Minimalizácia časových strát cestujúcich

Stanislav Palúch, Štefan Peško

University of Žlina/Department of Mathematical Methods

20. októbra 2011

Autobusová linka

Autobusová linka daná postupnosťou zastávok $s_0, s_1, \ldots, s_r$.

Označme p_i jazdnú doba autobusu zo zastávky s_{i-1} k zastávke s_i.

Ak d je čas odchodu spoja z počiatočnej zastávky s_0, odjazd tohoto spoja zo zastávky s_i sa vypočíta ako $d + \sum_{j=1}^{i} p_i$.

Uvažujme cestujúceho ktorý chce cestovať zo zastávky s_i v čase t.

Jeho ideálny spoj by mal odísť z počiatočnej zastávky s_0 v čase

$$t - \sum_{j=1}^{i} p_i = t - \Delta_i,$$

kde $\Delta_i = \sum_{j=1}^{i} p_i$ je jazdná doba zo zastávky s_0 k zastávke s_i.

Časové straty na zastávke i medzi spojmi k, $k+1$

Označme t_k, t_{k+1} dva po sebe nasledujúce odjazdy zo zastávky s_0.
Pre príslušné odjazdy t_k^i, t_{k+1}^i zo zastávky s_i platí:

$$t_k^i = t_k + \sum_{j=1}^{i} p_i = t_k + \Delta_i, \qquad t_{k+1}^i = t_{k+1} + \sum_{j=1}^{i} p_i = t_{k+1} + \Delta_i$$

Nech $f_i(t)$ je intezita cestujúcich prichádzajúcich na zastávku s_i.
Ich čakací čas $w(k,i)$ v intervale $\langle t_k^i, t_{k+1}^i \rangle$ je:

$$w(k,i) = \int_{t_k^i}^{t_{k+1}^i} f_i(t)(t - t_k^i)\mathrm{d}t = \int_{t_k+\Delta_i}^{t_{k+1}+\Delta_i} f_i(t)(t - t_k - \Delta_i)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i(t+\Delta_i)(t - t_k - \Delta_i + \Delta_i)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_i^0(t)(t - t_k)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

kde $f_i^0(t) = f_i(t+\Delta_i)$.

Celkové časové straty cestujúcich

Nech $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ sú odchody všetkých spojov linky zo zastávky s_0.

$f_0(t), f_1(t), \ldots, f_r(t)$ – intenzity cestujúcich na zastávkach $s_0, s_1, \ldots, s_r$,

$w(k, i)$ – časové straty cestujúcich na zastávke i v intervale $\langle t_k^i, t_{k+1}^i \rangle$.

Celkové časové straty všetkých cestujúcich za celý deň sú:

$$W(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{r} w(k, i) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{i=0}^{r} f_i^0(t)(t - t_k)\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)(t - t_k)\mathrm{d}t, \qquad (2)$$

kde $f(t) = \sum_{i=0}^{r} f_i^0(t)$.

Intenzity $f_0(t), f_1(t), \ldots, f_{n-1}(t)$ možno nahradiť jedinou fiktívnou intenzitou cestujúcich cestujúcich z počiatočnej zastávky s_0.

Technologické obmedzenia

Technologické obmdzenia:

- $t_0,\ t_n$ sú pevne dané
- každý spoj i, $i = \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ musí odchádzať v danom časovom intervale $\langle a_i, b_i \rangle$.

Cieľ optimalizácie – určiť odchody $t_2, t_3, \ldots t_{n-1}$ tak, aby príslušná celková strata cesdtujúcich $W(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ bola minimálna.

