

Možnosti využitia paralelných výpočtov pri riešení problémov diskrétnej optimalizácie

Doktorand: RNDr. Marian Kováč

Dátum nástupu: 1.9.2011

Školiteľ: doc. RNDr. Stanislav Palúch, CSc.

1. Teoretický rozbor problémov diskkrétnej optimalizácie
2. Štúdium existujúcich sekvenčných a paralelných algoritmov pre riešenie problémov diskkrétnej optimalizácie
3. Návrh a implementácia vlastných algoritmov pre danú skupinu problémov (pokúsiť sa posunúť hranice riešenia optimalizačných problémov)
 - a. na vyvinutých algoritmoch prezentovať možnosti zapojenia viacerých výpočtových jednotiek do procesu hľadania riešenia,
 - b. analyzovať ich dopad na čas hľadania riešenia a kvalitu nájdených riešení
 - c. a na základe analýzy poukázať na možné výhody použitia viacerých výpočtových jednotiek pri riešení problémov.

- **Teoretické základy**

1. Algoritmy (vlastnosti, efektivita, zložitosť...)
2. Klasifikácia problémov
3. Hľadanie riešenia problémov (stratégie hľadania)
4. Paralelné výpočty, paralelizácia

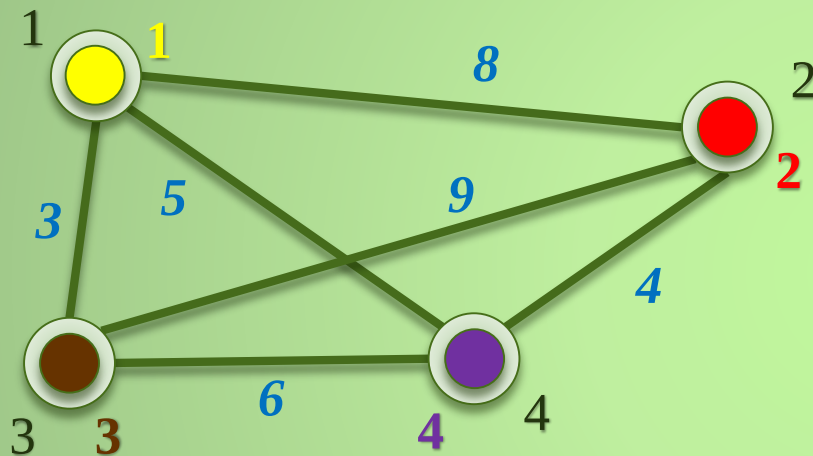
- **Praktická časť**

1. Problém n -dám
2. Quadratic assignment problem (QAP)

Quadratic Assignment Problem - QAP

1957 - Koopmans, Beckman (lokačný problém)

- priradiť n – zariadení; na n – lokalít



Tok (1, 2) = 9

Tok (1, 3) = 3

Tok (1, 4) = 5

Tok (2, 3) = 2

Tok (2, 4) = 7

Tok (3, 4) = 4

$$\Pi = \{1, 2, 3, 4\}$$

Vzdialenosti:

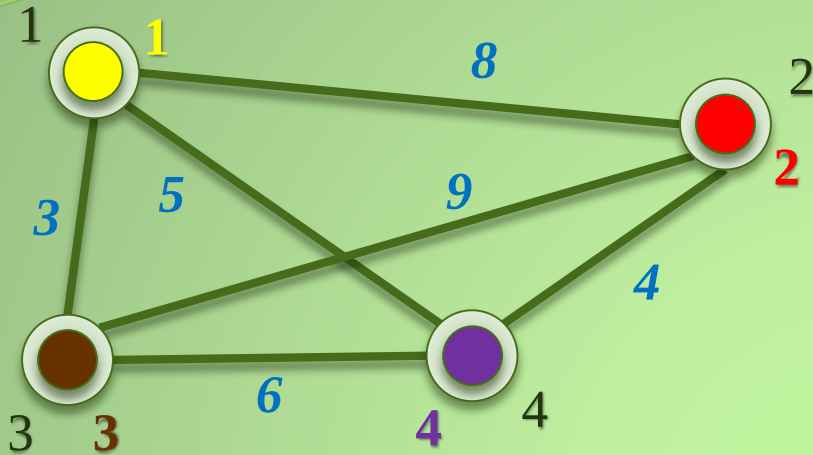
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & 5 \\ 8 & 0 & 9 & 4 \\ 3 & 9 & 0 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Tok:

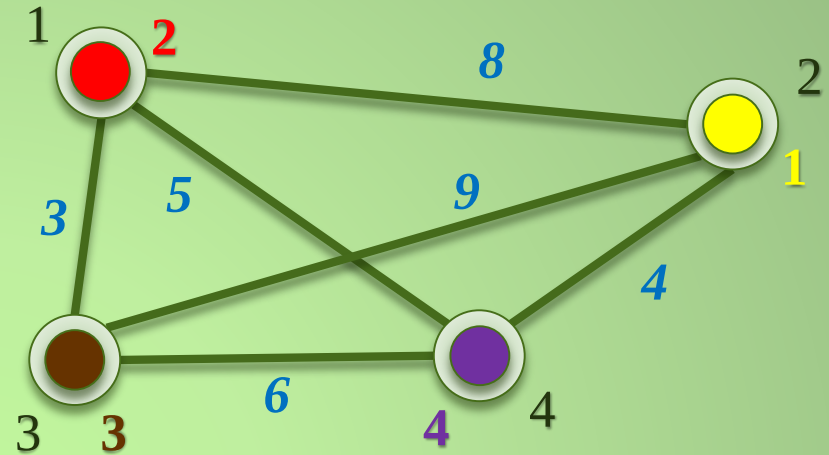
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 & 5 \\ 9 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Celkové náklady:
$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

Quadratic Assignment Problem - QAP



$$\Pi = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$$



$$\Pi = \{\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$$

Tok:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 & 5 \\ 9 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Tok:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 2 & 7 \\ 9 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Quadratic Assignment Problem - QAP

1957 - Koopmans, Beckman (lokačný problém)

- priradiť n – zariadení
- na n – lokalít
- a_{ij} - tok medzi zariadením i a $j \Rightarrow (a_{ij}) = A$
- b_{ij} - vzdialenosť medzi zariadeniami i a $j \Rightarrow (b_{ij}) = B$
- náklady - $C = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$

$$\min_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{\pi_i, \pi_j} b_{ij}$$

S_n - množina permutácií $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\Pi_{min} = ?$$

NP – ťažký problém

Rozmiestnenie budov vo vojenskej základni

- n budov
- vzdialenosť medzi budovami i a j - b_{ij}
- hustota premávky medzi budovami i a j - a_{ij}
- minimalizovať celkovú prejdenú vzdialenosť za určité obdobie (podobne napríklad rozmiestnenie ambulancií v nemocnici)

Rozloženie kláves na klávesnici

- n kláves (symbolov)
- čas potrebný na stlačenie klávesy na pozícii i po stlačení klávesy na pozícii j - b_{ij}
- frekvencia výskytu párov symbolov i a j - a_{ij}
- minimalizovať čas potrebný na napísanie textu

Rozloženie monitorov (prvkov) na kontrolnom paneli

- n monitorov (prvkov)
- minimalizovať únavu očí pri kontrole

...

C.E. Nugent, T.E. Vollmann and J. Ruml – 1968

Ozn: [nug12]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & 10 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 10 & 0 & 5 & 1 & 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 10 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 5 & 10 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 5 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 1 & 4 & 3 & 5 & 10 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 3 & 0 & 10 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_{min} = \{12, 7, 9, 3, 4, 8, 11, 1, 5, 6, 10, 2\}$$

Taillard: Robust taboo search for the quadratic assignment problem

- Oddelené a nezávislé TS s rôznymi začiatočnými riešeniami
- Žiadna výmena informácií medzi vláknami
- Najlepšie riešenie vybrané na záver spomedzi všetkých

Talbi, Hafidi, Geib: Parallel adaptive tabu search for large optimization problems

- Rovnako ako v predchádzajúcom prípade, ale každá inštancia pracuje s inými parametrami
- Použitá spoločná pamäť držiaca priebežne najlepšie globálne riešenie

De Falco, Del Balio: Improving search by incorporating evolution principles in parallel tabu search

- Kooperatívny TS (podstatný rozdiel oproti predošlým)
- Pravidelne sa vyhodnocuje doposiaľ najlepšie nájdené rieš. a časť procesov nahradí svoje nájdené riešenie týmto najlepším

Talbi, Bachelet: A parallel cooperative metaheuristic

- Kombinácia TS a GA – na jednotlivých procesoch samostatný TS – nájdené riešenia sa prenášajú do spoločnej pamäte a tam s nimi pracuje GA
- Zabezpečená dostatočná rôznorodosť populácie GA a zároveň aj vysoká kvalita jedincov

Battiti, Tecchiolli: Parallel based search for combinatorial optimization

- Samostatný GA
- Populácia rozdelená na subpopulácie – evolúcia každej na samostatnom CPU
- Občasná výmena informácií – najlepších riešení

Tang, Lim, Ong, Er: Parallel Memetic Algorithm with Selective Local Search for Large Scale Quadratic Assignment Problems

- Pokročilejší hybridný GA – ostrovný model paralelného memetického alg. s LS
- Každý jedinec disponuje vlastnou pamäťou – LS
- Paralelný beh niekoľkých evolúcií, výmena najlepších jedincov

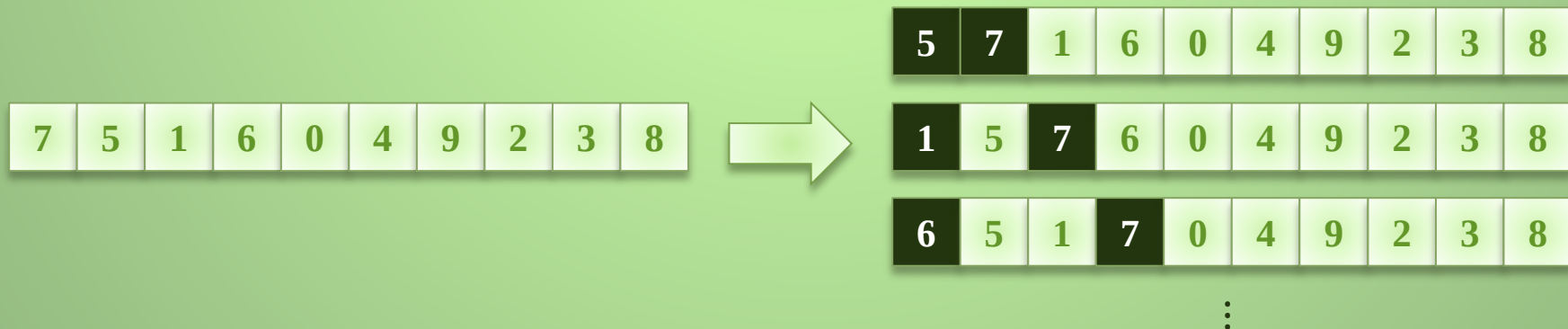
Talbi, Roux, Fonlupt, Robillard: Parallel Ant Colonies for Combinatorial Optimization Problems

