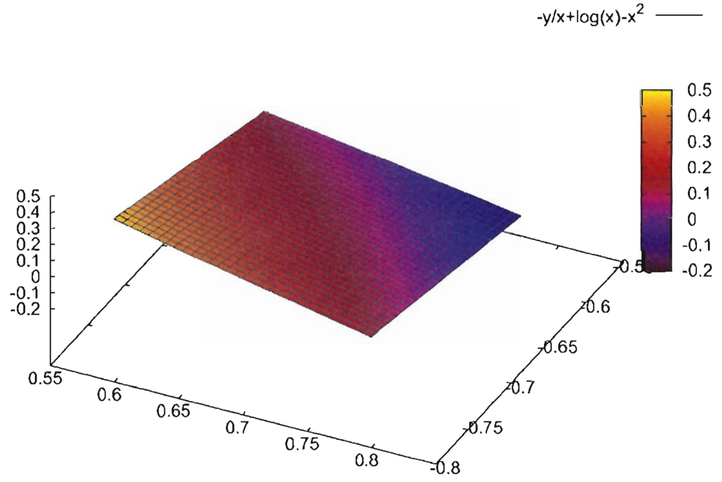
Príklad 4.19 Znázornime funkciu $f(x,y) = x^3 + y^3$ v okolí lokálneho minima pri väzbe $x + y - 4$.

Riešenie. Postupujeme podobne ako pri riešení predchádzajúceho príkladu:

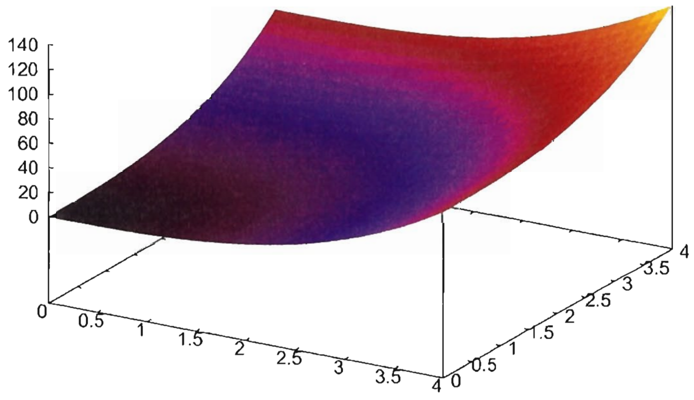
```
(%i85) plot3d(x^3+y^3, [x,0,4], [y,0,4],
[gnuplot_preamble,"set pm3d at s;unset surf;unset colorbox"],
[gnuplot_term, ps],
[gnuplot_out_file, "D:/Users/Busa/Kega/Maxima/x3py3.eps"])$
```

Väzba je rovnica priamky $x + y - 4 = 0$, ktorá v rovine $\mathcal{O}_{xy}$ spája body $(0,4)$ a $(4,0)$. Ako je vidieť na obrázku 14, nad touto priamkou nadobúda funkcia $f(x,y)$ najmenšiu hodnotu nad bodom $(2,2)$. Ak porovnáme obrázok 14 s obrázkom 13, uvidíme, že chýba farebná škála funkčných hodnôt. Toto sme dosiahli pridaním príkazu `unset colorbox`.

Ešte lepší pohľad získame, ak zobrazíme vrstevnice funkcie $f(x,y)$.



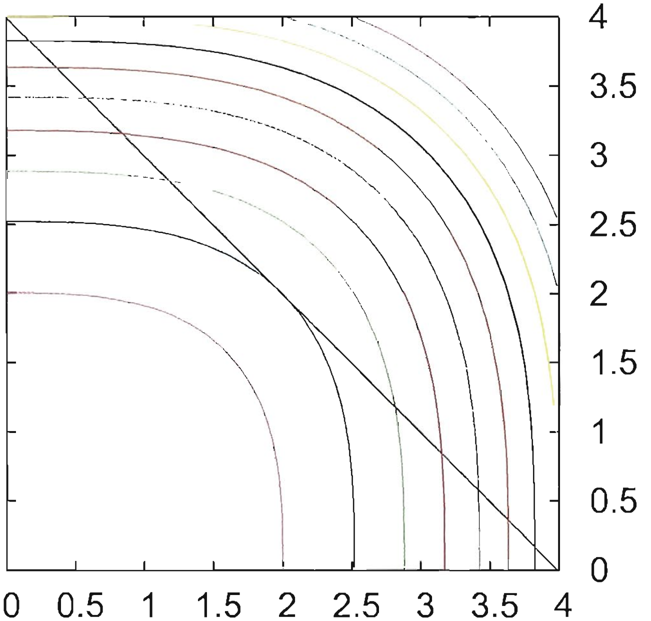
Obr. 13: Graf funkcie $f(x,y) = \ln x - y^2 - y/x$



Obr. 14: Graf funkcie $f(x,y) = x^3 + y^3$

```
(%i86) plot3d(x^3+y^3, [x,0,4], [y,0,4],
       [gnuplot_preamble, "unset pm3d; set contour base;
       set cntrparam levels incremental 0,8,80; set nokey;
       set size square; unset surf; set view 0,0],
       [gnuplot_term, ps], [gnuplot_out_file,
       "D:/Users/Busa/Kega/Maxima/vrstevnice.eps"])$
```

V tomto príklade sme vypli farby voľbou `unset pm3d`, nastavili výstup grafu na typ izolínií voľbou `set contour base`, nastavili sme hodnoty vrstevníc, ktoré sme zobrazili – `set cntrparam levels incremental 0,8,80`, vypli sme legendu príkazom `set nokey`, nastavili sme pomer jednotiek osí x a y na 1:1 príkazom `set size square`, apod.[31] Časť priamky $x + y - 4 = 0$ (uhlopriečku štvorca) sme dokreslili samostatne. Výsledok vidíte na obrázku 15. Minimálna hodnota pri väzbe sa dosahuje tam, kde sa priamka daná väzbou dotýka druhej izolínie, ktorej odpovedá hodnota $f = 16$.



Obr. 15: Izolínie funkcie $f(x, y) = x^3 + y^3$

[31] Popri učebnici (DOBOŠ, 2006) sme čerpali z podrobnejšej príručky (KAWANO, 2005).

4.7 Vyšetrovanie konvergencie číselných a mocninových radov

SPA MAXIMA dokáže vypočítať presný súčet niektorých radov. Napríklad, ak jej zadáme známy **harmonický** rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, nezaváha a odpovie:

```
(%i87) sum(1/n, n, 1, inf), simpsum;
(%o87) inf
```

Teda súčet radu je nekonečný, čo znamená divergenciu.

Podobne dopadne výpočet súčtu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

```
(%i88) sum(1/n^2, n, 1, inf), simpsum;
```

(%o88) $$\frac{\pi^2}{6}$$

Teda aj v tomto prípade sme získali presný súčet.

Príklad 4.20 Vyšetrime konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Riešenie. Ak požiadame o výpočet tohoto radu, MAXIMA nám ako výsledok vráti len jeho zápis:

```
(%i89) sum(1/sqrt(n+1), n, 1, inf), simpsum;
```

(%o89) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Skúsime preto použiť D'Alembertovo kritérium:

```
(%i90) a(x):=1/sqrt(x+1)$
(%i91) limit(a(n+1)/a(n),n,inf);
(%o91) 1
```

Dostali sme práve výsledok, ktorý nám neumožňuje urobiť záver o konvergencii. Preto vyskúšame Cauchyho integrálne kritérium:

```
(%i92) integrate(a(x),x,1,inf);
Integral is divergent
-- an error.  Quitting.  To debug this try debugmode(true);
```

Keďže integrál diverguje, diverguje aj samotný rad.

Príklad 4.21 Overme splnenie nutnej podmienky konvergencie pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Riešenie. Vypočítame $\lim_{n\to\infty} a_n$:

```
(%i93) a(n):=(-1)^n*n/sqrt(n^2+1)$
(%i94) limit(a(n),n,inf);
(%o94) ind
(%i95) limit(abs(a(n)),n,inf);
(%o95) -ind
(%i96) b(n):=n/sqrt(n^2+1)$
(%i97) limit(b(n),n,inf);
(%o97) 1
```

V predošlom sme sa už stretli s výsledkom und – anglicky undefined – nedefinovaný. Tentoraz je výsledok v riadku 94 `ind`. Žeby preklep? Nie, v knihe (MAXIMA MANUAL, 2005) na strane 167 nachádzame odpoveď: `ind` – indefined but bounded – nedefinované ale ohraničené. Vidíme, že sa nás MAXIMA snaží čo najpresnejšie informovať o vzniknutej situácii. Prečo však je aj odpoveď v riadku 95 podobná? Vari MAXIMA nevie, že $|(-1)^n| = 1$? Po hlbšej úvahe prichádzame na to, že sme program MAXIMA neupozornili na to, že predpokladáme, že n je prirodzené.[32] A v prípade kladného reálneho n, nemusí byť hodnota $(-1)^n$ vôbec definovaná! Tento problém prekonáme tým, že zadáme novú kladnú postupnosť (b_n) už bez člena $(-1)^n$. Limita tejto postupnosti je rovná 1 (riadok 97). Teda nutná podmienka konvergencie nie je splnená a rad nekonverguje.

Podobne môžeme použiť SPA Maxima na určovanie polomeru konvergencie mocninových radov v tvare $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$, keď je potrebné použiť Cauchyho-Hadamardov vzorec:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

[32] Nie je jasné, či to MAXIMA umožňuje.

alebo

$$R = \left[\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right]^{-1}.$$

4.8 Riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc

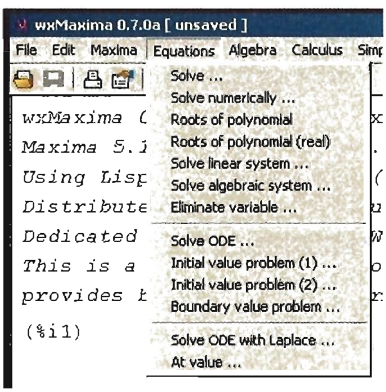
MAXIMA poskytuje niekoľko funkcií na riešenie diferenciálnych rovníc podobne ako, napríklad, Maple (pozri knihy (ĎJAKONOV, 2003; KREYSZIG a NORMINTON, 2006)). V tomto oddiele budeme využívať najmä príručku (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004).

