

Matematická analýza 1

2026/2027

5. Elementárne funkcie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou  získate nápomoc.

Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

- 1 Elementárne funkcie
- 2 Polynóm
- 3 Racionálna lomená funkcia
- 4 Mocninná funkcia
- 5 Exponenciálna funkcia
- 6 Logaritmická funkcia
- 7 Goniometrické funkcie
- 8 Cyklometrické funkcie
- 9 Hyperbolické funkcie
- 10 Hyperbolometrické funkcie

Elementárne funkcie – Základné elementárne funkcie

Elementárne funkcie majú veľký praktický význam.

1

- Pomocou nich môžeme (jednoducho a relatívne presne) aproximovať mnohé zložité funkcie.
- Pomocou nich môžeme (aspoň približne) popísať (prírodné, ekonomické, spoločenské, ...) zákonitosti a javy.

Elementárne funkcie – Základné elementárne funkcie

Elementárne funkcie majú veľký praktický význam.

2

- Pomocou nich môžeme (jednoducho a relatívne presne) aproximovať mnohé zložité funkcie.
- Pomocou nich môžeme (aspoň približne) popísať (prírodné, ekonomické, spoločenské, ...) zákonitosti a javy.

Základnou elementárnou funkciou nazývame každú z funkcií:

- $y = \text{konšt.}$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctg x$.

Elementárne funkcie – Základné elementárne funkcie

Elementárne funkcie majú veľký praktický význam.

3

- Pomocou nich môžeme (jednoducho a relatívne presne) aproximovať mnohé zložité funkcie.
- Pomocou nich môžeme (aspoň približne) popísať (prírodné, ekonomické, spoločenské, ...) zákonitosti a javy.

Základnou elementárnou funkciou nazývame každú z funkcií:

- $y = \text{konšt.}$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \arctg x$.

Elementárnou funkciou nazývame

každú funkciu, ktorú dokážeme utvoriť zo základných elementárnych funkcií funkcií pomocou operácií:

- sčítania,
- odčítania,
- násobenia,
- delenia a
- skladania funkcií.

Elementárne funkcie – Základné elementárne funkcie

Elementárne funkcie majú veľký praktický význam.

4

- Pomocou nich môžeme (jednoducho a relatívne presne) aproximovať mnohé zložité funkcie.
- Pomocou nich môžeme (aspoň približne) popísať (prírodné, ekonomické, spoločenské, ...) zákonitosti a javy.

Základnou elementárnou funkciou nazývame každú z funkcií:

- $y = \text{konšt.}$,
- $y = x$,
- $y = e^x$,
- $y = \ln x$,
- $y = \sin x$,
- $y = \arcsin x$,
- $y = \operatorname{arctg} x$.

Elementárnou funkciou nazývame

každú funkciu, ktorú dokážeme utvoriť zo základných elementárnych funkcií funkcií pomocou operácií:

- sčítania, • odčítania, • násobenia, • delenia a • skladania funkcií.
- Zúženie ľubovoľnej elementárnej funkcie na nejakú nenulovú množinu je opäť elementárna funkcia.
- Elementárne funkcie sú napríklad funkcie:

$$y = 2x, \text{ resp. } y = 2x, x \in \langle 0; 1 \rangle, \text{ resp. } y = 2x^2, \text{ resp. } y = 2 + x, \text{ resp. } y = 2 \sin \frac{x+2}{x-1}, \text{ atď.}$$

Elementárne funkcie – Rozdelenie elementárnych funkcií

Elementárne funkcie:

- Polynóm (racionálna celistvá funkcia).
 - Racionálna lomená funkcia (podiel polynómov).
 - Mocninná funkcia ($y = x^r$, $r \in \mathbb{R}$).
 - Exponenciálna funkcia ($y = a^x$, $a > 0$).
 - Logaritmická funkcia.
 - Goniometrické funkcie (sínus, kosínus, tangens, kotangens).
 - Cyklometrické funkcie (inverzné ku goniometrickým funkciám).
 - Hyperbolické funkcie (sínus hyperbolický, kosínus hyperbolický, tangens hyperbolický, kotangens hyperbolický).
 - Hyperbolometrické funkcie (inverzné ku hyperbolickým funkciám).
-

[Taktiež všetky funkcie, ktoré z týchto funkcií dokážeme vytvoriť pomocou sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania funkcií.]

Polynóm – Definícia

Polynóm (raciálna celistvá funkcia) sa nazýva

funkcia $f_n: y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

• Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in R, a_n \neq 0$ nazývame koeficienty polynómu.

• Číslo $n \in N \cup \{0\}$ nazývame stupeň polynómu.

[Špeciálne, nulová funkcia $y = 0$ má stupeň -1 .]

Polynóm – Definícia

Polynóm (raciálna celistvá funkcia) sa nazýva

2

funkcia $f_n: y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

- Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in R, a_n \neq 0$ nazývame koeficienty polynómu.
- Číslo $n \in N \cup \{0\}$ nazývame stupeň polynómu. [Špeciálne, nulová funkcia $y = 0$ má stupeň -1 .]
- Prirodzený definičný obor $D(f_n) = R$.

Polynóm – Definícia

Polynóm (raciálna celistvá funkcia) sa nazýva

3

funkcia $f_n: y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

- Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$ nazývame **koefficienty polynómu**.
 - Číslo $n \in N \cup \{0\}$ nazývame **stupeň polynómu**. [Špeciálne, nulová funkcia $y = 0$ má stupeň -1 .]
-
- Prirodzený definičný obor $D(f_n) = R$.
 - Funkcia f_n , $n \in N$ má práve n komplexných (z množiny C) **koreňov** (vrátane reálnych a násobnosti).
[Ak má f_n komplexný koreň $x = \alpha + i\beta$, potom má aj komplexne združený koreň $\bar{x} = \alpha - i\beta$.]

Polynóm – Definícia

Polynóm (raciálna celistvá funkcia) sa nazýva

4

funkcia $f_n: y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

• Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$ nazývame koeficienty polynómu.

• Číslo $n \in N \cup \{0\}$ nazývame stupeň polynómu.

[Špeciálne, nulová funkcia $y = 0$ má stupeň -1 .]

• Prirodzený definičný obor $D(f_n) = R$.

• Funkcia f_n , $n \in N$ má práve n komplexných (z množiny C) koreňov (vrátane reálnych a násobnosti).

[Ak má f_n komplexný koreň $x = \alpha + i\beta$, potom má aj komplexne združený koreň $\bar{x} = \alpha - i\beta$.]

• Funkcia f_n , $n \in N$ má najviac n reálnych (z množiny R) koreňov.

Pre párne n ($n = 2k$, $k \in N$) polynóm f_n nemusí mať reálne korene.

[Pre n párne má f_n párny počet reálnych koreňov (vrátane násobnosti).]

Pre nepárne n ($n = 2k-1$, $k \in N$) má polynóm f_n aspoň jeden reálny koreň.

[Pre n nepárne má f_n nepárny počet reálnych koreňov (vrátane násobnosti).]

Polynóm – Definícia

Polynóm (raciálna celistvá funkcia) sa nazýva

5

funkcia $f_n: y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

• Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$ nazývame **koefficienty polynómu**.

• Číslo $n \in N \cup \{0\}$ nazývame **stupeň polynómu**.

[Špeciálne, nulová funkcia $y = 0$ má stupeň -1 .]

• Prirodzený definičný obor $D(f_n) = R$.

• Funkcia f_n , $n \in N$ má práve n komplexných (z množiny C) koreňov (vrátane reálnych a násobnosti).

[Ak má f_n komplexný koreň $x = \alpha + i\beta$, potom má aj komplexne združený koreň $\bar{x} = \alpha - i\beta$.]

• Funkcia f_n , $n \in N$ má najviac n reálnych (z množiny R) koreňov.

Pre párne n ($n = 2k$, $k \in N$) polynóm f_n nemusí mať reálne korene.

[Pre n párne má f_n párny počet reálnych koreňov (vrátane násobnosti).]

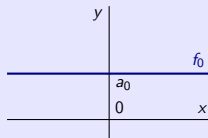
Pre nepárne n ($n = 2k-1$, $k \in N$) má polynóm f_n aspoň jeden reálny koreň.

[Pre n nepárne má f_n nepárny počet reálnych koreňov (vrátane násobnosti).]

• Ak má funkcia f_n , $n \geq 2$ reálny koreň $c \in R$,

potom ju môžeme rozložiť na tvar $f_n(x) = (x - c) \cdot f_{n-1}(x)$, kde f_{n-1} je nejaký polynóm stupňa $n - 1$.

Polynóm – Príklady



Konštantná funkcia

1

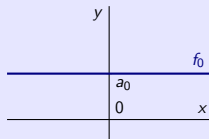
Konštantná funkcia sa nazýva

[Pre $a_0 \neq 0$ nemá f_1 korene.]

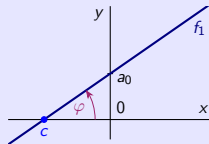
polynóm $f_0: y = a_0$.

[Grafom f_0 je priamka rovnobežná s osou x .]

Polynóm – Príklady



Konštantná funkcia



Lineárna funkcia

2

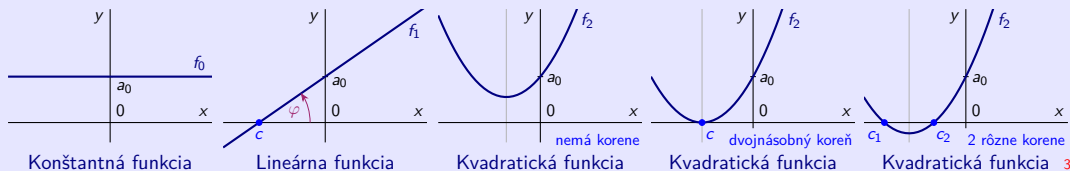
Konštantná funkcia sa nazýva

[Pre $a_0 \neq 0$ nemá f_1 korene.]polynóm $f_0: y = a_0$.[Grafom f_0 je priamka rovnobežná s osou x .]

Lineárna funkcia sa nazýva

[Pre $a_1 \neq 0$ má f_1 jeden reálny koreň $c = -\frac{a_0}{a_1}$.]polynóm $f_1: y = a_1x + a_0$ [Pre $a_1 = 0$ je funkcia f_1 konštantná. Grafom f_1 je priamka so smernicou $a_1 = \tan \varphi$.]

Polynóm – Príklady



Konštantná funkcia sa nazýva

[Pre $a_0 \neq 0$ nemá f_1 korene.]

polynóm $f_0: y = a_0$.

[Grafom f_0 je priamka rovnobežná s osou x .]

Lineárna funkcia sa nazýva

[Pre $a_1 \neq 0$ má f_1 jeden reálny koreň $c = -\frac{a_0}{a_1}$.]

polynóm $f_1: y = a_1x + a_0$

[Pre $a_1 = 0$ je funkcia f_1 konštantná. Grafom f_1 je priamka so smernicou $a_1 = \tan \varphi$.]

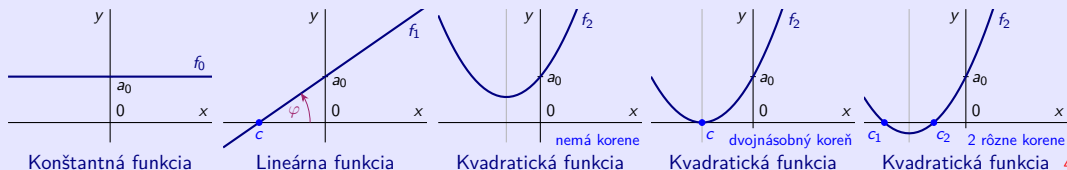
Kvadratická funkcia sa nazýva

[f_2 má 0, 1 (dvojnásobný) alebo 2 (rôzne) reálne korene.]

polynóm $f_2: y = a_2x^2 + a_1x + a_0, a_2 \neq 0$.

[Grafom f_2 je parabola, pričom jej os je rovnobežná s osou y .]

Polynóm – Príklady



Konštantná funkcia sa nazýva

[Pre $a_0 \neq 0$ nemá f_1 korene.]

polynóm $f_0: y = a_0$.

[Grafom f_0 je priamka rovnobežná s osou x .]

Lineárna funkcia sa nazýva

[Pre $a_1 \neq 0$ má f_1 jeden reálny koreň $c = -\frac{a_0}{a_1}$.]

polynóm $f_1: y = a_1x + a_0$

[Pre $a_1 = 0$ je funkcia f_1 konštantná. Grafom f_1 je priamka so smernicou $a_1 = \tan \varphi$.]

Kvadratická funkcia sa nazýva

[f_2 má 0, 1 (dvojnásobný) alebo 2 (rôzne) reálne korene.]

polynóm $f_2: y = a_2x^2 + a_1x + a_0, a_2 \neq 0$.

[Grafom f_2 je parabola, pričom jej os je rovnobežná s osou y .]

Kubická funkcia sa nazýva

polynóm $f_3: y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, a_3 \neq 0$.

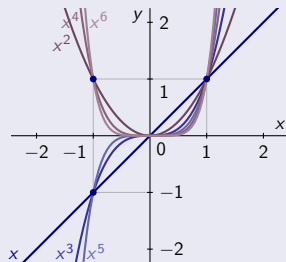
Polynóm – Príklady

Funkcia $f_n: y = x^n, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

- Grafom je tzv. **parabola stupňa n** .

parabola, $n = 2$
parabola stupňa 4
parabola stupňa 6

parabola stupňa 5
parabola stupňa 3
priamka, $n = 1$

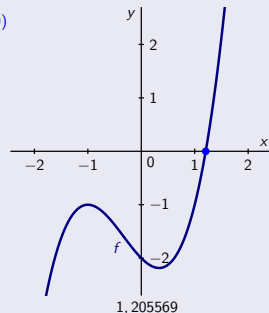


Funkcia $f(x) = (x+1)^2(x-1) + c, x \in \mathbb{R}$.

- f má 1 koreň pre $c \in (-\infty; 0)$

$c \in (-\infty; 0)$

$c = -1,00$



1 koreň

Polynóm – Príklady

Funkcia $f_n: y = x^n, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

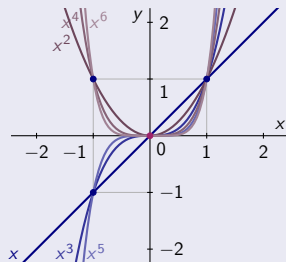
2

- Grafom je tzv. **parabola stupňa n** .
- $x = 0$ je jediný koreň f_n .



parabola, $n = 2$
parabola stupňa 4
parabola stupňa 6

parabola stupňa 5
parabola stupňa 3
priamka, $n = 1$

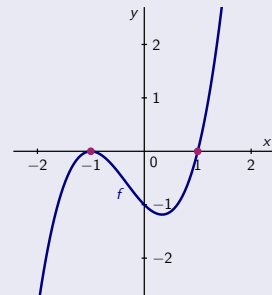


Funkcia $f(x) = (x+1)^2(x-1) + c, x \in \mathbb{R}$.

- f má 1 koreň pre $c \in (-\infty; 0)$
- f má 2 korene pre $c = 0$

$c = 0$

$c = 0,00$



2 korene $-1,000000$ (dvojnásobný koreň)

$1,000000$

Polynóm – Príklady

Funkcia $f_n: y = x^n, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

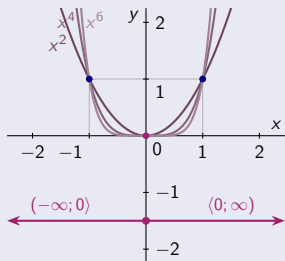
3

- Grafom je tzv. **parabola stupňa n** .
- $x = 0$ je jediný koreň f_n .

n je párne. $\Rightarrow$

- f_n je párna, je klesajúca na $(-\infty; 0)$,
je rastúca na $\langle 0; \infty)$, $H(f_n) = \langle 0; \infty)$.

parabola, $n = 2$
parabola stupňa 4
parabola stupňa 6

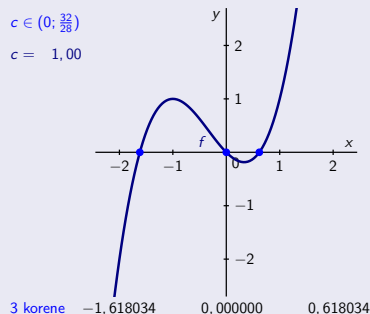


Funkcia $f(x) = (x+1)^2(x-1) + c, x \in \mathbb{R}$.

- f má 1 koreň pre $c \in (-\infty; 0)$
- f má 2 korene pre $c = 0$
- f má 3 korene pre $c \in (0; \frac{32}{28})$.

$c \in (0; \frac{32}{28})$

$c = 1,00$



Polynóm – Príklady

Funkcia $f_n: y = x^n, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

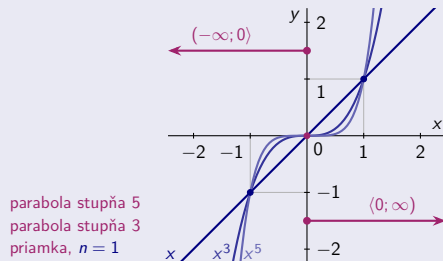
- Grafom je tzv. **parabola stupňa n** .
- $x = 0$ je jediný koreň f_n .

n je párne. $\Rightarrow$

- f_n je párna, je klesajúca na $(-\infty; 0)$,
je rastúca na $\langle 0; \infty)$, $H(f_n) = \langle 0; \infty)$.

n je nepárne. $\Rightarrow$

- f_n je nepárna, je rastúca,



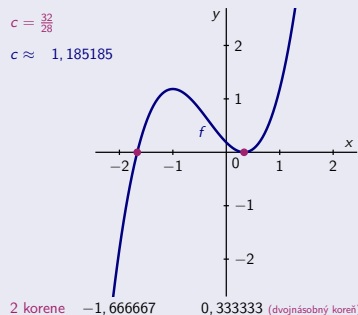
4

Funkcia $f(x) = (x+1)^2(x-1) + c, x \in \mathbb{R}$.

- f má 1 koreň pre $c \in (-\infty; 0)$
- f má 2 korene pre $c = 0$ a $c = \frac{32}{28}$.
- f má 3 korene pre $c \in (0; \frac{32}{28})$.

$$c = \frac{32}{28}$$

$$c \approx 1,185185$$



Polynóm – Príklady

Funkcia $f_n: y = x^n, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

5

- Grafom je tzv. **parabola stupňa n** .
- $x = 0$ je jediný koreň f_n .

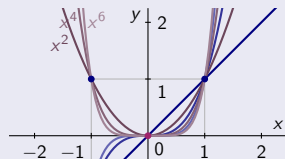
n je **párne**. $\Rightarrow$

- f_n je **párna**, je **klesajúca** na $(-\infty; 0)$,
je **rastúca** na $\langle 0; \infty)$, $H(f_n) = \langle 0; \infty)$.

n je **nepárne**. $\Rightarrow$

- f_n je **nepárna**, je **rastúca**, $H(f_n) = \mathbb{R}$.

parabola, $n = 2$
parabola stupňa 4
parabola stupňa 6



parabola stupňa 5
parabola stupňa 3
priamka, $n = 1$

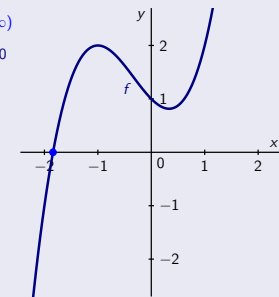


Funkcia $f(x) = (x+1)^2(x-1) + c, x \in \mathbb{R}$.

- f má 1 koreň pre $c \in (-\infty; 0) \cup (\frac{32}{28}; \infty)$.
- f má 2 korene pre $c = 0$ a $c = \frac{32}{28}$.
- f má 3 korene pre $c \in (0; \frac{32}{28})$.

$c \in (\frac{32}{28}; \infty)$

$c = 2,00$



1 koreň $-1,839287$

Polynóm – Príklady

Funkcia $f_n: y = x^n, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

6

- Grafom je tzv. **parabola stupňa n** .
- $x = 0$ je jediný koreň f_n .

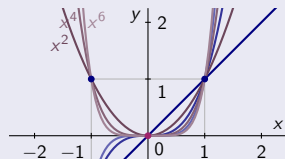
n je **párne**. $\Rightarrow$

- f_n je **párna**, je **klesajúca** na $(-\infty; 0)$,
je **rastúca** na $\langle 0; \infty)$, $H(f_n) = \langle 0; \infty)$.

n je **nepárne**. $\Rightarrow$

- f_n je **nepárna**, je **rastúca**, $H(f_n) = \mathbb{R}$.

parabola, $n = 2$
parabola stupňa 4
parabola stupňa 6



parabola stupňa 5
parabola stupňa 3
priamka, $n = 1$

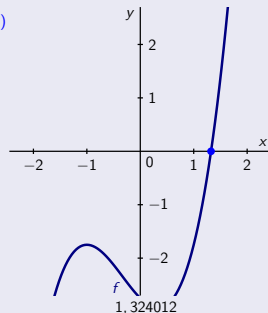


Funkcia $f(x) = (x+1)^2(x-1) + c, x \in \mathbb{R}$.

- f má 1 koreň pre $c \in (-\infty; 0) \cup (\frac{32}{28}; \infty)$.
- f má 2 korene pre $c = 0$ a $c = \frac{32}{28}$.
- f má 3 korene pre $c \in (0; \frac{32}{28})$.

$c \in (-\infty; 0)$

$c = -1,75$



1 koreň

1,324012



Racionálna lomená funkcia – Definícia

Racionálna lomená funkcia sa nazýva

1

funkcia $f: y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + b_mx^m}.$

[Podiel dvoch polynómov f_n a f_m .]

- Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in R, a_n \neq 0$ sú koeficienty polynómu f_n . [Čitateľ zlomku.]
- Čísla $b_0, b_1, \dots, b_m \in R, b_m \neq 0$ sú koeficienty polynómu f_m . [Menovateľ zlomku.]
- Čísla $n, m \in N \cup \{0\}$ sú stupne polynómov f_n, f_m .

Racionálna lomená funkcia – Definícia

Racionálna lomená funkcia sa nazýva

2

funkcia $f: y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + b_mx^m}.$

[Podiel dvoch polynómov f_n a f_m .]

- Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in R, a_n \neq 0$ sú koeficienty polynómu f_n . [Čitateľ zlomku.]
- Čísla $b_0, b_1, \dots, b_m \in R, b_m \neq 0$ sú koeficienty polynómu f_m . [Menovateľ zlomku.]
- Čísla $n, m \in N \cup \{0\}$ sú stupne polynómov f_n, f_m .
- Prirodzený definičný obor $D(f) = R - \{c \in R, \text{pre ktoré } f_m(c) = 0\}.$
[Aby mala funkcia f zmysel, musí byť menovateľ f_m nenulový, t. j. musíme **vylúčiť** korene f_m .]

Racionálna lomená funkcia – Definícia

Racionálna lomená funkcia sa nazýva

3

funkcia $f: y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + b_mx^m}.$

[Podiel dvoch polynómov f_n a f_m .]

- Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in R, a_n \neq 0$ sú koeficienty polynómu f_n . [Čitateľ zlomku.]
- Čísla $b_0, b_1, \dots, b_m \in R, b_m \neq 0$ sú koeficienty polynómu f_m . [Menovateľ zlomku.]
- Čísla $n, m \in N \cup \{0\}$ sú stupne polynómov f_n, f_m .
- Prirodzený definičný obor $D(f) = R - \{c \in R, \text{pre ktoré } f_m(c) = 0\}.$
[Aby mala funkcia f zmysel, musí byť menovateľ f_m nenulový, t. j. musíme **vylúčiť** korene f_m .]
- Funkcia f má rovnaké korene ako polynóm f_n (čitateľ).

Racionálna lomená funkcia – Definícia

Racionálna lomená funkcia sa nazýva

4

funkcia $f: y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + b_mx^m}.$

[Podiel dvoch polynómov f_n a f_m .]

- Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in R, a_n \neq 0$ sú koeficienty polynómu f_n . [Čitateľ zlomku.]
- Čísla $b_0, b_1, \dots, b_m \in R, b_m \neq 0$ sú koeficienty polynómu f_m . [Menovateľ zlomku.]
- Čísla $n, m \in N \cup \{0\}$ sú stupne polynómov f_n, f_m .

- Prirodzený definičný obor $D(f) = R - \{c \in R, \text{pre ktoré } f_m(c) = 0\}.$

[Aby mala funkcia f zmysel, musí byť menovateľ f_m nenulový, t. j. musíme **vylúčiť** korene f_m .]

- Funkcia f má rovnaké korene ako polynóm f_n (čitateľ).

- Ak $f_m: y = b_0, b_0 \neq 0$ ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$), potom f je polynóm (racionálna celistvá funkcia).

[Polynóm je špeciálnym prípadom racionálnej lomenej funkcie.]

Racionálna lomená funkcia – Definícia

Racionálna lomená funkcia sa nazýva

5

funkcia $f: y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + b_mx^m}.$

[Podiel dvoch polynómov f_n a f_m .]

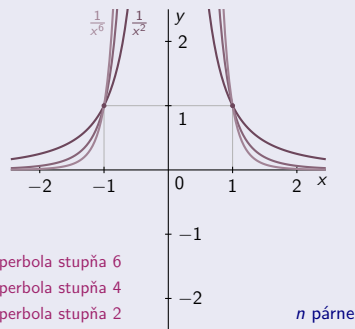
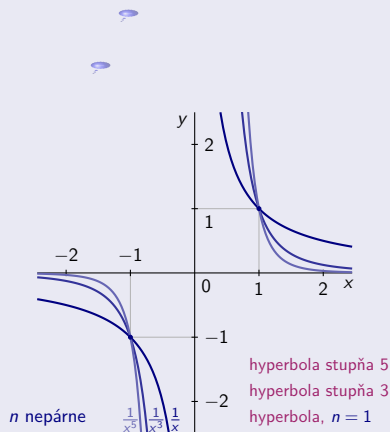
- Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in R, a_n \neq 0$ sú koeficienty polynómu f_n . [Čitateľ zlomku.]
- Čísla $b_0, b_1, \dots, b_m \in R, b_m \neq 0$ sú koeficienty polynómu f_m . [Menovateľ zlomku.]
- Čísla $n, m \in N \cup \{0\}$ sú stupne polynómov f_n, f_m .
- Prirodzený definičný obor $D(f) = R - \{c \in R, \text{pre ktoré } f_m(c) = 0\}.$
[Aby mala funkcia f zmysel, musí byť menovateľ f_m nenulový, t. j. musíme **vylúčiť** korene f_m .]
- Funkcia f má rovnaké korene ako polynóm f_n (čitateľ).
- Ak $f_m: y = b_0, b_0 \neq 0$ ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$), potom f je polynóm (racionálna celistvá funkcia).
[Polynóm je špeciálnym prípadom racionálnej lomenej funkcie.]
- Pre $n < m$ sa funkcia f nazýva **rýdza racionálna lomená**.
- Pre $n \geq m$ môžeme funkciu f rozložiť na súčet polynómu (stupňa $n - m$)
a funkcie **rýdzej racionálnej lomenej**.

Racionálna lomená funkcia – Príklad

Funkcia $f_n: y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- Grafom je tzv. **hyperbola stupňa $n+1$** .

[Graf funkcie $f_1: y = \frac{1}{x}$ nazývame hyperbola.]



Racionálna lomená funkcia – Príklad

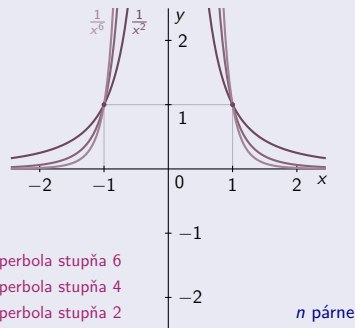
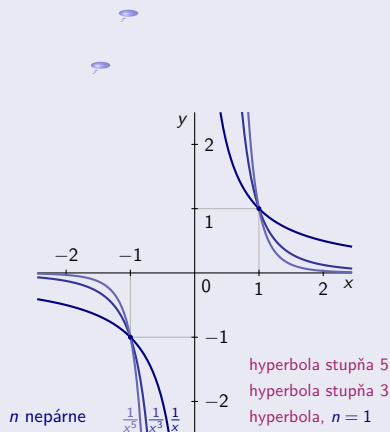
Funkcia $f_n: y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

2

- Grafom je tzv. **hyperbola stupňa $n+1$** .

[Graf funkcie $f_1: y = \frac{1}{x}$ nazývame hyperbola.]

- f_n nemá korene (nulové body).



Racionálna lomená funkcia – Príklad

Funkcia $f_n: y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

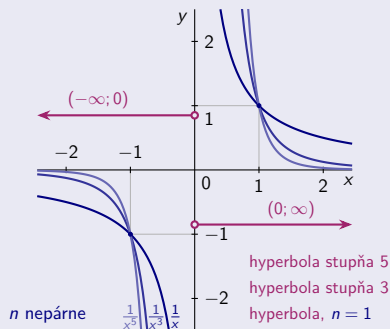
3

- Grafom je tzv. **hyperbola stupňa $n+1$** .

[Graf funkcie $f_1: y = \frac{1}{x}$ nazývame hyperbola.]

- f_n nemá korene (nulové body).

n je nepárne. $\Rightarrow$ f_n je nepárna, klesá na $(-\infty; 0)$, klesá na $(0; \infty)$, $H(f_n) = \mathbb{R} - \{0\}$.



Racionálna lomená funkcia – Príklad

Funkcia $f_n: y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

4

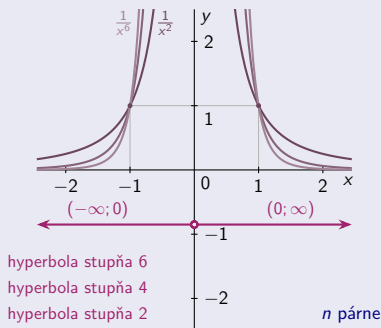
- Grafom je tzv. **hyperbola stupňa $n+1$** .

[Graf funkcie $f_1: y = \frac{1}{x}$ nazývame hyperbola.]

- f_n nemá korene (nulové body).

n je nepárne. $\Rightarrow$ • f_n je nepárna, klesá na $(-\infty; 0)$, klesá na $(0; \infty)$, $H(f_n) = \mathbb{R} - \{0\}$.

n je párne. $\Rightarrow$ • f_n je párna, rastie na $(-\infty; 0)$, klesá na $(0; \infty)$, $H(f_n) = (0; \infty)$.



Racionálna lomená funkcia – Príklad

Funkcia $f_n: y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

5

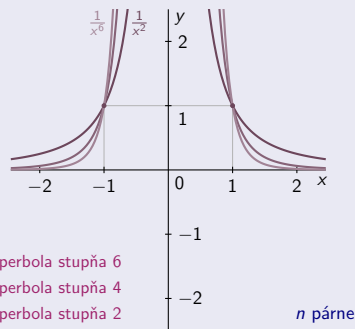
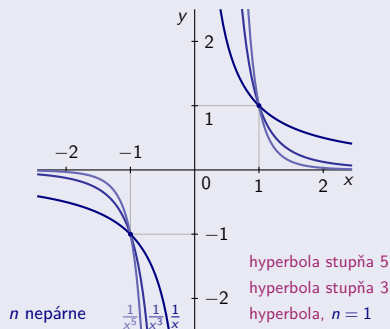
- Grafom je tzv. **hyperbola stupňa $n+1$** .

[Graf funkcie $f_1: y = \frac{1}{x}$ nazývame hyperbola.]

- f_n nemá korene (nulové body).

n je nepárne. $\Rightarrow$ f_n je nepárna, klesá na $(-\infty; 0)$, klesá na $(0; \infty)$, $H(f_n) = \mathbb{R} - \{0\}$.

n je párne. $\Rightarrow$ f_n je párna, rastie na $(-\infty; 0)$, klesá na $(0; \infty)$, $H(f_n) = (0; \infty)$.



Mocninná funkcia – Definícia

Mocninná (mocninová) funkcia sa nazýva

funkcia $f: y = x^r$, kde $r \in \mathbb{R}$.

[Premenná x je v základe mocniny. Exponent r sa nemení.]

Mocninná funkcia – Definícia

Mocninná (mocninová) funkcia sa nazýva

2

funkcia $f: y = x^r$, kde $r \in R$.

[Premenná x je v základe mocniny. Exponent r sa nemení.]

$$\bullet r \in Z. \left\{ \begin{array}{l} r = 0. \Rightarrow \bullet f: y = 1, \end{array} \right.$$

prirodzený $D(f) = R$.

[Konštantná funkcia.]

$$\bullet r \notin Z. \left\{ \right.$$



funkcia $f: y = x^r$, kde $r \in \mathbb{R}$.

[Premenná x je v základe mocniny. Exponent r sa nemení.]

- $r \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} r > 0. \Rightarrow \bullet f: y = x^n, \text{ kde } r = n \in \mathbb{N}, & \text{prirodzený } D(f) = R. & [\text{Polynóm.}] \\ r = 0. \Rightarrow \bullet f: y = 1, & \text{prirodzený } D(f) = R. & [\text{Konštantná funkcia.}] \end{cases}$$

- $r \notin \mathbb{Z}$.
 - $r > 0$. $\Rightarrow$ • $f: y = x^r$, *prirodzený* $D(f) = \langle 0; \infty \rangle$, $H(f) = \langle 0; \infty \rangle$.

Mocninná funkcia – Definícia

Mocninná (mocninová) funkcia sa nazýva

funkcia $f: y = x^r$, kde $r \in \mathbb{R}$.

[Premenná x je v základe mocniny. Exponent r sa nemení.]

$$\bullet r \in \mathbb{Z}. \begin{cases} r > 0. \Rightarrow \bullet f: y = x^n, \text{ kde } r = n \in \mathbb{N}, \text{ prirodzený } D(f) = \mathbb{R}. & [\text{Polynóm.}] \\ r = 0. \Rightarrow \bullet f: y = 1, \text{ prirodzený } D(f) = \mathbb{R}. & [\text{Konštantná funkcia.}] \\ r < 0. \Rightarrow \bullet f: y = \frac{1}{x^n}, \text{ kde } -r = n \in \mathbb{N}, \text{ prirodzený } D(f) = \mathbb{R} - \{0\}. & [\text{Racionálna lomená funkcia.}] \end{cases}$$

$$\bullet r \notin \mathbb{Z}. \begin{cases} r > 0. \Rightarrow \bullet f: y = x^r, \text{ prirodzený } D(f) = \langle 0; \infty \rangle, H(f) = \langle 0; \infty \rangle. \\ r < 0. \Rightarrow \bullet f: y = x^r = \frac{1}{x^{-r}} \text{ } (-r > 0), \text{ prirodzený } D(f) = (0; \infty), H(f) = (0; \infty). \end{cases}$$

Mocninná funkcia – Definícia

Mocninná (mocninová) funkcia sa nazýva

5

funkcia $f: y = x^r$, kde $r \in \mathbb{R}$.

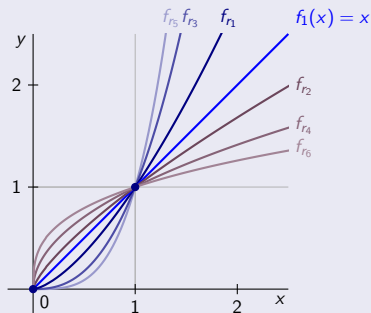
[Premenná x je v základe mocniny. Exponent r sa nemení.]

$$\bullet r \in \mathbb{Z}. \begin{cases} r > 0. \Rightarrow \bullet f: y = x^n, \text{ kde } r = n \in \mathbb{N}, \text{ prirodzený } D(f) = \mathbb{R}. & [\text{Polynóm.}] \\ r = 0. \Rightarrow \bullet f: y = 1, \text{ prirodzený } D(f) = \mathbb{R}. & [\text{Konštantná funkcia.}] \\ r < 0. \Rightarrow \bullet f: y = \frac{1}{x^n}, \text{ kde } -r = n \in \mathbb{N}, \text{ prirodzený } D(f) = \mathbb{R} - \{0\}. & [\text{Racionálna lomená funkcia.}] \end{cases}$$

$$\bullet r \notin \mathbb{Z}. \begin{cases} r > 0. \Rightarrow \bullet f: y = x^r, \text{ prirodzený } D(f) = \langle 0; \infty \rangle, H(f) = \langle 0; \infty \rangle. \\ \quad f \text{ je rastúca, je prostá (aj bijektívna).} \\ \quad f^{-1}: y = x^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{x}, x \in \langle 0; \infty \rangle \text{ (tiež mocninná funkcia).} \\ \quad \text{[Napr. inverzná funkcia k } f: y = x^2, x \in \langle 0; \infty \rangle \text{ má tvar } f^{-1}: y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, x \in \langle 0; \infty \rangle.] \\ r < 0. \Rightarrow \bullet f: y = x^r = \frac{1}{x^{-r}} \text{ } (-r > 0), \text{ prirodzený } D(f) = (0; \infty), H(f) = (0; \infty). \\ \quad f \text{ je klesajúca, je prostá (aj bijektívna).} \\ \quad f^{-1}: y = x^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{x^{-\frac{1}{r}}}, x \in (0; \infty) \text{ (tiež mocninná funkcia).} \\ \quad \text{[Napr. inverzná funkcia k } f: y = \frac{1}{x^2}, x \in (0; \infty) \text{ má tvar } f^{-1}: y = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0; \infty).] \end{cases}$$

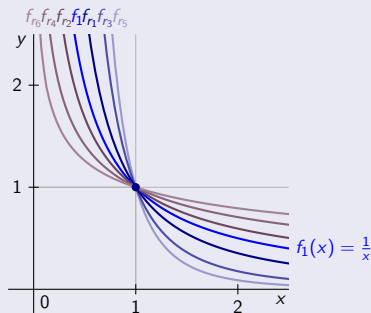
Mocninná funkcia – Príklady

Funkcia $f_r: y = x^r, r > 0$.



$$r_5 > r_3 > r_1 > 1 > r_2 > r_4 > r_6$$

Funkcia $f_r: y = \frac{1}{x^r}, r > 0$.



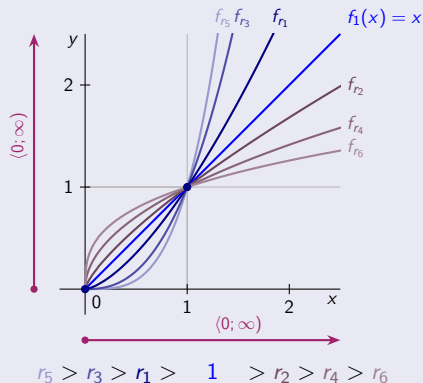
$$r_6 < r_4 < r_2 < 1 < r_3 < r_5$$

Mocninná funkcia – Príklady

Funkcia $f_r: y = x^r, r > 0$.

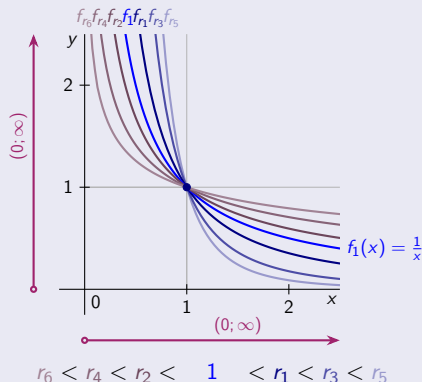
2

- $f_r: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$.



Funkcia $f_r: y = \frac{1}{x^r}, r > 0$.

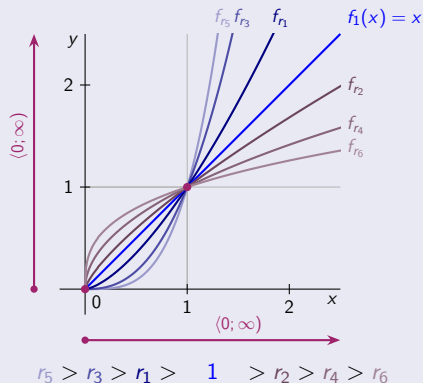
- $f_r: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$.



Mocninná funkcia – Príklady

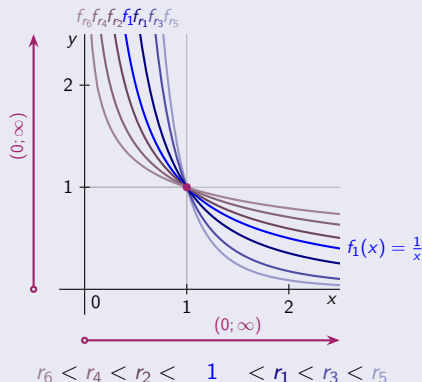
Funkcia $f_r: y = x^r, r > 0$.

- $f_r: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$.
- $f_r(1) = 1$, nulový bod je $f_r(0) = 0$.



Funkcia $f_r: y = \frac{1}{x^r}, r > 0$.

- $f_r: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$.
- $f_r(1) = 1$, nulový bod **neexistuje**.

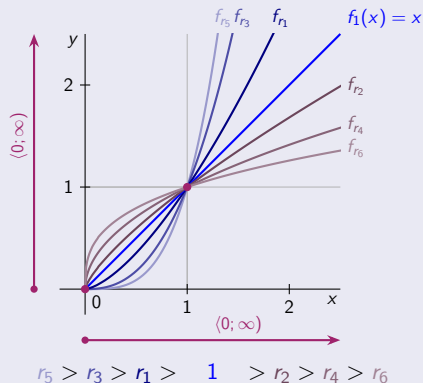


Mocninná funkcia – Príklady

Funkcia $f_r: y = x^r, r > 0$.

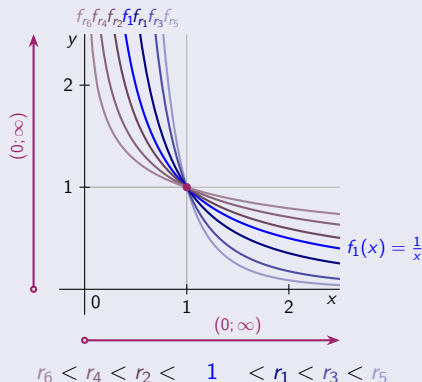
4

- $f_r: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$.
- $f_r(1) = 1$, nulový bod je $f_r(0) = 0$.
- f_r je rastúca, je bijektívna.



Funkcia $f_r: y = \frac{1}{x^r}, r > 0$.

- $f_r: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$.
- $f_r(1) = 1$, nulový bod neexistuje.
- f_r je klesajúca, je bijektívna.

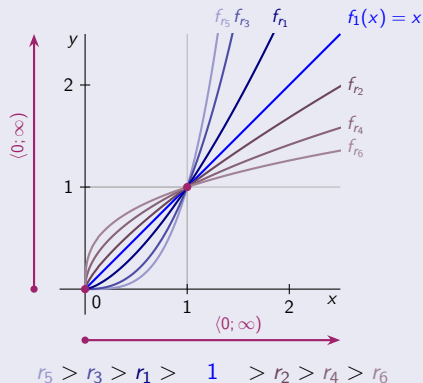


Mocninná funkcia – Príklady

Funkcia $f_r: y = x^r, r > 0$.

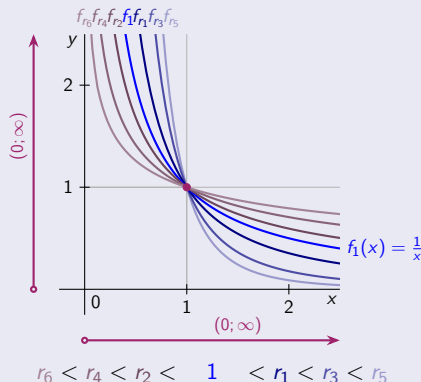
5

- $f_r: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$.
- $f_r(1) = 1$, nulový bod je $f_r(0) = 0$.
- f_r je rastúca, je bijektívna.
- $f_r^{-1}: y = x^{\frac{1}{r}}: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$.



Funkcia $f_r: y = \frac{1}{x^r}, r > 0$.

- $f_r: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$.
- $f_r(1) = 1$, nulový bod **neexistuje**.
- f_r je klesajúca, je bijektívna.
- $f_r^{-1}: y = \frac{1}{x^{\frac{1}{r}}}: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$.