- Synchronný master/workers model
- Master drží centrálnu pamäť, cez ktorú prebieha komunikácia; v pamäti je pheromone matrix a najlepšie nájdené riešenie
- Na staniciach workers prebieha hľadanie na základe ACO a LS s TS – stanica obdrží pher. matrix, skonštruuje riešenie, aplikuje LS s TS a pošle na master

- Silná závislosť na riešenom probléme (vstupných údajoch) pri rovnakom n
- Hodnotenie a porovnávanie riešení $\approx O(n^2)$
- **Nevyužívanie znalostí** – neinformované prehľadávanie okolia riešenia
 - Prehľadávanie vedené výlučne metaheuristikami
- Zlyhávanie pri $n > 200$ (veľkosť priestoru $>200!$)

$$f(\Pi) > f(\Pi') ?$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{\pi_i, \pi_j} b_{ij} - a_{\pi'_i, \pi'_j} b_{ij}) > 0 ?$$



Znalosti:

$$\Pi = \{1,2,3,4\}:$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 10 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 0 & 12 \\ 10 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \{1,2,3,4\}; f(\Pi) = 140$$

$$\Pi_{1,2} = \{2,1,3,4\}; f(\Pi_{1,2}) = 123$$

$$\Pi_{2,4} = \{1,4,3,2\}; f(\Pi_{2,4}) = 101$$

$$\Pi = \{1,4,3,2\}:$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 10 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 0 & 12 \\ 10 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Znalosti:

$$\Pi = \{1,4,3,2\}:$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 10 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 0 & 12 \\ 10 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \{1,4,3,2\}; f(\Pi) = 101$$

$$\Pi_{1,3} = \{3,4,1,2\}; f(\Pi_{1,3}) = 100$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 10 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 0 & 12 \\ 10 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Znalosti:

$\Pi = \{3, 4, 1, 2\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 10 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 0 & 12 \\ 10 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\Pi) = 140 \rightarrow f(\Pi_{\min}) = 100$$

$$\Pi = \{3, 4, 1, 2\}; f(\Pi) = 100$$

Výmena prvkov na pozíciách v permutácii – zmena matice:

$n = 4$

$1 - 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} \diamond & \diamond & \text{yellow} & \text{red} \\ \diamond & \diamond & \text{yellow} & \text{red} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\ \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \end{pmatrix}$

$2 - 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} \diamond & \text{yellow} & \text{yellow} & \diamond \\ \diamond & \diamond & \diamond & \text{red} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \text{red} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \end{pmatrix}$

$1 - 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} \diamond & \text{yellow} & \diamond & \text{red} \\ \diamond & \diamond & \text{yellow} & \diamond \\ \diamond & \diamond & \diamond & \text{red} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \end{pmatrix}$

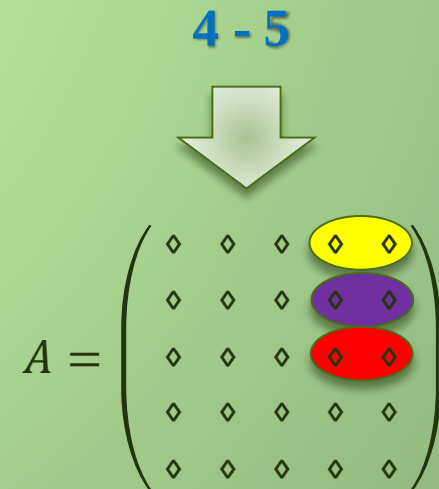
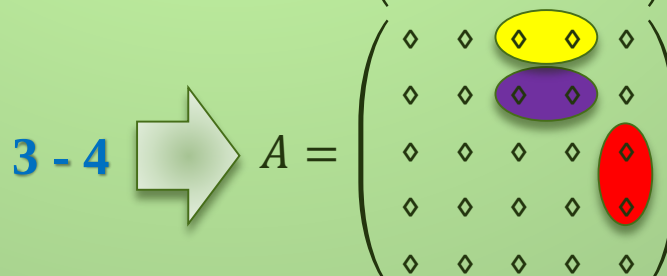
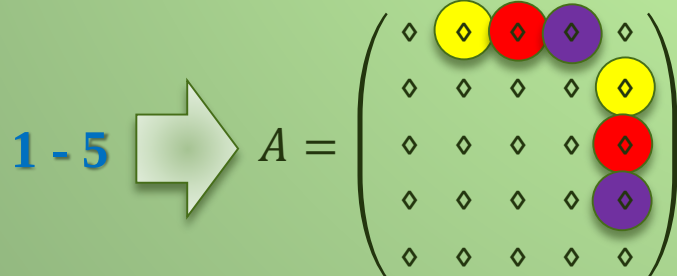
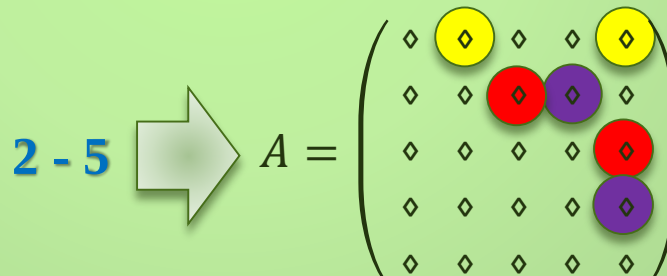
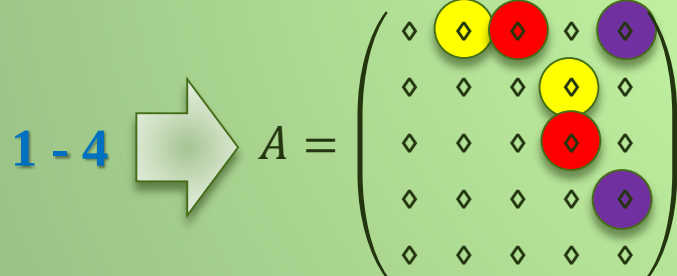
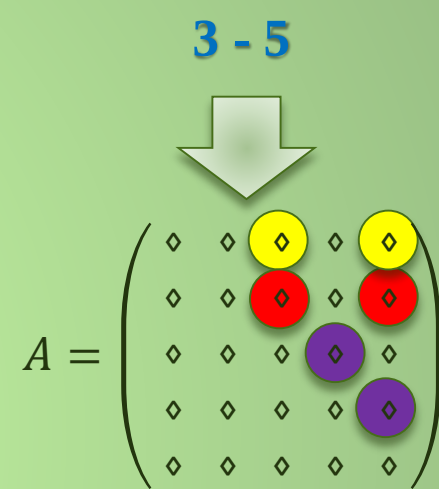
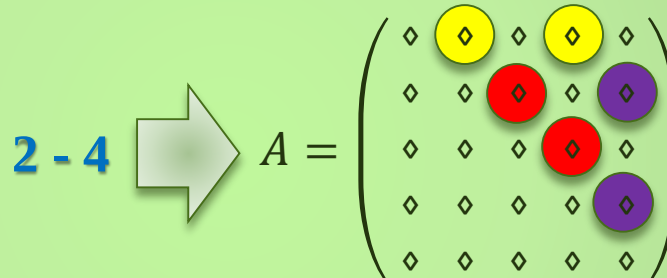
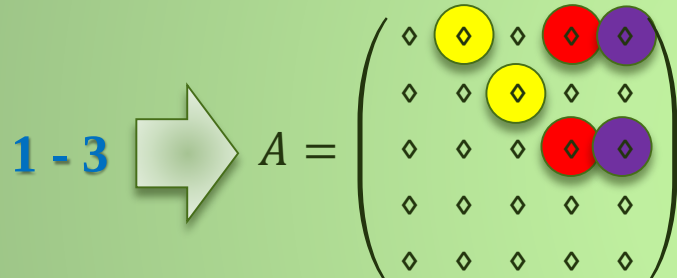
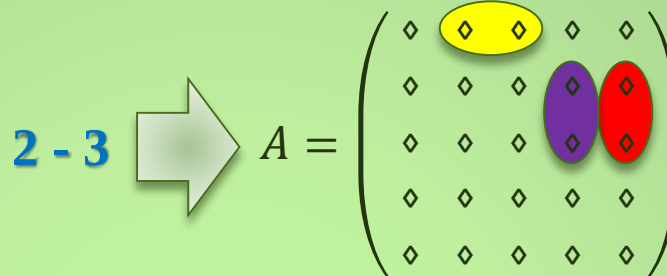
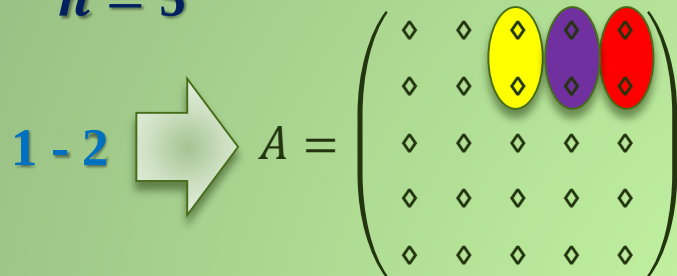
$2 - 4 \rightarrow A = \begin{pmatrix} \diamond & \text{yellow} & \diamond & \text{yellow} \\ \diamond & \diamond & \text{red} & \diamond \\ \diamond & \diamond & \diamond & \text{red} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \end{pmatrix}$

$1 - 4 \rightarrow A = \begin{pmatrix} \diamond & \text{yellow} & \text{red} & \diamond \\ \diamond & \diamond & \diamond & \text{yellow} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \text{red} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \end{pmatrix}$

$3 - 4 \rightarrow A = \begin{pmatrix} \diamond & \diamond & \text{yellow} & \text{yellow} \\ \diamond & \diamond & \text{red} & \text{red} \\ \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\ \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \end{pmatrix}$