Základ výbavy na riešenie diferenciálnych rovníc tvoria dve funkcie:

`ode2` – rieši obyčajné diferenciálne rovnice 1. a 2. rádu;

`desolve` – rieši systémy obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi, na riešenie MAXIMA využíva Laplaceovu transformáciu.

V prostredí WXMAXIMA sa ku funkciám na riešenie diferenciálnych rovníc dostaneme cez položky menu `Equations/Solve ODE` a pod. (pozri obrázok 16).



Obr. 16: Ponuka menu `Equations`

4.8.1 Riešenie začiatočných úloh pre diferenciálne rovnice 1. rádu

MAXIMA dokáže riešiť nasledujúce typy diferenciálnych rovníc 1. rádu, ktoré sa obyčajne vyučujú na univerzitách:[33]

[33] Žiaľ, namieste by tu bol skôr minulý čas, keďže v bakalárskom stupni výučby už na takú rozkoš nie je priestor.

- separovateľné,
- homogénne,
- lineárne,
- Bernoulliho,
- exaktné,
- zovšeobecnene homogénne.

Na zápis diferenciálnej rovnice, napríklad:

$$x^2 y' + 3xy = \frac{\sin x}{x}, \tag{4.2}$$

existujú tri rôzne spôsoby, uvedené v knihe (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004). My uvedieme len dva z nich, ktoré autori odporúčajú používať pre funkcie `ode2` a `desolve`.

Prvý z nich je vhodný na používanie vo funkcii `ode2`:

```
(%i98) depends(y,x);
(%o98) [y(x)]
(%i99) x^2*diff(y,x)+3*x*y=sin(x)/x;
```

(%o99) $$x^2\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + 3\,x\,y = \frac{\sin x}{x}$$

Druhý spôsob je odporúčaný na použitie s funkciou `desolve`:

```
(%i100) x^2*diff(y(x),x)+3*x*y=sin(x)/x;
```

(%o100) $$3\,x\,y + x^2\left(\frac{d}{d\,x}\,y\,(x)\right) = \frac{\sin x}{x}$$

Predpokladajme, že sme na zadanie rovnice využili riadky 98–99. Môžeme pristúpiť k riešeniu pomocou funkcie `ode2`:[34]

```
(%i101) ode2(%o99,y,x);
```

(%o101) $$y = \frac{\%c - \cos x}{x^3}$$

Vidíme, že vo výsledku sa objavila **konštanta** %c.

MAXIMA nás môže informovať o type rovnice, ktorú sme zadali:

[34] Dávajte pozor na použitie `(%oXX)` a nie `(%iXX)`! Ak však použijete ako argument funkcie `ode2` priamo vstup riadku `(%i99)`, všetko bude v poriadku.

```
(%i102) method;
(%o102) linear
```

Zadaná rovnica (4.2) je teda lineárna.

Poznámka 4.10 Ak MAXIMA nedokáže vyriešiť zadanú rovnicu, ako výsledok dostaneme `false`.

Ak chceme získať jedno partikulárne riešenie, môžeme zvoliť hodnotu konštanty `%c`. Treba si však uvedomiť, že výsledok je rovnosť a ak chceme získať funkciu, musíme použiť len pavú stranu:

```
(%i103) depends(g,x)$
(%i104) g:subst(1,%c,last(%o101));
```

(%o104) $$\frac{1-\cos x}{x^3}$$

Teraz môžeme overiť správnosť riešenia:

```
(%i105) ratsimp(x^2*diff(g,x)+3*x*g);
```

(%o105) $$\frac{\sin x}{x}$$

Pomocou funkcie `ic1` dokážeme riešiť **Cauchyho začiatočnú úlohu pre diferenciálnu rovnicu 1. rádu.**

Príklad 4.22 Určme riešenie diferenciálnej rovnice

$$y' + x\,y = x\,y^2, \tag{4.3}$$

vyhovujúce začiatočnej podmienke $y(1) = 2$.

Riešenie. Rovnica (4.3) je zapísaná v tvare Bernoulliho rovnice. Pozrime sa, ako ju vidí MAXIMA:

```
(%i106) depends(y,x)$
(%i107) rov:diff(y,x)+x*y=x*y^2;
(%o107) 'diff(y,x,1)+x*y=x*y^2
(%i108) ries:ode2(rov,y,x);
(%o108) log(y-1)-log(y)=x^2/2+%c
(%i109) method;
(%o109) separable
```

Rovnica (4.3) je teda separovateľná (ak na pravú stranu presunieme všetky členy okrem derivácie y, dá sa x vybrať pred zátvorku). Riešenie je zapísané v implicitnom tvare.

Pokračujme v riešení začiatočnej úlohy.

```
(%i110) riesz:ic1(ries,x=1,y=2);
```

(%o110) $$\log(y-1)-\log y=\frac{x^2-2\log 2-1}{2}$$

Trochu SPA MAXIMA pomôžeme. Oddelíme ľavú a pravú stranu implicitného zadania riešenia začiatočnej úlohy a samostatne ich exponujeme:

```
(%i111) l:first(riesz)$
(%i112) r:last(riesz)$
(%i113) l:radcan(exp(l));
(%o113) (y-1)/y
(%i114) r:radcan(exp(r));
```

(%o114) $$\frac{e^{\frac{x^2-1}{2}}}{2}$$

Zbavili sme sa logaritmov a môžeme úlohu doriešiť:[35]

```
(%i115) f:last(solve(l=r,y)[1]);
```

(%o115) $$-\frac{2}{e^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}-2}$$

Na záver ešte overme správnosť riešenia:

```
(%i116) diff(f,x)+x*f-x*f^2;
```

(%o116) $$\frac{2\,x\,e^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}-2\right)^2}-\frac{2\,x}{e^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}-2}-\frac{4\,x}{\left(e^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}-2\right)^2}$$

```
(%i117) radcan(%o116);
(%o117) 0
```

[35] Všimnite si, čo sa všetko vykonalo v riadku 115!

Uveďme ešte zopár príkladov na ostatné typy diferenciálnych rovníc 1. rádu.

Príklad 4.23 Určme typ a riešenie diferenciálnej rovnice

$$y' = \sqrt{1 + \frac{y}{x}}. \tag{4.4}$$

Riešenie. Bez komentára vypíšme:

```
(%i118) diff(y,x)=sqrt(1+y/x);
```

(%o118) $$\frac{d}{dx} y = \sqrt{\frac{y}{x} + 1}$$

```
(%i119) ode2(%,y,x);
```

(%119) $$\%c\, x = e^{-\frac{\sqrt{5}\log\left(-\frac{x\sqrt{\frac{y+x}{x}}-y}{x}\right)+\log\left(\frac{2\sqrt{\frac{y+x}{x}}-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{\frac{y+x}{x}}+\sqrt{5}-1}\right)}{\sqrt{5}}}$$

```
(%i120) method;
(%o120) homogeneous
```

Rovnica (4.4) je teda homogénna.[36]

Príklad 4.24 Určme typ a riešenie diferenciálnej rovnice

$$y' = x\, y + x^3. \tag{4.5}$$

```
(%i121) ode2(diff(y,x)-x*y=x^3,y,x);
```

(%o121) $$y = \left(\frac{\left(-2\, x^2 - 4\right)\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{2} + \%c\right)\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

```
(%i122) method;
(%o122) linear
```

[36] V riadku `119` sme v príkaze `ode2` namiesto `%o118` použili jednoducho `%`, čo znamená výstup z predchádzajúceho riadku.

Príklad 4.25 Určme typ a riešenie diferenciálnej rovnice

$$x^2\, y'\, \cos(x\, y) + \sin(x\, y) + x\, y\, \cos(x\, y) = 0. \qquad (4.6)$$

```
(%i123) ode2((x^2*diff(y,x)+x*y)*cos(x*y)+sin(x*y)=0,y,x);
(%o123) x*sin(x*y)=%c
(%i124) method;
(%o124) exact
```

Poznámka 4.11 Diferenciálna rovnica 1. rádu sa nazýva **exaktná**, ak sa dá napísať v tvare $p(x,y)\, y' + q(x,y) = 0$, kde $p(x,y) = \partial M(x,y)/\partial y$ a $q(x,y) = \partial M(x,y)/\partial x$ pre nejakú funkciu $M(x,y)$. Niekedy sa dá získať exaktná rovnica z neexaktnej prenásobením tzv. integračným faktorom (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004).

Príklad 4.26 Určme typ a riešenie diferenciálnej rovnice[37]

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^2}. \qquad (4.7)$$

```
(%i125) ode2(diff(y,x)+2*y/x=y^3/x^2,y,x);
```

(%o125) $$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5\, x^5} + \%c\, x^2}}$$

```
(%i126) method;
(%o126) bernoulli
```

Príklad 4.27 Určme typ a riešenie diferenciálnej rovnice

$$x\, y' = y\, \sqrt{1 + y\, x^4}. \qquad (4.8)$$

```
(%i127) ode2(x*diff(y,x)=y*sqrt(1+y*x^4),y,x);
```

[37]Príklad je prevzatý z knihy (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004).

(%o127) $x = \%c\,e^{-\frac{8\log\left(\sqrt{x^4\,y+1}+4\right)-5\log\left(\sqrt{x^4\,y+1}+1\right)-3\log\left(\sqrt{x^4\,y+1}-1\right)}{15}}$

```
(%i128) method;
(%o128) genhom
```

Poznámka 4.12 V knihe The MAXIMA Book (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004) sa uvádza, že rovnica sa nazýva **zovšeobecnene homogénna** (anglicky general homogeneous), ak sa dá napísať v tvare

$$y' = \frac{y}{x}\,G(y\,x^n).$$

Riešenie takejto rovnice sa dá zapísať v implicitnom tvare pomocou primitívnej funkcie k funkcii $1/(x(n + G(x)))$, ktorá sa však nemusí dať vyjadriť pomocou elementárnych funkcií.