Exponenciálna funkcia – Definícia

Exponenciálna funkcia sa nazýva

funkcia $f: y = a^x$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

[Premenná x je v exponente mocniny. Základ a sa nemení.]

- Číslo a nazývame základ exponenciálnej funkcie.

Exponenciálna funkcia – Definícia

Exponenciálna funkcia sa nazýva

2

funkcia $f: y = a^x$, kde $a \in R, a > 0$.

[Premenná x je v exponente mocniny. Základ a sa nemení.]

- Číslo a nazývame základ exponenciálnej funkcie.

- $a = 1. \Rightarrow$ • $f: y = 1.$

[Konštantná funkcia.]

- $a \neq 1. \Rightarrow$ • Prirodzený $D(f) = R, H(f) = (0; \infty), f$ je prostá (aj bijektívna).

Exponenciálna funkcia – Definícia

Exponenciálna funkcia sa nazýva

3

funkcia $f: y = a^x$, kde $a \in R, a > 0$.

[Premenná x je v exponente mocniny. Základ a sa nemení.]

- Číslo a nazývame základ exponenciálnej funkcie.

- $a = 1. \Rightarrow f: y = 1.$

[Konštantná funkcia.]

- $a \neq 1. \Rightarrow$ Prirodzený $D(f) = R, H(f) = (0; \infty)$, f je prostá (aj bijektívna).

- Pre $a \in (0; 1)$ je f klesajúca.
- Pre $a \in (1; \infty)$ je f rastúca.

- Graf funkcie f nazývame exponenciálna krivka (exponenciála).

- Každá exponenciála prechádza bodmi $[0; 1]$ a $[1; a]$.

[T. j. $a^0 = 1, a^1 = a$.]



Exponenciálna funkcia – Definícia

Exponenciálna funkcia sa nazýva

4

funkcia $f: y = a^x$, kde $a \in R, a > 0$.

[Premenná x je v exponente mocniny. Základ a sa nemení.]

- Číslo a nazývame základ exponenciálnej funkcie.

- $a = 1. \Rightarrow f: y = 1.$

[Konštantná funkcia.]

- $a \neq 1. \Rightarrow$ Prirodzený $D(f) = R, H(f) = (0; \infty)$, f je prostá (aj bijektívna).

- Pre $a \in (0; 1)$ je f klesajúca.
- Pre $a \in (1; \infty)$ je f rastúca.

- Graf funkcie f nazývame exponenciálna krivka (exponenciála).

- Každá exponenciála prechádza bodmi $[0; 1]$ a $[1; a]$.

[T. j. $a^0 = 1, a^1 = a$.]

- Grafy funkcií $y = a^x$ a $y = a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ sú osovo súmerné podľa osi y .

[Pre všetky $a > 0$ platí $a^{-(-x)} = a^x$, t. j. $(\frac{1}{a})^{-x} = (a^{-1})^{-x} = a^x$.]

Exponenciálna funkcia – Definícia

Exponenciálna funkcia sa nazýva

funkcia $f: y = a^x$, kde $a \in R, a > 0$.

[Premenná x je v exponente mocniny. Základ a sa nemení.]

- Číslo a nazývame základ exponenciálnej funkcie.

- $a = 1. \Rightarrow f: y = 1.$

[Konštantná funkcia.]

- $a \neq 1. \Rightarrow$ Prirodzený $D(f) = R, H(f) = (0; \infty)$, f je prostá (aj bijektívna).

- Pre $a \in (0; 1)$ je f klesajúca.
- Pre $a \in (1; \infty)$ je f rastúca.

- Graf funkcie f nazývame exponenciálna krivka (exponenciála).

- Každá exponenciála prechádza bodmi $[0; 1]$ a $[1; a]$.

[T. j. $a^0 = 1, a^1 = a$.]

- Grafy funkcií $y = a^x$ a $y = a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ sú osovo súmerné podľa osi y .

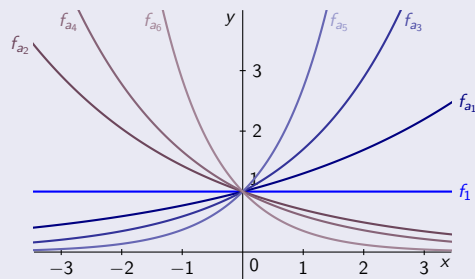
[Pre všetky $a > 0$ platí $a^{-(-x)} = a^x$, t. j. $(\frac{1}{a})^{-x} = (a^{-1})^{-x} = a^x$.]

- $f: y = e^x = \exp x$ je najdôležitejšia zo všetkých exponenciálnych funkcií.

- Základom funkcie $y = e^x$ je iracionálne číslo e ($e \approx 2,718\ 281\ 828\ 459$), ktoré nazývame Eulerovo číslo.

Exponenciálna funkcia – Príklad

Funkcia $f_a: y = a^x, x \in \mathbb{R}$, kde $a \in (0; \infty)$.



$$a_6 < a_4 < a_2 < 1 < a_1 < a_3 < a_5$$

Exponenciálna funkcia – Príklad

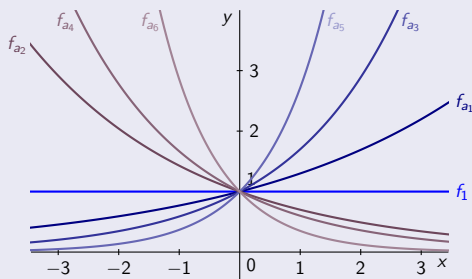
Funkcia $f_a: y = a^x, x \in R$, kde $a \in (0; \infty)$.

2

• $a = 1. \Rightarrow$ • $f_1: y = 1: R \rightarrow \{1\}$.

[Konštantná funkcia.]

• $a \neq 1. \Rightarrow$ • $f_a: R \rightarrow (0; \infty)$, f_a je bijektívna, je rýdzo monotónna,



$$a_6 < a_4 < a_2 < 1 < a_1 < a_3 < a_5$$

Exponenciálna funkcia – Príklad

Funkcia $f_a: y = a^x, x \in R$, kde $a \in (0; \infty)$.

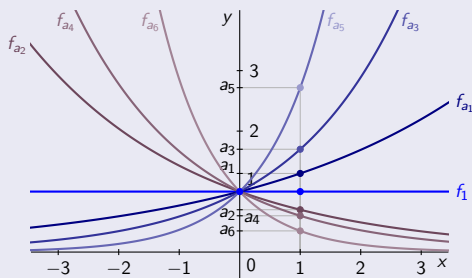
3

• $a = 1. \Rightarrow$ • $f_1: y = 1: R \rightarrow \{1\}$.

[Konštantná funkcia.]

• $a \neq 1. \Rightarrow$ • $f_a: R \rightarrow (0; \infty)$, f_a je bijektívna, je rýdzo monotónna,

$f_a(0) = 1, f_a(1) = a$, je rastúca pre $a > 1$ a klesajúca pre $a < 1$.



$$a_6 < a_4 < a_2 < 1 < a_1 < a_3 < a_5$$

Exponenciálna funkcia – Príklad

Funkcia $f_a: y = a^x, x \in \mathbb{R}$, kde $a \in (0; \infty)$.

• $a = 1. \Rightarrow$ • $f_1: y = 1: \mathbb{R} \rightarrow \{1\}$.

[Konštantná funkcia.]

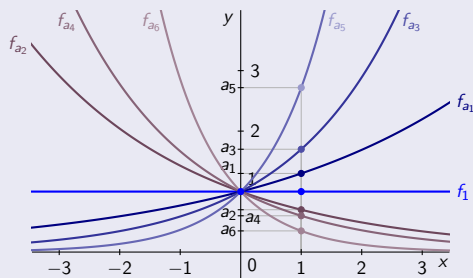
• $a \neq 1. \Rightarrow$ • $f_a: \mathbb{R} \rightarrow (0; \infty)$, f_a je bijektívna, je rýdzo monotónna,

$f_a(0) = 1, f_a(1) = a$, je rastúca pre $a > 1$ a klesajúca pre $a < 1$.

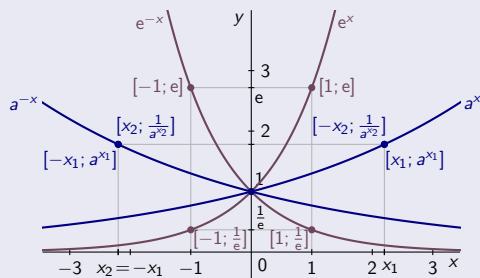
• Grafy funkcií $f_a: y = a^x$ a $f_{a^{-1}}: y = a^{-x}$ sú osovo súmerné podľa osi y ,

t. j. pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $f_{a^{-1}}(-x) = (a^{-1})^{-x} = a^x = f_a(x)$.

$[a \in (0; 1) \Leftrightarrow a^{-1} \in (1; \infty).]$



$a_6 < a_4 < a_2 < 1 < a_1 < a_3 < a_5$



Logaritmická funkcia – Definícia

Logaritmická funkcia sa nazýva

1

funkcia $f: y = \log_a x$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$[y = \log_a x. \Leftrightarrow x = a^y.]$$

- Číslo a nazývame základ logaritmickej funkcie.
- Číslo $y = \log_a x$ pre $x \in (0; \infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ také, že $x = a^y$ (existuje jediné)
nazývame logaritmus čísla x so základom a (pri základe a).

Logaritmická funkcia – Definícia

Logaritmická funkcia sa nazýva

2

funkcia $f: y = \log_a x$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$[y = \log_a x. \Leftrightarrow x = a^y.]$$

- Číslo a nazývame základ logaritmickej funkcie.
- Číslo $y = \log_a x$ pre $x \in (0; \infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ také, že $x = a^y$ (existuje jediné)
nazývame **logaritmus čísla x so základom a (pri základe a)**.
- Prirodzený $D(f) = (0; \infty)$, $H(f) = (0; \infty)$, f je prostá (aj bijektívna).

Logaritmická funkcia – Definícia

Logaritmická funkcia sa nazýva

3

funkcia $f: y = \log_a x$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$[y = \log_a x. \Leftrightarrow x = a^y.]$$

- Číslo a nazývame základ logaritmickej funkcie.
- Číslo $y = \log_a x$ pre $x \in (0; \infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ také, že $x = a^y$ (existuje jediné) nazývame logaritmus čísla x so základom a (pri základe a).

- Prirodzený $D(f) = (0; \infty)$, $H(f) = (0; \infty)$, f je prostá (aj bijektívna).
- Pre $a \in (0; 1)$ je f klesajúca.
- Pre $a \in (1; \infty)$ je f rastúca.
- Graf funkcie f nazývame logaritmická krivka.
- Každá logaritmická krivka prechádza bodmi $[1; 0]$ a $[a; 1]$.

$$[a^0 = 1, a^1 = a, \text{ t. j. } \log_a 1 = 0, \log_a a = 1.]$$

Logaritmická funkcia – Definícia

Logaritmická funkcia sa nazýva

funkcia $f: y = \log_a x$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$[y = \log_a x. \Leftrightarrow x = a^y.]$$

- Číslo a nazývame **základ** logaritmickej funkcie.
- Číslo $y = \log_a x$ pre $x \in (0; \infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ také, že $x = a^y$ (existuje jediné) nazývame **logaritmus** čísla x so základom a (pri základe a).

- Prirodzený $D(f) = (0; \infty)$, $H(f) = (0; \infty)$, f je **prostá** (aj bijektívna).
- Pre $a \in (0; 1)$ je f **klesajúca**.
- Pre $a \in (1; \infty)$ je f **rastúca**.
- Graf funkcie f nazývame **logaritmická krivka**.
- Každá logaritmická krivka **prechádza** bodmi $[1; 0]$ a $[a; 1]$. $[a^0 = 1, a^1 = a, \text{ t. j. } \log_a 1 = 0, \log_a a = 1.]$
- Grafy funkcií $y = \log_a x$ a $y = \log_{a^{-1}} x = \log_{\frac{1}{a}} x$ sú **osovo súmerné** podľa osi x .

Logaritmická funkcia – Definícia

Logaritmická funkcia sa nazýva

funkcia $f: y = \log_a x$, kde $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.

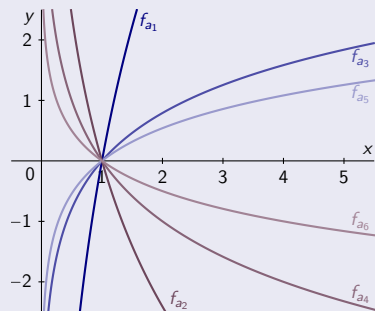
$$[y = \log_a x. \Leftrightarrow x = a^y.]$$

- Číslo a nazývame **základ** logaritmickej funkcie.
- Číslo $y = \log_a x$ pre $x \in (0; \infty)$, $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$ také, že $x = a^y$ (existuje jediné) nazývame **logaritmus** čísla x so základom a (pri základe a).

- Prírodný $D(f) = (0; \infty)$, $H(f) = (0; \infty)$, f je **prostá** (aj bijektívna).
 - Pre $a \in (0; 1)$ je f **klesajúca**.
 - Pre $a \in (1; \infty)$ je f **rastúca**.
 - Graf funkcie f nazývame **logaritmická krivka**.
 - Každá logaritmická krivka **prechádza** bodmi $[1; 0]$ a $[a; 1]$. $[a^0 = 1, a^1 = a, \text{ t. j. } \log_a 1 = 0, \log_a a = 1.]$
 - Grafy funkcií $y = \log_a x$ a $y = \log_{a^{-1}} x = \log_{\frac{1}{a}} x$ sú **osovo súmerné** podľa osi x .
 - Logaritmus pri základe 10 nazývame **dekadický**, označenie $y = \log_{10} x = \log x$.
 - Logaritmus pri základe e nazývame **prírodný**, označenie $y = \log_e x = \ln x$.
- [Prírodný logaritmus sa aj po anglicky značí $\ln x$. Často (najmä v počítačových programoch) sa používa $\log x$.]

Logaritmická funkcia – Príklad

Funkcia $f_a: y = \log_a x, x \in (0; \infty),$ kde $a \in (0; \infty), a \neq 1$.

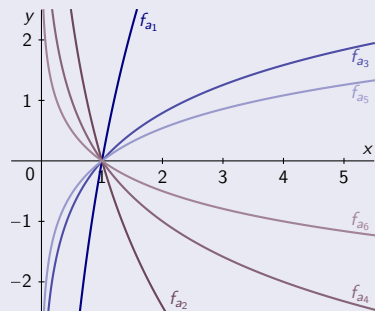


$$a_6 < a_4 < a_2 < 1 < a_1 < a_3 < a_5$$

Logaritmická funkcia – Príklad

Funkcia $f_a: y = \log_a x, x \in (0; \infty),$ kde $a \in (0; \infty), a \neq 1.$

- $f_a: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je bijektívna, je rýdzdo monotónna,



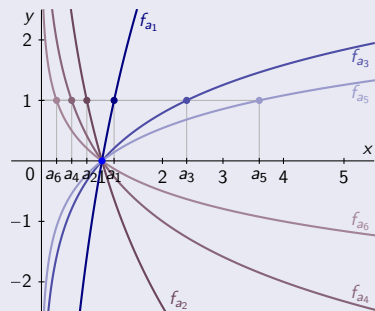
$$a_6 < a_4 < a_2 < 1 < a_1 < a_3 < a_5$$

Logaritmická funkcia – Príklad

Funkcia $f_a: y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$, kde $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

- $f_a: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je bijektívna, je rýdzou monotónna,

$f_a(1) = 0$, $f_a(a) = 1$, je rastúca pre $a > 1$ a klesajúca pre $a < 1$.



$$a_6 < a_4 < a_2 < 1 < a_1 < a_3 < a_5$$

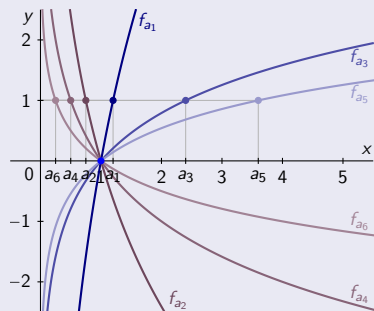
Logaritmická funkcia – Príklad

Funkcia $f_a: y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$, kde $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

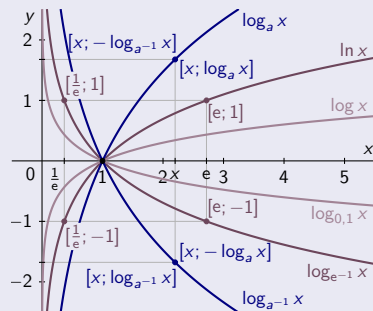
- $f_a: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je bijektívna, je rýdzo monotónna,

$f_a(1) = 0$, $f_a(a) = 1$, je rastúca pre $a > 1$, klesajúca pre $a < 1$.

- Grafy funkcií $f_a: y = \log_a x$ a $f_{a^{-1}}: y = \log_{a^{-1}} x = \log_{\frac{1}{a}} x$ sú osovo súmerné podľa osi x , t. j. $f_a(x) = \log_a x = -\log_{a^{-1}} x = -f_{a^{-1}}(x)$ pre $x > 0$.
[$y = -\log_{a^{-1}} x. \Leftrightarrow x = (a^{-1})^{-y} = a^y. \Leftrightarrow y = \log_a x.$]



$$a_6 < a_4 < a_2 < 1 < a_1 < a_3 < a_5$$



Logaritmická funkcia – Vlastnosti

Základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$, premenné $x, x_1, x_2 \in (0; \infty)$, čísla $r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

1

- $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 x_2)$.
- $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}$.
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ pre všetky $b \in (0; \infty)$, $b \neq 1$.

Logaritmická funkcia – Vlastnosti

Základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$, premenné $x, x_1, x_2 \in (0; \infty)$, čísla $r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

2

- $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 x_2)$.

- $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}$.

- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.

Špeciálne $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$.

- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ pre všetky $b \in (0; \infty)$, $b \neq 1$.

Špeciálne $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Logaritmická funkcia – Vlastnosti

Základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$, premenné $x, x_1, x_2 \in (0; \infty)$, čísla $r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

3

- $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 x_2)$.
- $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}$.
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.
- Špeciálne $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$.
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ pre všetky $b \in (0; \infty)$, $b \neq 1$.
- Špeciálne $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Funkcie $f: y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$ a $g: y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

- Funkcie $f: y = \log_a x$ a $g: y = a^x$ sú navzájom inverzné. [Rovnaký základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.]
- Grafy funkcií f a g sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.

Logaritmická funkcia – Vlastnosti

Základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$, premenné $x, x_1, x_2 \in (0; \infty)$, čísla $r \in R$, $n \in N$. Potom platí:

4

- $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 x_2)$.
- $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}$.
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.
- Špeciálne $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$.
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ pre všetky $b \in (0; \infty)$, $b \neq 1$.
- Špeciálne $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Funkcie $f: y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$ a $g: y = a^x$, $x \in R$, kde $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

- Funkcie $f: y = \log_a x$ a $g: y = a^x$ sú navzájom inverzné. [Rovnaký základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$]
- Grafy funkcií f a g sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.
- $x \in R$. $\Rightarrow$ • $x = f(g(x)) = f(a^x) = \log_a a^x$, t. j. $x = \log_a a^x$ pre $x \in R$.
- $x \in (0; \infty)$. $\Rightarrow$ • $x = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x}$, t. j. $x = a^{\log_a x}$ pre $x > 0$.

Logaritmická funkcia – Vlastnosti

Základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$, premenné $x, x_1, x_2 \in (0; \infty)$, čísla $r \in R$, $n \in N$. Potom platí:

5

- $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 x_2)$.
- $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}$.
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$.
- Špeciálne $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$.
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ pre všetky $b \in (0; \infty)$, $b \neq 1$.
- Špeciálne $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Funkcie $f: y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$ a $g: y = a^x$, $x \in R$, kde $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

- Funkcie $f: y = \log_a x$ a $g: y = a^x$ sú navzájom inverzné. [Rovnaký základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$]
- Grafy funkcií f a g sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.

- $x \in R. \Rightarrow x = f(g(x)) = f(a^x) = \log_a a^x$, t. j. $x = \log_a a^x$ pre $x \in R$.
- $x \in (0; \infty). \Rightarrow x = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x}$, t. j. $x = a^{\log_a x}$ pre $x > 0$.

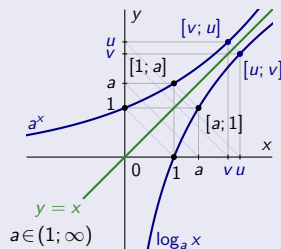
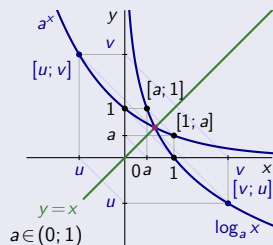
Špeciálne platí: • $x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \cdot \ln x}$ pre $x > 0$, $r \in R$.
 • $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$ pre $x \in R$, $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

• $s(x)^{h(x)} = e^{\ln s(x)^{h(x)}} = e^{h(x) \cdot \ln s(x)}$ pre funkcie s, h , pričom $s(x) > 0$, $h(x) \in R$.

Logaritmická funkcia – Príklad

Funkcie $f: y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$ a $g: y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, pričom základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

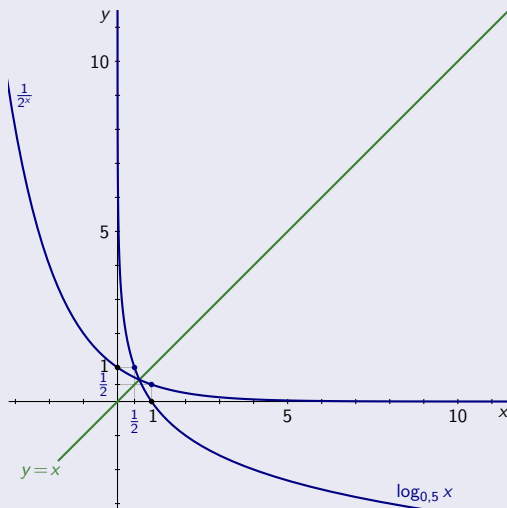
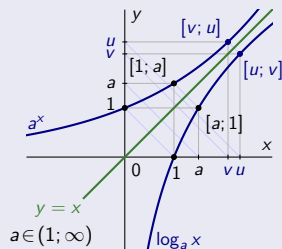
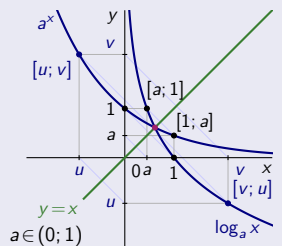
- Funkcie $y = \log_a x$ a $y = a^x$ sú navzájom inverzné, t. j. ich grafy sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.