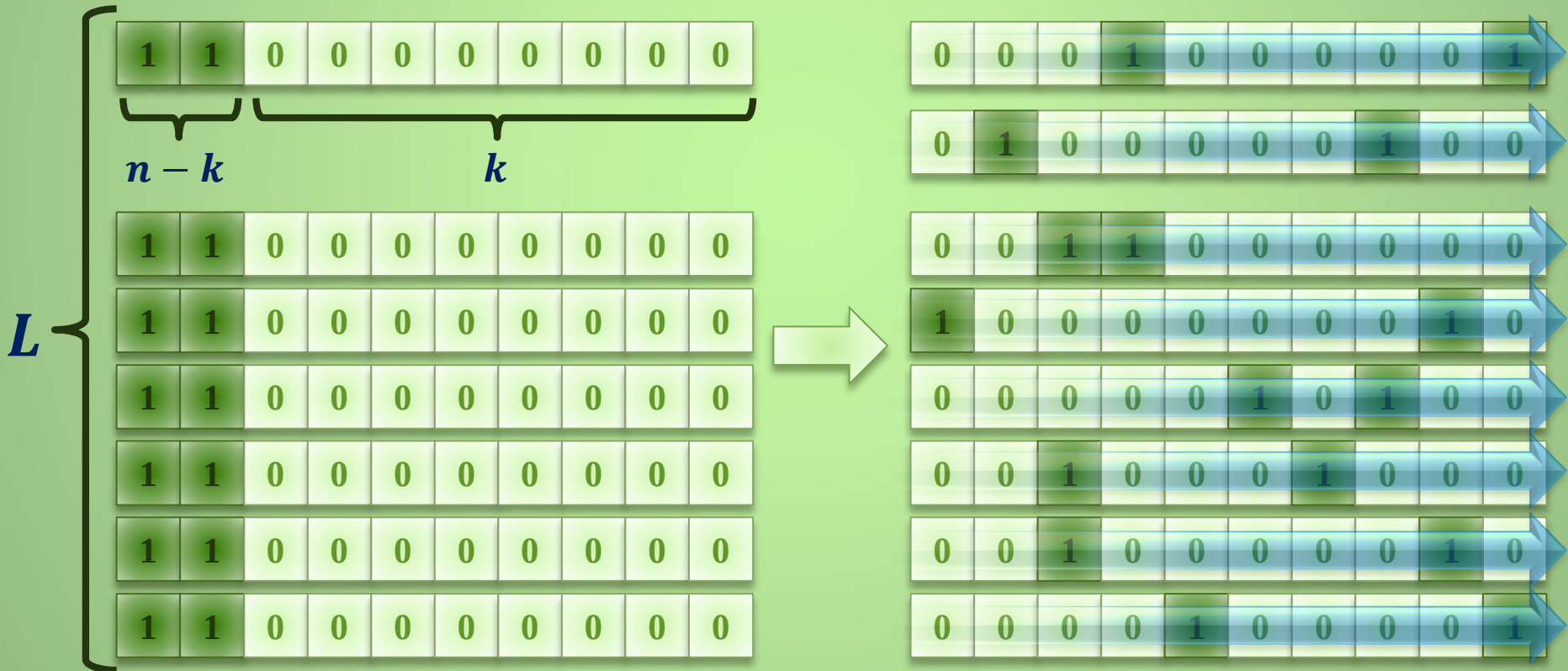
Výmena prvkov na pozíciách v permutácii – zmena matice:

$n = 5$



Local Search with Simulated Annealing Elements (LSSA)

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 & 6 & 0 & 4 & 9 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$



Local Search with Simulated Annealing Elements (LSSA)

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 & 6 & 0 & 4 & 9 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

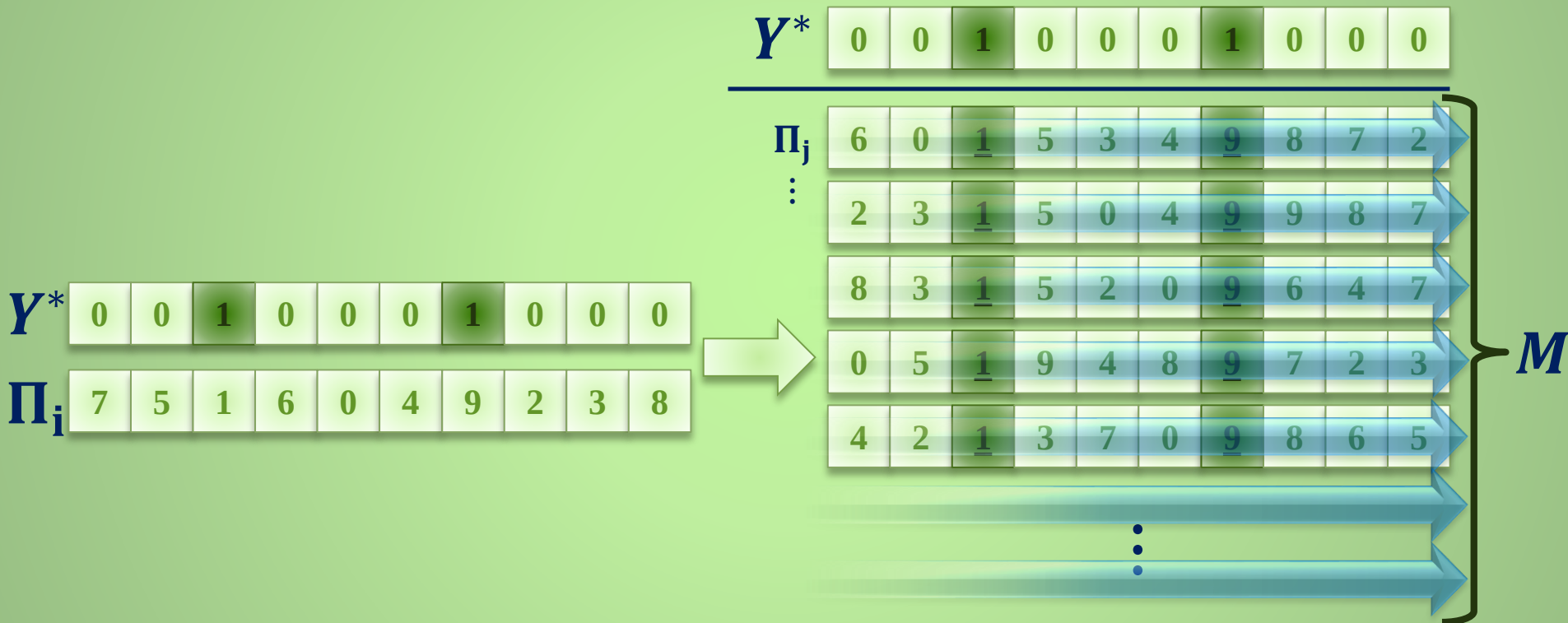
	y_1	y_2	y_3	...	y_n					
Y_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Y_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$\vdots$										
	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
Y_L	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

Y^* (min z)

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{\pi_i, \pi_j} b_{ij} y_i y_j$$

$\vdots$

Local Search – k -opt



$$\Pi_i^* = \arg \min z(\Pi_j)$$

$$z(\Pi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{\pi_i, \pi_j} b_{ij}$$

Simulated annealing elements

Π_i

7	5	1	6	0	4	9	2	3	8
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Π^*

4	2	<u>1</u>	3	7	0	<u>9</u>	8	6	5
---	---	----------	---	---	---	----------	---	---	---

ak $z(\Pi^*) \leq z(\Pi_i) \rightarrow \Pi_{i+1} = \Pi_i^*$

ak $z(\Pi^*) > z(\Pi_i) \rightarrow \Pi_{i+1} = \Pi_i^*$ s pravdepodobnosťou P_i

P_i : ak v $(i - 1)$ -vej iterácii: $\Pi_i = \Pi_{i-1}^*$:

$$P_i = P_i^* = e^A,$$

Inak (ak $\Pi_{i-1} = \Pi_i$):

$$P_i = \frac{P_i^*}{c^{j-1}(c - P_i^*) + P_i^*},$$

kde

$$A = \frac{z(\Pi_i) - z(\Pi_i^*)}{0,003 \cdot z(\Pi_i^*) \cdot \frac{(k-1)}{2n}}, \quad c = \begin{cases} 0,999 & , \text{ak } P_i^* < 0,999 \\ \frac{1}{2}(1 + P_i^*) & , \text{ak } P_i^* \geq 0,999 \end{cases}$$

Simulated annealing elements

- čím dlhšie nevieme nájsť lepšie Π , tým **vyššia** P
- čím horšie Π^* sú skúmané, tým **nižšia** P
- čím nižšia hodnota **k** , tým **nižšia** P – hodnota k sa postupne znižuje

P_i : ak v $(i - 1)$ -vej iterácii: $\Pi_i = \Pi_{i-1}^*$:

$$P_i = P_i^* = e^A,$$

Inak (ak $\Pi_{i-1} = \Pi_i$):

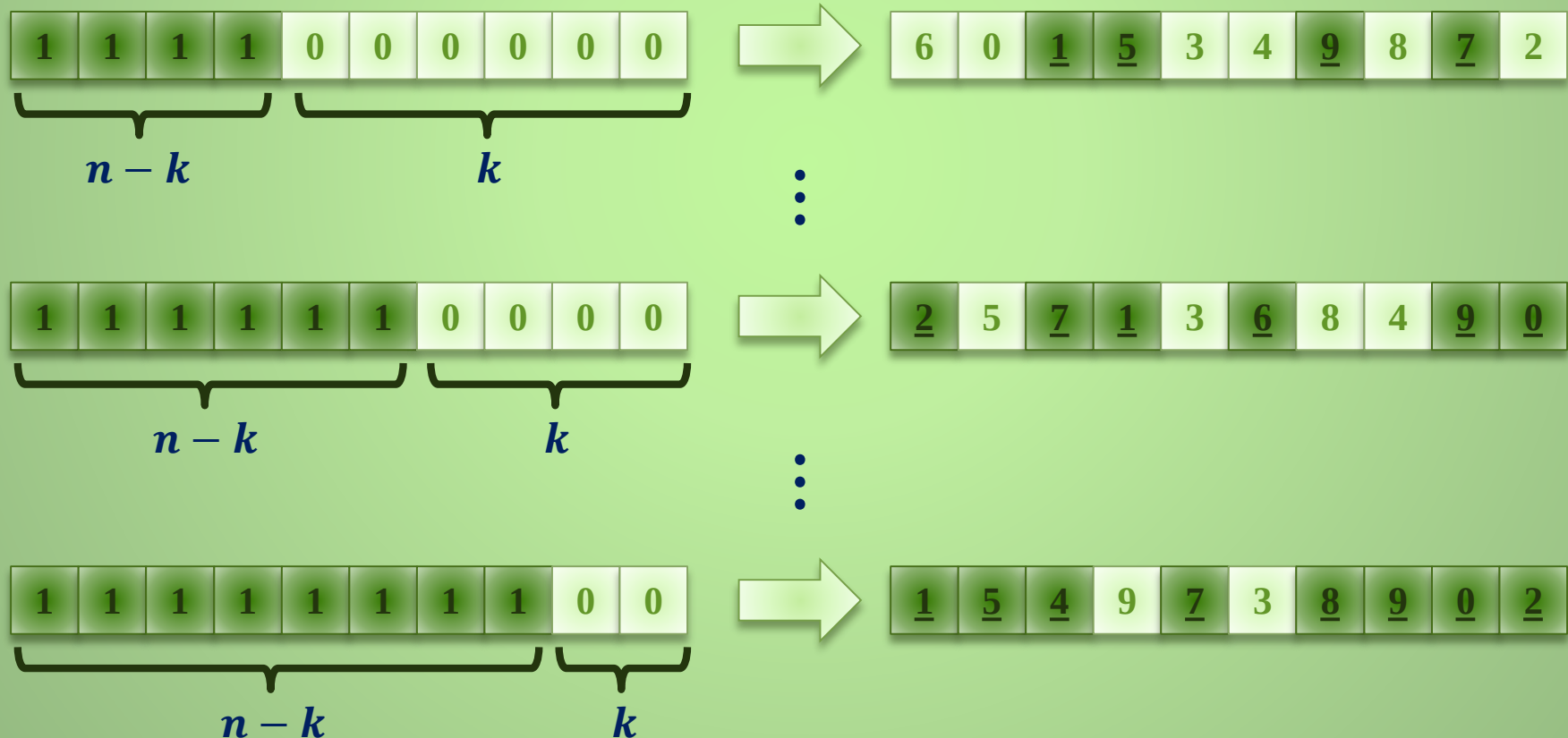
$$P_i = \frac{P_i^*}{c^{j-1}(c - P_i^*) + P_i^*},$$

kde

$$A = \frac{z(\Pi_i) - z(\Pi_i^*)}{0,003 \cdot z(\Pi_i^*) \cdot \frac{(k-1)}{2n}}, \quad c = \begin{cases} 0,999 & , \text{ak } P_i^* < 0,999 \\ \frac{1}{2}(1 + P_i^*) & , \text{ak } P_i^* \geq 0,999 \end{cases}$$