4.8.2 Riešenie začiatočných a okrajových úloh pre diferenciálne rovnice 2. rádu

MAXIMA rieši nasledujúce typy obyčajných diferenciálnych rovníc 2. rádu:

- lineárne s konštantnými a s nekonštantnými koeficientmi,
- exaktné,
- Eulerove,
- Besselove,
- rovnice bez závislej premennej,
- rovnice bez nezávislej premennej.

Podobne, ako v prípade rovníc 1. rádu, je možné riešiť **Cauchyho začiatočnú úlohu** ale v prípade rovníc 2. rádu je navyše možné riešiť aj **okrajovú úlohu**.

Príklad 4.28 Určme riešenie diferenciálnej rovnice

$$x^2\,y'' + x\,y' - y = 0, \tag{4.9}$$

vyhovujúce začiatočným podmienkam $y(1) = 2$, $y'(1) = -3$.

Riešenie. Vidíme, že túto rovnicu môžeme zaradiť medzi Eulerove rovnice bez pravej strany tvaru

$$x^2\,y'' + a\,x\,y' + b\,y = 0.$$

Postupujeme analogicky s prípadom riešenia rovnice 1. rádu. Rozdielny je typ začiatočnej podmienky. Začiatočná úloha sa rieši pomocou funkcie `ic2`:

```
(%i129) ode2(x^2*diff(y,x,2)+x*diff(y,x)-y=0,y,x);
(%o129) y=%k2*x-%k1/(2*x)
(%i130) method;
(%o130) exact
(%i131) ic2(%o129,x=1,y=2,diff(y,x)=-3);
```

(%o131) $$y = \frac{5}{2\,x} - \frac{x}{2}$$

SPA MAXIMA teda rovnicu zaradil medzi exaktné.

Príklad 4.29 Určme riešenie diferenciálnej rovnice (4.9) vyhovujúce okrajovým podmienkam $y(1) = 2$ a $y(2) = 1$.

Riešenie. V tomto prípade použijeme funkciu `bc2`:

```
(%i132) bc2(%o129,x=1,y=2,x=2,y=1);
```

(%o132) $$y = \frac{2}{x}$$

Príklad 4.30 Riešme Besselovu diferenciálnu rovnicu $x^2\,y'' + x\,y' + (x^2 - - 4)y = 0$.

Poznámka 4.13 Besselove rovnice majú tvar $x^2\,y'' + x\,y' + (x^2 - n^2)y = = 0$, kde n je konštanta. Príklad sme prevzali z knižky (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004).

```
(%i133) ode2(x^2*diff(y,x,2)+x*diff(y,x)+(x^2-4)*y-0,y,x);
(%o133) y=bessel_y(2,x)*%k2+bessel_j(2,x)*%k1
```

alebo

(%o133) $$y = Y_2(x)\,\%k_2 + J_2(x)\,\%k_1$$

V zápise výsledku sa vyskytujú Besselove funkcie prvého resp. druhého druhu – J_n resp. Y_n.

Príklad 4.31 Určme riešenie diferenciálnej rovnice

$$y\,y'' + (y')^2 = 0 \tag{4.10}$$

vyhovujúce **začiatočným podmienkam** $y(1) = 2$ a $y'(1) = 3$.

Riešenie. Použijeme funkcie `ode2` a `ic2`:[38]

```
(%i134) ode2(y*diff(y,x,2)+diff(y,x)^2=0,y,x);
(%o134) y^2/(2*%k1)=x+%k2
(%i135) method;
(%o135) freeofx
(%i136) ic2(%o134,x=1,y=2,diff(y,x)=3);
```

(%o136) $$\frac{y}{6} = x - \frac{3\,y-2}{3\,y}$$

```
(%i137) solve(%o136,y);
```

(%o137)
$$\left[y = -\sqrt{9\,x^2 - 18\,x + 13} + 3\,x - 3, y = \sqrt{9\,x^2 - 18\,x + 13} + 3\,x - 3\right]$$

SPA MAXIMA určil, že sa jedná o rovnicu bez nezávislej premennej x. Ak porovnáme všeobecné riešenie v riadku `(%134)` s riešením z riadku `(%o137)`, vidíme, že sú nekonzistentné, nie je jasné, odkiaľ sa mohol nabrať člen x^2 pod odmocninou. Ak preveríme splnenie začiatočných podmienok z rovnice `(%o136)`, zistíme, že sú splnené. Ale aj rovnica `(%o136)` sa líši od rovnice `(%o134)` (ak by sme poslednú vydelili premennou y, pri premennej x by mal byť výraz $1/y$).

Takže podozrivá je rovnica `(%o136)`. Preto určíme potrebné konštanty `%k1` a `%k2` „ručne" pomocou programu MAXIMA:

```
(%i138) subst(2,y,subst(1,x,%o134));
(%o138) 2/%k1=%k2+1
(%i139) diff(%o134,x);
```

(%139) $$\frac{y\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,y\right)}{\%k_1} = 1$$

[38] Aj túto rovnicu (bez doplňujúcich podmienok) sme prevzali z učebnice (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004).

```
(%i140) subst(2,y,subst(3,diff(y,x),%o139));
(%o140) 6/%k1=1
(%i141) algsys([%o138,%o140], [%k1,%k2]);
(%o141) [[%k1=6,%k2=-2/3]]
(%i142) subst(%o141,%o134);
```

(%o142) $$\frac{y^2}{12} = x - \frac{2}{3}$$

```
(%i143) solve(%o142,y);
(%o143) [y=-2*sqrt(3*x-2),y=2*sqrt(3*x-2)]
(%i144) subst(9,x,%o143);
(%o144) [y=-10,y=10]
```

Do rovnice `(%134)` sme dosadili začiatočnú podmienku. Potom sme rovnicu `(%134)` zderivovali a do tejto rovnice sme dosadili hodnoty zo začiatočných podmienok (riadky 139–140). Získanú sústavu nelineárnych rovníc sme zadali do funkcie `algsys` a získali sme konštanty k_1 a k_2. Po ich dosadení do rovnice `(%134)` a jej opätovnom riešení vzhľadom na neznámu funkciu y sme získali riešenie (z dvoch riešení v riadku 143 len pravé vyhovuje začiatočnej podmienke). Nakoniec sme určili funkčnú hodnotu riešenia v bode $x = 9$.

Príklad 4.32 Určme riešenie diferenciálnej rovnice (4.10) vyhovujúce **okrajovým podmienkam** $y(1) = 2$ a $y(9) = 10$.

```
(%i145) bc2(%o134,x=1,y=2,x=9,y=10);
(%o145) y^2/12=x-2/3
```

Dostali sme rovnaké riešenie ako v riadku 142.

Poznámka 4.14 Príklady, ktoré sme teraz doriešili, nás vedú k záveru, že ani taký zaujímavý systém počítačovej algebry akým MAXIMA nesporne je, nie je bez chýb. Ako v mnohých ďalších oblastiach ľudskej činnosti, aj tu platí známe: „Dvakrát meraj a až potom rež!" – je dôležité naučiť sa overovať aj výsledky, ktoré nám prezentuje program. Najhoršie je, že program MAXIMA nás neupozornil na žiaden problém!

Na záver vyriešme nejaký typický školský príklad diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientmi.

Príklad 4.33 Určme riešenia diferenciálnej rovnice

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

vyhovujúce: a) začiatočným podmienkam $y_1(0) = -1$ a $y_1'(0) = 1$; b) okrajovým podmienkam $y_2(0) = -1$ a $y_2(\pi/4) = 0$.

```
(%i146) ode2(diff(y,x,2)+y=1/cos(x),y,x);
(%o146) y=cos(x)*log(cos(x))+x*sin(x)+%k1*sin(x)+%k2*cos(x)
(%i147) ic2(%146,x=0,y=-1,diff(y,x)=1);
(%o147) y=cos(x)*log(cos(x))+x*sin(x)+sin(x)-cos(x)
(%i148) bc2(%146,x=0,y=-1,x=%pi/4,y=0);
```

(%o148) $$y = \cos x \, \log \cos x + x \, \sin x + \frac{(2 \, \log 2 - \pi + 4) \, \sin x}{4} - \cos x$$

4.8.3 Riešenie sústav lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi

Pri zadaní sústavy lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi, ktorú sa chystáme riešiť pomocou funkcie `desolve`, musia byť funkcionálne vzťahy explicitne vyznačené (MAXIMA MANUAL, 2005, strana 211). Napríklad:

```
(%i149) dr1:'diff(f(x),x)='diff(g(x),x)+sin(x)$
(%i150) dr2:'diff(f(x),x)+x^2-f(x)=2*'diff(g(x),x);
(%i151) desolve([dr1,dr2],[f(x),g(x)]);
(%o151) [f(x)=sin(x)-cos(x)+(f(0)-1)*%e^(-x)+x^2-2*x+2,
          g(x)=sin(x)+(f(0)-1)*%e^(-x)+x^2-2*x+g(0)-f(0)+1]
(%i152) subst(-3,g(0),subst(2,f(0),%o151));
(%o152) [f(x)=sin(x)-cos(x)+%e^(-x)+x^2-2*x+2,
          g(x)=sin(x)+%e^(-x)+x^2-2*x-4]
```

Ak vynecháme apostrofy `'`, ktoré potláčajú vykonanie derivácie, nič zvláštneho sa nestane. Všimnite si, že vo výsledku sú nedefinované hodnoty $f(0)$ a $g(0)$. V príručkách (MAXIMA MANUAL, 2005; SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004) sa uvádza, že začiatočné hodnoty je možné zadať

1. len v bode $x = 0$,
2. len pred použitím funkcie `desolve` pomocou funkcie `atvalue`.

V riadku `152` sa nám podarila substitúcia za $f(0)$ a $g(0)$. Je ťažké povedať, čo je na nej nevyhovujúce.