Logaritmická funkcia – Príklad

Funkcie $f: y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$ a $g: y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, pričom základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

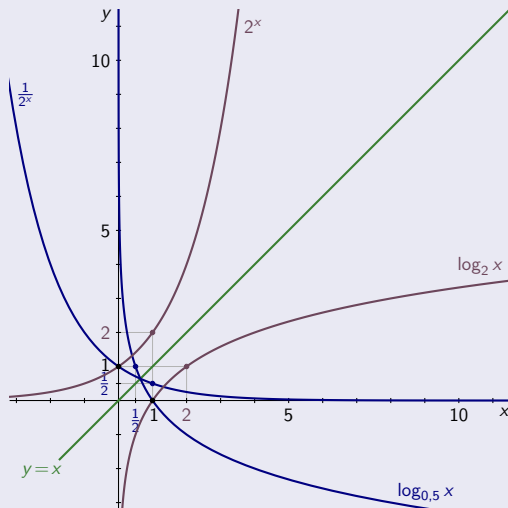
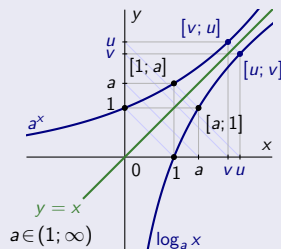
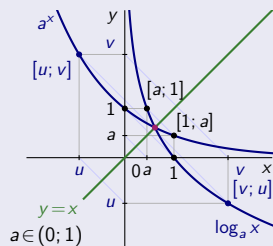
- Funkcie $y = \log_a x$ a $y = a^x$ sú navzájom inverzné, t. j. ich grafy sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.



Logaritmická funkcia – Príklad

Funkcie $f: y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$ a $g: y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, pričom základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

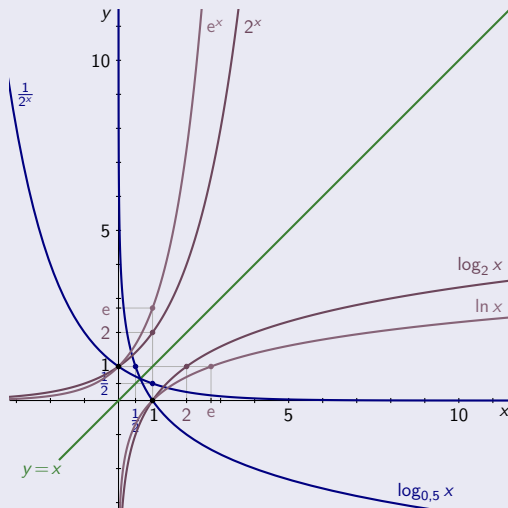
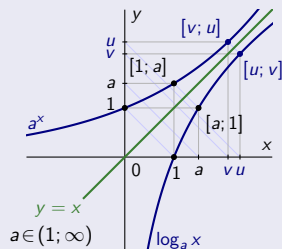
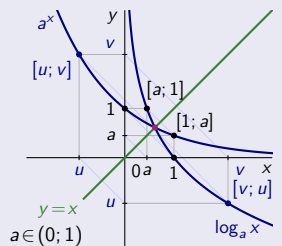
- Funkcie $y = \log_a x$ a $y = a^x$ sú navzájom inverzné, t. j. ich grafy sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.



Logaritmická funkcia – Príklad

Funkcie $f: y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$ a $g: y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, pričom základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

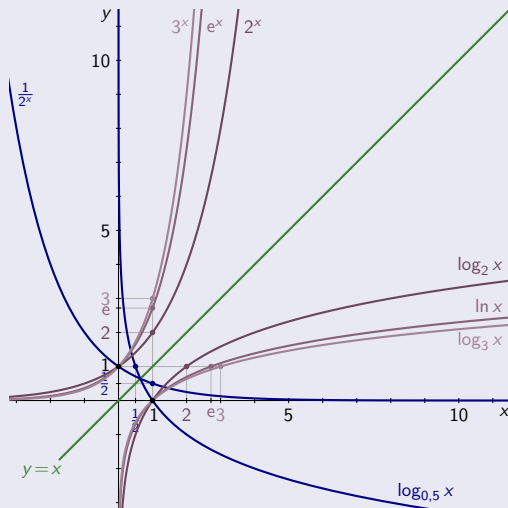
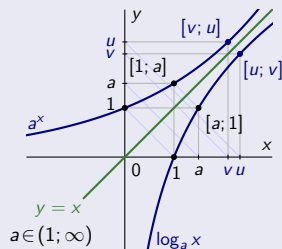
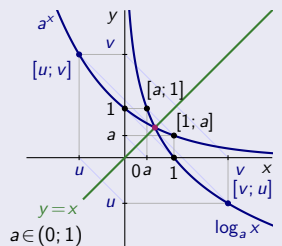
- Funkcie $y = \log_a x$ a $y = a^x$ sú navzájom inverzné, t. j. ich grafy sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.



Logaritmická funkcia – Príklad

Funkcie $f: y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$ a $g: y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, pričom základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

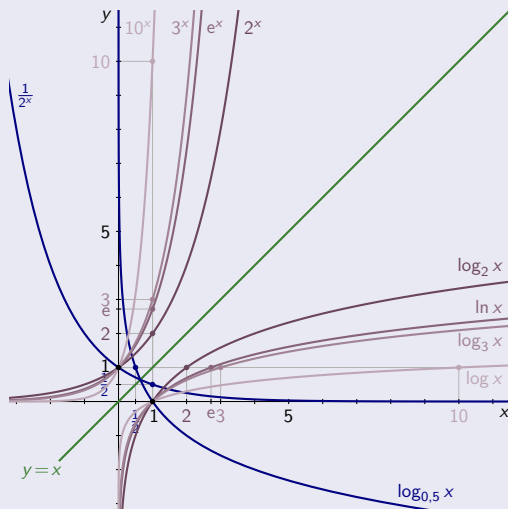
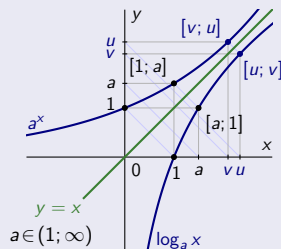
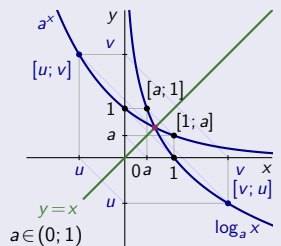
- Funkcie $y = \log_a x$ a $y = a^x$ sú navzájom inverzné, t. j. ich grafy sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.



Logaritmická funkcia – Príklad

Funkcie $f: y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$ a $g: y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, pričom základ $a \in (0; \infty)$, $a \neq 1$.

- Funkcie $y = \log_a x$ a $y = a^x$ sú navzájom inverzné, t. j. ich grafy sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.



Goniometrické funkcie – Definície

Základné **goniometrické** (trigonometrické) funkcie sú:

- sínus,
- kosínus,
- tangens
- a
- kotangens.

Goniometrické funkcie – Definície

Základné **goniometrické** (trigonometrické) funkcie sú:

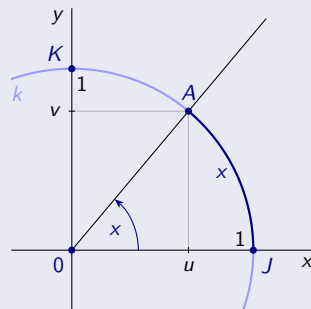
2

- sínus,
- kosínus,
- tangens a
- kotangens.

Definujú sa v rovine R^2 pomocou jednotkovej kružnice k so stredom v počiatku 0 karteziánskeho súradnicového systému:

- Označme body $0 = [0; 0]$, $J = [1; 0]$, $K = [0; 1]$, kružnicu k (stred 0 , polomer $r = 1$).
- Bodu $x \in R$ priradíme orientovaný uhol $J0A$, kde bod $A = [u; v] \in k$.
- Číslo x vyjadruje veľkosť uhla $J0A$ v oblúčkovej miere v jednotkách **radiány**.

[Pre $x > 0$ je uhol orientovaný kladne (proti smeru otáčania hodinových ručičiek), pre $x < 0$ je uhol orientovaný záporne.]



Goniometrické funkcie – Definície

Základné **goniometrické** (trigonometrické) funkcie sú:

3

- sínus,
- kosínus,
- tangens
- a
- kotangens.

Definujú sa v rovine R^2 pomocou jednotkovej kružnice k so stredom v počiatku 0 karteziánskeho súradnicového systému:

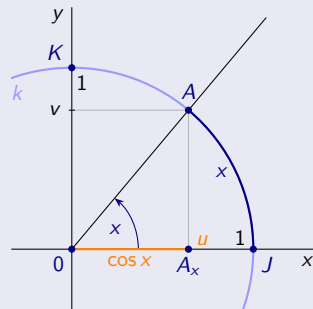
- Označme body $0 = [0; 0]$, $J = [1; 0]$, $K = [0; 1]$, kružnicu k (stred 0 , polomer $r = 1$).
- Bodu $x \in R$ priradíme orientovaný uhol $J0A$, kde bod $A = [u; v] \in k$.
- Číslo x vyjadruje veľkosť uhla $J0A$ v oblúkovej miere v jednotkách **radiány**.

[Pre $x > 0$ je uhol orientovaný kladne (proti smeru otáčania hodinových ručičiek), pre $x < 0$ je uhol orientovaný záporne.]

Pre všetky $x \in R$ definujeme:

- $A = [\cos x; \sin x]$.

- $u = |0A_x| = \cos x$ sa nazýva **kosínus x** .



Goniometrické funkcie – Definície

Základné **goniometrické** (trigonometrické) funkcie sú:

- sínus,
- kosínus,
- tangens a
- kotangens.

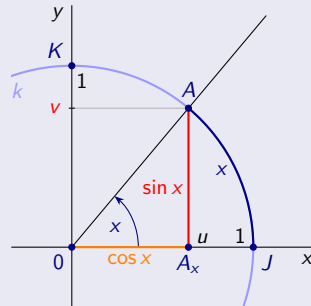
Definujú sa v rovine R^2 pomocou jednotkovej kružnice k so stredom v počiatku 0 karteziánskeho súradnicového systému:

- Označme body $0 = [0; 0]$, $J = [1; 0]$, $K = [0; 1]$, kružnicu k (stred 0 , polomer $r = 1$).
- Bodu $x \in R$ priradíme orientovaný uhol $J0A$, kde bod $A = [u; v] \in k$.
- Číslo x vyjadruje veľkosť uhla $J0A$ v oblúčovej miere v jednotkách **radiány**.

[Pre $x > 0$ je uhol orientovaný kladne (proti smeru otáčania hodinových ručičiek), pre $x < 0$ je uhol orientovaný záporne.]

Pre všetky $x \in R$ definujeme:

- $A = [\cos x; \sin x]$.
- $v = |AA_x| = \sin x$ sa nazýva **sínus x** .
- $u = |0A_x| = \cos x$ sa nazýva **kosínus x** .



Goniometrické funkcie – Definície

Základné **goniometrické** (trigonometrické) funkcie sú:

5

- sínus,
- kosínus,
- tangens a
- kotangens.

Definujú sa v rovine R^2 pomocou jednotkovej kružnice k so stredom v počiatku 0 karteziánskeho súradnicového systému:

- Označme body $O = [0; 0]$, $J = [1; 0]$, $K = [0; 1]$, kružnicu k (stred 0, polomer $r = 1$).
- Bodu $x \in R$ priradíme orientovaný uhol $\angle JOA$, kde bod $A = [u; v] \in k$.
- Číslo x vyjadruje veľkosť uhla $\angle JOA$ v oblúčovej miere v jednotkách **radiány**.

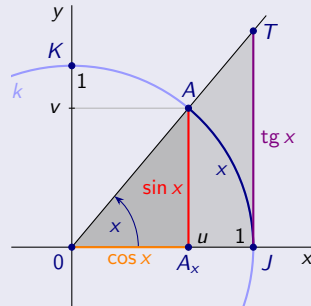
[Pre $x > 0$ je uhol orientovaný kladne (proti smeru otáčania hodinových ručičiek), pre $x < 0$ je uhol orientovaný záporne.]

Pre všetky $x \in R$ definujeme:

- $A = [\cos x; \sin x]$.
- $T = [1; \tan x]$.

- $v = |AA_x| = \sin x$ sa nazýva **sínus x** .
- $u = |OA_x| = \cos x$ sa nazýva **kosínus x** .
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$ pre $\cos x \neq 0$ sa nazýva **tangens x** .

[Trojuholníky $\triangle OJT$, $\triangle OA_xA$ sú podobné. $\Rightarrow \tan x = \frac{|AA_x|}{|OA_x|} = \frac{|TJ|}{|OJ|} = |TJ|$.]



Goniometrické funkcie – Definície

Základné **goniometrické** (trigonometrické) funkcie sú:

6

- sínus,
- kosínus,
- tangens a
- kotangens.

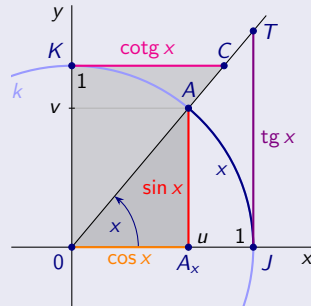
Definujú sa v rovine R^2 pomocou jednotkovej kružnice k so stredom v počiatku 0 karteziánskeho súradnicového systému:

- Označme body $O = [0; 0]$, $J = [1; 0]$, $K = [0; 1]$, kružnicu k (stred 0, polomer $r = 1$).
- Bodu $x \in R$ priradíme orientovaný uhol $\angle JOA$, kde bod $A = [u; v] \in k$.
- Číslo x vyjadruje veľkosť uhla $\angle JOA$ v oblúkovej miere v jednotkách **radiány**.

[Pre $x > 0$ je uhol orientovaný kladne (proti smeru otáčania hodinových ručičiek), pre $x < 0$ je uhol orientovaný záporne.]

Pre všetky $x \in R$ definujeme: • $A = [\cos x; \sin x]$. • $T = [1; \tan x]$. • $K = [\cotg x; 1]$.

- $v = |AA_x| = \sin x$ sa nazýva **sínus x** .
- $u = |OA_x| = \cos x$ sa nazýva **kosínus x** .
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$ pre $\cos x \neq 0$ sa nazýva **tangens x** .
[Trojuholníky OJT , OA_xA sú podobné. $\Rightarrow \tan x = \frac{|AA_x|}{|OA_x|} = \frac{|TJ|}{|OJ|} = |TJ|$.]
- $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$ pre $\sin x \neq 0$ sa nazýva **kotangens x** .
[Trojuholníky CKO , OA_xA sú podobné. $\Rightarrow \cotg x = \frac{|OA_x|}{|AA_x|} = \frac{|CK|}{|OK|} = |CK|$.]



Goniometrické funkcie – Definície

Základné **goniometrické** (trigonometrické) funkcie sú:

7

- sínus,
- kosínus,
- tangens a
- kotangens.

Definujú sa v rovine R^2 pomocou jednotkovej kružnice k so stredom v počiatku 0 karteziánskeho súradnicového systému:

- Označme body $O = [0; 0]$, $J = [1; 0]$, $K = [0; 1]$, kružnicu k (stred 0, polomer $r = 1$).
- Bodu $x \in R$ priradíme orientovaný uhol $\angle JOA$, kde bod $A = [u; v] \in k$.
- Číslo x vyjadruje veľkosť uhla $\angle JOA$ v oblúkovej miere v jednotkách **radiány**.

[Pre $x > 0$ je uhol orientovaný kladne (proti smeru otáčania hodinových ručičiek), pre $x < 0$ je uhol orientovaný záporne.]

Pre všetky $x \in R$ definujeme: • $A = [\cos x; \sin x]$. • $T = [1; \tan x]$. • $K = [\cotg x; 1]$.

- $v = |AA_x| = \sin x$ sa nazýva **sínus x** .

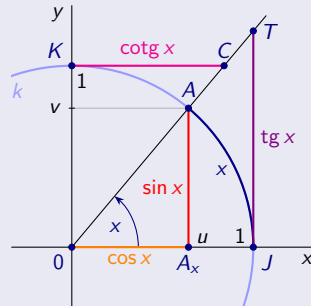
- $u = |OA_x| = \cos x$ sa nazýva **kosínus x** .

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = |TJ|$ pre $\cos x \neq 0$ sa nazýva **tangens x** .

[Trojuholníky OJT , OA_xA sú podobné. $\Rightarrow \tan x = \frac{|AA_x|}{|OA_x|} = \frac{|TJ|}{|OJ|} = |TJ|$.]

- $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} = |CK|$ pre $\sin x \neq 0$ sa nazýva **kotangens x** .

[Trojuholníky CKO , OA_xA sú podobné. $\Rightarrow \cotg x = \frac{|OA_x|}{|AA_x|} = \frac{|CK|}{|OK|} = |CK|$.]

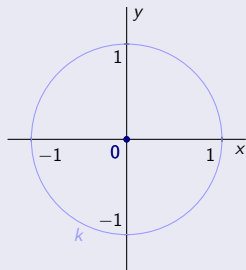


Goniometrické funkcie – Vlastnosti

Geometrický význam funkcií $\sin x = |AA_x|$ a $\cos x = |OA_x|$ a $\operatorname{tg} x = |TJ|$ a $\operatorname{cotg} x = |CK|$.

- Obvod kružnice k (stred 0, polomer $r = 1$) je 2π .

[Ludolfovo číslo $\pi \approx 3,141\,592\,653\,590$ je iracionálne.]

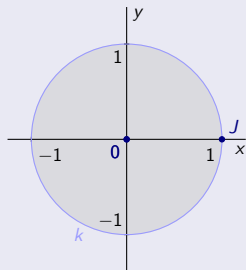


Goniometrické funkcie – Vlastnosti

Geometrický význam funkcií $\sin x = |AA_x|$ a $\cos x = |OA_x|$ a $\operatorname{tg} x = |TJ|$ a $\operatorname{cotg} x = |CK|$.

2

- Obvod kružnice k (stred 0, polomer $r = 1$) je 2π . [Ludolfovo číslo $\pi \approx 3,141\,592\,653\,590$ je iracionálne.]
- Veľkosť oblúka od J po J je 2π (v kladnom zmysle), resp. -2π (v zápornom zmysle).
[Veľkosť oblúka od J po J je aj $\pm 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ pri viacnásobnom (n -násobnom) otočení oblúka okolo kružnice k .]

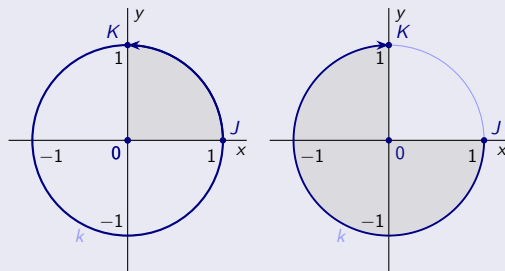


Goniometrické funkcie – Vlastnosti

Geometrický význam funkcií $\sin x = |AA_x|$ a $\cos x = |0A_x|$ a $\operatorname{tg} x = |TJ|$ a $\operatorname{cotg} x = |CK|$.

3

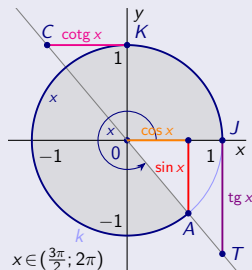
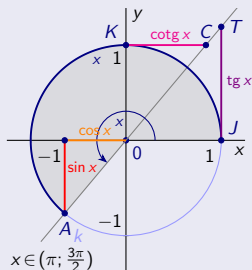
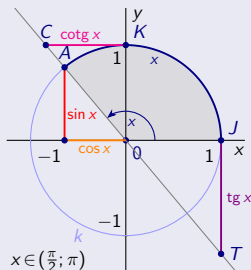
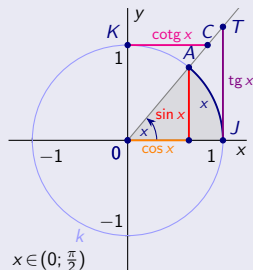
- Obvod kružnice k (stred 0 , polomer $r = 1$) je 2π . [Ludolfovo číslo $\pi \approx 3,141\,592\,653\,590$ je iracionálne.]
- Veľkosť oblúka od J po J je 2π (v kladnom zmysle), resp. -2π (v zápornom zmysle).
[Veľkosť oblúka od J po J je aj $\pm 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ pri viacnásobnom (n -násobnom) otočení oblúka okolo kružnice k .]
- Veľkosť oblúka od J po K je $\frac{\pi}{2}$ (v kladnom zmysle), resp. $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$ (v zápornom zmysle).



Goniometrické funkcie – Vlastnosti

Geometrický význam funkcií $\sin x = |AA_x|$ a $\cos x = |0A_x|$ a $\operatorname{tg} x = |TJ|$ a $\operatorname{cotg} x = |CK|$.

- Obvod kružnice k (stred 0, polomer $r = 1$) je 2π . [Ludolfovo číslo $\pi \approx 3,141\,592\,653\,590$ je iracionálne.]
- Veľkosť oblúka od J po J je 2π (v kladnom zmysle), resp. -2π (v zápornom zmysle).
[Veľkosť oblúka od J po J je aj $\pm 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ pri viacnásobnom (n -násobnom) otočení oblúka okolo kružnice k .]
- Veľkosť oblúka od J po K je $\frac{\pi}{2}$ (v kladnom zmysle), resp. $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$ (v zápornom zmysle).
- $A = [\cos x; \sin x]$, $T = [1; \operatorname{tg} x]$, $C = [\operatorname{cotg} x; 1]$.