Simulated annealing elements

- čím dlhšie nevieme nájsť lepšie Π , tým **vyššia** P
- čím horšie Π^* sú skúmané, tým **nižšia** P
- čím nižšia hodnota k , tým **nižšia** P – hodnota k sa postupne znižuje



Problém	n BKS		LSSA		[mama] 2010		[ahuja] 2000		[ghand] 2010		[talbi01] 2001		[wu] 2008		[tang] 2006		[james] 2009		[tsu] 2008		[mis] 2003	
			APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time
kra30a	30	88900	0	0,17	-	-	0	150,7	-	-	-	-	0	0,29	-	-	-	-	0	2,84	2,45	0,77
kra30b	30	91420	0	0,27	-	-	0	165,3	-	-	-	-	0	0,34	-	-	-	-	0	2,82	1,14	0,77
nug20	20	2570	0	1,45	-	-	0	48,9	0	6,21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
nug30	30	6124	0	1,94	-	-	0,07	177,1	-	-	0	83	0	0,36	-	-	0	11	-	-	0,85	0,77
tho40	40	240516	0	1,13	-	-	0,2	479,1	-	-	-	-	0,041	1,98	-	-	-	-	-	-	1,18	1,74
tho50	50	8133398	0,05	2,4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,12	3123,6	-	-	-	-	-	-
sko42	42	15812	0	2,1	-	-	0	503,1	-	-	-	-	0	1,57	-	-	0	52,2	-	-	0,61	1,96
sko49	49	23386	0,006	3,9	-	-	0,21	626,1	-	-	-	-	0,038	3,78	-	-	0	110,9	0,024	12,84	0,57	3,02
sko56	56	34458	0	5,2	-	-	0,02	1488	0,144	522,73	-	-	0	7,36	-	-	0	209,9	-	-	0,57	4,41
sko64	64	48498	0	9,4	-	-	0,17	1894,1	-	-	0,001	974	0	12,11	-	-	0	429,6	0,005	28,13	0,5	6,47
sko72	72	66256	0,002	15,45	-	-	0,27	2539	0,188	1304,26	-	-	0,042	35,39	-	-	0	695	-	-	0,55	9,07
sko81	81	90998	0,009	24,12	-	-	0,2	5482,1	0,07	2004,03	0,048	2041	0,067	57,28	-	-	0	1212,5	0,044	58,79	0,43	12,8
sko90	90	115534	0,013	34,6	-	-	0,27	6348,9	-	-	-	-	0,073	102,5	-	-	0	1935,3	0,05	80,98	0,44	17,3
sko100a	100	152002	0,011	42,4	0,785	-	0,19	8304,1	0,099	4211,41	0	8220	0,051	174,13	0,06	283,2	0	3042,4	-	-	0,36	23,6
sko100b	100	153890	0,005	45,18	0,151	-	0,14	7364,7	-	-	0	8360	0,039	165,5	0,04	823	0	3091,4	-	-	0,35	23,6
sko100c	100	147862	0,006	41,6	1,063	-	0,01	10157,1	-	-	0	8220	0,015	158,54	0,01	531,6	0	3154,4	-	-	0,34	23,4
sko100d	100	149576	0,019	39,45	1,531	-	0,17	10151,1	-	-	0,001	12060	0,022	184,41	0,07	312,6	0	3091,9	-	-	0,43	23,6
sko100e	100	149150	0,007	44,6	0,799	-	0,23	10563,5	-	-	0	-	0,03	167,31	0,01	512,5	0	3085,6	-	-	0,45	23,6
sko100f	100	149036	0,011	43,31	0,896	-	0,19	10739,5	-	-	-	-	0,017	170,88	0,08	872,1	0,003	3096,4	-	-	0,47	23,6

BKS (best known solution) – najlepšie známe riešenie

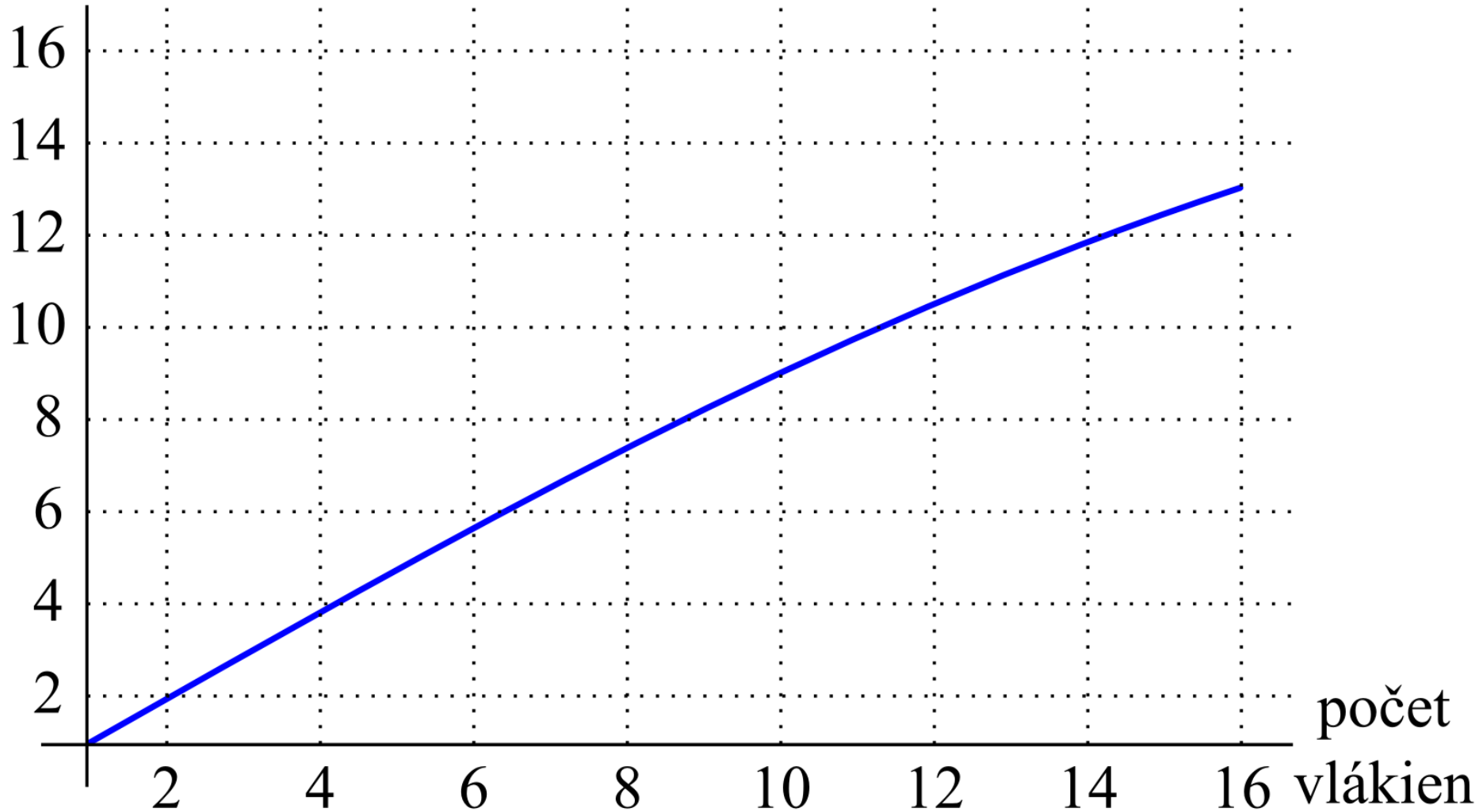
APD (average percentual deviation) – priemer. perc. odch. od BKS $\rightarrow APD = 100 \cdot \frac{C - BKS}{BKS}$

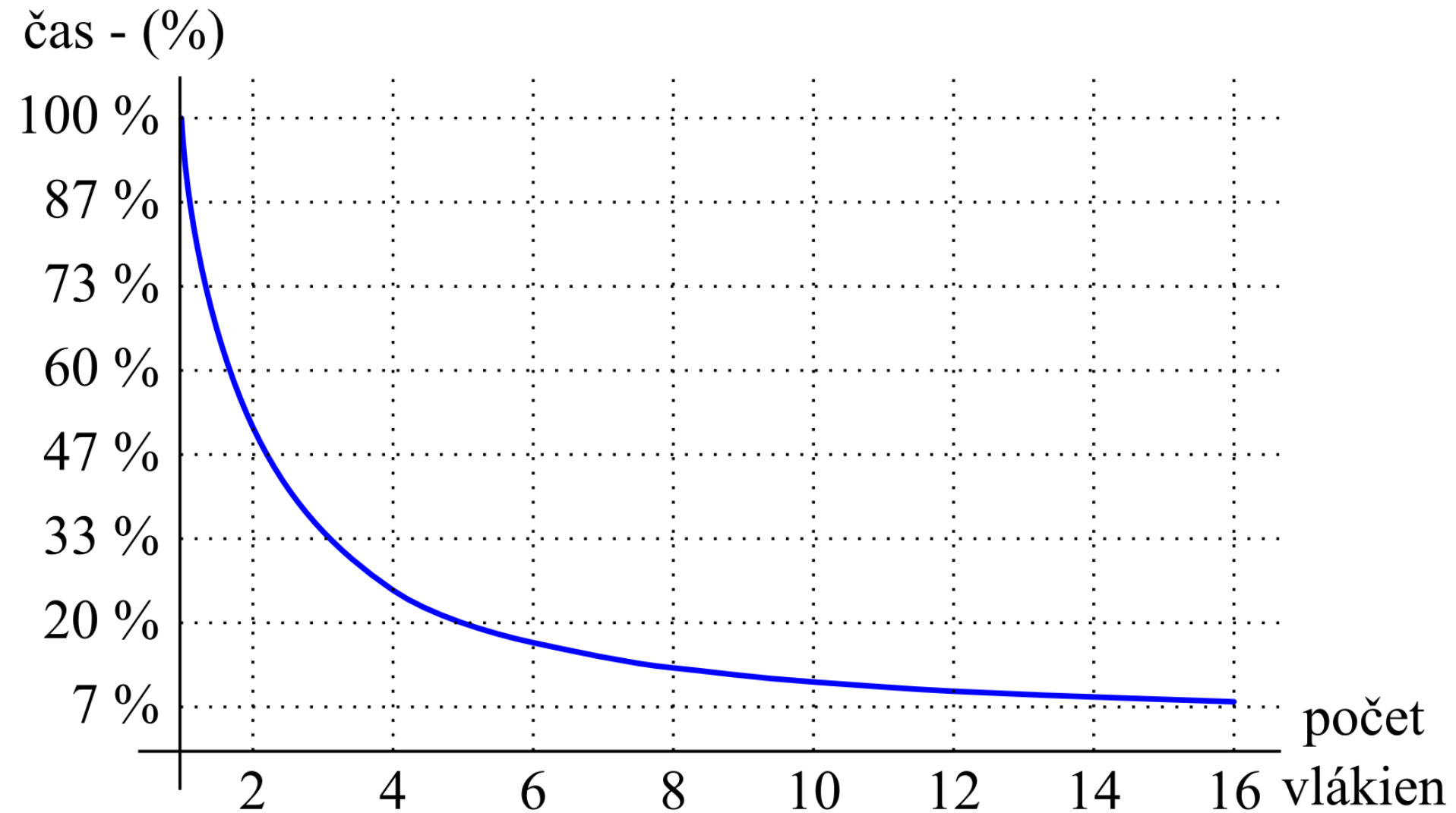
C – hodnota nájdeneho riešenia; **Time** – kumulovaný čas CPU