Vyskúšajme príklad, uvedený v knižke (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004):

```
(%i153) atvalue(f(x),x=0,1)$
(%i154) atvalue(g(x),x=0,2)$
(%i155) atvalue(diff(g(x),x),x=0,3)$
(%i156) dr3:diff(f(x),x)=diff(g(x),x)+sin(x)$
(%i157) dr4:diff(g(x),x,2)=diff(f(x),x)-cos(x)$
(%i158) sol:desolve([dr3,dr4],[f(x),g(x)]);
(%o158) [f(x)=3*%e^x-2,g(x)=cos(x)+3*%e^x-2]
```

Zdá sa, že sme dospeli k podobnému výsledku, ako v predchádzajúcom príklade, kde sme vopred nepoužili príkaz `atvalue`. Nie je však jasné, ako by sa dala dosadiť napríklad hodnota $g'(0)$ pomocou príkazu `subst`. Po ďalšom overovaní sme zistili, že pomocou príkazu `atvalue` je nutné zadať len hodnoty potrebných derivácií v bode $x = 0$, funkčné hodnoty neznámych funkcií v bode $x = 0$ je možné dodať pomocou príkazu `subst` aj po vyriešení sústavy diferenciálnych rovníc.

Ako sa dostaneme ku funkciám $f(x)$ a $g(x)$? Nasledujúce riadky ukazujú, že tieto funkcie nie sú k dispozícii hneď po riešení sústavy. Je potrebné im priradiť výrazy na pravej strane rovností (%158). Ale aj po priradení sa funkcie správajú zvláštne, ako keby boli len výrazy (pozri riadok 164) – je možné ich derivovať, ale funkčné hodnoty získame len pomocou substitúcie:

```
(%i159) f(0);
(%o159) 1
(%i160) f(1);
(%o160) f(1)
(%i161) diff(f(x),x);
(%o161) 'diff(f(x),x,1)
(%i162) g(0);
(%o162) 2
(%i163) f(x):=last(sol[1])$
(%i164) f(1);
(%o164) 3*%e^x-2
(%i165) subst(1,x,f(x));
(%o165) 3*%e-2
(%i166) diff(f(x),x);
(%o166) 3*%e^x
(%i167) g(x):=last(sol[2])$
(%i168) diff(g(x),x,3);
(%o168) sin(x)+3*%e^x
(%i169) float(subst(3,x,g(x)));
(%o169) 57.26661827296256
```

```
(%i170) float(subst(3,x,diff(g(x),x)));
(%o170) 60.11549076150314
```

4.9 Laplaceova transformácia

MAXIMA ponúka výpočet Laplaceovej transformácie základných funkcií – `sin`, `cos`, `exp`, `sinh`, `cosh`, `log`, `delta` a `erf`. V porovnaní s programom Maple chýba napríklad Heavisideova funkcia, ako aj možnosť pracovať s funkciami, ktoré sú definované po častiach. V knihe (KREYSZIG a NORMINTON, 2006, strana 60) nájdete príklad takej funkcie a jej Laplaceovu transformáciu uskutočnenú programom Maple.

Pri výpočte Laplaceovej transformácie pracuje MAXIMA s deriváciami, integrálmi a súčtami. Popri funkcii `laplace` poskytuje funkciu `ilt` – inverznú Laplaceovu transformáciu.

Funkcia `laplace` rozozná konvolúciu v tvare

`integrate(f(x)*g(t-x),x,0,t)`

iné typy konvolúcie nerozozná (MAXIMA MANUAL, 2005).

Príklad 4.34 Určme Laplaceovu transformáciu posunutej Diracovej funkcie $\delta(x-a)$.

Riešenie. Použijeme príkaz `laplace`, všimnite si, že je potrebné zadať aj premenné pred a po transformácii:

```
(%i171) laplace(delta(t-a),t,p);
Is  a  positive, negative, or zero?
        negative;
(%o171) 0
(%i172) laplace(delta(t-a),t,p);
Is  a  positive, negative, or zero?
        zero;
(%o172) 1
(%i173) laplace(delta(t-a),t,p);
Is  a  positive, negative, or zero?
        positive;
(%o173) %e^(-a*p)
```

Príklad 4.35 Vypočítajme Laplaceovu transformáciu (Laplaceov obraz) funkcie

$$f(t) = t^2 \cdot \sin(3t) \cdot \cos(4t) \cdot \mathrm{e}^{-5t}.$$

```
(%i174) laplace(t^2*sin(3*t)*cos(4*t)*exp(-5*t),t,s);
(%o174) 6/(s^4+20*s^3+200*s^2+1000*s+1924)-
(2*(6*s+30)*(4*s^3+60*s^2+400*s+1000))/(s^4+20*s^3+200*s^2+1000*s+1924)^2-
((3*s^2+30*s+54)*(12*s^2+120*s+400))/(s^4+20*s^3+200*s^2+1000*s+1924)^2+
(2*(3*s^2+30*s+54)*(4*s^3+60*s^2+400*s+1000)^2)
                                        /(s^4+20*s^3+200*s^2+1000*s+1924)^3
```

alebo

(%o174)
$$\frac{6}{s^4+20\,s^3+200\,s^2+1000\,s+1924}-\frac{2\,(6\,s+30)\,\left(4\,s^3+60\,s^2+400\,s+1000\right)}{\left(s^4+20\,s^3+200\,s^2+1000\,s+1924\right)^2}-\frac{\left(3\,s^2+30\,s+54\right)\,\left(12\,s^2+120\,s+400\right)}{\left(s^4+20\,s^3+200\,s^2+1000\,s+1924\right)^2}+\frac{2\,\left(3\,s^2+30\,s+54\right)\,\left(4\,s^3+60\,s^2+400\,s+1000\right)^2}{\left(s^4+20\,s^3+200\,s^2+1000\,s+1924\right)^3}$$

Príklad 4.36 Určme spätnú Laplaceovu transformáciu (predmet) pre funkciu
$$F(s)=\frac{s-5}{s^2+4\,s+20}.$$

```
(%i175) ilt((s-5)/(s^2+4*s+20),s,t);
```

(%o175)
$$e^{-2\,t}\,\left(\cos\left(4\,t\right)-\frac{7\,\sin\left(4\,t\right)}{4}\right)$$

Príklad 4.37 Nech $f(t)=t^2$ a $g(t)=\sin(3t)$. Vypočítajme Laplaceov obraz funkcie $\int_0^t f(x)\cdot g(t-x)\,\mathrm{d}x$ a overme platnosť vety o konvolúcii.

```
(%i176) f(t):=t^2$
(%i177) g(t):=sin(3*t)$
(%i178) F(p):=laplace(f(t),t,p)$
(%i179) G(p):=laplace(g(t),t,p)$
(%i180) laplace(integrate(f(x)*g(t-x),x,0,t),t,p);
Is  t  positive, negative, or zero?
```

```
        positive;
Is  cos(3*t)  positive, negative, or zero?
        zero;
Is  sin(3*t)  positive, negative, or zero?
        negative;
```

(%o180) $$\frac{2\,p}{27\,\left(p^2+9\right)}+\frac{\frac{18}{p^3}-\frac{2}{p}}{27}$$

```
(%i181) F(p);
(%o181) 2/p^3
(%i182) G(p);
(%o182) 3/(p^2+9)
(%i183) F(p)*G(p);
(%o183) 6/(p^3*(p^2+9))
(%i184) radcan(%o180-%o183);
(%o184) 0
```

Program MAXIMA nereaguje na odpovede na otázky, ktoré sám zadával v riadku 180.

Príklad 4.38 Zobrazme vzorec Laplaceovej transformácie tretej derivácie funkcie $h(x)$.

```
(%i185) laplace(diff(h(x),x,3),x,s);
(%o185)
```

$$-\left.\frac{d^2}{d\,x^2}\,h\left(x\right)\right|_{x=0}-s\,\left(\left.\frac{d}{d\,x}\,h\left(x\right)\right|_{x=0}\right)+s^3\,\mathcal{L}\left(h\left(x\right),x,s\right)-h\left(0\right)\,s^2$$

5 Riešenie algebrických úloh

V tejto kapitole uvedieme niektoré metódy riešenia rôznych algebrických úloh. Začneme úpravou polynómov a racionálnych funkcií, ďalej prejdeme na matice a úlohy lineárnej algebry a na záver sa budeme venovať riešeniu rôznych typov rovníc a ich sústav. S týmito úlohami je možné stretnúť sa v každodennom živote ako na vysokej škole, tak aj v praxi.

5.1 Mnohočleny

Podrobný popis funkcií na prácu s mnohočlenmi (polynómami) nájdete v knižke (MAXIMA MANUAL, 2005), množstvo informácií získate ako obyčajne použitím príkazov `apropos`, `describe` a `example`, prípadne z položky menu `Help`.

Zadefinujme polynóm pomocou jeho rozkladu na súčin koreňových činiteľov, roznásobme členy a určme spätne rozklad na súčin koreňových činiteľov:

```
(%i1) p:(x+3)^2*(x-2)*3*(3*x+2);
(%o1) 3*(x-2)*(x+3)^2*(3*x+2)
(%i2) pe:expand(p);
(%o2) 9*x^4+42*x^3-3*x^2-180*x-108
(%i3) q:factor(pe);
(%o3) 3*(x-2)*(x+3)^2*(3*x+2)
```

V tomto prípade si SPA MAXIMA poradil s danou úlohou bez problémov.

Koeficienty polynómu pri jednotlivých mocninách zadanej premennej získame príkazom `coeff(p,x,n)`. Napríklad:

```
(%i4) c3:coeff(p,x,3);
(%o4) 0
(%i5) c3:coeff(pe,x,3);
(%o5) 42
(%i6) q:expand((x^2+x*y+3*y^2+7)^3);
(%o6) 27*y^6+27*x*y^5+36*x^2*y^4+189*y^4+19*x^3*y^3+
      126*x*y^3+12*x^4*y^2+147*x^2*y^2+441*y^2+3*x^5*y+
      42*x^3*y+147*x*y+x^6+21*x^4+147*x^2+343
(%i7) coeff(q,y,3);
(%o7) 19*x^3+126*x
```

Zdá sa, že polynóm musí byť v rozvinutom (expandovanom) tvare, aby sme sa dostali k jeho koeficientom. MAXIMA nerobí rozdiely medzi rôznymi premennými, ako sa o tom môžeme presvedčiť v riadku 7, kde sme požiadali o koeficient pri 3. mocnine premennej y.