Konštantná intentzita $f(t)$

Najjednoduchší prípad – $f(t)$ je konštantná, t. j. $f(t) = f$.
V tomto prípade

$$W = W(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f \cdot (t - t_k) \mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{0}^{t_{k+1}-t_k} f.t \ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f}{2}.(t_{k+1} - t_k)^2 =$$

$$= \frac{f}{2}. \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \tag{3}$$

Konštantná intentzita $f(t)$, reálny prípad

x_i – čas odchodu spoja i z počiatočnej zastávky.

$$\text{Minimize} \quad \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)^2 \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \text{subject to:} \quad x_0 &= t_0 && (5)\\ x_n &= t_n && (6)\\ a_i \le x_i &\le b_i \text{ for } i=1,2,\dots,n-1 && (7) \end{aligned}$$

Zjednodušený zápis. Položme $a_0 = b_0 = t_0$, $a_n = b_n = t_n$.

$$\text{Minimize} \quad \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)^2 \tag{8}$$

$$\text{subject to:} \quad a_i \le x_i \le b_i \text{ for } i=0,1,2,\dots,n \tag{9}$$

Lemma

Nech u, u sú reálne čísla, $u < v$. Nech $h(x)$ je reálna funkcia definovaná na intervale $\langle u, v \rangle$ formulou:

$$h(x) = (x - u)^2 + (v - x)^2. \tag{10}$$

Lemma

Funkcia $h(x)$

- *má globálne minimum v bode* $x = \dfrac{u+v}{2}$
- *je rýdzo klesajúca na intervale* $(u, \frac{u+v}{2})$
- *rýdzo rastúca na intervale* $(\frac{u+v}{2}, v)$

Prvá derivácia $h(x)$ je $h'(x) = 4x - 2(u+v)$,
druhá derivácia $h(x)$ is $h''(x) = 4$.
Platí: $h'(\frac{u+v}{2}) = 0$,
$h'(x) < 0$ na $(u, \frac{u+v}{2})$,
$h'(x) > 0$ na $(\frac{u+v}{2}, v)$ a $h''(\frac{u+v}{2}) > 0$. $\square$

Vlastnosti optimálneho riešenia (1)

Veta

Nech $x_0^{opt}, x_1^{opt}, \ldots, x_n^{opt}$ *je optimálne riešenie problému* (4) – (7).

Potom $x_0^{opt} = t_0$, $x_n^{opt} = t_n$ *a pre* x_i^{opt}, *kde* $0 < i < n$, *platí:*

Buď $x_i^{opt} = a_i$, *alebo* $x_i^{opt} = b_i$, *alebo* $x_i^{opt} - x_{i-1}^{opt} = x_{i+1}^{opt} - x_i^{opt}$.

Dôkaz sporom.
Predpokladajme $x_i^{opt} \in (a_i, b_i)$ (t. j. $x_i^{opt} \neq a_i$, $x_i^{opt} \neq b_i$).

Nech $x_i^{opt} - x_{i-1}^{opt} \neq x_{i+1}^{opt} - x_i^{opt}$.

V tomto prípade možnox_i^{opt} posunúť smerok k stredu intervaly $\langle x_{i-1}^{opt}, x_{i+1}^{opt} \rangle$ o malú hodnotu $\varepsilon > 0$ a zväčšiť tak súčet

$$(x_i^{opt} - x_{i-1}^{opt})^2 + (x_{i+1}^{opt} - x_i^{opt})^2$$

čo ma z dôsledok nárast kriteriálnej funkcie (4). $\square$

Vnútorné a hraničné premenné prípustného riešenia

Definícia

Nech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *je prípustné riešenie problému* (4) – (7).

Premenná x_i *sa volá* **hraničná premenná**, *ak* $x_i = a_i$, *or* $x_i = b_i$.

Premenná x_i *sa volá* **vnútorná premenná**, *ak* $x_i \in (a_i, b_i)$.