Výsledky hľadania

QAP – hľadanie rieš.

Problém	n BKS		LSSA		[mama] 2010		[ahuja] 2000		[ghand] 2010		[talbi01] 2001		[wu] 2008		[tang] 2006		[james] 2009		[tsu] 2008		[mis] 2003	
			APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time
<i>tai20a</i>	20	703482	0	1,12	0	-	-	-	-	-	0	26	-	-	-	-	0	1,5	-	-	-	-
<i>tai25a</i>	25	1167256	0	4,14	-	-	-	-	-	-	0,736	50	-	-	-	-	0	5,2	-	-	2,32	0,47
<i>tai30a</i>	30	1818146	0	6,94	1,462	-	-	-	0,68	72,64	0,018	87	-	-	-	-	0	10,6	-	-	2,23	0,78
<i>tai35a</i>	35	2422002	0	11,41	-	-	-	-	-	-	0,215	145	-	-	-	-	0	20,2	-	-	2,37	1,21
<i>tai40a</i>	40	3139370	0,094	19,81	2,237	-	-	-	1,349	233,2	0,442	224	-	-	-	-	0,148	37,7	0,495	6,81	2,45	1,76
<i>tai50a</i>	50	4941410	0,331	42,16	2,218	-	-	-	1,803	462,58	0,781	467	-	-	-	-	0,44	104,6	0,738	13,35	2,6	3,31
<i>tai60a</i>	60	7208572	0,349	76,45	2,207	-	-	-	1,93	948,61	0,919	820	-	-	-	-	0,476	265,1	0,881	23,2	2,56	5,6
<i>tai80a</i>	80	13557864	0,418	134,84	2,673	-	-	-	1,487	1242,47	0,663	2045	-	-	-	-	0,57	947,9	0,547	57	1,96	12,9
<i>tai100a</i>	100	21125314	0,218	243,91	1,375	-	-	-	-	-	0,278	8340	-	-	1,13	582,9	0,558	2608,7	-	-	1,82	24,6
<i>tai20b</i>	20	122455319	0	0,6	-	-	-	-	-	-	0	27	-	-	-	-	0	1,7	-	-	-	-
<i>tai25b</i>	25	344355646	0	1,74	-	-	-	-	0,552	19,42	0	50	-	-	-	-	0	6,3	-	-	-	-
<i>tai30b</i>	30	637117113	0	2,96	-	-	-	-	1,374	26,74	0	90	-	-	-	-	0	13,8	-	-	-	-
<i>tai35b</i>	35	283315445	0	5,4	-	-	-	-	1,103	53,34	0,0408	147	-	-	-	-	0	25,9	-	-	-	-
<i>tai40b</i>	40	637250948	0,024	9,48	-	-	-	-	-	-	0,464	240	-	-	-	-	0	48,3	0	6,71	-	-
<i>tai50b</i>	50	458821517	0	17,51	-	-	-	-	-	-	0,2531	480	-	-	-	-	0	138,1	-	-	-	-
<i>tai60b</i>	60	608215054	0,006	35,66	-	-	-	-	-	-	0,2752	855	-	-	-	-	0	305	0,001	23,17	-	-
<i>tai80b</i>	80	818415043	0,051	83,49	-	-	-	-	0,717	1147,28	0,7185	2073	-	-	-	-	0	1106,3	0,208	56,13	-	-
<i>tai100b</i>	100	1185996137	0,004	188,47	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	220,7	0,001	2403,8	0,055	114,89	-	-
<i>tai150b</i>	150	498896643	0,052	398,08	0,67	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,076	73298,8	-	-	-	-
<i>tai256c</i>	256	44759294	0,067	442,13	0,56	-	-	-	-	-	0,085	44460	-	-	-	-	0,136	73298,8	-	-	-	-
<i>wil50</i>	50	48816	0	6,81	-	-	0,07	1057,6	0,068	336,72	0,008	441	0,028	5,06	-	-	-	-	-	-	0,2	3,19
<i>wil100</i>	100	273038	0	167,76	-	-	0,18	10271,9	-	-	0,006	28680	0,041	176,28	0,02	560,1	0	3161,3	-	-	0,22	23,6

zrýchlenie - $S_p(n)$ 



Hybrid parallel cooperative island model genetic algorithm (HyPa-CIGA)

island 1

ostrov 1

GA

island 5

ostrov 5

GA

island 3

ostrov 3

GA

island 4

ostrov 4

GA

island 2

ostrov 2

GA

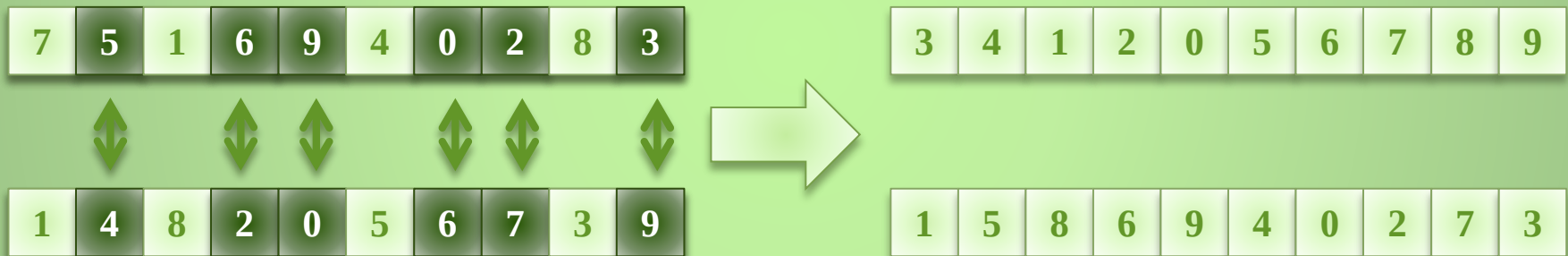
island n

ostrov n

GA

Genetický algoritmus

1. **Vygenerovanie úvodnej populácie** – náhodné
2. **Ohodnotenie, výber rodičov** – pravdepodobnostný výber – väčšie udržiavanie rôznorodosti populácie
3. **Kríženie** – náhodné párovanie, PMX kríženie – prenesenie, resp. zachovanie min. 60% génov.



4. **Mutácia** – výmenná mutácia ($P = 0,01$)



5. **Selekcia, vytvorenie novej populácie** – elitistická selekcia (rodičia + potomkovia)

Hybrid parallel cooperative island model genetic algorithm (HyPa-CIGA)

island 1

ostrov 1

GA

island 5

ostrov 5

GA

rock island

kamenný ostrov

s-LSSA

island 3

ostrov 3

GA

island 4

ostrov 4

GA

island 2

ostrov 2

GA

island n

ostrov n

GA

s-LSSA

1. Náhodné vygenerovanie úvodného priradenia
2. Preskúmanie vhodných existujúcich umiestnení vo vektore
3. Local search (k -opt)
4. Princíp simulovaného žihania

Lokálne hľadanie – lokálna optimalizácia začiatočného riešenia

Hybrid parallel cooperative island model genetic algorithm (HyPa-CIGA)

island 1

ostrov 1

GA



island 5

ostrov 5

GA



rock island

kamenný ostrov

s-LSSA



island 3

ostrov 3

GA



island 4

ostrov 4

GA



island 2

ostrov 2

GA



island n

ostrov n

GA



Ostrov – úložné miesto

Ostrov (GA):

- Priebežne aktualizované informácie o generácii, najlepších jedincoch, konvergencii populácie, rôznorodosti jedincov
- Rôznorodosť jedincov (entropia):

$$E_i = - \sum_{j=1}^Q p_j \log(p_j)$$

Q – počet navzájom rôznych jedincov v i -tej populácii;