V niektorých situáciách sa zíde funkcia na výpočet podielu dvoch polynómov. Funkcia `divide` má na vstupe dva polynómy (delenec a deliteľ), na výstupe vracia dvojprvkový zoznam (podiel polynómov a zvyšok):

```
(%i8) divide(p,x^2+x-6,x);
(%o8) [9*x^2+33*x+18,0]
(%i9) factor(%o8[1]);
(%o9) 3*(x+3)*(3*x+2)
(%i10) divide(p,x^2-x-6,x);
(%o10) [9*x^2+51*x+102,228*x+504]
(%i11) (x^2-x-6)*%o8[1]+%o8[2];
(%o11) (x^2-x-6)*(9*x^2+51*x+102)+228*x+504
(%i12) ratsimp(%);
(%o12) 9*x^4+42*x^3-3*x^2-180*x-108(%i11)
```

V riadku (`%i8`) sme delili zadaný polynóm p súčinom jeho dvoch koreňových činiteľov $(x-2)(x+3) = x^2+x-6$. Delenie teda logicky skončilo bez zvyšku. V riadku 10 už deliteľ nebol súčinom koreňových činiteľov, a tak sa v odpovedi okrem podielu objavil aj zvyšok $228\,x+504$. Roznásobením (všimnite si, ako sme sa dostali ku jednotlivým zložkám zoznamu – anglicky list – odpovede `%o8`) v riadkoch 11–12 sme overili správnosť výsledku delenia. V tomto prípade sme namiesto príkazu `expand`, použili príkaz `ratsimp` (z anglického rational simplification – racionálne zjednodušenie) s rovnakým výsledkom.

Pozrime sa, ako dokáže MAXIMA riešiť algebrické rovnice:

```
(%i13) p:x^3+x^2+2;
(%o13) x^3+x^2+2
(%i14) factor(p);
(%o14) x^3+x^2+2
(%i15) solve(p);
(%o15) [x=((sqrt(3)*%i)/2-1/2)/(9*(3^(-3/2)*sqrt(29)-28/27)^(1/3))+
         (3^(-3/2)*sqrt(29)-28/27)^(1/3)*(-(sqrt(3)*%i)/2-1/2)-1/3,
        x=(3^(-3/2)*sqrt(29)-28/27)^(1/3)*((sqrt(3)*%i)/2-1/2)+
         (-(sqrt(3)*%i)/2-1/2)/(9*(3^(-3/2)*sqrt(29)-28/27)^(1/3))-1/3,
        x=(3^(-3/2)*sqrt(29)-28/27)^(1/3)+
         1/(9*(3^(-3/2)*sqrt(29)-28/27)^(1/3))-1/3]
```

```
(%i16) ev(bfloat(rectform(%o20)),fpprec=5);
(%o16) [x=1.0276b0*%i+3.4716b-1,x=-1.6943b0,x=3.4716b-1-1.0276b0*%i]
(%i17) ev(bfloat(rectform(solve(x^4+x+1))),fpprec=6);
(%o17) [x=-4.30014b-1*%i-7.27136b-1,x=4.30014b-1*%i-7.27136b-1,
        x=9.34099b-1*%i+7.26737b-1,x=7.27535b-1-9.34099b-1*%i]
(%i18) ev(bfloat(rectform(solve(x^5+x^2+1))),fpprec=6);
(%o18) [0.0b0=x^5+x^2+1.0b0]
(%i19) ev(bfloat(allroots(x^5+x^2+1)),fpprec=4);
Warning:  Float to bigfloat conversion of 0.75151923237895168
...
Warning:  Float to bigfloat conversion of -1.1938591113212367
(%o19) [x=7.846b-1*%i+7.515b-1,x=7.515b-1-7.846b-1*%i,
        x=8.281b-1*%i-1.546b-1,x=-8.281b-1*%i-1.546b-1,x=-1.194b0]
(%i20) ev(bfloat(realroots(x^5+x^2+1)),fpprec=5,realonly=true);
(%o20) [x=-1.1939b0]
```

Vidíme, že funkcia `factor` neslúži na určovanie všeobecných koreňov algebrických rovníc. V tomto prípade sme použili funkciu `solve`. Táto dokáže riešiť rovnice tretieho aj štvrtého rádu (výsledok v prípade polynómu $x^4 + x + 4$ sme radšej nevypísali), MAXIMA zrejme pozná Cardanove i Ferrariho vzorce. V prípade rovnice 5. stupňa sme sa už presné riešenie samozrejme nedozvedeli. Numerické riešenie algebrických rovníc však umožňujú funkcie `allroots` a `realroots`.[39]

Na záver tohoto oddielu uveďme ešte jednu ukážku použitia funkcií `expand` a `factor`, ktorá svedčí o tom, že ako „premenná" polynómu môže vystupovať, napríklad, aj funkcia sínus:

```
(%i21) p:((sin(x))^3+8)*((sin(x))^2+4*sin(x)+4)$
(%i22) expand(p);
(%o22) sin(x)^5+4*sin(x)^4+4*sin(x)^3+8*sin(x)^2+32*sin(x)+32
(%i23) factor(%);
(%o23) (sin(x)+2)^3*(sin(x)^2-2*sin(x)+4)
```

5.2 Racionálne funkcie

Z oblasti racionálnych funkcií uveďme len jeden príklad rozkladu racionálnej funkcie (podielu dvoch polynómov) na súčet polynómu a parciálnych zlomkov. Riešenie tejto úlohy sa využíva pri integrovaní racionál-

[39]Treba povedať, že na numerické riešenie algebrických rovníc je lepšie použiť MATLAB, Pylab, Scilab alebo Octave, ktoré majú funkciu `roots`. Pozri učebnice (KAUKIČ, 2006; PRIBIŠ, 2006; BUŠA, 2006).

nych funkcií alebo pri výpočte spätnej Laplaceovej transformácie. MAXIMA poskytuje viaceré funkcie na prácu s racionálnymi funkciami, vrátane Padeho aproximácie.

```
(%i24) q:(x^2+4*x+8)^2*(x-3)^2*(x+5)$
(%i25) expand(q);
(%o25) x^7+7*x^6+3*x^5-91*x^4-312*x^3+32*x^2+1536*x+2880
(%i26) r:(3*x^8-4*x^7+6*x^5+2*x+1)/(%o25);
```

(%o26) $$\frac{3x^8-4x^7+6x^5+2x+1}{x^7+7x^6+3x^5-91x^4-312x^3+32x^2+1536x+2880}$$

Niekedy je potrebné získať menovateľa alebo čitateľa (anglicky denominator resp. numerator) zlomku. V takom prípade je možné použiť funkcie `denom` resp. `num`:

```
(%i27) denom(r);
(%o27) x^7+7*x^6+3*x^5-91*x^4-312*x^3+32*x^2+1536*x+2880
(%i28) num(r);
(%o28) 3*x^8-4*x^7+6*x^5+2*x+1
(%i29) gfactorsum(r);
```

(%o29) $$\frac{(x+1)\left(3x^7-7x^6+7x^5-x^4+x^3-x^2+x+1\right)}{(x-3)^2\,(x+5)\,(x-2i+2)^2\,(x+2i+2)^2}$$

Funkcia `factorum` resp. funkcia `factor` sa dá použiť nielen na rozklad polynómov na súčin činiteľov, ale aj pre racionálnu funkciu (a iné). Funkcie `gfactorum` resp. `gfactor` vykonajú rozklad nad poľom komplexných čísel.

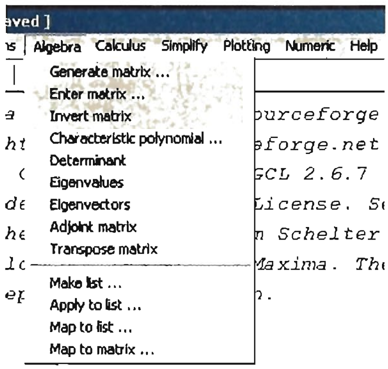
Na záver rozložme racionálnu funkciu na súčet polynómu a parciálnych zlomkov nad poľom reálnych čísel. V prostredí WXMAXIMA túto funkciu nájdete tiež v položke menu `Calculus`:

```
(%i30) partfrac(r, x);
```

(%o30) $$\frac{110742914\,x-147276320}{4121741\,(x^2+4x+8)}+\frac{325939\,x+2358249}{10933\,(x^2+4x+8)^2}+$$
$$\frac{91601}{676\,(x+5)}+3x+\frac{353891}{97556\,(x-3)}+\frac{1550}{841\,(x-3)^2}-25$$

5.3 Maticová algebra

Na obrázku 17 vidíte položky, ktoré poskytujú rôzne maticové funkcie, od zadávania matíc až po určovanie vlastných hodnôt a vlastných vektorov matíc.



Obr. 17: Položka menu `Algebra`

Ako sme už písali vyššie, na prácu s maticami a na riešenie úloh lineárnej algebry je možné odporučiť programy MATLAB, Pylab, Scilab alebo Octave (KAUKIČ, 2006; PRIBIŠ, 2006; BUŠA, 2006) – posledné tri menované patria medzi programy s otvoreným zdrojovým kódom a je možné ich bezplatne získať z internetu. Ich popis nájdete na adrese `http://people.tuke.sk/jan.busa/kega/`. Tieto programy pracujú s maticami ako so svojimi základnými objektami a poskytujú funkcie založené na algoritmoch overených dlhoročným používaním. Z tohoto dôvodu popíšeme maticové funkcie programu MAXIMA len čiastočne a navyše iba stručne. Na druhej strane MAXIMA umožňuje riešiť tieto úlohy so symbolickými maticami. Táto črta môže byť využitá napríklad pri výučbe lineárnej algebry.