Vlastnosti optimálneho riešenia (2)

Veta

Každé optimálne riešenie (4) – (7) je v tvare

$$x_{k_0} = x_0 = t_0, \underbrace{x_1, \ldots, x_{k_1-1}}_{\text{or empty if } k_1=1}, x_{k_1}, \underbrace{x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2-1}}_{\text{or empty if } k_2=k_1+1}, x_{k_2}, \ldots,$$

$$\ldots, x_{k_i}, \underbrace{x_{k_i+1}, \ldots, x_{k_{i+1}-1}}_{\text{or empty if } k_{i+1}=k_i+1}, x_{k_{i+1}}, \ldots,$$

$$\ldots, x_{k_{r-1}}, \underbrace{x_{k_{r-1}+1}, \ldots, x_{k_r-1}}_{\text{or empty if } k_r=k_{r-1}+1}, x_{k_r} = x_n = t_n \qquad (11)$$

kde $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_{r-1} < k_r = n$, x_{k_i} *je hraničná premenná pre* $i = 0, 1, \ldots, r$, *kde vetky ostatné premenné sú vnútorné premenné a ak* $k_{i+1} > k_i + 1$, *potom*

$$x_{k_i+j} = x_{k_i} + j.\frac{x_{k_{i+1}} - x_{k_i}}{k_{i+1} - k_i} \quad \text{for } j = 1, \ldots, (k_{i+1} - k_i - 1) \qquad (12)$$

Vlastnosti optimálneho riešenia (3)

Každné optimálne riešenie problému (4) – (7) je určené postupnosťou $x_{k_0}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ hraničných premenných –
t.j. takých, kde $x_{k_0} = t_0$, $x_{k_r} = t_n$ a kde $x_{k_i} = a_{k_i}$ alebo $x_{k_i} = b_{k_i}$.

Podmienka 1:
Navyše postupnosť $x_{k_0}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ musí mať tú vlastnosť, že ak každý každý interval $\langle x_{k_i}, x_{k_{i+1}} \rangle$ rozdelíme na $(k_{i+1} - k_i)$ rovnako veľkých intervalov, všetky deliace body týchto intervalov (okrem x_{k_i}, $x_{k_{i+1}}$) sú vnútorné.

$$(a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{n-1}, b_{n-1}), (a_n, b_n)$$

Máme teda iba konečný počet postupností začínajúcich $a_0 = b_0$, končiacich prvkom $a_n = b_n$ a z každej dvojice a_i, b_i obsahujú najviac jeden prvok.
Takýchto postupností je 3^{n-1} (?).
Z týchto ešte vyhodíme tie, ktoré nesplňujú podmienku 1.
Z tých, ktoré ostanú, nájdeme optimálnu.

Riešenie metódami teórie grafov (1)

Nech $G = (V, A, c)$ je orientovaný hranovoohodnotený graf, kde $V = \{a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, a kde

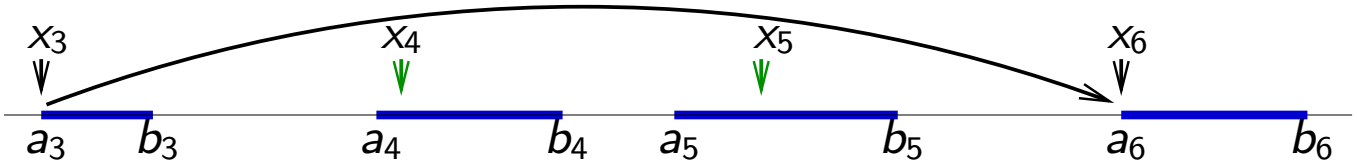
$$A_1 = \Big\{(a_i, a_j) \mid i < j, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n, \quad a_i + k\frac{a_j - a_i}{j - i} \in \langle a_{i+k}, b_{i+k}\rangle, \ \forall k = 1, \ldots j - i\Big\}$$

$$A_2 = \Big\{(a_i, b_j) \mid i < j, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n, \quad a_i + k\frac{b_j - a_i}{j - i} \in \langle a_{i+k}, b_{i+k}\rangle, \ \forall k = 1, \ldots j - i\Big\}$$