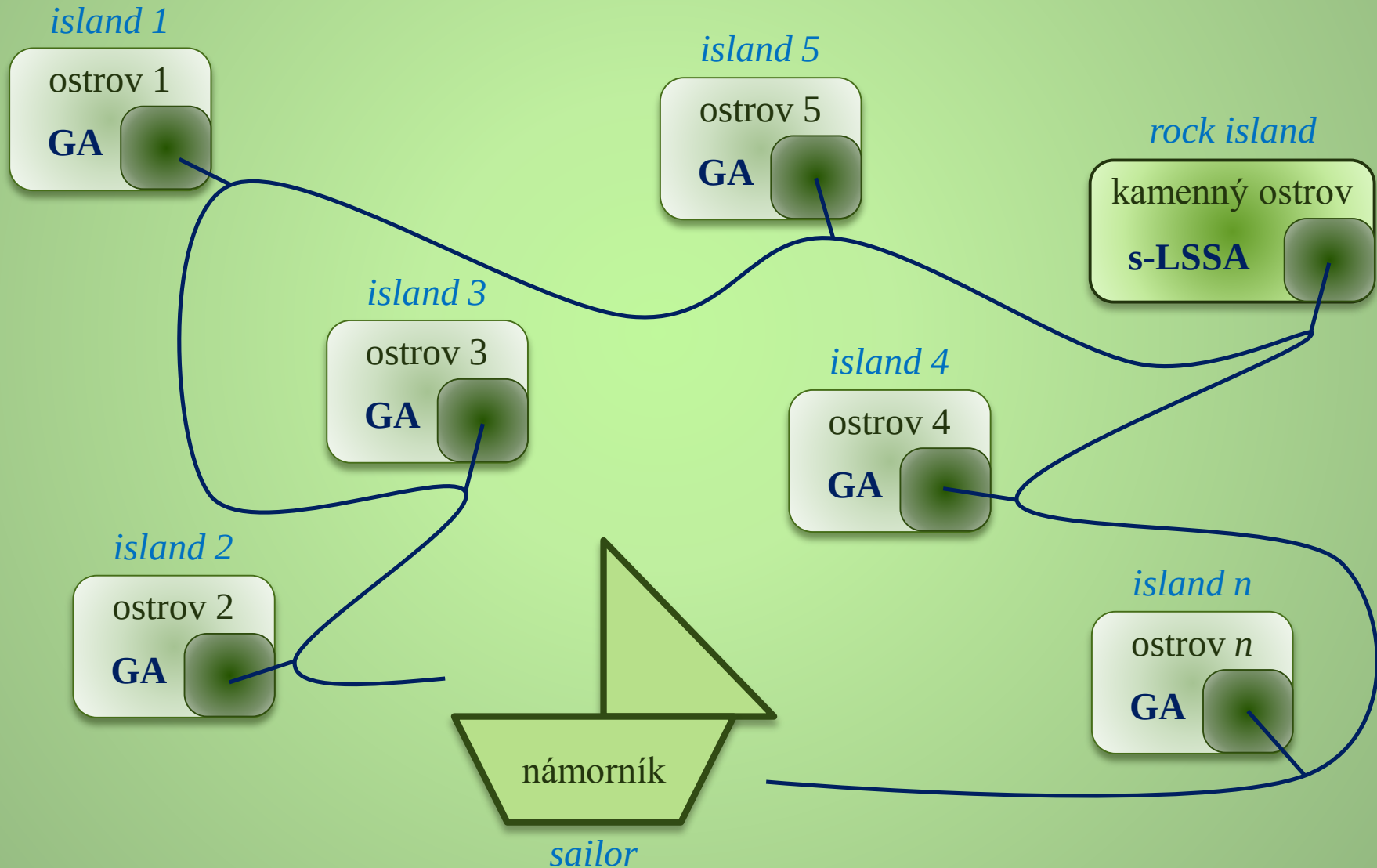
$S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{iQ}$ - disjunktné množiny navzájom rôznych jedincov

$p_j = \frac{|S_{ij}|}{N}$; N – veľkosť populácie

Kamenný ostrov (s-LSSA):

- Priebežne aktualizované informácie o počte krokov LS a hodnotení aktuálneho riešenia

Hybrid parallel cooperative island model genetic algorithm (HyPa-CIGA)



Námorník

- Pravidelne kontroluje úložné miesta na všetkých ostrovoch vždy v rovnakom poradí
- Vyhodnocuje, uchováva a priebežne aktualizuje globálne najlepšie nájdené riešenia
- Kontroluje rozdiel rôznorodosti populácií na GA ostrovoch
- Zbiera riešenia poskytnuté kamenným ostrovom a dodáva ich na GA ostrovy (zabezpečenie vyššej rôznorodosti populácie a zároveň aplikácia LS do hľadania)
- Na kamenný ostrov dodáva do nového lokálneho hľadania najlepšie aktuálne globálne riešenie nájdené GA
- Pri poklese rôznorodosti populácie na ostrovoch dodáva do danej populácie kvalitné riešenia z iných ostrovov a z kamenného ostrova
- Rozhoduje o ukončení algoritmu

Výhody algoritmu

- **Kooperatívny paralelný algoritmus** – potenciál nájsť kvalitné riešenia
- **Hybridný algoritmus** – evolúcia zásobovaná jedincami optimalizovanými pomocou LS s SA – náhodnosť evolúcie ovplyvňovaná usmerneným hľadaním
- **Asynchrónny paralelný algoritmus** – jednotlivé procesy nie sú navzájom synchronizované – odpadá potreba čakať na ostatné procesy (úspora času)
- **Distribúcia a analýza dát prostredníctvom externého procesu** – dáta o jednotlivých evolúciách nevyhodnocujú jednotlivé procesy, ale externé vlákno (námorník) – úspora času jednotlivých procesov

Výsledky hľadania

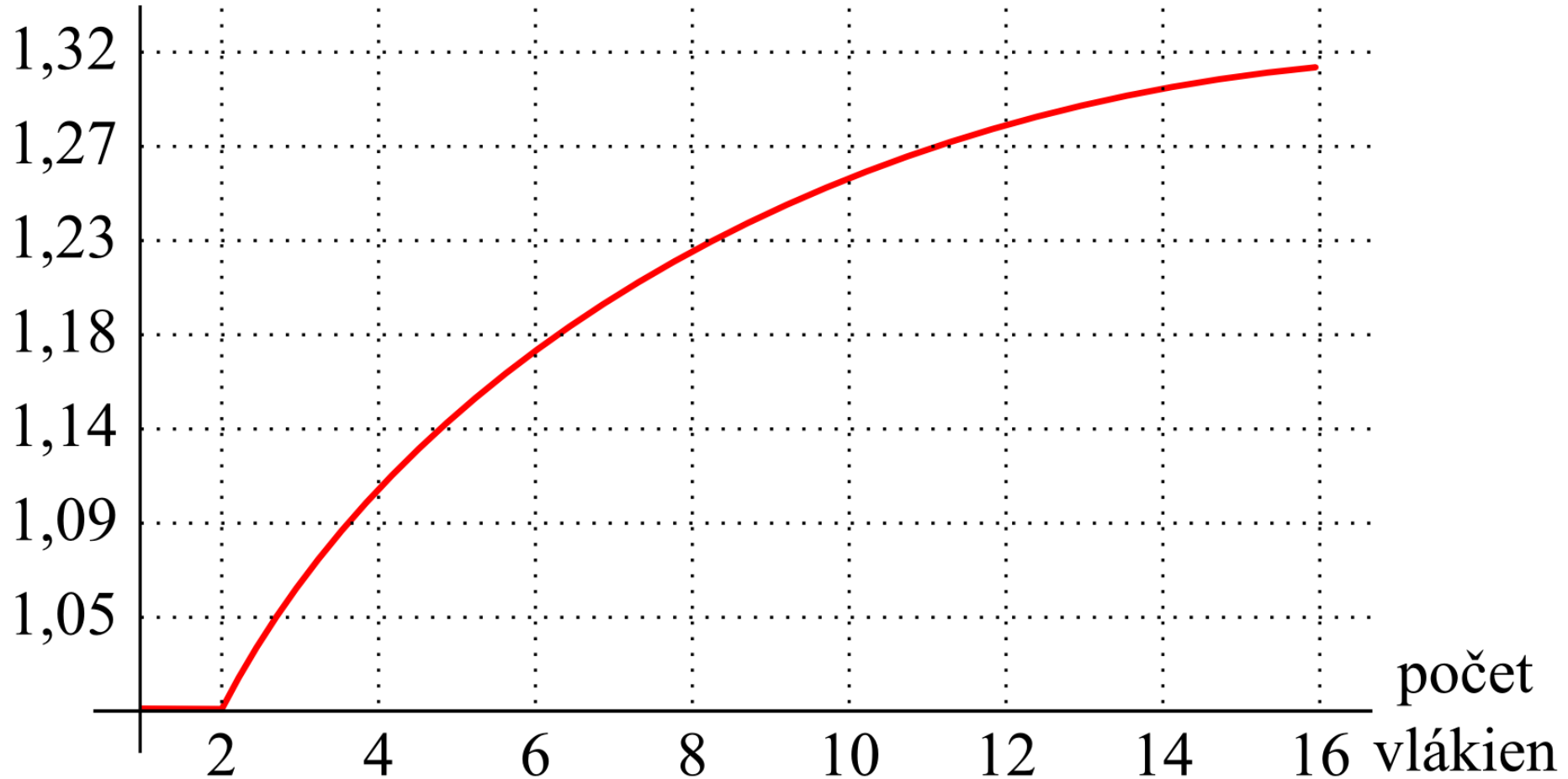
QAP – hľadanie rieš.