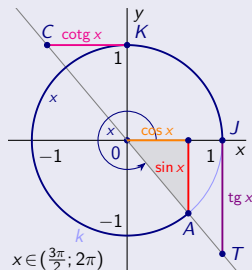
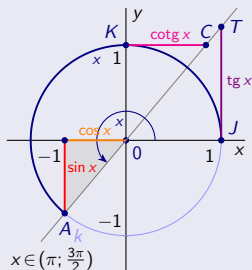
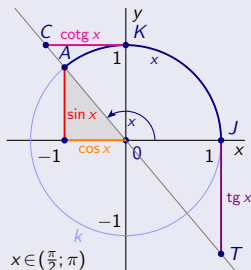
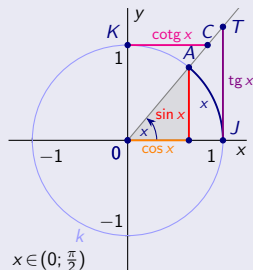


Goniometrické funkcie – Vlastnosti

Geometrický význam funkcií $\sin x = |AA_x|$ a $\cos x = |0A_x|$ a $\operatorname{tg} x = |TJ|$ a $\operatorname{cotg} x = |CK|$.

5

- Obvod kružnice k (stred O , polomer $r = 1$) je 2π . [Ludolfovo číslo $\pi \approx 3,141\,592\,653\,590$ je iracionálne.]
- Veľkosť oblúka od J po J je 2π (v kladnom zmysle), resp. -2π (v zápornom zmysle).
[Veľkosť oblúka od J po J je aj $\pm 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ pri viacnásobnom (n -násobnom) otočení oblúka okolo kružnice k .]
- Veľkosť oblúka od J po K je $\frac{\pi}{2}$ (v kladnom zmysle), resp. $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$ (v zápornom zmysle).
- $A = [\cos x; \sin x]$, $T = [1; \operatorname{tg} x]$, $C = [\operatorname{cotg} x; 1]$.
[Pre $A \neq [\pm 1; 0]$, $A \neq [0; \pm 1]$ tvoria $\sin x$, $\cos x$ odvesny pravouhlého trojuholníka s preponou $|OA| = 1$.]
- Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

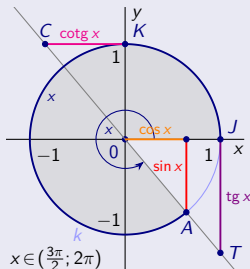
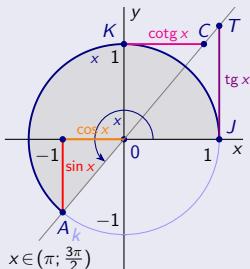
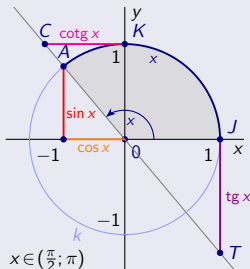
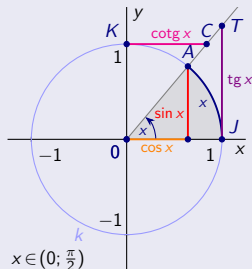


Goniometrické funkcie – Vlastnosti

Geometrický význam funkcií $\sin x = |AA_x|$ a $\cos x = |0A_x|$ a $\operatorname{tg} x = |TJ|$ a $\operatorname{cotg} x = |CK|$.

6

- Obvod kružnice k (stred O , polomer $r = 1$) je 2π . [Ludolfovo číslo $\pi \approx 3,141\,592\,653\,590$ je iracionálne.]
- Veľkosť oblúka od J po J je 2π (v kladnom zmysle), resp. -2π (v zápornom zmysle).
[Veľkosť oblúka od J po J je aj $\pm 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ pri viacnásobnom (n -násobnom) otočení oblúka okolo kružnice k .]
- Veľkosť oblúka od J po K je $\frac{\pi}{2}$ (v kladnom zmysle), resp. $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$ (v zápornom zmysle).
- $A = [\cos x; \sin x]$, $T = [1; \operatorname{tg} x]$, $C = [\operatorname{cotg} x; 1]$.
[Pre $A \neq [\pm 1; 0]$, $A \neq [0; \pm 1]$ tvoria $\sin x$, $\cos x$ odvesny pravouhlého trojuholníka s preponou $|OA| = 1$.]
- Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Goniometrické funkcie majú v bodoch x a $x \pm 2n\pi$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ pre rovnaké hodnoty.



Goniometrické funkcie – Vlastnosti

- Na meranie uhlov (v rovine) sa niekedy používajú aj stupne, označenie $^{\circ}$.

Goniometrické funkcie – Vlastnosti

- Na meranie uhlov (v rovine) sa niekedy používajú aj stupne, označenie $^{\circ}$.

2

- 1° sa delí na 60 minút, t. j. $1^{\circ} = 60'$.

- $1'$ sa delí na 60 sekúnd, t. j. $1' = 60''$.

Goniometrické funkcie – Vlastnosti

- Na meranie uhlov (v rovine) sa niekedy používajú aj stupne, označenie $^{\circ}$.

3

- 1° sa delí na 60 minút, t. j. $1^{\circ} = 60'$.

- $1'$ sa delí na 60 sekúnd, t. j. $1' = 60''$.

- $x^{\circ} \rightarrow \frac{\pi x^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\pi x}{180}$. [Prevod $^{\circ} \rightarrow \text{rad.}$]

- $x \rightarrow \frac{180^{\circ} x}{\pi} = \frac{180x}{\pi}^{\circ}$. [Prevod $\text{rad} \rightarrow ^{\circ}$.]

$$\left[-\frac{2\pi}{3} \sim -120^{\circ}, -\frac{\pi}{2} \sim -90^{\circ}, -\frac{\pi}{3} \sim -60^{\circ}, 0 \sim 0^{\circ}, \frac{\pi}{6} \sim 30^{\circ}, \frac{\pi}{4} \sim 45^{\circ}, \frac{\pi}{3} \sim 60^{\circ}, \frac{2\pi}{3} \sim 120^{\circ}, \pi \sim 180^{\circ}, 2\pi \sim 360^{\circ}, 3\pi \sim 540^{\circ}, \dots \right]$$

Goniometrické funkcie – Vlastnosti

- Na meranie uhlov (v rovine) sa niekedy používajú aj **stupne**, označenie $^{\circ}$.

4

- 1° sa delí na 60 **minút**, t. j. $1^{\circ} = 60'$.

- $1'$ sa delí na 60 **sekúnd**, t. j. $1' = 60''$.

- $x^{\circ} \rightarrow \frac{\pi x^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\pi x}{180}$. [Prevod $^{\circ} \rightarrow \text{rad.}$]

- $x \rightarrow \frac{180^{\circ} x}{\pi} = \frac{180x^{\circ}}{\pi}$. [Prevod $\text{rad} \rightarrow ^{\circ}$.]

$[-\frac{2\pi}{3} \sim -120^{\circ}, -\frac{\pi}{2} \sim -90^{\circ}, -\frac{\pi}{3} \sim -60^{\circ}, 0 \sim 0^{\circ}, \frac{\pi}{6} \sim 30^{\circ}, \frac{\pi}{4} \sim 45^{\circ}, \frac{\pi}{3} \sim 60^{\circ}, \frac{2\pi}{3} \sim 120^{\circ}, \pi \sim 180^{\circ}, 2\pi \sim 360^{\circ}, 3\pi \sim 540^{\circ}, \dots]$

Argumenty goniometrických funkcií sú vždy **v radiánoch** a nie **v stupňoch** $^{\circ}$.

$$[x = 360^{\circ}]$$

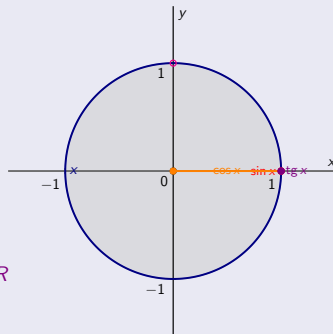
$$x = +6,283185$$

$$y = \sin x: R \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$$

$$y = \cos x: R \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$$

$$y = \tan x: R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow R$$

$$y = \cot x: R - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow R$$



$$\sin x = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$\tan x = 0$$

$$\cot x \text{ neexistuje}$$

IV. a I. kvadrant

$$x = 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



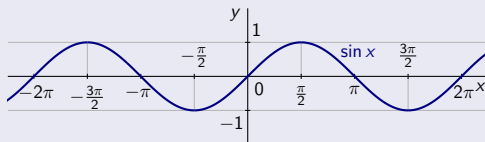
Goniometrické funkcie – Sínus, kosínus

Funkcia $f: y = \sin x$.

1

[Funkcia sínus.]

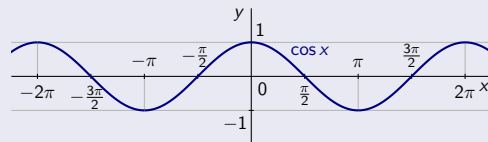
- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- Graf nazývame **sínusoida**.



Funkcia $f: y = \cos x$.

[Funkcia kosínus.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- Graf nazývame **kosínusoida**.



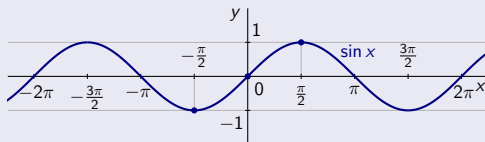
Goniometrické funkcie – Sínus, kosínus

Funkcia $f: y = \sin x$.

2

[Funkcia sínus.]

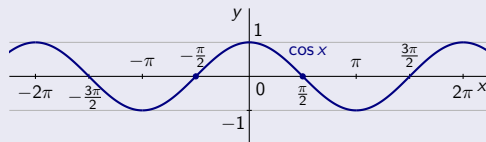
- $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
 - Graf nazývame **sínusoida**.
-
- f je nepárna.



Funkcia $f: y = \cos x$.

[Funkcia kosínus.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
 - Graf nazývame **kosínusoida**.
-
- f je párna.



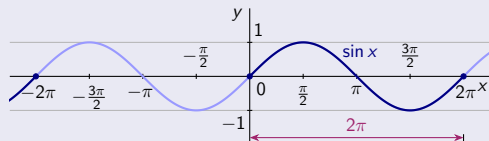
Goniometrické funkcie – Sínus, kosínus

Funkcia $f: y = \sin x$.

3

[Funkcia sínus.]

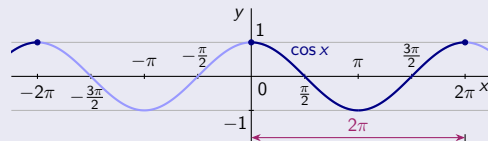
- $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
 - Graf nazývame **sínusoida**.
-
- f je nepárna.
 - f je periodická, primitívna perióda je $p = 2\pi$.



Funkcia $f: y = \cos x$.

[Funkcia kosínus.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
 - Graf nazývame **kosínusoida**.
-
- f je párna.
 - f je periodická, primitívna perióda je $p = 2\pi$.



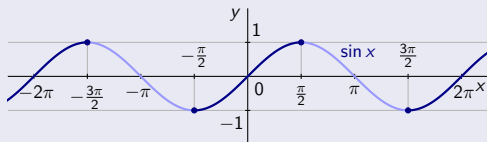
Goniometrické funkcie – Sínus, kosínus

Funkcia $f: y = \sin x$.

4

[Funkcia sínus.]

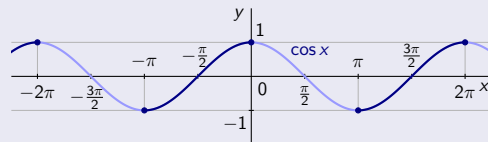
- $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
 - Graf nazývame **sínusoida**.
-
- f je nepárna.
 - f je periodická, primitívna perióda je $p = 2\pi$.
-
- f rastie na $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$,
 $k \in \mathbb{Z}$.



Funkcia $f: y = \cos x$.

[Funkcia kosínus.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
 - Graf nazývame **kosínusoida**.
-
- f je párna.
 - f je periodická, primitívna perióda je $p = 2\pi$.
-
- f rastie na $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$,
 $k \in \mathbb{Z}$.



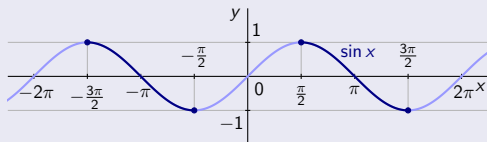
Goniometrické funkcie – Sínus, kosínus

Funkcia $f: y = \sin x$.

5

[Funkcia sínus.]

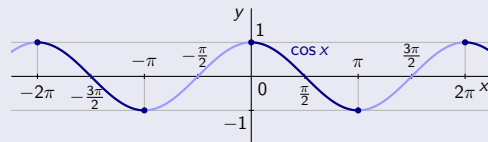
- $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
 - Graf nazývame **sínusoida**.
-
- f je nepárna.
 - f je periodická, primitívna perióda je $p = 2\pi$.
-
- f rastie na $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$,
klesá na $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.



Funkcia $f: y = \cos x$.

[Funkcia kosínus.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
 - Graf nazývame **kosínusoida**.
-
- f je párna.
 - f je periodická, primitívna perióda je $p = 2\pi$.
-
- f rastie na $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$,
klesá na $\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.



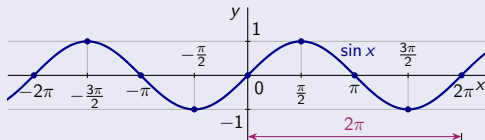
Goniometrické funkcie – Sínus, kosínus

Funkcia $f: y = \sin x$.

6

[Funkcia sínus.]

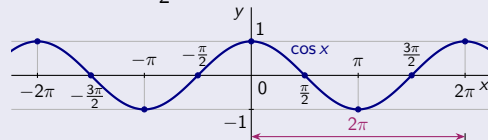
- $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
 - Graf nazývame **sínusoida**.
-
- f je nepárna.
 - f je periodická, primitívna perióda je $p = 2\pi$.
-
- f rastie na $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$,
klesá na $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
-
- Korene sú $0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Funkcia $f: y = \cos x$.

[Funkcia kosínus.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
 - $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
 - Graf nazývame **kosínusoida**.
-
- f je párna.
 - f je periodická, primitívna perióda je $p = 2\pi$.
-
- f rastie na $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$,
klesá na $\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
-
- Korene sú $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

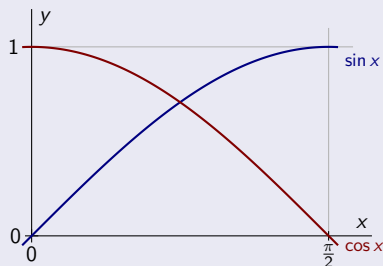


Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

1

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus v I. kvadrante.]



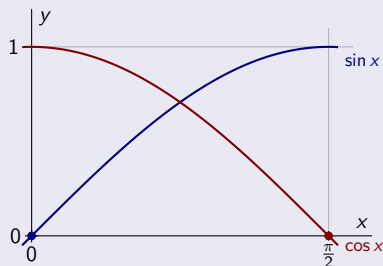
Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

2

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus v I. kvadrante.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$



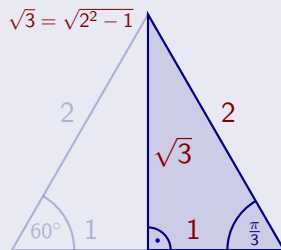
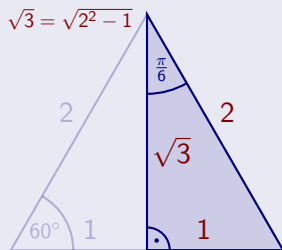
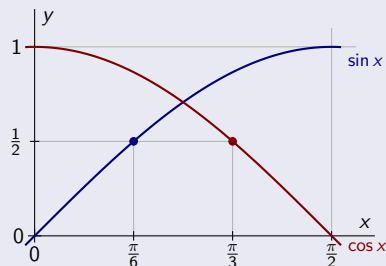
Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

3

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus v I. kvadrante.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$

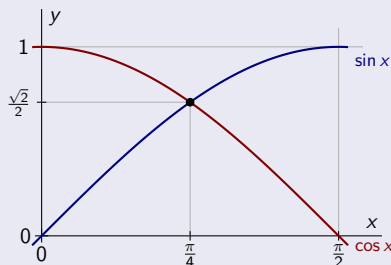


Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

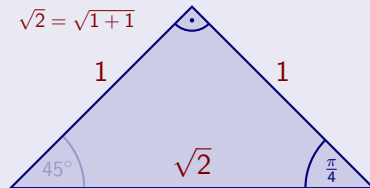
[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus v I. kvadrante.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$$



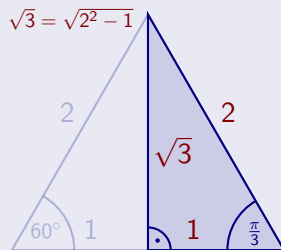
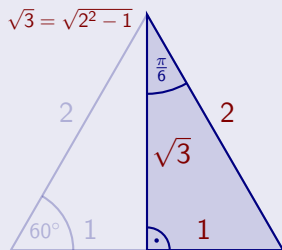
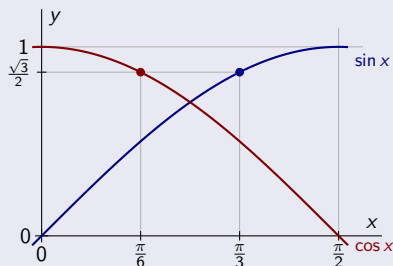
Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

5

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus v I. kvadrante.]

- $\sin 0 = 0.$ • $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$ • $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ • $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ • $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$



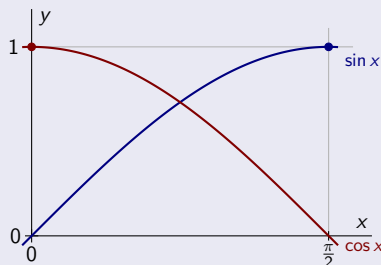
Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

6

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus v I. kvadrante.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos 0 = 1.$



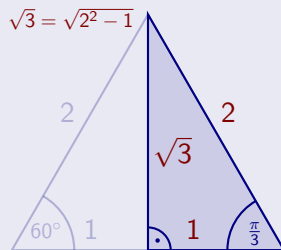
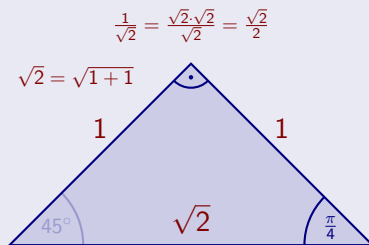
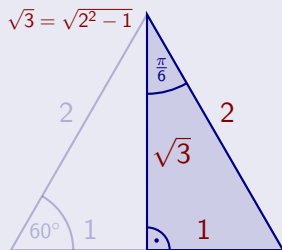
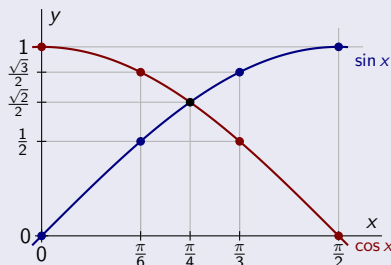
Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

7

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus v I. kvadrante.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos 0 = 1.$



Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

1

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus.]

[Funkcia sínus je nepárna, t. j. $\sin x = -\sin(-x)$ a $\sin x \in (-1; 1)$.]

[Funkcia kosínus je párna, t. j. $\cos x = \cos(-x)$ a $\cos x \in (-1; 1)$.]



Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

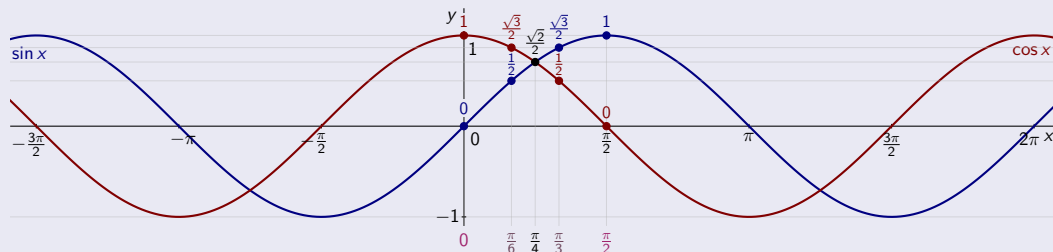
2

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus.]

[Funkcia sínus je nepárna, t. j. $\sin x = -\sin(-x)$ a $\sin x \in (-1; 1)$.]

[Funkcia kosínus je párna, t. j. $\cos x = \cos(-x)$ a $\cos x \in (-1; 1)$.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1.$
- $\cos 0 = 1.$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$



Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

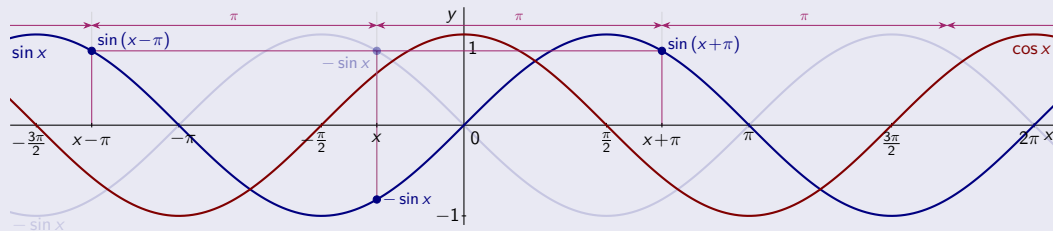
Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus.]

[Funkcia sínus je nepárna, t. j. $\sin x = -\sin(-x)$ a $\sin x \in (-1; 1)$.]

[Funkcia kosínus je párna, t. j. $\cos x = \cos(-x)$ a $\cos x \in (-1; 1)$.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1.$
- $\cos 0 = 1.$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\sin(x + \pi) = \sin(x - \pi) = -\sin x.$



Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

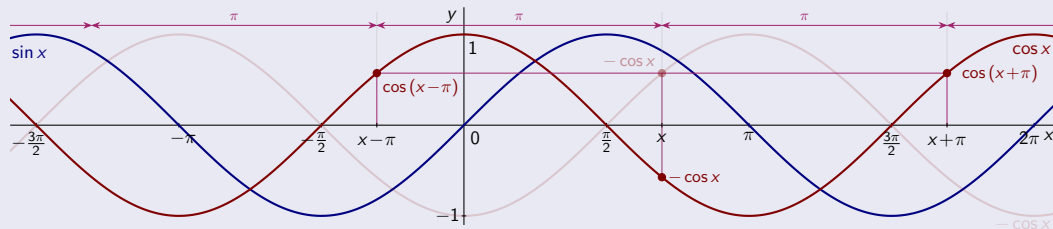
Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus.]