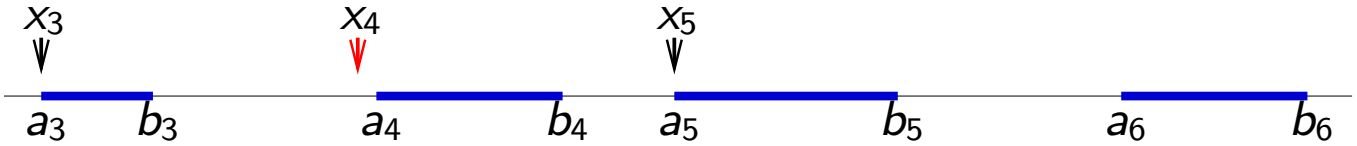
$$A_3 = \Big\{(b_i, b_j) \mid i < j, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n, \quad a_i + k\frac{b_j - b_i}{j - i} \in \langle a_{i+k}, b_{i+k}\rangle, \ \forall k = 1, \ldots j - i\Big\}$$

$$A_4 = \Big\{(b_i, a_j) \mid i < j, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n, \quad a_i + k\frac{a_j - b_i}{j - i} \in \langle a_{i+k}, b_{i+k}\rangle, \ \forall k = 1, \ldots j - i\Big\}$$

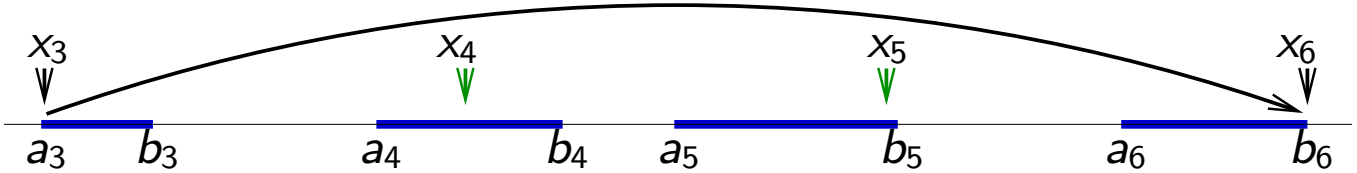
Riešenie metódami teórie grafov (2)



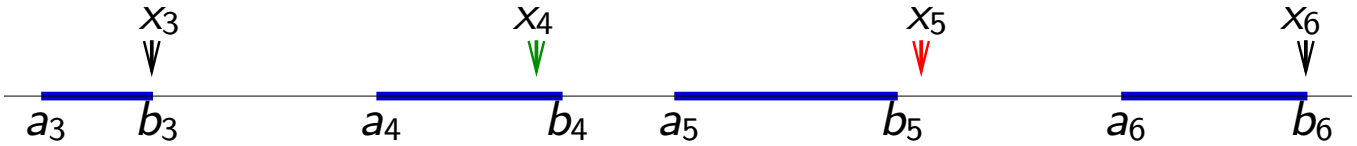
Usporiadaná dvojica (a_3, a_6) je hranou množiny A



Usporiadaná dvojica (a_3, a_5) nie je hranou množiny A



Usporiadaná dvojica (a_3, b_5) je hranou množiny A



Usporiadaná dvojica (a_3, b_6) nie je hranou množiny A

Riešenie metódami teórie grafov (3)

Cena hrany

$$c(a_i, a_j) = (j - i)\left(\frac{a_j - a_i}{j - i}\right)^2 = \frac{(a_j - a_i)^2}{j - i}$$

$$c(a_i, b_j) = (j - i)\left(\frac{b_j - a_i}{j - i}\right)^2 = \frac{(b_j - a_i)^2}{j - i}$$

$$c(b_i, b_j) = (j - i)\left(\frac{b_j - b_i}{j - i}\right)^2 = \frac{(b_j - b_i)^2}{j - i}$$

$$c(b_i, a_j) = (j - i)\left(\frac{a_j - b_i}{j - i}\right)^2 = \frac{(a_j - b_i)^2}{j - i}$$