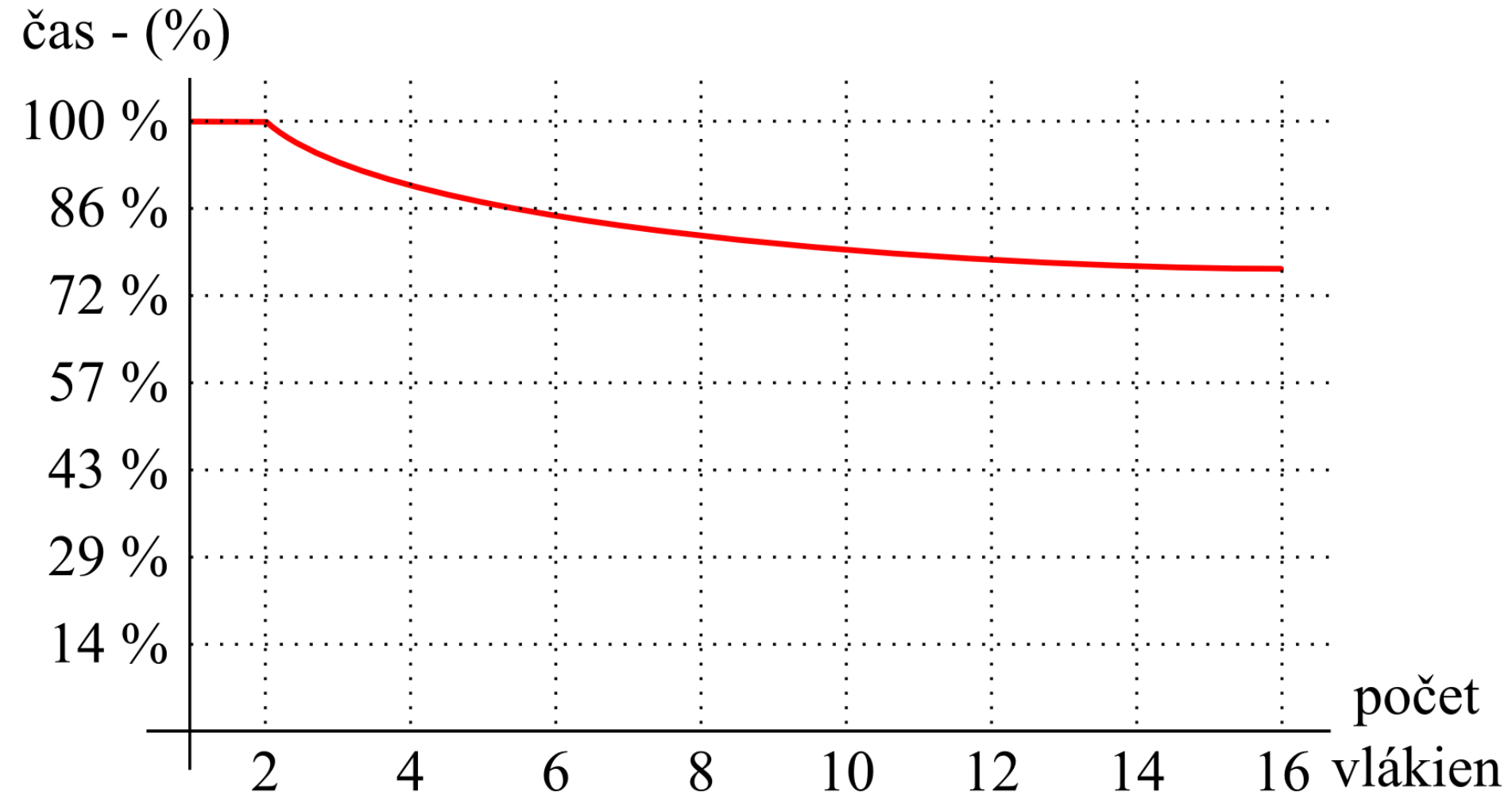
Problém	nBKS		HyPa-CIGA		LSSA		[mama] 2010		[ahuja] 2000		[ghand] 2010		[talbi01] 2001		[wu] 2008		[tang] 2006		[james] 2009		[tsu] 2008		[mis] 2003	
			APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time
kra30a	30	88900	0	0,4823	0	0,17	-	-	0	150,7	-	-	-	-	0	0,29	-	-	-	-	0	2,84	2,45	0,77
kra30b	30	91420	0	0,7257	0	0,27	-	-	0	165,3	-	-	-	-	0	0,34	-	-	-	-	0	2,82	1,14	0,77
nug20	20	2570	0	4,1515	0	1,45	-	-	0	48,9	0	6,21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
nug30	30	6124	0	5,5871	0	1,94	-	-	0,07	177,1	-	-	0	83	0	0,36	-	-	0	11	-	-	0,85	0,77
tho40	40	240516	0	3,2472	0	1,13	-	-	0,2	479,1	-	-	-	-	0,041	1,98	-	-	-	-	-	-	1,18	1,74
tho50	50	8133398	0,03	6,9856	0,05	2,4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,12	3123,6	-	-	-	-	-	-
ska42	42	15812	0	5,7014	0	2,1	-	-	0	503,1	-	-	-	-	0	1,57	-	-	0	52,2	-	-	0,61	1,96
ska49	49	23386	0	11,125	0,006	3,9	-	-	0,21	626,1	-	-	-	-	0,038	3,78	-	-	0	110,9	0,024	12,84	0,57	3,02
ska56	56	34458	0	15,136	0	5,2	-	-	0,02	1488	0,144	522,73	-	-	0	7,36	-	-	0	209,9	-	-	0,57	4,41
ska64	64	48498	0	26,928	0	9,4	-	-	0,17	1894,1	-	-	0,001	974	0	12,11	-	-	0	429,6	0,005	28,13	0,5	6,47
ska72	72	66256	0	41,233	0,002	15,45	-	-	0,27	2539	0,188	1304,26	-	-	0,042	35,39	-	-	0	695	-	-	0,55	9,07
ska81	81	90998	0	69,347	0,009	24,12	-	-	0,2	5482,1	0,07	2004,03	0,048	2041	0,067	57,28	-	-	0	1212,5	0,044	58,79	0,43	12,8
ska90	90	115534	0,004	100,38	0,013	34,6	-	-	0,27	6348,9	-	-	-	-	0,073	102,5	-	-	0	1935,3	0,05	80,98	0,44	17,3
ska100a	100	152002	0,003	119,03	0,011	42,4	0,785	-	0,19	8304,1	0,099	4211,41	0	8220	0,051	174,13	0,06	283,2	0	3042,4	-	-	0,36	23,6
ska100b	100	153890	0	129,13	0,005	45,18	0,151	-	0,14	7364,7	-	-	0	8360	0,039	165,5	0,04	823	0	3091,4	-	-	0,35	23,6
ska100c	100	147862	0,001	115,46	0,006	41,6	1,063	-	0,01	10157,1	-	-	0	8220	0,015	158,54	0,01	531,6	0	3154,4	-	-	0,34	23,4
ska100d	100	149576	0,003	111,91	0,019	39,45	1,531	-	0,17	10151,1	-	-	0,001	12060	0,022	184,41	0,07	312,6	0	3091,9	-	-	0,43	23,6
ska100e	100	149150	0,005	126,28	0,007	44,6	0,799	-	0,23	10563,5	-	-	0	-	0,03	167,31	0,01	512,5	0	3085,6	-	-	0,45	23,6
ska100f	100	149036	0,007	120,85	0,011	43,31	0,896	-	0,19	10739,5	-	-	-	-	0,017	170,88	0,08	872,1	0,003	3096,4	-	-	0,47	23,6
tai20a	20	703482	0	3,1502	0	1,12	0	-	-	-	-	-	0	26	-	-	-	-	0	1,5	-	-	-	-
tai25a	25	1167256	0	11,422	0	4,14	-	-	-	-	-	-	0,736	50	-	-	-	-	0	5,2	-	-	2,32	0,47

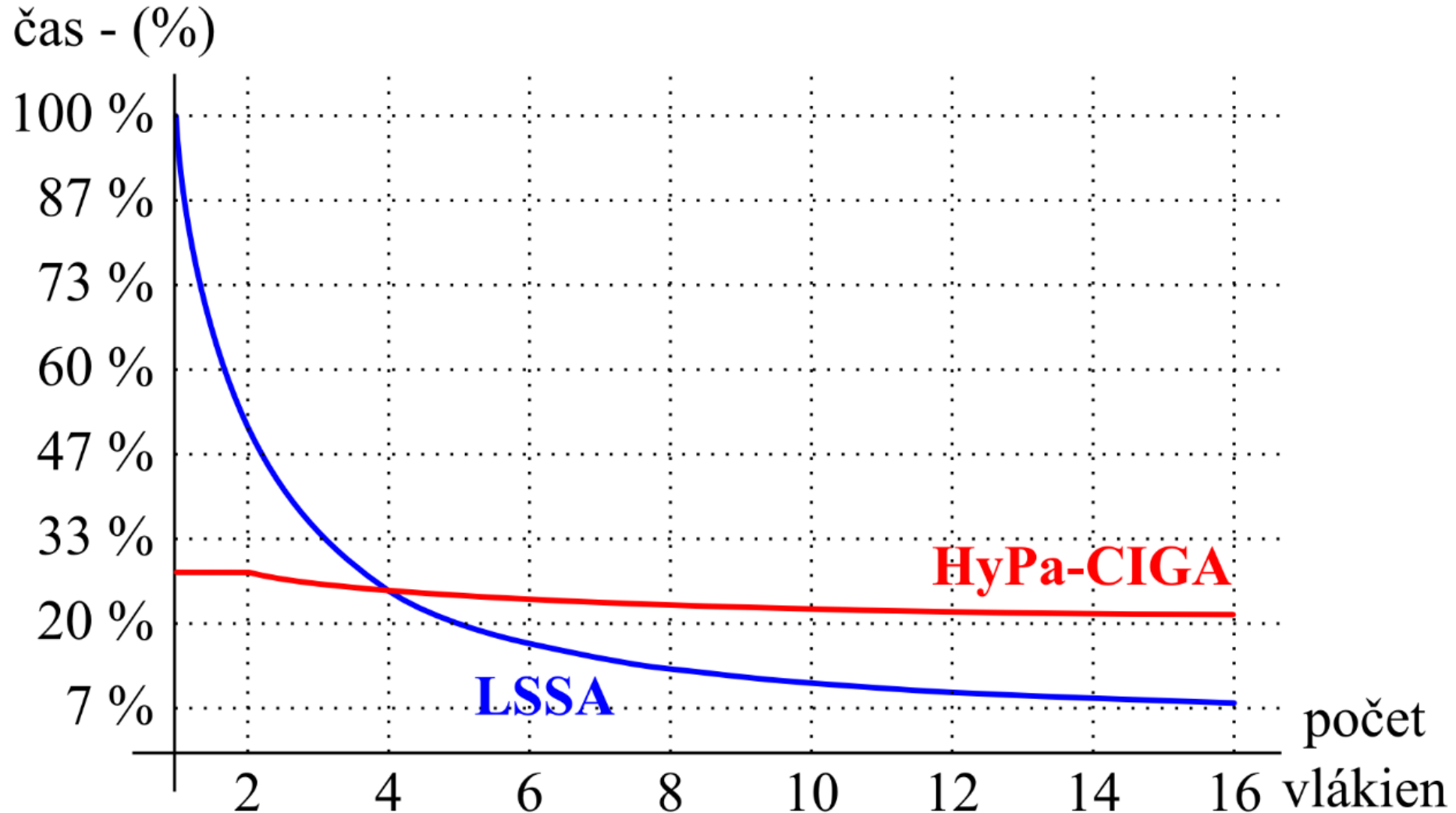
Výsledky hľadania

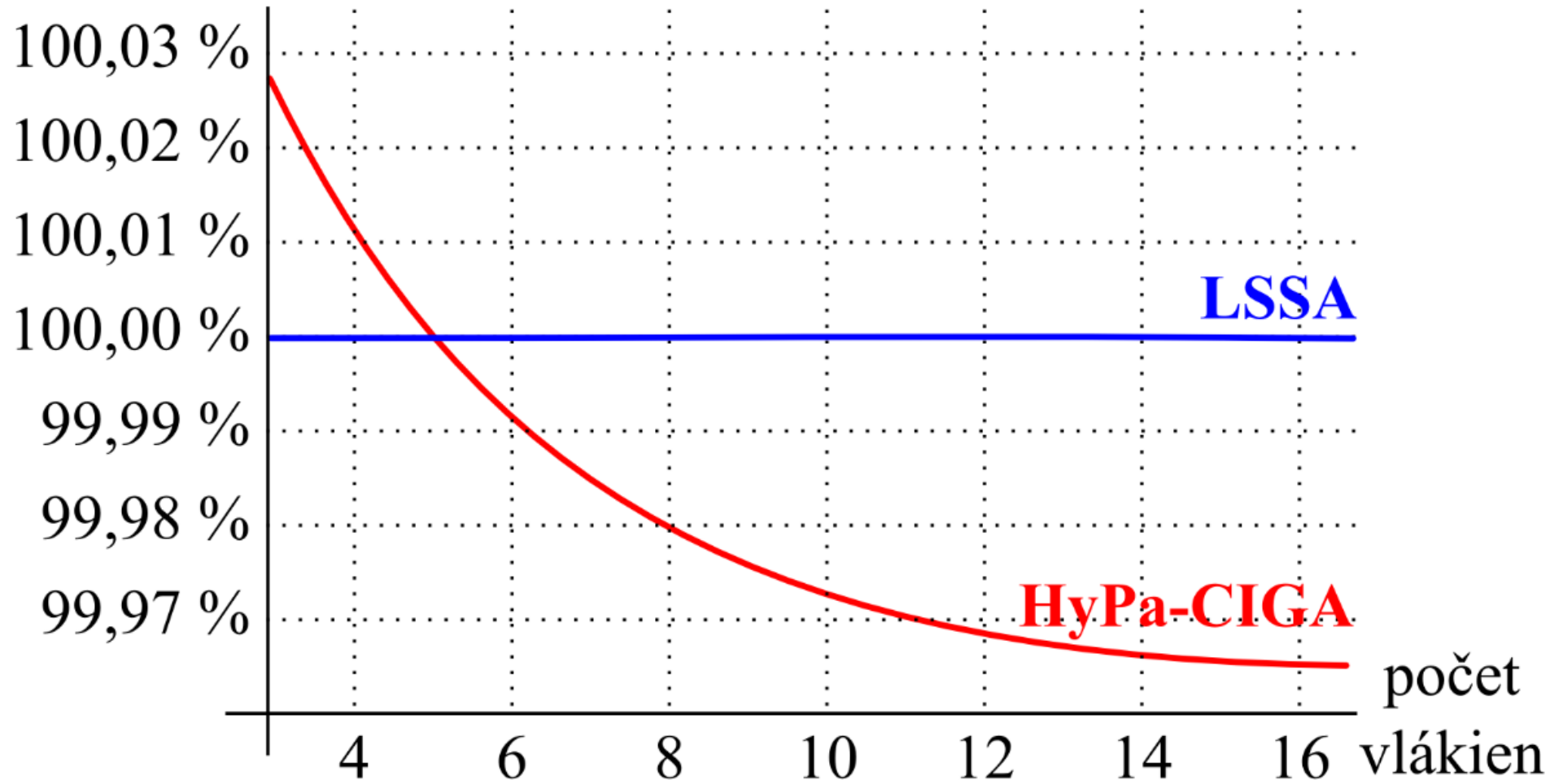
QAP – hľadanie rieš.