5.3.1 Vytváranie matíc

Na zadanie matíc používame príkaz `matrix`. V prostredí WXMAXIMA môžete na pohodlné zadávanie prvkov matice použiť položku menu `Algebra/Enter Matrix`. Prvky matíc sa zadávajú po riadkoch:

```
(%i31) A:matrix([1,-2], [a,4]);
```

(%o31) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & 4 \end{pmatrix}$$

```
(%i32) B:matrix([1,-2,3], [-4,b,6]);
```

(%o32) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & b & 6 \end{pmatrix}$$

5.3.2 Maticové operácie

Ako príklad uvedieme len súčin matíc. Ak ho zadáme tak, ako sme zvyknutí z iných programov, dočkáme sa nasledujúceho prekvapenia:

```
(%i33) A*B;
'fullmap' found arguments with incompatible structure.
-- an error.  Quitting.  To debug this try debugmode(true);
```

Operátor $*$ sa totiž používa na tzv. zložkové násobenie dvoch matíc rovnakého rozmeru $m \times n$, keď sa operácia násobenia vykoná postupne pre všetky prvky na odpovedúcich pozíciách.[40] Znakom násobenia je v SPA MAXIMA **bodka** .:

```
(%i34) A.B;
```

(%o34) $$\begin{pmatrix} 9 & -2b-a & -9 \\ a-16 & 4b-2a & 3a+24 \end{pmatrix}$$

```
(%i35) A*A;
(%o35) matrix([1,4],[a^2,16])
(%i36) A.A;
(%o36) matrix([1-2a,-10],[5a,16-2a])
```

5.3.3 Maticové funkcie

Medzi základné maticové funkcie patria: determinant, hodnosť (anglicky rank), transponovanie a inverzná matica:

```
(%i37) C:matrix([a,b],[c,d]);
```

[40] V MATLABe sa na takéto „zložkové" násobenie matíc používa „bodkový" operátor `A.*B`.

(%o37)
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

```
(%i38) determinant(C);
(%o38) a*d-b*c
(%i39) rank(A);
(%o39) 2
(%i40) transpose(A);
(%o40) matrix([1,a],[-2,4])
(%i41) inverse(C);
```

(%o41)
$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Ďalej sa využíva charakteristický polynóm štvorcovej matice A, definovaný ako determinant matice $A - r \cdot I$, kde r je premenná charakteristického polynómu a I je jednotková matica (anglicky identity matrix).

```
(%i42) charpoly(A, r), expand;
(%o42) r^2-5*r+2*a+4
(%i43) I:ident(2);
(%o43) matrix([1,0],[0,1])
(%i44) determinant(A-r*I);
(%o44) (1-r)*(4-r)+2*a
(%i45) ratsimp(%);
(%o45) r^2-5*r+2*a+4
```

Vidíme, že sme dostali rovnaký výsledok.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory (anglicky eigenvalues a eigenvectors) **symbolickej** matice vypočítame nasledujúcim spôsobom:

```
(%i46) eigenvalues(A);
```

(%o46)
$$\left[\left[-\frac{\sqrt{9-8a}-5}{2}, \frac{\sqrt{9-8a}+5}{2}\right], [1,1]\right]$$

```
(%i47) eigenvectors(A);
```

(%o47)
$$\left[\left[\left[-\frac{\sqrt{9-8a}-5}{2}, \frac{\sqrt{9-8a}+5}{2}\right], [1,1]\right], \left[1, \frac{\sqrt{9-8a}-3}{4}\right], \left[1, -\frac{\sqrt{9-8a}+3}{4}\right]\right]$$

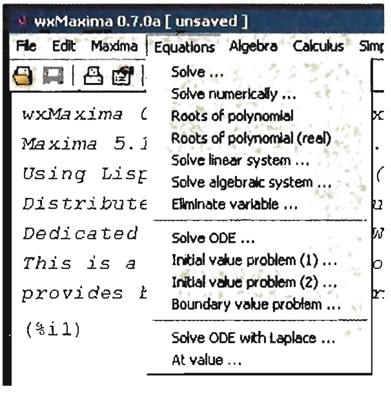
Funkcia `eigenvalues` vráti dva zoznamy. Prvý obsahuje vlastné hodnoty matice a druhý ich násobnosti. Na prvý pohľad zbadáme, že funkcia `eigenvectors` vráti zoznam, obsahujúci vlastné čísla, ich násobnosti a vlastné vektory matice. V prípade násobných vlastných čísel sa počet vlastných vektorov môže zmenšiť:

```
(%i48) eigenvectors(matrix([3,0],[0,3]));
(%o48) [[[3],[2]],[1,0],[0,1]]
(%i49) eigenvectors(matrix([3,-2],[0,3]));
(%o49) [[[3],[2]],[1,0]]
```

V obidvoch prípadoch má matica dvojnásobnú vlastnú hodnotu 3, ale v druhom prípade má len jeden vlastný vektor.

5.4 Riešenie lineárnych a nelineárnych (algebrických) rovníc a sústav

V niekoľkých nasledujúcich oddieloch popíšeme stručne možnosti riešenia sústav rovníc. V prostredí WXMAXIMA tieto možnosti môžeme skúmať použitím podpoložiek menu položky `Equations`, zobrazenej na nasledujúcom obrázku 18.



Obr. 18: Položka menu `Equations`

V tejto učebnici sme sa už na viacerých miestach stretli s použitím funkcií `solve` a `algsys`.

5.4.1 Funkcia `solve`

Po zadaní príkazu `describe(solve)` a použití voľby

```
12: solve :Definitions for Equations
```

sa dozvedáme:

> Funckia solve(<výraz>,<x>) rieši algebrickú rovnicu <výraz> s neznámou <x> a vracia zoznam riešení tejto rovnice. Ak <výraz> nie je rovnica, predpokladá sa rovnica „<výraz>=0“. <x> môže byť aj funkcia (napríklad „f(x)“) alebo nejaký iný (neatomárny) výraz s výnimkou súčtu alebo súčinu. Ak <výraz> obsahuje len jednu premennú, <x> nie je potrebné zadávať. <výraz> môže byť racionálny a môže obsahovať trigonometrické funkcie, exponenty atď. ...
>
> Funkcie solve([<r_1>, ..., <r_n>],[<x_1>, ..., <x_n>]) rieši sústavu (lineárnych alebo nelineárnych) algebrických rovníc volaním funkcie linsolve alebo algsys. ...

Zvedavému čitateľovi odporúčame podrobne sa oboznámiť s úplným znením výpisu príkazu `describe(solve)`.

Nasledujúci príklad svedčí o tom, že funkcia `solve` si poradí aj s ďalšími typmi rovníc:

```
(%i50) solve(sin(x)=1/2);
'solve' is using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.
(%o50) [x=%pi/6]
```

V tomto prípade nás SPA MAXIMA upozornil, aby sme sa zamysleli nad ďalšími možnými riešeniami danej rovnice.

5.4.2 Riešenie sústav lineárnych algebrických rovníc pomocou funkcie `linsolve`

Na riešenie sústav lineárnych algebrických rovníc slúži funkcia `linsolve`:

```
(%i51) linsolve([x+y=2, x+y=3], [x,y]);
Inconsistent equations:  (2)
-- an error.  Quitting.  To debug this try debugmode(true);
(%i52) linsolve([x+y=2, 2*x+2*y=4], [x,y]);
Dependent equations eliminated:  (2)
(%o52) [x=2-%r1,y=%r1]
```

Vidíme, že program MAXIMA si poradil s problematickými sústavami.
Riešenie symbolických rovníc je samozrejmosťou:

```
(%i53) linsolve([a*x+y=2, (2-a)*x+a*y=4], [x,y]);
```
(%o53) $$\left[x = \frac{2a-4}{a^2+a-2}, y = \frac{6a-4}{a^2+a-2}\right]$$

```
(%i54) subst(-2,a,%i53);
(%o54) linsolve([y-2*x=2,4*x-2*y=4],[x,y])
(%i55) subst(-2,a,%o53);
Division by 0
-- an error.  Quitting.  To debug this try debugmode(true);
(%i56) subst(2,a,%i53);
(%o56) linsolve([y+2*x=2,2*y=4],[x,y])
(%i57) subst(2,a,%o53);
(%o57) [x=0,y=2]
```

Aj v tomto prípade môžeme byť spokojní s riešením programu MAXIMA.

5.4.3 Funkcia `algsys`

Funckia `algsys([<r_1>,..., <r_m>],[<x_1>, ..., <x_n>])` rieši (najmä) sústavy algebrických rovníc, ktoré majú tvar mnohočlenov obsahujúcich súčiny rôznych mocnín neznámych.

Aj v tomto prípade je potrebné dávať si pozor, pretože výsledok nemusí byť vždy taký, ako by sme očakávali. Napríklad nasledujúca sústava má nekonečne veľa riešení, ale MAXIMA vydá len dve z nich:

```
(%i58) algsys([x^2-y^2=0,(x+2)*sin(y)=0],[x,y]);
(%o58) [[x=-2,y=2],[x=-2,y=-2]]
```

Ako používatelia SPA MAXIMA na úrovni začiatočníka môžeme len hádať, prečo sa program nevenoval „jasnej" možnosti $\sin(y) = 0$.

5.4.4 Numerické riešenie rovníc pomocou funkcie `find_root`

Príklad 5.39 Určme numerické (približné) riešenie rovnice $\cos(x) = x$.

Riešenie. Ak načrtneme grafy funkcií $y = \cos(x)$ a $y = x$ uvidíme, že tieto majú jediný priesečník, ktorý sa nachádza na intervale $\langle 0, \pi/2 \rangle$. Určíme ho príkazom:

```
(%i59) find_root(cos(x)=x, x, 0, 5pi/2);
(%o59) 0.73908513321516
```

Podmienky použitia tejto funkcie si naštudujte samostatne.

6 Štatistické funkcie

MAXIMA poskytuje aj najdôležitejšie štatistické funkcie, žiaľ, v uvedenej literatúre chýba ich systematický opis. Preto ich uvedieme len stručne.