Riešenie metódami teórie grafov (4)

Veta

Nech $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_{r-1} < k_r = n$,
nech $a_0 = v_{k_0}, v_{k_1}, \ldots, v_{k_r} = b_n$ *je postupnosť vrchlov digrafu* $G(V, A, c)$ *taká, že* $(v_{k_i}, v_{k_{i+1}}) \in A$ *pre každé* $i = 0, 1, \ldots, r-1$.
Nech

$$\mu(a_0, b_n) = (a_0 = v_{k_0}, (v_{k_0}, v_{k_1}), v_{k_1}, (v_{k_1}, v_{k_2}), \ldots, \ v_{k_{r-1}}, (v_{k_{r-1}}, v_{k_r}), v_{k_r} = b_n)$$

je a_0-b_n *cesta v digrafe* $G(V, A, c)$ *s dĺžkou*

$$c(\mu(a_0, b_n)) = \sum_{i=0}^{r-1} c(v_{k_i}, v_{k_{i+1}}).$$

Potom množina $\{v_{k_0}, v_{k_1}, \ldots, v_{k_r}\}$ *je množinou hraničných bodov, ktorá určuje prípustné riešenie problému* (4) – (7) *s hodnotou kriteriálnej funkcie* $c(\mu(a_0, b_n))$

Riešenie metódami teórie grafov (5)

Veta

Majme optimálne riešenie $\mathbf{x}$ *problému* (4) – (7) *v tvare*

$$x_{k_0} = x_0 = a_0, \underbrace{x_1, \ldots, x_{k_1-1}}_{\text{or empty if } k_1=1}, x_{k_1}, \underbrace{x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2-1}}_{\text{or empty if } k_2=k_1+1}, x_{k_2}, \ldots,$$

$$\ldots, x_{k_i}, \underbrace{x_{k_i+1}, \ldots, x_{k_{i+1}-1}}_{\text{or empty if } k_{i+1}=k_i+1}, x_{k_{i+1}}, \ldots,$$

$$\ldots, x_{k_{r-1}}, \underbrace{x_{k_{r-1}+1}, \ldots, x_{k_r-1}}_{\text{or empty if } k_r=k_{r-1}+1}, x_{k_r} = x_n = b_n$$

kde $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_{r-1} < k_r = n$, x_{k_i} *je hraničná premenná pre* $i = 0, 1, \ldots, r$, *kde vetky ostatné premenné sú vnútorné premenné a ak* $k_{i+1} > k_i + 1$, *potom* $x_{k_i+j} = x_{k_i} + j.\dfrac{x_{k_{i+1}} - x_{k_i}}{k_{i+1} - k_i}$ *pre* $j = 1, \ldots, (k_{i+1} - k_i - 1)$

Potom

$$(a_0 = x_{k_0}, (x_{k_0}, x_{k_1}), x_{k_1}, (x_{k_1}, x_{k_2}), \ldots, \; x_{k_{r-1}}, (x_{k_{r-1}}, x_{k_r}), x_{k_r} = b_n)$$

je cestou a_0-b_n *cestou v digrafe* $G = (V, A, c)$ *s cenou, ktorá sa rovná hodnote kriteriálnej funkcie prislúchajúcej riešeniu* $\mathbf{x}$.

Riešenie metódami teórie grafov (6)

Dôsledok

Nájsť optimálne riešenie problému (4) – (7) *znamená nájsť najkratšiu* a_0-b_n *cestu v digrafe* $G = (V, A, c)$.

Algoritmus

Usporiadajme vrcholy digrafu G podľa nasledujúcej tabuľky

a_0	b_0	a_1	b_1	a_2	b_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	a_{n-1}	b_{n-1}	a_n	b_n
v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	v_{2n-2}	v_{2n-1}	v_{2n}	v_{2n+1}

Dostali sme monotónne očíslovanie digrafu G.