[Funkcia sínus je nepárna, t. j. $\sin x = -\sin(-x)$ a $\sin x \in (-1; 1)$.]

[Funkcia kosínus je párna, t. j. $\cos x = \cos(-x)$ a $\cos x \in (-1; 1)$.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1.$
- $\cos 0 = 1.$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = -\cos x.$



Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

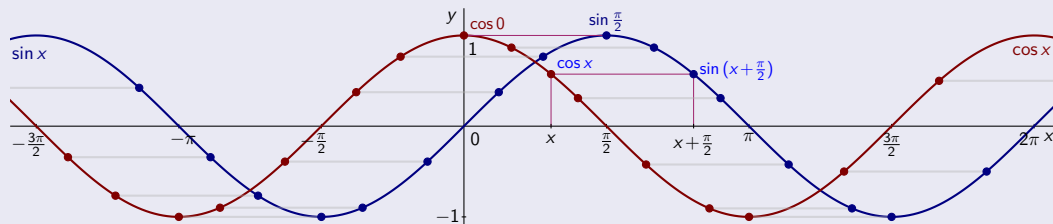
5

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus.]

[Funkcia sínus je nepárna, t. j. $\sin x = -\sin(-x)$ a $\sin x \in (-1; 1)$.]

[Funkcia kosínus je párna, t. j. $\cos x = \cos(-x)$ a $\cos x \in (-1; 1)$.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1.$
- $\cos 0 = 1.$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\sin(x + \pi) = \sin(x - \pi) = -\sin x.$
- $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = -\cos x.$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x.$



Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

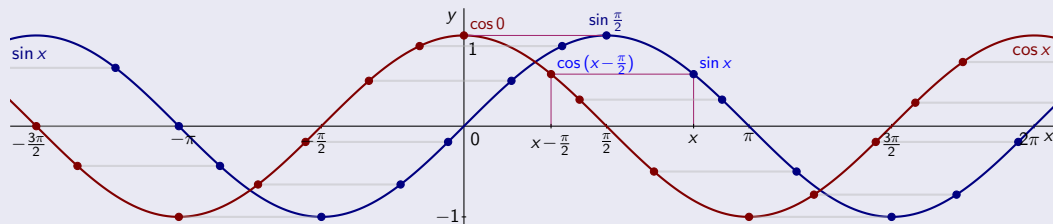
Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus.]

[Funkcia sínus je nepárna, t. j. $\sin x = -\sin(-x)$ a $\sin x \in (-1; 1)$.]

[Funkcia kosínus je párna, t. j. $\cos x = \cos(-x)$ a $\cos x \in (-1; 1)$.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1.$
- $\cos 0 = 1.$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\sin(x + \pi) = \sin(x - \pi) = -\sin x.$
- $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = -\cos x.$
- $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x.$



Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

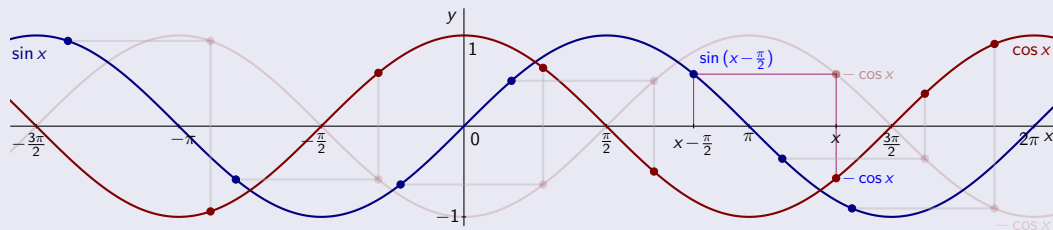
Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus.]

[Funkcia sínus je nepárna, t. j. $\sin x = -\sin(-x)$ a $\sin x \in (-1; 1)$.]

[Funkcia kosínus je párna, t. j. $\cos x = \cos(-x)$ a $\cos x \in (-1; 1)$.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1.$
- $\cos 0 = 1.$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\sin(x + \pi) = \sin(x - \pi) = -\sin x.$
- $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = -\cos x.$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x.$
- $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x.$
- $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x.$



Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

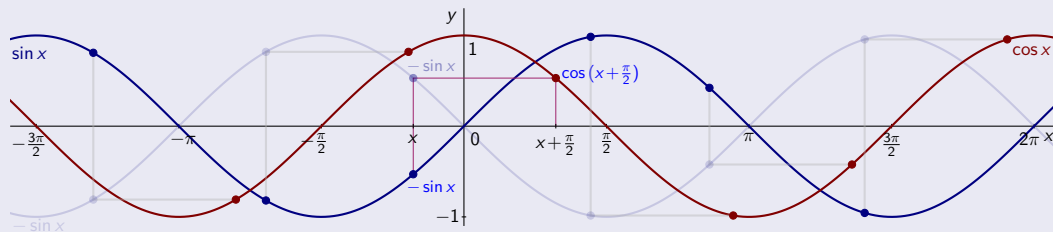
Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus.]

[Funkcia sínus je nepárna, t. j. $\sin x = -\sin(-x)$ a $\sin x \in (-1; 1)$.]

[Funkcia kosínus je párna, t. j. $\cos x = \cos(-x)$ a $\cos x \in (-1; 1)$.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1.$
- $\cos 0 = 1.$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\sin(x + \pi) = \sin(x - \pi) = -\sin x.$
- $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = -\cos x.$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x.$
- $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x.$
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x.$



Goniometrické funkcie – Sínus a kosínus (dôležité hodnoty)

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

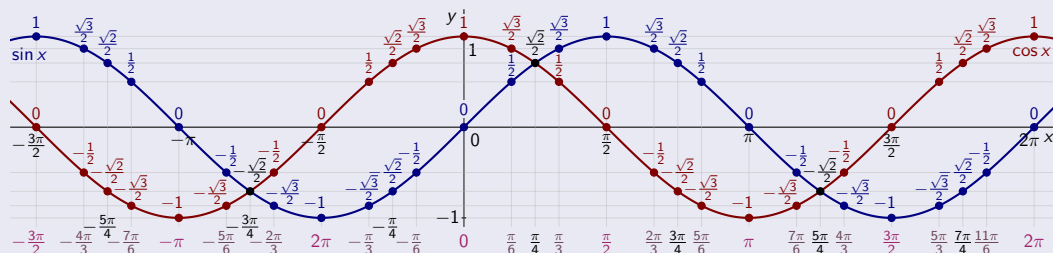
9

[Dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus.]

[Funkcia sínus je nepárna, t. j. $\sin x = -\sin(-x)$ a $\sin x \in (-1; 1)$.]

[Funkcia kosínus je párna, t. j. $\cos x = \cos(-x)$ a $\cos x \in (-1; 1)$.]

- $\sin 0 = 0.$
- $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1.$
- $\cos 0 = 1.$
- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0.$
- $\sin(x + \pi) = \sin(x - \pi) = -\sin x.$
- $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = -\cos x.$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x.$
- $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x.$
- $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x.$
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x.$



Goniometrické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

1

[Základné súčtové vzorce.]

- $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$
- $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y,$

Goniometrické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

2

[Základné súčtové vzorce.]

- $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$
- $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y,$
- $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,$
- $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y,$

Goniometrické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

3

[Základné súčtové vzorce.]

- $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$, špeciálne $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.
- $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$, špeciálne $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.
- $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$, špeciálne $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.
- $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$, špeciálne $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$.

[Z každého z týchto vzorcov môžeme odvodiť všetky ostatné súčtové vzorce.]

Goniometrické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Základné súčtové vzorce.]

- $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$, špeciálne $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.
- $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$, špeciálne $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.
- $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$, špeciálne $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.
- $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$, špeciálne $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$.

[Z každého z týchto vzorcov môžeme odvodiť všetky ostatné súčtové vzorce.]

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

[Vzorce pre dvojnásobné uhly.]

- $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$, špeciálne $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$.
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, špeciálne $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

Goniometrické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

5

[Základné súčtové vzorce.]

- $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$, špeciálne $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.
- $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$, špeciálne $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.
- $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$, špeciálne $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.
- $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$, špeciálne $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$.

[Z každého z týchto vzorcov môžeme odvodiť všetky ostatné súčtové vzorce.]

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

[Vzorce pre dvojnásobné uhly.]

- $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$, špeciálne $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$.
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, špeciálne $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

[Vzorce pre polovičné uhly.]

- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, špeciálne $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$.
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, špeciálne $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$.

Goniometrické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

1

$$\bullet \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$\bullet \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$\bullet \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}.$$

$$\bullet \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}.$$

Goniometrické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

2

$$\bullet \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$\bullet \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$\bullet \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}.$$

$$\bullet \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}.$$

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet \sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}.$$

$$\bullet \cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}.$$

$$\bullet \cos x \cdot \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}.$$

$$\bullet \sin x \cdot \sin y = \frac{-\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}.$$

Goniometrické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

3

- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

- $\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
- $\cos x \cdot \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$
- $\sin x \cdot \sin y = \frac{-\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

- $\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x$
- $\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x$

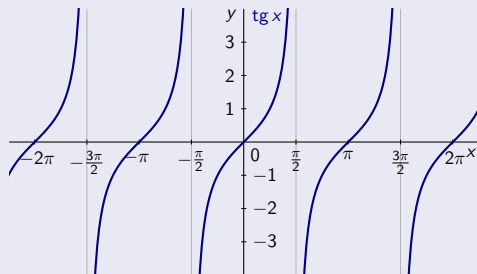
Goniometrické funkcie – Tangens, kotangens

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

1

[Funkcia tangens.]

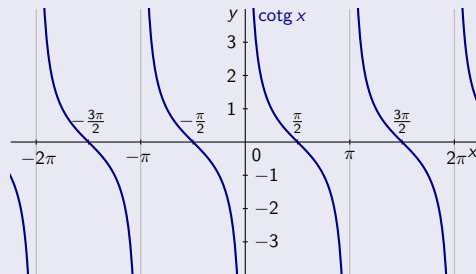
- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $H(f) = \mathbb{R}$.
- Graf nazývame **tangenta**.



Funkcia $f: y = \operatorname{cotg} x$.

[Funkcia kotangens.]

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- $H(f) = \mathbb{R}$.
- Graf nazývame **kotangenta**.



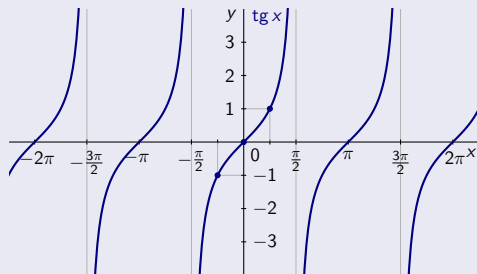
Goniometrické funkcie – Tangens, kotangens

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

2

[Funkcia tangens.]

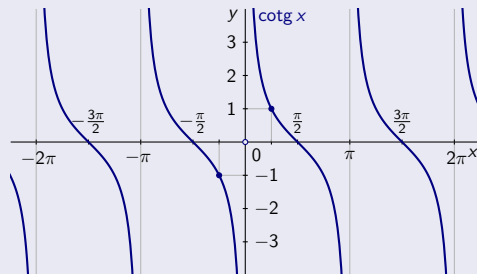
- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $H(f) = R$.
- Graf nazývame **tangenta**.
- f je nepárna.



Funkcia $f: y = \operatorname{cotg} x$.

[Funkcia kotangens.]

- $D(f) = R - \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- $H(f) = R$.
- Graf nazývame **kotangenta**.
- f je nepárna.



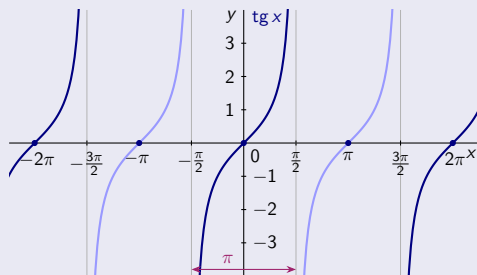
Goniometrické funkcie – Tangens, kotangens

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

3

[Funkcia tangens.]

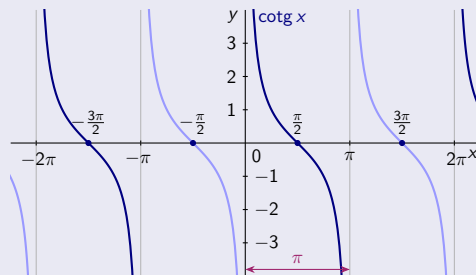
- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $H(f) = R$. • Graf nazývame **tangenta**.
- f je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = \pi$.



Funkcia $f: y = \operatorname{cotg} x$.

[Funkcia kotangens.]

- $D(f) = R - \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- $H(f) = R$. • Graf nazývame **kotangenta**.
- f je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = \pi$.

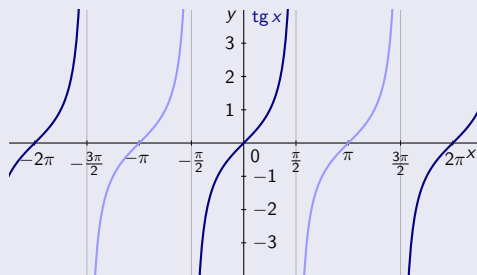


Goniometrické funkcie – Tangens, kotangens

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

[Funkcia tangens.]

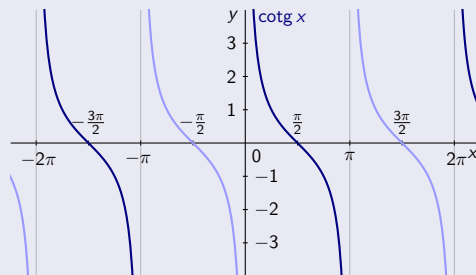
- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $H(f) = R$. • Graf nazývame **tangenta**.
- f je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = \pi$.
- f rastie na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.



Funkcia $f: y = \operatorname{cotg} x$.

[Funkcia kotangens.]

- $D(f) = R - \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- $H(f) = R$. • Graf nazývame **kotangenta**.
- f je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = \pi$.
- f klesá na $(0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.



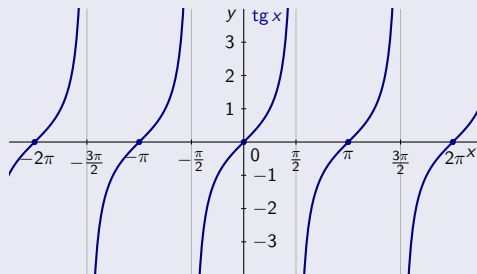
Goniometrické funkcie – Tangens, kotangens

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

5

[Funkcia tangens.]

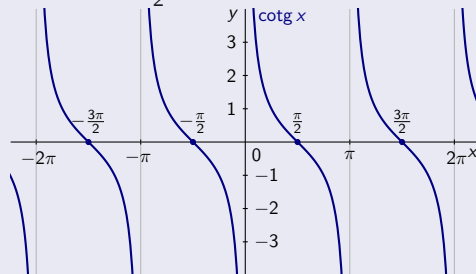
- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $H(f) = R$. • Graf nazývame **tangenta**.
- f je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = \pi$.
- f rastie na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
- Korene sú $0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Funkcia $f: y = \operatorname{cotg} x$.

[Funkcia kotangens.]

- $D(f) = R - \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- $H(f) = R$. • Graf nazývame **kotangenta**.
- f je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = \pi$.
- f klesá na $(0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Korene sú $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



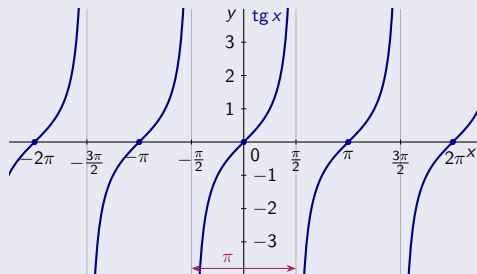
Goniometrické funkcie – Tangens, kotangens

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

6

[Funkcia tangens.]

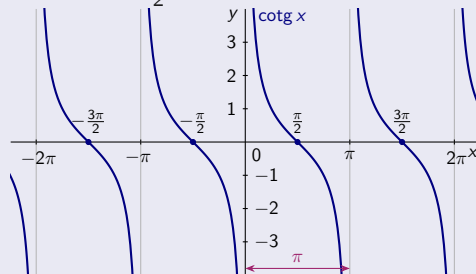
- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $H(f) = R$. • Graf nazývame **tangenta**.
- f je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = \pi$.
- f rastie na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Korene sú $0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Funkcia $f: y = \operatorname{cotg} x$.

[Funkcia kotangens.]

- $D(f) = R - \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- $H(f) = R$. • Graf nazývame **kotangenta**.
- f je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = \pi$.
- f klesá na $(0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Korene sú $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Goniometrické funkcie – Prevodové vzorce

Pre všetky $x, y \in R$ (pokiaľ sú príslušné výrazy definované) platí:

1

[Súčtové vzorce pre tangens a kotangens.]

- $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$

- $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$

- $\operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}$

- $\operatorname{cotg}(x - y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}$

Goniometrické funkcie – Prevodové vzorce

Pre všetky $x, y \in R$ (pokiaľ sú príslušné výrazy definované) platí:

2

[Súčtové vzorce pre tangens a kotangens.]

$$\bullet \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x - y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}{2}.$$

Goniometrické funkcie – Prevodové vzorce

Pre všetky $x, y \in R$ (pokiaľ sú príslušné výrazy definované) platí:

3

[Súčtové vzorce pre tangens a kotangens.]

$$\bullet \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x - y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}{2}.$$

Pre všetky $x \in R$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$ platí:

$$\bullet \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

$$\bullet 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Goniometrické funkcie – Prevodové vzorce

Pre všetky $x, y \in R$ (pokiaľ sú príslušné výrazy definované) platí:

[Súčtové vzorce pre tangens a kotangens.]

$$\bullet \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x - y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}{2}.$$

Pre všetky $x \in R$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$ platí:

$$\bullet \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

$$\bullet 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

[Oproti I. kvadrantu sa v príslušných vzťahoch v II., III. a IV. kvadrante líšia znamienka.]

$$\bullet \sin x$$

$$\bullet \cos x$$

$$\bullet \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$$

Goniometrické funkcie – Prevodové vzorce

Pre všetky $x, y \in R$ (pokiaľ sú príslušné výrazy definované) platí:

S

[Súčtové vzorce pre tangens a kotangens.]

$$\bullet \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x - y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}{2}.$$

Pre všetky $x \in R$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$ platí:

$$\bullet \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

$$\bullet 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

[Oproti I. kvadrantu sa v príslušných vzťahoch v II., III. a IV. kvadrante líšia znamienka.]

$$\bullet \sin x$$

$$\bullet \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\bullet \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

Goniometrické funkcie – Prevodové vzorce

Pre všetky $x, y \in R$ (pokiaľ sú príslušné výrazy definované) platí:

[Súčtové vzorce pre tangens a kotangens.]

$$\bullet \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x - y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}{2}.$$

Pre všetky $x \in R$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$ platí:

$$\bullet \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

$$\bullet 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

[Oproti I. kvadrantu sa v príslušných vzťahoch v II., III. a IV. kvadrante líšia znamienka.]

$$\bullet \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\bullet \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\bullet \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}.$$

Goniometrické funkcie – Prevodové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ (pokiaľ sú príslušné výrazy definované) platí:

7

[Súčtové vzorce pre tangens a kotangens.]

$$\bullet \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x - y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}{2}.$$

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\bullet \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

$$\bullet 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

[Oproti I. kvadrantu sa v príslušných vzťahoch v II., III. a IV. kvadrante líšia znamienka.]

$$\bullet \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\bullet \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\bullet \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}.$$

Goniometrické funkcie – Prevodové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ (pokiaľ sú príslušné výrazy definované) platí:

8

[Súčtové vzorce pre tangens a kotangens.]

$$\bullet \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

$$\bullet \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg}(x - y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}.$$

$$\bullet \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}{2}.$$

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\bullet \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

$$\bullet 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

[Oproti I. kvadrantu sa v príslušných vzťahoch v II., III. a IV. kvadrante líšia znamienka.]

$$\bullet \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}.$$

$$\bullet \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}.$$

$$\bullet \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}.$$

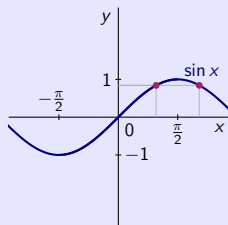
Cyklometrické funkcie – Definície

- Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú prosté.

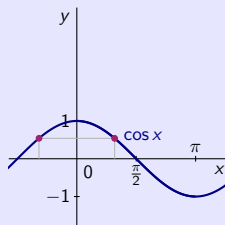
1

Cyklometrické funkcie sú

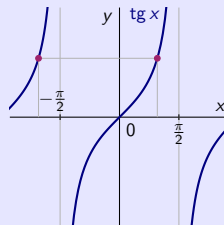
- arkussínus
- arkuskosínus
- arkustangens
- arkuskotangens



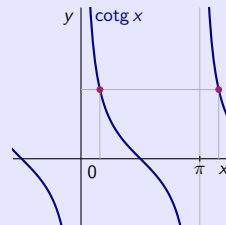
sínus



kosínus



tangens



kotangens

Cyklometrické funkcie – Definície

- Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú prosté.
- Musíme ich zúžiť na vhodné intervaly tak, aby zúženia boli prosté.

2

Cyklometrické funkcie sú inverzné ku goniometrickým funkciám (k vhodným zúženiam):

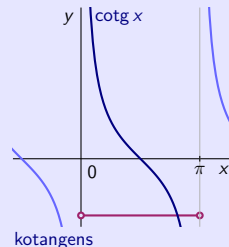
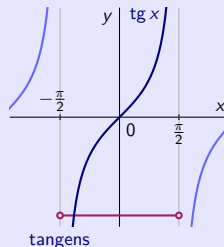
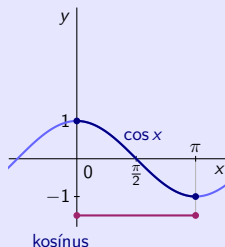
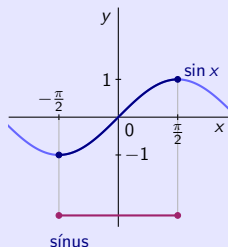
- arkussínus
- arkuskosínus
- arkustangens
- arkuskotangens

[Inverzná k $y = \sin x$,

[Inverzná k $y = \cos x$,

[Inverzná k $y = \operatorname{tg} x$,

[Inverzná k $y = \operatorname{cotg} x$,



Cyklometrické funkcie – Definície

- Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú prosté.
- Musíme ich zúžiť na vhodné intervaly tak, aby zúženia boli prosté.