Začneme načítaním balíka `distrib`, ktorý nájdete v podpriečinku `share/contrib/distrib`:[41]

```
(%i1) load(distrib)$
(%o1) .../maxima/5.10.0/share/contrib/distrib/distrib.mac
```

Na prvé (a teda povrchné) oboznámenie sa s obsahom balíka môžeme použiť príkaz `apropos`:[42]

```
(%i2) apropos(cdf);(%o2) [cdf,cdf_bernoulli,cdf_beta,
cdf_binomial,cdf_cauchy,cdf_chi2,cdf_continuous_uniform,
cdf_discrete_uniform,cdf_exp,cdf_f,cdf_gamma,cdf_geometric,
cdf_gumbel,cdf_hypergeometric,cdf_laplace,cdf_logistic,
cdf_lognormal,cdf_negative_binomial,cdf_normal,cdf_pareto,
cdf_poisson,cdf_rayleigh,cdf_student_t,cdf_weibull]
(%i3) apropos(pdf);
(%o3) [pdf,pdf_bernoulli,pdf_beta,pdf_binomial,pdf_cauchy,
pdf_chi2,pdf_continuous_uniform,pdf_discrete_uniform,pdf_exp,
pdf_f,pdf_gamma,pdf_geometric,pdf_gumbel,pdf_hypergeometric,
pdf_laplace,pdf_logistic,pdf_lognormal,pdf_negative_binomial,
pdf_normal,pdf_pareto,pdf_poisson,pdf_rayleigh,pdf_student_t,
pdf_weibull]
```

Teda balíček `distrib` poskytuje distribučné funkcie (`cdf`) a funkcie rozdelenia pravdepodobnosti alebo jej hustoty (pdf – z anglického probability density function) pre všetky najčastejšie používané rozdelenia.

Pozrime sa, napríklad, na opis distribučnej funkcie normálneho rozdelenia (`cdf_normal`):

```
(%i4) describe(cdf_normal)$
-- Function: cdf_normal (<x>,<m>,<s>)
Returns the value at <x> of the distribution function of a
Normal(m,s) random variable, with s>0. This function is
```

[41] V podpriečinkoch `share` resp. `share/contrib` nájdete ďalšie užitočné balíky, ktoré ešte len čakajú na opis v uvedeých učebniciach.

[42] Vieme, že v MATLABe sa distribučná funkcia (anglicky cumulative density function) nazýva `menocdf`.

```
defined in terms of Maxima's built-in error function `erf'.
          (%i1) load (distrib)$
          (%i2) assume(s>0)$ cdf_normal(x,m,s);
                                        x - m
                                    erf(---------)
                                        sqrt(2) s     1
          (%o3)                     -------------- + -
                                          2          2
See also `erf'.
```

Vstupy tejto funkcie sú teda štandardné – hodnota x, stredná hodnota m a smerodajná odchýlka s. Vyskúšajme ju:

```
(%i5) cdf_normal(3*2,0,2);
```

(%o5) $$\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}{2}+\frac{1}{2}$$

```
(%i6) float(%);
(%o6) 0.99865010196837
```

Dostali sme najprv výsledok v tvare chybovej funkcie, v podstate nepoužiteľný. Našťastie v tomto prípade nebol problém získať jeho numerickú hodnotu a overiť, že výsledok je taký, aký sme očakávali.

Aj keď balíček neobsahuje špeciálne funkcie na testovanie štatistických hypotéz, rozhodujúca je predsa len dostupnosť distribučných funcií. Tieto môžeme použiť na určenie kritických hodnôt pre jednotlivé testy.

7 Tvorba grafov

V predošlých častiach sme na dvoch príkladoch ukázali, ako MAXIMA v spolupráci s externým programom Gnuplot, vytvorí zobrazenie dvoj- a trojrozmerných plôch (grafov funkcií jednej a dvoch premenných). V knihe The MAXIMA book (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004) nájdete ďalšie pekné obrázky, rovnako ako aj inde – napríklad (STOPKA, 2006) alebo na stránke `maxima-gnuplot`. Ďalej len opíšeme voľby príkazu `plot`.

7.1 Voľby príkazov `plot`

Tento oddiel je úplne prevzatý z knihy The MAXIMA book (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004).

MAXIMA definuje zoznam, ktorý sa nazýva `PLOT_OPTIONS` a ktorý riadi podstatnú časť správania sa grafických možností SPA MAXIMA. Existujú dve cesty nastavenia týchto volieb – jednotlivú voľbu môžete nastaviť globálne použitím príkazu `SET_PLOT_OPTION`, alebo môžete voľbu zadať ako argument príkazu `plot`. Ak chcete zistiť aktuálne globálne nastavenia,[43] stačí napísať `PLOT_OPTIONS;` a vypíše sa Vám stav systému.

```
(%i1) PLOT_OPTIONS;
(%o1) [[x, -3, 3], [y, - 3, 3], [t, - 3, 3], [GRID, 30, 30],
[VIEW_DIRECTION, 1, 1, 1], [COLOUR_Z, FALSE], [TRANSFORM_XY,
FALSE], [RUN_VIEWER, TRUE], [PLOT_FORMAT, GNUPLOT],
[GNUPLOT_TERM, DEFAULT], [GNUPLOT_OUT_FILE, FALSE],
[NTICKS, 10], [ADAPT_DEPTH, 10], [GNUPLOT_PM3D, FALSE],
[GNUPLOT_PREAMBLE, ], [GNUPLOT_CURVE_TITLES, [DEFAULT]],
[GNUPLOT_CURVE_STYLES, [with lines 3, with lines 1, with
lines 2, with lines 5, with lines 4, with lines 6, with
lines 7]], [GNUPLOT_DEFAULT_TERM_COMMAND, ],
[GNUPLOT_DUMB_TERM_COMMAND, set term dumb 79 22],
[GNUPLOT_PS_TERM_COMMAND, set size 1.5, 1.5;
set term postscript eps enhanced color solid 24]]
```

OK, pozrime sa na každú z týchto volieb.

`[x, - 3, 3]` – toto definuje oblasť hodnôt premennej X. Na globálnu zmenu použite príkaz v tvare `SET_PLOT_OPTION([x,-5,5]);`

`[y, - 3, 3]` – toto definuje oblasť hodnôt premennej Y. Na globálnu zmenu použite príkaz v tvare `SET_PLOT_OPTION([y,-5,5]);`

`[t, - 3, 3]` - t implicitne nastavená premenná v grafoch parametricky zadaných funkcií. Na globálnu zmenu použite príkaz v tvare `SET_PLOT_OPTION([t,-5,5]);`

[43] Globálne nastavenia sú platné len pre práve spustený režim programu MAXIMA.

[GRID, 30, 30] – voľba v prípade 3D grafov riadi počet bodov použitých na nakreslenie obrázku. Funkčné hodnoty sú počítané len v určitých bodoch, v ostatných sa používa lineárna aproximácia. Na globálnu zmenu použite príkaz v tvare
SET_PLOT_OPTION([GRID,40, 35]);

[VIEW_DIRECTION, 1, 1, 1] – táto voľba sa týka prípadu, keď sa príkaz plot používa na výstup priamo do postscriptu v 3D (viď PLOT_FORMAT). Určuje, z ktorého bodu sa „kamera" pozerá na graf funkcie, pozdĺž priamky paralelnej spojnici VIEW_DIRECTION a počiatku. V ostatných príkazoch sa ignoruje. Na globálnu zmenu použite príkaz v tvare
SET_PLOT_OPTION([VIEW_DIRECTION,1.4,1.4, 1.4]);

[COLOUR_Z, FALSE] – táto voľba sa tiež týka výstupu do postscriptu – ak je nastavená na TRUE, zabezpečí jemné farebné tieňovanie na výstupe.
Tvar je SET_PLOT_OPTION([COLOUR_Z, TRUE]);

[TRANSFORM_XY, FALSE] – voľba sa týka možnosti vytvárania grafov v rôznych súradnicových systémoch, ale nie som si istý, ako to funguje. Tu potrebujem pomoc.

[RUN_VIEWER, TRUE] – ak si prajete len výstup do súboru bez spustenia grafického okna, nastavte túto voľbu na FALSE. Avšak zapamätajte si, že ak budete potrebovať zadať násobné príkazy na vygenerovanie dát, budete zakaždým musieť obnoviť informáciu zo súboru maxout.PLOT_FORMAT, pretože každý nový príkaz plot ju prepíše. Tvar je SET_PLOT_OPTION([RUN_VIEWER, FALSE]);

[PLOT_FORMAT, GNUPLOT] – voľba určuje program, ktorý zobrazí výstup programu MAXIMA. Momentálne sú možné nasledujúce voľby – GNUPLOT, OPENMATH, MGNUPLOT, GEOMVIEW a PS. PS je jednoducho priamy výstup do postscriptového súboru maxout.ps.
Tvar je SET_PLOT_OPTION([PLOT_FORMAT, GEOMVIEW]); MGNUPLOT je interface ku GNUPLOTu (dodaný s programom MAXIMA), ktorý poskytuje základné prostredie GUI, ale je málo rozvinuté. Všetky tieto programy sú voľne dostupné. Geomview je momentálne len pre Unix, dostupný na http://geomview.sourceforge.net (zdrojáky aj binárky). Openmath je súčasťou distribúcie SPA MAXIMA. Gnuplot je široko dostupný, jeho domovská stránka je http://www.gnuplot.info a aktuálna verzia na stránke http://sourceforge.net/projects/gnuplot. Môže bežať v obidvoch operačných systémoch Windows a Linux a momentálne je implicitne nastavený.