Algoritmus na hľadanie najkratšej v_0–v_{2n+1} ciesty v acyklickom digrafe $G = (V, A, c)$.

- **Krok 1.** Pre každý vrchol $v_i \in V$ priraď značky $t(v_i)$, $y(v_i)$.
  Polož $t(v_0) := 0$, $t(v_i) := \infty$ pre všetky $i = 1, 1 \dots, 2n+1$.
  Polož $y(v_i) := 0$ pre všetky $i = 0, 1 \dots, 2n+1$.
- **Krok 2.** Postupne pre všetky $i = 0, 1, \dots, 2n$ urob:
  Pre všetky vrcholy $w \in V^+(v_i)$ urob:
  Ak $t(w) > t(v_i) + c(v_i, w)$,
  potom $t(w) := t(v_i) + c(v_i, w)$, a $y(w) := v_i$.

Algoritmus

Usporiadajme vrcholy digrafu G podľa nasledujúcej tabuľky

a_0	b_0	a_1	b_1	a_2	b_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	a_{n-1}	b_{n-1}	a_n	b_n
v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	v_{2n-2}	v_{2n-1}	v_{2n}	v_{2n+1}

Dostali sme monotónne očíslovanie digrafu G.

Algoritmus na hľadanie najkratšej v_0–v_{2n+1} ciesty v acyklickom digrafe $G = (V, A, c)$.

- **Krok 1.** Pre každý vrchol $v_i \in V$ priraď značky $t(v_i)$, $y(v_i)$.
  Polož $t(v_0) := 0$, $t(v_i) := \infty$ pre všetky $i = 1, 1 \dots, 2n+1$.
  Polož $y(v_i) := 0$ pre všetky $i = 0, 1 \dots, 2n+1$.
- **Krok 2.** Postupne pre všetky $i = 0, 1, \dots, 2n$ urob:
  Pre všetky vrcholy $w \in V^+(v_i)$ urob:
  Ak $t(w) > t(v_i) + c(v_i, w)$,
  potom $t(w) := t(v_i) + c(v_i, w)$, a $y(w) := v_i$.

Reprezentácia výsledku algoritmu

Potom $t(v_{2n+1})$ je optimálna hodnota kriteriálnej funkcie problému (4) – (7) a optimálne riešenie je určené hraničnými bodmi

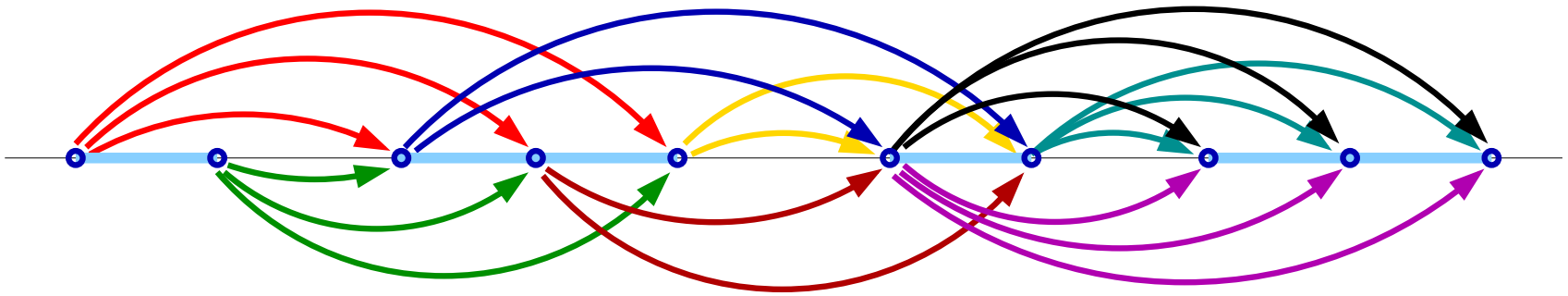
$$v_{2n+1}, y(v_{2n+1}), y(y(v_{2n+1})), \ldots, v_0.$$

Diskrétny prípad, konštantá intenzita cestujúcich

V praktickom prípade stačí určiť odchody spojov s presnosťou na celé minúty.
V tomto prípade zostrojíme hranovoorientovaný digraf $G = (V, H, c)$, ktorého vrcholy sú všetky celé čísla v také, že $v \in \langle a_i, b_i \rangle$ pre niektoré $i = 0, 1, \ldots, n$.