3

[Sínus na $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$, kosínus na $\langle 0; \pi \rangle$, tangens na $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$, kotangens na $\langle 0; \pi \rangle$.]

Cyklometrické funkcie sú inverzné ku goniometrickým funkciám (k vhodným zúženiam):

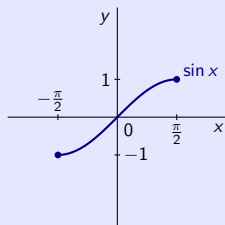
- arkussínus
- arkuskosínus
- arkustangens
- arkuskotangens

[Inverzná k $y = \sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$.]

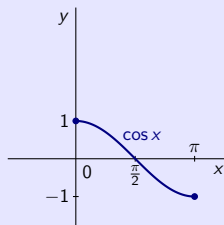
[Inverzná k $y = \cos x$, $x \in \langle 0; \pi \rangle \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$.]

[Inverzná k $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.]

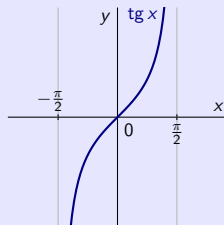
[Inverzná k $y = \operatorname{cotg} x$, $x \in \langle 0; \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.]



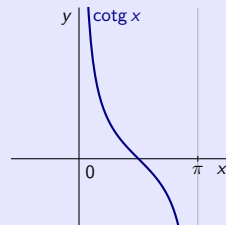
sínus



kosínus



tangens



kotangens

Cyklometrické funkcie – Definície

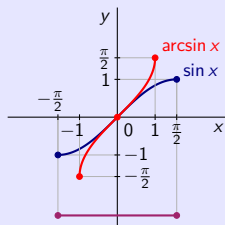
- Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú prosté.
- Musíme ich zúžiť na vhodné intervaly tak, aby zúžená bola prostá.

4

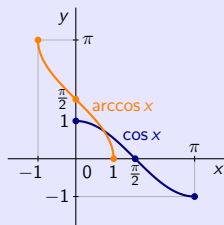
[Sínus na $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$, kosínus na $\langle 0; \pi \rangle$, tangens na $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, kotangens na $(0; \pi)$.]

Cyklometrické funkcie sú inverzné ku goniometrickým funkciám (k vhodným zúženiam):

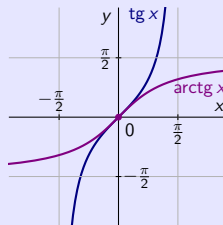
- arkussínus** $y = \arcsin x: \langle -1; 1 \rangle \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$. [Inverzná k $y = \sin x, x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$.]
- arkuskosínus** $y = \arccos x: \langle -1; 1 \rangle \rightarrow \langle 0; \pi \rangle$. [Inverzná k $y = \cos x, x \in \langle 0; \pi \rangle \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$.]
- arkustangens** $y = \arctg x: R \rightarrow (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. [Inverzná k $y = \tg x, x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \rightarrow R$.]
- arkuskotangens** $y = \operatorname{arccotg} x: R \rightarrow (0; \pi)$. [Inverzná k $y = \cotg x, x \in (0; \pi) \rightarrow R$.]



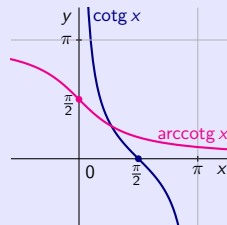
sínus a arkussínus



kosínus a arkuskosínus



tangens a arkustangens



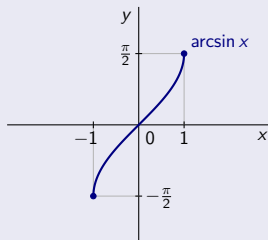
kotangens a arkuskotangens

Cyklometrické funkcie – Arkussínus, arkuskosínus

Funkcia $f: y = \arcsin x$.

[Funkcia arkussínus.]

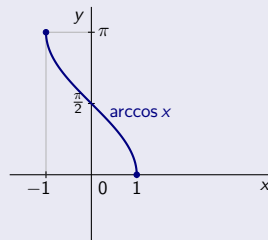
• $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$. • $H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.



Funkcia $f: y = \arccos x$.

[Funkcia arkuskosínus.]

• $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$. • $H(f) = \langle 0; \pi \rangle$.



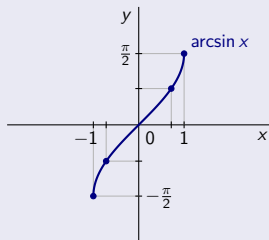
Cyklometrické funkcie – Arkussínus, arkuskosínus

Funkcia $f: y = \arcsin x$.

2

[Funkcia arkussínus.]

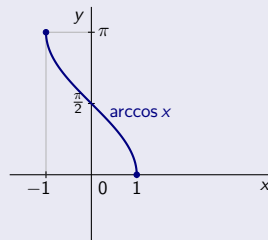
- $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.



Funkcia $f: y = \arccos x$.

[Funkcia arkuskosínus.]

- $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \langle 0; \pi \rangle$.
- f nie je nepárna ani párna.
- f je klesajúca.



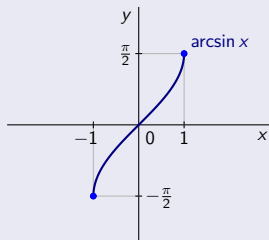
Cyklometrické funkcie – Arkussínus, arkuskosínus

Funkcia $f: y = \arcsin x$.

3

[Funkcia arkussínus.]

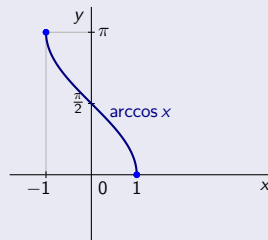
- $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.



Funkcia $f: y = \arccos x$.

[Funkcia arkuskosínus.]

- $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \langle 0; \pi \rangle$.
- f nie je nepárna ani párna.
- f je klesajúca.
- $\arccos(-1) = \pi$.
- $\arccos 1 = 0$.

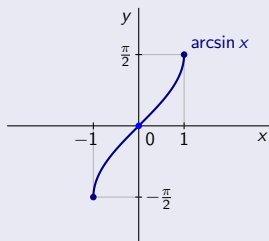


Cyklometrické funkcie – Arkussínus, arkuskosínus

Funkcia $f: y = \arcsin x$.

[Funkcia arkussínus.]

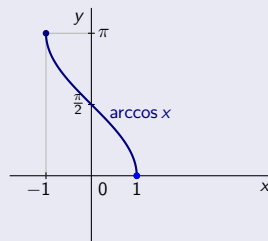
- $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.
- Koreň (nulový bod) je 0. [arcsin 0 = 0.]



Funkcia $f: y = \arccos x$.

[Funkcia arkuskosínus.]

- $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \langle 0; \pi \rangle$.
- f nie je nepárna ani párna.
- f je klesajúca.
- $\arccos(-1) = \pi$.
- $\arccos 1 = 0$.
- Koreň (nulový bod) je 1. [arccos 1 = 0.]



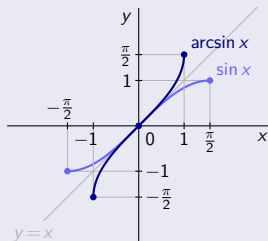
Cyklometrické funkcie – Arkussínus, arkuskosínus

Funkcia $f: y = \arcsin x$.

5

[Funkcia arkussínus.]

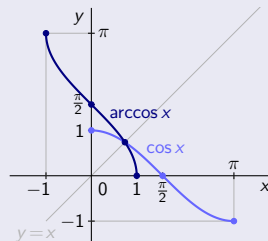
- $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.
- Koreň (nulový bod) je 0. [arcsin 0 = 0.]



Funkcia $f: y = \arccos x$.

[Funkcia arkuskosínus.]

- $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \langle 0; \pi \rangle$.
- f nie je nepárna ani párna.
- f je klesajúca.
- $\arccos(-1) = \pi$.
- $\arccos 1 = 0$.
- Koreň (nulový bod) je 1. [arccos 1 = 0.]



Cyklometrické funkcie – Arkussínus, arkuskosínus

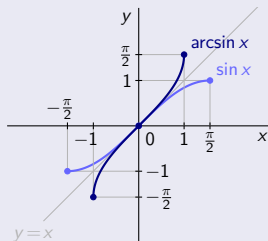
Funkcia $f: y = \arcsin x$.

6

[Funkcia arkussínus.]

- $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.
- Koreň (nulový bod) je 0.

[arcsin 0 = 0.]

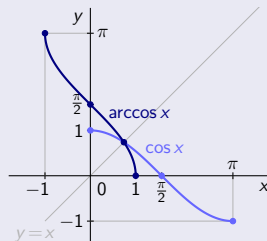


Funkcia $f: y = \arccos x$.

[Funkcia arkuskosínus.]

- $D(f) = \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \langle 0; \pi \rangle$.
- f nie je nepárna ani párna.
- f je klesajúca.
- $\arccos(-1) = \pi$.
- $\arccos 1 = 0$.
- Koreň (nulový bod) je 1.

[arccos 1 = 0.]



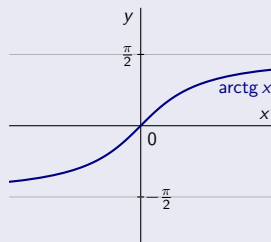
Pre všetky $x \in \langle -1; 1 \rangle$ platí:

- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Cyklometrické funkcie – Arkustangens, arkuskotangens

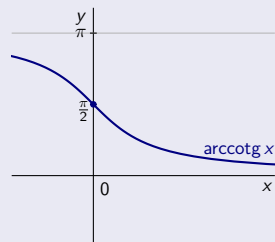
Funkcia $f: y = \operatorname{arctg} x$. ¹ [Funkcia arkustangens.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



Funkcia $f: y = \operatorname{arccotg} x$. [Funkcia arkuskotangens.]

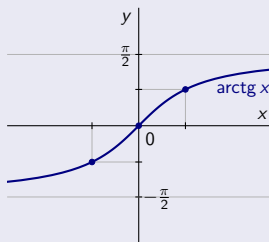
- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (0; \pi)$.



Cyklometrické funkcie – Arkustangens, arkuskotangens

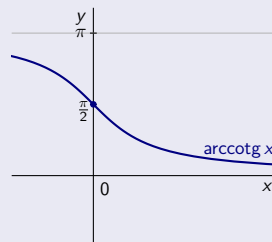
Funkcia $f: y = \operatorname{arctg} x$. ² [Funkcia arkustangens.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.



Funkcia $f: y = \operatorname{arccotg} x$. [Funkcia arkuskotangens.]

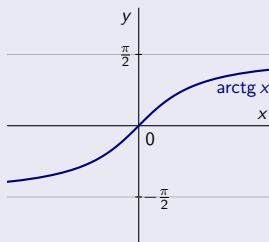
- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (0; \pi)$.
- f nie je nepárna ani párna.
- f je klesajúca.



Cyklometrické funkcie – Arkustangens, arkuskotangens

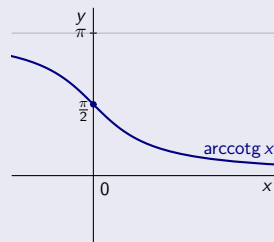
Funkcia $f: y = \operatorname{arctg} x$. ³ [Funkcia arkustangens.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.



Funkcia $f: y = \operatorname{arccotg} x$. [Funkcia arkuskotangens.]

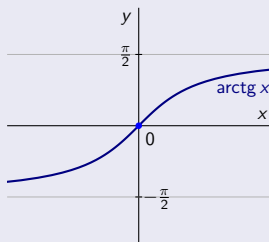
- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (0; \pi)$.
- f nie je nepárna ani párna.
- f je klesajúca.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pi$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.



Cyklometrické funkcie – Arkustangens, arkuskotangens

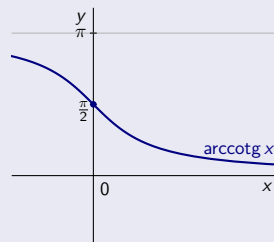
Funkcia $f: y = \operatorname{arctg} x$. [Funkcia arkustangens.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.
- Koreň (nulový bod) je 0. [arctg 0 = 0.]



Funkcia $f: y = \operatorname{arccotg} x$. [Funkcia arkuskotangens.]

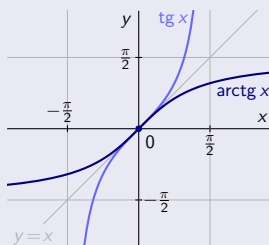
- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (0; \pi)$.
- f nie je nepárna ani párna.
- f je klesajúca.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pi$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- Korene (nulové body) neexistujú.



Cyklometrické funkcie – Arkustangens, arkuskotangens

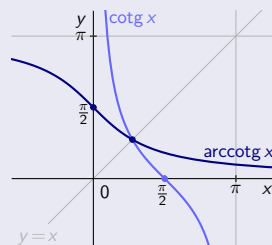
Funkcia $f: y = \operatorname{arctg} x$. 5 [Funkcia arkustangens.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.
- Koreň (nulový bod) je 0. [arctg 0 = 0.]



Funkcia $f: y = \operatorname{arccotg} x$. [Funkcia arkuskotangens.]

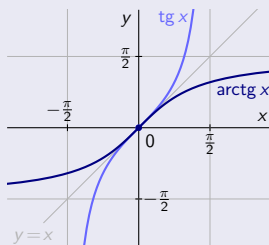
- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (0; \pi)$.
- f nie je nepárna ani párna.
- f je klesajúca.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pi$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- Korene (nulové body) neexistujú.



Cyklometrické funkcie – Arkustangens, arkuskotangens

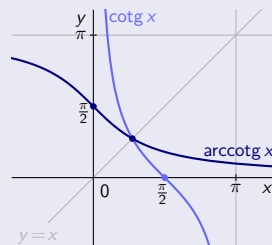
Funkcia $f: y = \operatorname{arctg} x$. ⁶ [Funkcia arkustangens.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.
- Koreň (nulový bod) je 0. [arctg 0 = 0.]



Funkcia $f: y = \operatorname{arccotg} x$. [Funkcia arkuskotangens.]

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (0; \pi)$.
- f nie je nepárna ani párna.
- f je klesajúca.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pi$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- Korene (nulové body) neexistujú.



Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

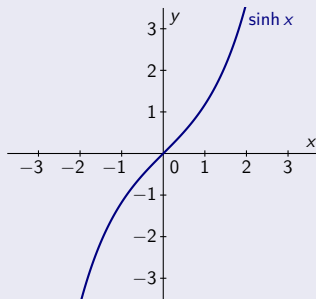
Hyperbolické funkcie – Sínus a kosínus

- Hyperbolické funkcie (sínus, kosínus, tangens a kotangens hyperbolický) majú podobné vlastnosti¹ a platia pre ne podobné vzťahy ako pre goniometrické funkcie.

Sínus hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

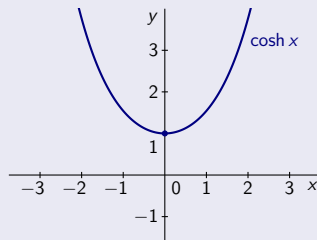
- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \mathbb{R}$.



Kosínus hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \langle 1; \infty \rangle$.



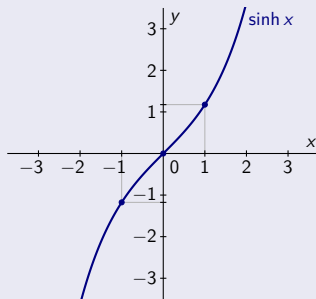
Hyperbolické funkcie – Sínus a kosínus

- Hyperbolické funkcie (sínus, kosínus, tangens a kotangens hyperbolický) majú podobné vlastnosti² a platia pre ne podobné vzťahy ako pre goniometrické funkcie.

Sínus hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

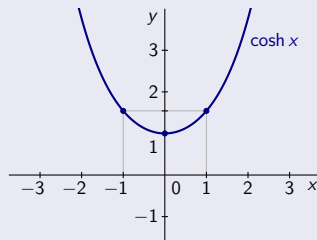
- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \mathbb{R}$.
- f je nepárna.



Kosínus hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \langle 1; \infty \rangle$.
- f je párna.



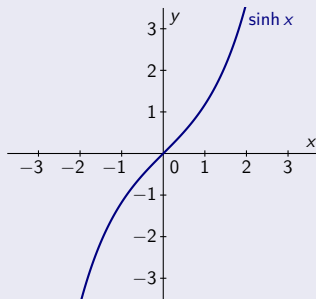
Hyperbolické funkcie – Sínus a kosínus

- Hyperbolické funkcie (sínus, kosínus, tangens a kotangens hyperbolický) majú podobné vlastnosti a platia pre ne podobné vzťahy ako pre goniometrické funkcie.

Sínus hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

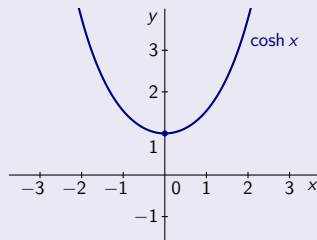
- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \mathbb{R}$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.



Kosínus hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \langle 1; \infty \rangle$.
- f je párna.
- f klesá na $(-\infty; 0]$, rastie na $[0; \infty)$.



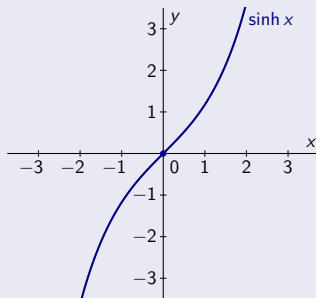
Hyperbolické funkcie – Sínus a kosínus

- Hyperbolické funkcie (sínus, kosínus, tangens a kotangens hyperbolický) majú podobné vlastnosti a platia pre ne podobné vzťahy ako pre goniometrické funkcie.

Sínus hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

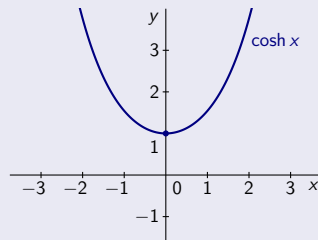
- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \mathbb{R}$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- Koreň (nulový bod) je 0. [sinh 0 = 0.]



Kosínus hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \langle 1; \infty \rangle$.
- f je párna.
- f klesá na $(-\infty; 0]$, rastie na $[0; \infty)$.
- Korene (nulové body) neexistujú.

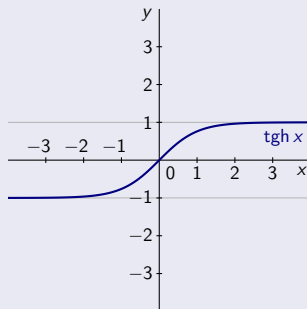


Hyperbolické funkcie – Tangens a kotangens

Tangens hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

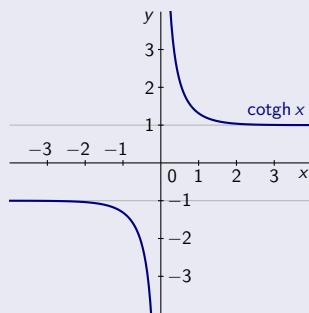
- $D(f) = \mathbb{R}.$
- $H(f) = (-1; 1).$



Kotangens hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$
- $H(f) = \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle.$



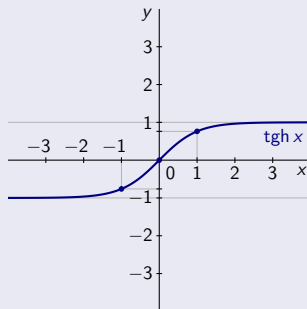
Hyperbolické funkcie – Tangens a kotangens

Tangens hyperbolický sa nazýva

2

funkcia $f: y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

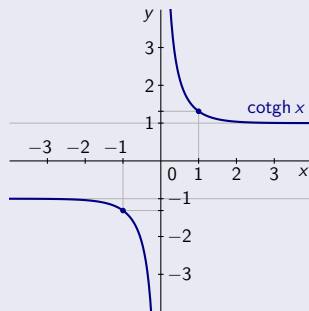
- $D(f) = \mathbb{R}.$
- $H(f) = (-1; 1).$
- f je nepárna.



Kotangens hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$
- $H(f) = \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle.$
- f je nepárna.



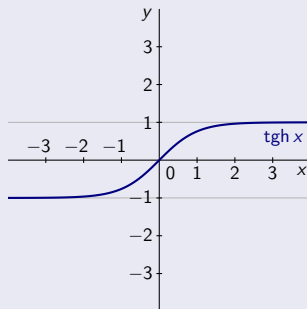
Hyperbolické funkcie – Tangens a kotangens

Tangens hyperbolický sa nazýva

3

funkcia $f: y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

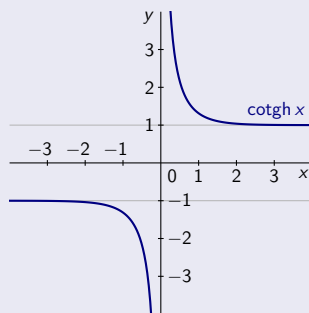
- $D(f) = \mathbb{R}.$
- $H(f) = (-1; 1).$
- f je nepárna.
- f je rastúca.