[GNUPLOT_TERM, DEFAULT] – táto voľba sa týka formátu gnuplot. Nastavuje typ výstupného terminálu (zariadenia) pre Gnuplot. Voľby sú — DEFAULT: osobitné grafické okno, DUMB – vytvorí ASCII approximáciu grafu a PS – použite túto voľbu spoločne s GNUPLOT_OUT_FILE ak potrebujete zapísať výstup Gnuplotu do postscriptového súboru namiesto na obrazovku. Tvar je SET_PLOT_OPTION([GNUPLOT_TERM, PS]);

[GNUPLOT_OUT_FILE, FALSE] – táto voľba sa týka formátu gnuplot. Používa sa na nastavenie názvu výstupného súboru.
Tvar je SET_PLOT_OPTION([GNUPLOT_OUT_FILE, "myplot.ps"]);

[NTICKS, 10] – riadi začiatočný počet bodov použitých pre adaptívnu postup kreslenia. Tvar je SET_PLOT_OPTION([NTICKS, 200]);

[ADAPT_DEPTH, 10] – riadi maximálny počet delení pri adaptívnom režime kreslenia. Tvar je SET_PLOT_OPTION([ADAPT_DEPTH, 5]);

[GNUPLOT_PM3D, FALSE] – táto voľba sa týka formátu gnuplot. Riadi použitie režimu PM3D, ktorý má doplnkové 3D črty. PM3D je súčasťou gnuplotu od verzie 3.7. Tvar je SET_PLOT_OPTION([GNUPLOT_PM3D, TRUE]);

[GNUPLOT_PREAMBLE,] – táto voľba sa týka formátu gnuplot. Vkladá príkazy Gnuplotu pred nakreslením grafu. Môže byť použitý ľubovoľný platný príkaz Gnuplotu. Príkazy musia byť oddelené bodkočiarkou. Môžu byť nastavené ja voľby, ktoré nedokáže nastaviť MAXIMA.
Tvar je SET_PLOT_OPTION([GNUPLOT_PREAMBLE, "set log y; set log x"]);

[GNUPLOT_CURVE_TITLES, [DEFAULT]] – táto voľba sa týka formátu gnuplot. Riadi výpisy zadané v legende grafu. Implicitná hodnota je DEFAULT. Automaticky pridáva názov pre každú kreslenú krivku. V prípadoch iných ako DEFAULT, musí GNUPLOT_CURVE_TITLES obsahovať zoznam reťazcov. (Na vypnutie legendy pridajte voľbu "set nokey" do GNUPLOT_PREAMBLE.)
Tvar je SET_PLOT_OPTION([GNUPLOT_CURVE_TITLES, ["my first function","my second function"]]);

[GNUPLOT_CURVE_STYLES ,[with lines 3, with lines 1, with lines 2, with lines 5, with lines 4, with lines 6, with lines 7]] – táto voľba sa týka formátu gnuplot. Je to zoznam reťazcov, určujúcich vlastnosti kriviek, to znamená farbu, šírku, prerušovanie čiar a pod., ktorý sa pošle do príkazu Gnuplotu. Na ďalšiu informáciu pozri dokumentáciu gnuplotu pre "plot".
Tvar je SET_PLOT_OPTION([GNUPLOT_CURVE_STYLES, ["with lines 7", "with lines 2"]]);

[GNUPLOT_DEFAULT_TERM_COMMAND,] – táto voľba sa týka formátu gnuplot. Je to príkaz Gnuplotu na nastavenie predvoleného typu terminálu. Implicitná hodnota je "" – použitie implicitného nastavenia Gnuplotu. Tvar je
SET_PLOT_OPTION([GNUPLOT_DEFAULT_TERM_COMMAND, "set term x11"]);

[GNUPLOT_DUMB_TERM_COMMAND, set term dumb 79 22] – táto voľba sa týka formátu gnuplot. Nastavuje terminál na typ DUMB. Tvar je
SET_PLOT_OPTION([GNUPLOT_DUMB_TERM_COMMAND, "set term dumb 80 24"]);

[GNUPLOT_PS_TERM_COMMAND, set size 1.5, 1.5; set term postscript eps enhanced color solid 24] – táto voľba sa týka formátu gnuplot. Je to príkaz Gnuplotu nastavujúci typ terminálu na postscriptový terminál. Na podrobnejšiu informáciu sa pozri do dokumentácie Gnuplotu pre "set term postscript".

8 Programovanie v SPA MAXIMA

V SPA MAXIMA je možné písať programy (alebo vlastné funkcie). MAXIMA poskytuje štandardné príkazy, akými sú napríklad príkazy cyklu typu `for` alebo `while`. Keďže sa jedná o systém počítačovej algebry, jeho možnosti sú širšie, ako možnosti programovacích jazykov typu FORTRAN, zameraných skôr na numerické výpočty.

Na podrobný opis prvkov programovacieho jazyka SPA MAXIMA nemáme dostatok priestoru, navyše tento opis vychádza za rámec našej učebnice. V knihe (MAXIMA MANUAL, 2005) je tejto problematike venovaných niekoľko kapitol.

Uvedieme preto len jeden príklad definovania a použitia funkcie, ktorý je uvedený v príručke The MAXIMA Book (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004).

```
(%i1) test(x,y):=block([],
if x>y then print(x, "is greater than", y)
else print(x, "is not greater than", y),return(alldone))$
(%i2) test(4,3);
4 is greater than 3
(%o2) alldone
(%i3) test(3,4);
3 is not greater than 4
(%o3) alldone
(%i4) test(y^2+1,-y);
Maxima was unable to evaluate the predicate:
y^2+1>-y
#0: test(x=y^2+1,y=-y)
-- an error.  Quitting.  To debug this try debugmode(true);
```

V knihe The MAXIMA Book (SOUZA, FATEMAN, MOSES a YAPP, 2004) je vysvetlené, že MAXIMA nedokáže rozhodnúť o platnosti nerovnice, pretože nemá informáciu o type premennej y, ktorá by mohla byť napríklad maticou. Ak budeme predpokladať, že y je kladné, situácia sa zmení:

```
(%i5) assume(y>0);
(%o5) [y>0]
(%i6) test(y^2+1,-y);
y^2+1 is greater than -y
(%o6) alldone
```

Skúsme však predpokladať, že y je záporné:

```
(%i7) forget(y>0)$
(%i8) assume(y<0);
(%o8) [y<0]
(%i9) test(y^2+1,-y);
Maxima was unable to evaluate the predicate:
y^2+1>-y
#0: test(x=y^2+1,y=-y)
-- an error.  Quitting.  To debug this try debugmode(true);
```

Hoci nerovnosť platí aj pre záporné y, program MAXIMA nedokázal rozhodnúť. Bez ďalšieho uvažovania totiž po dosadení do nerovnosti dostaneme na obidvoch stranách kladné číslo, z hľadiska pohľadu programu MAXIMA zrejme neurčité.

Záver

Milá čitateľka, vážený čitateľ!

Nastal čas na rozlúčku. Verím, že ste sa pri čítaní tejto knižky pobavili aspoň tak, ako som sa pobavil ja pri jej písaní. Dúfam, že Vás možnosti systému počítačovej algebry MAXIMA zaujali a stanete sa jeho používateľmi.

Snažil som sa zároveň ukázať, že SPA MAXIMA je vhodný nástroj na využitie vo výučbe (najmä) matematických predmetov, predovšetkým matematickej analýzy, lineárnej algebry i matematickej štatistiky. Dá sa použiť aj na výučbu numerických metód. Na druhej strane na výučbu vymenovaných predmetov s výnimkou matematickej analýzy je možné a vhodné použiť iné OPENSOURCE programy – Pylab, Scilab, Octave (KAUKIČ, 2006; PRIBIŠ, 2006; BUŠA, 2006), R apod.

Vôbec som sa nedotkol ďalších oblastí použitia programu MAXIMA, medzi nimi napríklad teórie čísel, kombinatoriky a iných. Snáď sa do toho pustí niekto ďalší, komu môžu priniesť použitie SPA MAXIMA v týchto oblastiach väčší úžitok. Podobne, žiaľ, zrejme väčšina príkazov programu MAXIMA, ktoré sú dostatočne popísané napríklad v knihe (MAXIMA MANUAL, 2005), nebola v tejto učebnici ani spomenutá. Verím, že i napriek týmto nedostatkom bude učebnica užitočná, čítaná a používaná.

Literatúra

Buša, J. 2006. *Octave. Rozšírený úvod,* ISBN 80-8073-596-4,
online na http://people.tuke.sk/jan.busa/kega/octave/. 75, 77, 90

Doboš, J. 2006. *GNUPLOT,* ISBN 80-8073-637-5, 52 s.,
online na http://people.tuke.sk/jan.busa/kega/gnuplot/. 53, 55

Ďjakonov, V. P. 2003. *Maple 8 v matematike, fizike i obrazovanii,* Moskva, SOLON-Press, ISBN 5-98003-038-7, 656 s. 58

Glöckner, R. 2006. *Einführung in Maxima,* 23 s.

Gräbe, H.-G. 2005. *Skript zum Kurs Einführung in das symbolische Rechnen,* Wintersemester 2004/2005, Institut für Informatik, Leipzig, 158 s.,
http://www.informatik.uni-leipzig.de/~graebe.

Micro introduction into Maxima, Computing Harvard Math department,
online na http://www.math.harvard.edu/computing/maxima/.

Kawano, T. 2005. *Gnuplot – not so Frequently Asked Questions,*
http://t16web.lanl.gov/Kawano/gnuplot/index-e.html. 55

Kaukič, M. 2006. *Základy programovania v Pylabe,* ISBN 80-8073-635-9,
http://people.tuke.sk/jan.busa/kega/pylab/. 75, 77, 90

Kreyszig, E. — Norminton, E. J. 2006. *Maple Computer Guide, A Self-Contained Introduction,* for E. Kreyszig Advanced Engineering Mathematics, 9. vydanie, John Wiley & Sons, Inc., ISBN 0-471-72645-1, 300 s. 58, 70

2006. *Maxima Manual,* 461 s. 6, 23, 25, 33, 57, 68, 70, 73, 88, 90

2006. *Maxima Manual,* online na http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/en/maxima.html.

Pribiš, J. 2006. *Scilab,* ISBN 80-8073-655-3, http://people.tuke.sk/jan.busa/kega/scilab/. 75, 77, 90

Rand, R. H. 2005. *Introduction to Maxima,* Cornel University. 25

Souza, P. N. de — Fateman, R. J. — Moses, J. — Yapp, C. 2004. *The Maxima Book,* 154 s. 6, 10, 26, 58, 59, 63, 64, 65, 66, 68, 85, 88

Stopka M. *Hra s písmenky wxMaxima,* ABC Linuxu, 18. 5. 2006,
online na http://www.abclinuxu.cz/clanky/programovani/hra-s-pismenky-wxmaxima. 85

MAXIMA

Open source systém počítačovej algebry

Edícia vysokoškolských učebníc FEI TU v Košiciach

Prvé vydanie 2006

Počet strán 92

Elektronická sadzba programom pdfTEX

Vytlačili Východoslovenské tlačiarne, a. s., Košice

ISBN 80-8073-640-5