Hranami toho grafu sú všetky usporiadané dvojice (u, v) celých čísel takých, že existuje i také, že $u \in \langle a_i, b_i \rangle$ a $v \in \langle a_{i+1}, b_{i+1} \rangle$.
Cena hrany (u, v) sa vypočíta ako

$$c(u, v) = (v - u)^2$$



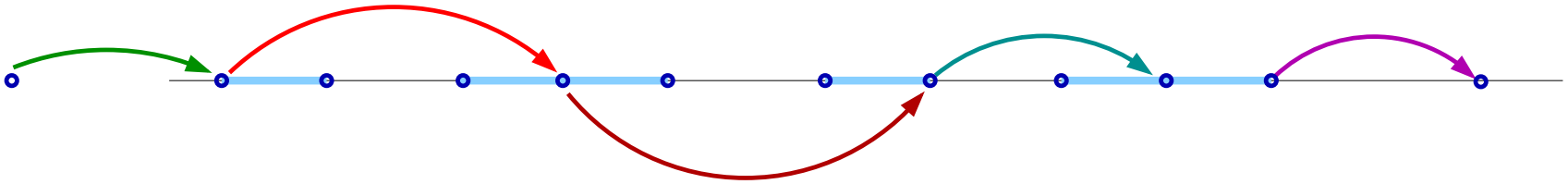
Diskrétny prípad, konštantá intenzita cestujúcich (2)

Nech $v_1, v_2, \ldots, v_N$ je postupnosť vrcholov digrafu G usporiadané podľa veľkosti rastúco.

Každému celočíslenému riešeniu problému (4) – (7) prislúcha práve jedna v_1-v_N cesta v digrafe G a naopak, každej v_1-v_N ceste v G prislúcha jedno celočíselné prípustné riešenie problému (4) – (7), pričom dĺžka v_1-v_N cesty sa rovná hodnote kriteriálnej funkcie príslušného riešenia.

Dôsledok

Nájsť optimálne celočíselné riešenie problému (4) – (7) *znamená nájsť najkratšiu* v_1-v_N *cestu v digrafe* G



Diskrétny prípad,intenzita cestujúcich $f(t)$

Ak sa intenzita cestujúcich počas dňa mení, model (4) – (7) nevyhovuje.
Celkové časové straty sestujúcich sú

$$W(t_0, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)(t - t_k)\mathrm{d}t.$$

Matematická formulácia problému minimallizácie časových strát cesdtujúcich je teda:
Nájsť celé čísla $t_0, t_1, \ldots, t_n$ také, že $t_i \in \langle a_i, b_i \rangle$, pre ktoré je $W(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ minimálne.
V tomto prípade zostrojíme hranovoohodnotený digraf $\overline{G} = (V, H, \overline{c})$ ako v prípade konštantnej intenzity cestujúcich, avšak cenu hrany vypočítame ako

$$\overline{c}(u, v) = \int_u^v f(t)(t - u)\mathrm{d}t.$$

Diskrétny prípad,intenzita cestujúcich $f(t)$ (2)

Optimálne riešenie nájdeme ako najkratšiu v_1-v_N cestu v digrafe $\overline{G}$. Digraf $\overline{G}$ je acyklický a postupnosť $v_1, v_2, \ldots, v_N$ je jeho monotónnym usporiadaním.

Na výpočet najkratšej cesty použijeme analogicky algoritmus ako algoritmus pre reálny prípad s konštantou intenzitou cestujúcich.