Problém	<i>n</i> <i>BKS</i>		HyPa-CIGA		LSSA		[mama] 2010		[ghand] 2010		[talbi01] 2001		[wu] 2008		[tang] 2006		[james] 2009		[tsu] 2008		[mis] 2003	
			APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time	APD	Time
<i>tai30a</i>	30	1818146	0	20,266	0	6,94	1,462	-	0,68	72,64	0,018	87	-	-	-	-	0	10,6	-	-	2,23	0,78
<i>tai35a</i>	35	2422002	0	33,16	0	11,41	-	-	-	-	0,215	145	-	-	-	-	0	20,2	-	-	2,37	1,21
<i>tai40a</i>	40	3139370	0,018	57,342	0,094	19,81	2,237	-	1,349	233,2	0,442	224	-	-	-	-	0,148	37,7	0,495	6,81	2,45	1,76
<i>tai50a</i>	50	4941410	0,107	123,55	0,331	42,16	2,218	-	1,803	462,58	0,781	467	-	-	-	-	0,44	104,6	0,738	13,35	2,6	3,31
<i>tai60a</i>	60	7208572	0,084	215,74	0,349	76,45	2,207	-	1,93	948,61	0,919	820	-	-	-	-	0,476	265,1	0,881	23,2	2,56	5,6
<i>tai80a</i>	80	13557864	0,097	379,35	0,418	134,84	2,673	-	1,487	1242,47	0,663	2045	-	-	-	-	0,57	947,9	0,547	57	1,96	12,9
<i>tai100a</i>	100	21125314	0,09	694,47	0,218	243,91	1,375	-	-	-	0,278	8340	-	-	1,13	582,9	0,558	2608,7	-	-	1,82	24,6
<i>tai20b</i>	20	122455319	0	1,6214	0	0,6	-	-	-	-	0	27	-	-	-	-	0	1,7	-	-	-	-
<i>tai25b</i>	25	344355646	0	4,746	0	1,74	-	-	0,552	19,42	0	50	-	-	-	-	0	6,3	-	-	-	-
<i>tai30b</i>	30	637117113	0	8,2643	0	2,96	-	-	1,374	26,74	0	90	-	-	-	-	0	13,8	-	-	-	-
<i>tai35b</i>	35	283315445	0	14,94	0	5,4	-	-	1,103	53,34	0,0408	147	-	-	-	-	0	25,9	-	-	-	-
<i>tai40b</i>	40	637250948	0	26,433	0,024	9,48	-	-	-	-	0,464	240	-	-	-	-	0	48,3	0	6,71	-	-
<i>tai50b</i>	50	458821517	0	49,299	0	17,51	-	-	-	-	0,2531	480	-	-	-	-	0	138,1	-	-	-	-
<i>tai60b</i>	60	608215054	0	101,77	0,006	35,66	-	-	-	-	0,2752	855	-	-	-	-	0	305	0,001	23,17	-	-
<i>tai80b</i>	80	818415043	0,011	237,75	0,051	83,49	-	-	0,717	1147,28	0,7185	2073	-	-	-	-	0	1106,3	0,208	56,13	-	-
<i>tai100b</i>	100	1185996137	0	519,82	0,004	188,47	-	-	-	-	-	-	-	-	0	220,7	0,001	2403,8	0,055	114,89	-	-
<i>tai150b</i>	150	498896643	0,002	1164,9	0,052	398,08	0,67	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,076	73298,8	-	-	-	-
<i>tai256c</i>	256	44759294	0,031	1233,9	0,067	442,13	0,56	-	-	-	0,085	44460	-	-	-	-	0,136	73298,8	-	-	-	-
<i>wil50</i>	50	48816	0	18,835	0	6,81	-	-	0,068	336,72	0,008	441	0,028	5,06	-	-	-	-	-	-	0,2	3,19
<i>wil100</i>	100	273038	0	473,99	0	167,76	-	-	-	-	0,006	28680	0,041	176,28	0,02	560,1	0	3161,3	-	-	0,22	23,6

zrýchlenie - $S_p(n)$ 





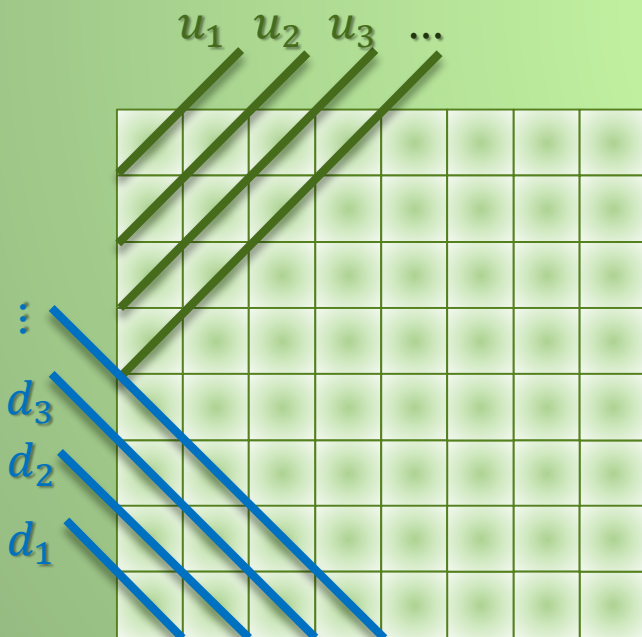
kvalita riešenia - $z(\pi)$ 

- [ghand] GHANDESHTANI, K. S. - MOLLAI, N. - SEYEDKASHI, S. M. H. - NESHATI, M. M.: New Simulated Annealing Algorithm for Quadratic Assignment Problem. In ADVCOMP 2010 : The Fourth International Conference on Advanced Engineering Computing and Applications in Sciences, Florence, Italy: IARIA, 25.-30.10.2010. ISBN: 978-1-61208-101-4, s. 87-92
- [tang] TANG, J. - LIM, M. H. - ONG, Y. S. - ER, M. J.: Parallel Memetic Algorithm with Selective Local Search for Large Scale Quadratic Assignment Problems. In International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 2, no. 6., 2006, s. 1399-1416.
- [talbi01] TALBI, E-G. - ROUX, O. - FONLUPT, C. - ROBILLARD, D.: Parallel Ant Colonies for the quadratic assignment problem. In: Future Generation Computer Systems, Vol. 17, Issue 8, s. 441-449. Elsevier, 2001. ISSN: 0167-739X.
- [james2] JAMES, T. - REGO, C. - GLOVER, F.: A cooperative parallel tabu search algorithm for the quadratic assignment problem. In European Journal of Operational Research, vol. 195, 2009, s. 810-826.
- [tsu] TSUTSUI, S.: Parallel Ant Colony Optimization for the Quadratic Assignment Problems with Symmetric Multi Processing. In ANTS '08 Proceedings of the 6th international conference on Ant Colony Optimization and Swarm Intelligence, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg: 2008, s. 363-370. ISBN: 978-3-540-87526-0.
- [ahuja] AHUJA, R. K. - ORLIN, J. B. - TIWARI, A.: A greedy genetic algorithm for the quadratic assignment problem. In Computers & Operations Research, vol. 27, issue 10., Elsevier Science Ltd. Oxford, UK: september 2000, s. 917-934.
- [mama] MAMAGHANI, A. S. - MEYBODI, M. R.: An Application of Imperialist Competitive Algorithm to Solve the Quadratic Assignment Problem. In 6th International Conference on Internet Technology and Secured Transactions, 11-14 December 2011, Abu Dhabi, United Arab Emirates, s. 562-565. ISBN 978-1-4577-0884-8.
- [wu] WU, Y. - JI, P.: Solving the Quadratic Assignment Problems by a Genetic Algorithm with a New Replacement Strategy. In International Journal of Computational Intelligence, vol. 4, no. 3., s. 225-229, 2008
- [mis] MISEVIČIUS, A.: A Modified Simulated Annealing Algorithm for the Quadratic Assignment Problem. In INFORMATICA, vol. 14, No. 4. Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius: 2003. s. 497-514.

Minimalizovať

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \left(\frac{1}{2} p_d(i) \cdot (p_d(i) - 1) + \frac{1}{2} p_u(i) \cdot (p_u(i) - 1) \right)$$

Za podmienok:



$$p_d(i) = \sum_{j=1}^n q_{j,i-n+j}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 2n-1,$$

$$p_u(i) = \sum_{j=1}^n q_{n-j+1,i-n+j}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 2n-1,$$

$$q_{r,s} \in \{0,1\}, \quad \forall r, s = 1, 2, \dots, n$$

$$q_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{ak na pozícii riadku } r \text{ a stĺpci } s \text{ leží dáma} \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch} \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^n q_{r,s} = 1, \quad \forall r = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^n q_{r,s} = 1, \quad \forall s = 1, 2, \dots, n$$

$$Q = (q_{r,s})$$

Počet dám (n)	Čas hľadania
< 200 000	< 1 s.
1 000 000	< 1 s.
5 000 000	2 s.
10 000 000	3 s.
20 000 000	7 s.
30 000 000	10 s.
40 000 000	14 s.
50 000 000	18 s.
60 000 000	23 s.
70 000 000	26 s.
80 000 000	31 s.
90 000 000	35 s.
100 000 000	38 s.
110 000 000	42 s.
120 000 000	45 s.
132 000 000	50 s.
134 000 000	51 s.

Ďakujem za pozornosť