Kotangens hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$
- $H(f) = \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle.$
- f je nepárna.
- f klesá na $(-\infty; 0)$, klesá na $(0; \infty).$

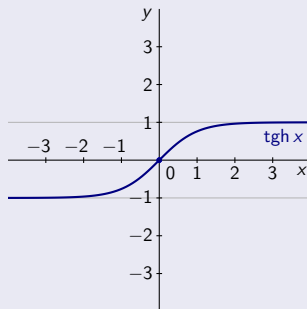


Hyperbolické funkcie – Tangens a kotangens

Tangens hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

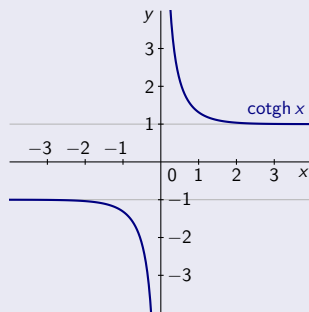
- $D(f) = \mathbb{R}.$
- $H(f) = (-1; 1).$
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- Koreň (nulový bod) je 0. [tgh 0 = 0.]



Kotangens hyperbolický sa nazýva

funkcia $f: y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$
- $H(f) = \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle.$
- f je nepárna.
- f klesá na $(-\infty; 0)$, klesá na $(0; \infty).$
- Korene (nulové body) neexistujú.



Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

1

[Základné vzorce.]

$$\bullet \sinh x + \cosh x = e^x.$$

$$\bullet \sinh x - \cosh x = -e^{-x}.$$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

2

[Základné vzorce.]

$$\bullet \sinh x + \cosh x = e^x. \quad \bullet \sinh x - \cosh x = -e^{-x}.$$

$$\bullet \cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x) \cdot (\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1.$$

[Body so súradnicami $(\cosh x; \sinh x)$ ležia na hyperbole $y^2 - x^2 = 1$.]

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

3

[Základné vzorce.]

- $\sinh x + \cosh x = e^x.$
- $\sinh x - \cosh x = -e^{-x}.$

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x) \cdot (\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1.$

[Body so súradnicami $(\cosh x; \sinh x)$ ležia na hyperbole $y^2 - x^2 = 1.$]

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Základné súčtové vzorce (viď goniometrické funkcie).]

- $\sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y.$

- $\sinh(x - y) = \sinh x \cdot \cosh y - \cosh x \cdot \sinh y.$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

[Základné vzorce.]

$$\bullet \sinh x + \cosh x = e^x. \quad \bullet \sinh x - \cosh x = -e^{-x}.$$

$$\bullet \cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x) \cdot (\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1.$$

[Body so súradnicami $(\cosh x; \sinh x)$ ležia na hyperbole $y^2 - x^2 = 1$.]

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Základné súčtové vzorce (viď goniometrické funkcie).]

$$\bullet \sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y.$$

$$\bullet \sinh(x - y) = \sinh x \cdot \cosh y - \cosh x \cdot \sinh y.$$

$$\bullet \cosh(x + y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y.$$

$$\bullet \cosh(x - y) = \cosh x \cdot \cosh y - \sinh x \cdot \sinh y.$$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

5

[Základné vzorce.]

$$\bullet \sinh x + \cosh x = e^x. \quad \bullet \sinh x - \cosh x = -e^{-x}.$$

$$\bullet \cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x) \cdot (\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1.$$

[Body so súradnicami $(\cosh x; \sinh x)$ ležia na hyperbole $y^2 - x^2 = 1$.]

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Základné súčtové vzorce (viď goniometrické funkcie).]

$$\bullet \sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y.$$

$$\bullet \sinh(x - y) = \sinh x \cdot \cosh y - \cosh x \cdot \sinh y.$$

$$\bullet \cosh(x + y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y.$$

$$\bullet \cosh(x - y) = \cosh x \cdot \cosh y - \sinh x \cdot \sinh y.$$

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

[Dvojnásobné a polovičné argumenty (viď goniometrické funkcie).]

$$\bullet \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x.$$

$$\bullet \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}.$$

$$\bullet \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x.$$

$$\bullet \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}.$$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Viď goniometrické funkcie.]

- $\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cdot \cosh \frac{x-y}{2}.$
- $\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cdot \sinh \frac{x-y}{2}.$
- $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cdot \cosh \frac{x-y}{2}.$
- $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cdot \sinh \frac{x-y}{2}.$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Vid' goniometrické funkcie.]

- $\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cdot \cosh \frac{x-y}{2}.$
- $\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cdot \sinh \frac{x-y}{2}.$
- $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cdot \cosh \frac{x-y}{2}.$
- $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cdot \sinh \frac{x-y}{2}.$

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Vid' goniometrické funkcie.]

- $\sinh(x+y) + \sinh(x-y) = 2 \sinh x \cdot \cosh y.$
- $\sinh(x+y) - \sinh(x-y) = 2 \cosh x \cdot \sinh y.$
- $\cosh(x+y) + \cosh(x-y) = 2 \cosh x \cdot \cosh y.$
- $\cosh(x+y) - \cosh(x-y) = 2 \sinh x \cdot \sinh y.$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Viď goniometrické funkcie.]

- $\sinh(x + y) \cdot \sinh(x - y) = \sinh^2 x - \sinh^2 y = \cosh^2 x - \cosh^2 y.$
- $\cosh(x + y) \cdot \cosh(x - y) = \cosh^2 x + \cosh^2 y - 1 = \sinh^2 y + \sinh^2 x + 1.$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Viď goniometrické funkcie.]

- $\sinh(x + y) \cdot \sinh(x - y) = \sinh^2 x - \sinh^2 y = \cosh^2 x - \cosh^2 y.$
- $\cosh(x + y) \cdot \cosh(x - y) = \cosh^2 x + \cosh^2 y - 1 = \sinh^2 y + \sinh^2 x + 1.$

Pre všetky $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ platí:

- $\operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{cotgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \cdot \frac{\cosh x}{\sinh x} = 1.$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Viď goniometrické funkcie.]

- $\sinh(x + y) \cdot \sinh(x - y) = \sinh^2 x - \sinh^2 y = \cosh^2 x - \cosh^2 y.$
- $\cosh(x + y) \cdot \cosh(x - y) = \cosh^2 x + \cosh^2 y - 1 = \sinh^2 y + \sinh^2 x + 1.$

Pre všetky $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ platí:

- $\operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{cotgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \cdot \frac{\cosh x}{\sinh x} = 1.$

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Súčtové vzorce pre tangens a kotangens hyperbolické (viď goniometrické funkcie).]

- $\operatorname{tgh}(x + y) = \frac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y}{1 + \operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{tgh} y}.$
- $\operatorname{cotgh}(x + y) = \frac{1 + \operatorname{cotgh} x \cdot \operatorname{cotgh} y}{\operatorname{cotgh} x + \operatorname{cotgh} y}.$
- $\operatorname{tgh}(x - y) = \frac{\operatorname{tgh} x - \operatorname{tgh} y}{1 - \operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{tgh} y}.$
- $\operatorname{cotgh}(x - y) = \frac{1 - \operatorname{cotgh} x \cdot \operatorname{cotgh} y}{\operatorname{cotgh} x - \operatorname{cotgh} y}.$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Viď goniometrické funkcie.]

- $\sinh(x + y) \cdot \sinh(x - y) = \sinh^2 x - \sinh^2 y = \cosh^2 x - \cosh^2 y.$
- $\cosh(x + y) \cdot \cosh(x - y) = \cosh^2 x + \cosh^2 y - 1 = \sinh^2 y + \sinh^2 x + 1.$

Pre všetky $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ platí:

- $\operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{cotgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \cdot \frac{\cosh x}{\sinh x} = 1.$

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Súčtové vzorce pre tangens a kotangens hyperbolické (viď goniometrické funkcie).]

- $\operatorname{tgh}(x + y) = \frac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y}{1 + \operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{tgh} y}.$
- $\operatorname{tgh}(x - y) = \frac{\operatorname{tgh} x - \operatorname{tgh} y}{1 - \operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{tgh} y}.$
- $\operatorname{cotgh}(x + y) = \frac{1 + \operatorname{cotgh} x \cdot \operatorname{cotgh} y}{\operatorname{cotgh} x + \operatorname{cotgh} y}.$
- $\operatorname{cotgh}(x - y) = \frac{1 - \operatorname{cotgh} x \cdot \operatorname{cotgh} y}{\operatorname{cotgh} x - \operatorname{cotgh} y}.$

Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

[Súčtové vzorce pre dvojnásobné argumenty (viď goniometrické funkcie).]

- $\operatorname{tgh} 2x = \frac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{cotgh} x + \operatorname{tgh} x}.$
- $\operatorname{cotgh} 2x = \frac{1 + \operatorname{cotgh}^2 x}{2 \operatorname{cotgh} x} = \frac{\operatorname{cotgh} x + \operatorname{tgh} x}{2}.$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí:

1

- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx.$

[Moivreov vzorec pre komplexné čísla:

- Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx.$

]

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí:

2

[Moivreov vzorec pre hyperbolické funkcie.]

- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx.$

[Moivreov vzorec pre komplexné čísla:

- Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx.$

Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí:

[Hyperbolické funkcie (viď goniometrické funkcie).]

- $\sinh x$

- $\cosh x$

- $\operatorname{tgh} x = \frac{1}{\operatorname{cotgh} x}$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí:

3

[Moivreov vzorec pre hyperbolické funkcie.]

- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx.$

[Moivreov vzorec pre komplexné čísla: • Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx.$]

Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí:

[Hyperbolické funkcie (viď goniometrické funkcie).]

- $\sinh x$

- $\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$

- $\operatorname{tgh} x = \frac{1}{\operatorname{cotgh} x} = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí:

[Moivreov vzorec pre hyperbolické funkcie.]

$$\bullet (\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx.$$

[Moivreov vzorec pre komplexné čísla: $\bullet$ Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx$.]

Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí:

[Hyperbolické funkcie (viď goniometrické funkcie).]

$$\bullet \sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$$

$$\bullet \cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1}$$

$$\bullet \operatorname{tgh} x = \frac{1}{\operatorname{cotgh} x} = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}.$$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí:

5

[Moivreov vzorec pre hyperbolické funkcie.]

- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx.$

[Moivreov vzorec pre komplexné čísla: • Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx.$]

Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí:

[Hyperbolické funkcie (viď goniometrické funkcie).]

- $\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\operatorname{tgh} x}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}}$

- $\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}}$

- $\operatorname{tgh} x = \frac{1}{\operatorname{cotgh} x} = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}.$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí:

6

[Moivreov vzorec pre hyperbolické funkcie.]

- $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx.$

[Moivreov vzorec pre komplexné čísla: • Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx.$]

Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí:

[Hyperbolické funkcie (viď goniometrické funkcie).]

- $\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\operatorname{tgh} x}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}.$

- $\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}} = \frac{\operatorname{cotgh} x}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}.$

- $\operatorname{tgh} x = \frac{1}{\operatorname{cotgh} x} = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}.$

Hyperbolické funkcie – Súčtové vzorce

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí:

[Moivreov vzorec pre hyperbolické funkcie.]

$$\bullet (\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx.$$

[Moivreov vzorec pre komplexné čísla: $\bullet$ Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx$.]

Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí:

[Hyperbolické funkcie (viď goniometrické funkcie).]

$$\bullet \sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\operatorname{tgh} x}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}.$$

$$\bullet \cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 x}} = \frac{\operatorname{cotgh} x}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}.$$

$$\bullet \operatorname{tgh} x = \frac{1}{\operatorname{cotgh} x} = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}.$$

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí:

[Goniometrické funkcie.]

$$\bullet \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}.$$

$$\bullet \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}.$$

$$\bullet \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}.$$

Hyperbolometrické funkcie – Argument $\sinh$ a $\cosh$ hyperbolické

- Hyperbolometrickými funkciami (argument sínusu hyperbolického, argument kosínusu hyperbolického, argument tangensu hyperbolického a argument kotangensu hyperbolického) nazývame inverzné funkcie ku funkciám hyperbolickým.¹

Hyperbolometrické funkcie – Argument sin a cos hyperbolické

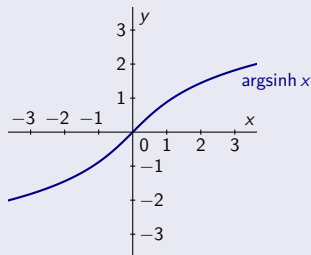
- Hyperbolometrickými funkciami (argument sínusu hyperbolického, argument kosínusu hyperbolického, argument tangensu hyperbolického a argument kotangensu hyperbolického) nazývame inverzné funkcie ku funkciám hyperbolickým.

Argument sínusu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

- $D(f) = \mathbb{R}.$
- $H(f) = \mathbb{R}.$

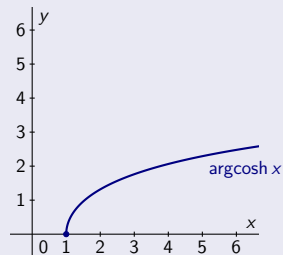


Argument kosínusu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

- $D(f) = \langle 1; \infty \rangle.$
- $H(f) = \langle 0; \infty \rangle.$



Hyperbolometrické funkcie – Argument sin a cos hyperbolické

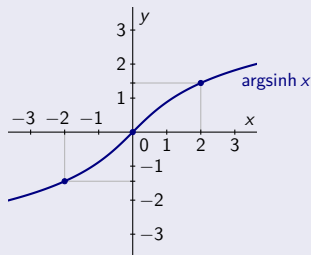
- Hyperbolometrickými funkciami (argument sínusu hyperbolického, argument kosínusu hyperbolického, argument tangensu hyperbolického a argument kotangensu hyperbolického) nazývame inverzné funkcie ku funkciám hyperbolickým.

Argument sínusu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

- $D(f) = \mathbb{R}.$
- $H(f) = \mathbb{R}.$
- f je nepárna.

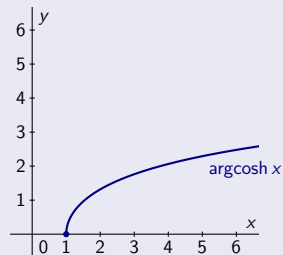


Argument kosínusu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

- $D(f) = \langle 1; \infty \rangle.$
- $H(f) = \langle 0; \infty \rangle.$



Hyperbolometrické funkcie – Argument sin a cos hyperbolické

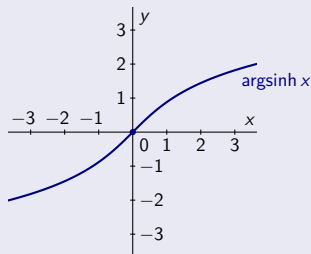
- Hyperbolometrickými funkciami (argument sínusu hyperbolického, argument kosínusu hyperbolického, argument tangensu hyperbolického a argument kotangensu hyperbolického) nazývame inverzné funkcie ku funkciám hyperbolickým.

Argument sínusu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \mathbb{R}$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.

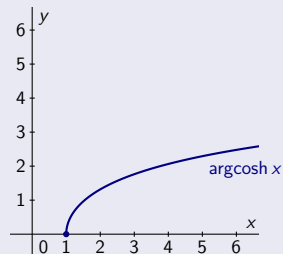


Argument kosínusu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

- $D(f) = \langle 1; \infty \rangle$.
- $H(f) = \langle 0; \infty \rangle$.
- f je rastúca.



Hyperbolometrické funkcie – Argument sin a cos hyperbolické

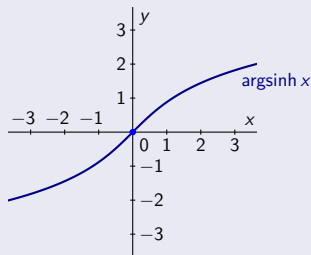
- Hyperbolometrickými funkciami (argument sínusu hyperbolického, argument kosínusu hyperbolického, argument tangensu hyperbolického a argument kotangensu hyperbolického) nazývame inverzné funkcie ku funkciám hyperbolickým. 5

Argument sínusu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \mathbb{R}$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- Koreň (nulový bod) je 0. [arsinh 0 = 0.]

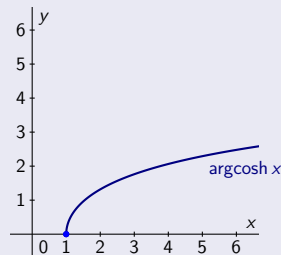


Argument kosínusu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

- $D(f) = \langle 1; \infty \rangle$.
- $H(f) = \langle 0; \infty \rangle$.
- f je rastúca.
- Koreň (nulový bod) je 1. [argcosh 1 = 0.]



Hyperbolometrické funkcie – Argument sin a cos hyperbolické

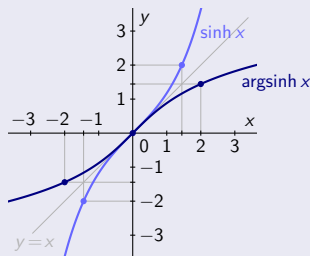
- Hyperbolometrickými funkciami (argument sínusu hyperbolického, argument kosínusu hyperbolického, argument tangensu hyperbolického a argument kotangensu hyperbolického) nazývame inverzné funkcie ku funkciám hyperbolickým. 6

Argument sínusu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \mathbb{R}$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- Koreň (nulový bod) je 0. [arsinh 0 = 0.]

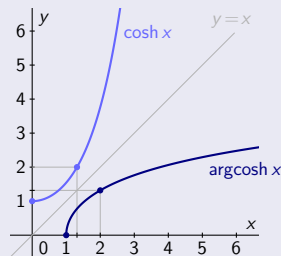


Argument kosínusu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

- $D(f) = \langle 1; \infty \rangle$.
- $H(f) = \langle 0; \infty \rangle$.
- f je rastúca.
- Koreň (nulový bod) je 1. [argcosh 1 = 0.]



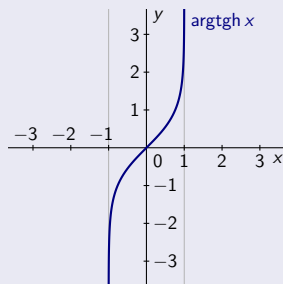
Hyperbolometrické funkcie – Argument tg a cotg hyperbolické

Argument tangensu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

- $D(f) = (-1; 1)$.
- $H(f) = \mathbb{R}$.

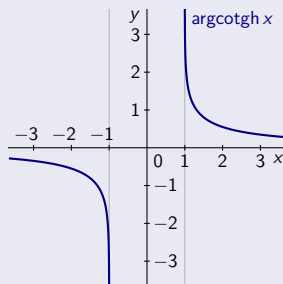


Argument kotangensu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

- $D(f) = \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.



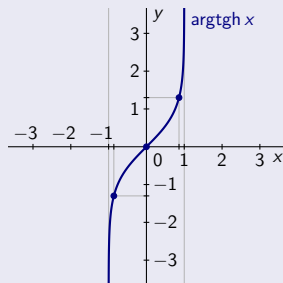
Hyperbolometrické funkcie – Argument tg a cotg hyperbolické

Argument tangensu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

- $D(f) = (-1; 1)$.
- $H(f) = \mathbb{R}$.
- f je nepárna.

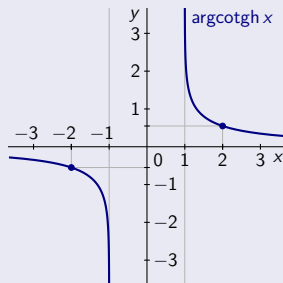


Argument kotangensu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

- $D(f) = \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$.
- $H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f je nepárna.



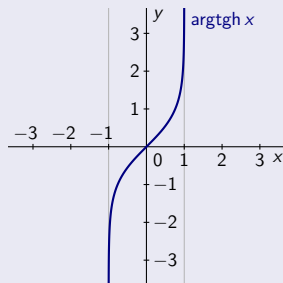
Hyperbolometrické funkcie – Argument tg a cotg hyperbolické

Argument tangensu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

- $D(f) = (-1; 1)$. • $H(f) = \mathbb{R}$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.

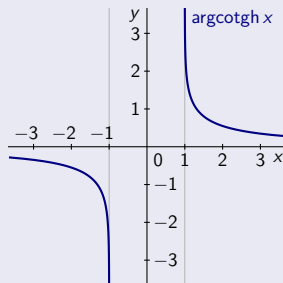


Argument kotangensu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

- $D(f) = \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$. • $H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f je nepárna.
- f klesá na $(-\infty; -1)$, klesá na $(1; \infty)$.



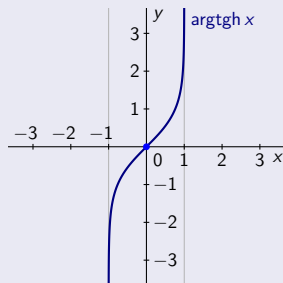
Hyperbolometrické funkcie – Argument tg a cotg hyperbolické

Argument tangensu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

- $D(f) = (-1; 1)$. • $H(f) = \mathbb{R}$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- Koreň (nulový bod) je 0. [argtgh 0 = 0.]

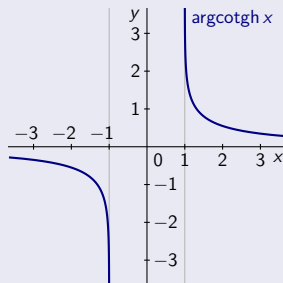


Argument kotangensu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

- $D(f) = \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$. • $H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f je nepárna.
- f klesá na $(-\infty; -1)$, klesá na $(1; \infty)$.
- Korene (nulové body) neexistujú.



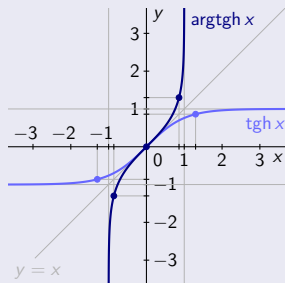
Hyperbolometrické funkcie – Argument tg a cotg hyperbolické

Argument tangensu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

- $D(f) = (-1; 1)$. • $H(f) = \mathbb{R}$.
- f je nepárna.
- f je rastúca.
- Koreň (nulový bod) je 0. [argtgh 0 = 0.]

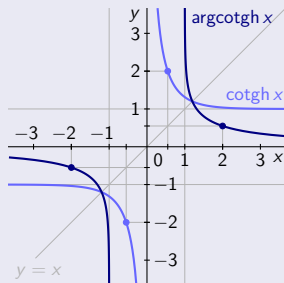


Argument kotangensu hyperbolického

sa nazýva funkcia

$$f: y = \operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

- $D(f) = \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$. • $H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- f je nepárna.
- f klesá na $(-\infty; -1)$, klesá na $(1; \infty)$.
- Korene (nulové body) neexistujú.



Koniec 5. časti

Ďakujem za pozornosť.