

Matematická analýza 1

2026/2027

4. Reálne funkcie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou  získate nápomoc.

Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

- 1 Základné pojmy
- 2 Operácie s funkciami
- 3 Vlastnosti funkcií I – ohraničenosť, extrémny, monotónnosť
- 4 Vlastnosti funkcií II – párnosť, nepárnosť, periodickosť, konvexnosť a konkávnosť

Základné pojmy – Definícia funkcie

Zobrazenie (funkcia) $y = f(x) : D(f) \rightarrow H(f)$ sa nazýva:

1

- Funkcia **reálnej premennej**, ak $x \in R$, t. j. ak $D(f) \subset R$. [$x \in R$ nezávislá premenná, resp. vzor.]
- Funkcia **reálna**, ak $f(x) \in R$, t. j. ak $H(f) \subset R$. [$y = f(x) \in R$ závislá premenná, resp. funkčná hodnota, resp. obraz.]



Základné pojmy – Definícia funkcie

Zobrazenie (funkcia) $y = f(x) : D(f) \rightarrow H(f)$ sa nazýva:

2

- Funkcia **reálnej premennej**, ak $x \in R$, t. j. ak $D(f) \subset R$. [$x \in R$ nezávislá premenná, resp. vzor.]
- Funkcia **reálna**, ak $f(x) \in R$, t. j. ak $H(f) \subset R$. [$y = f(x) \in R$ závislá premenná, resp. funkčná hodnota, resp. obraz.]

Pokým neurčíme ináč,
bude funkcia znamenať reálnu funkciu reálnej premennej, t. j. $D(f) \subset R$ a aj $H(f) \subset R$.



Základné pojmy – Definícia funkcie

Zobrazenie (funkcia) $y = f(x) : D(f) \rightarrow H(f)$ sa nazýva:

3

- Funkcia **reálnej premennej**, ak $x \in R$, t. j. ak $D(f) \subset R$. [$x \in R$ nezávislá premenná, resp. vzor.]
- Funkcia **reálna**, ak $f(x) \in R$, t. j. ak $H(f) \subset R$. [$y = f(x) \in R$ závislá premenná, resp. funkčná hodnota, resp. obraz.]

Pokým neurčíme ináč,
bude funkcia znamenať reálnu funkciu reálnej premennej, t. j. $D(f) \subset R$ a aj $H(f) \subset R$.

- $A \subset D(f)$, potom $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ nazývame **obraz množiny A** .



Základné pojmy – Definícia funkcie

Zobrazenie (funkcia) $y = f(x) : D(f) \rightarrow H(f)$ sa nazýva:

- Funkcia **reálnej premennej**, ak $x \in R$, t. j. ak $D(f) \subset R$. [$x \in R$ nezávislá premenná, resp. vzor.]
- Funkcia **reálna**, ak $f(x) \in R$, t. j. ak $H(f) \subset R$. [$y = f(x) \in R$ závislá premenná, resp. funkčná hodnota, resp. obraz.]

Pokým neurčíme ináč,
bude funkcia znamenať reálnu funkciu reálnej premennej, t. j. $D(f) \subset R$ a aj $H(f) \subset R$.

- $A \subset D(f)$, potom $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ nazývame **obraz množiny A** .
- $D(f) = \{x, \text{pre ktoré existuje } y, \text{že } [x; y] \in f\}$ sa nazýva **definičný obor f** . [Množina všetkých vzorov.]
Ak nie je $D(f)$ daný, potom myslíme maximálny možný, tzv. **prirodený**.



Základné pojmy – Definícia funkcie

Zobrazenie (funkcia) $y = f(x) : D(f) \rightarrow H(f)$ sa nazýva:

5

- Funkcia **reálnej premennej**, ak $x \in R$, t. j. ak $D(f) \subset R$. [$x \in R$ nezávislá premenná, resp. vzor.]
- Funkcia **reálna**, ak $f(x) \in R$, t. j. ak $H(f) \subset R$. [$y = f(x) \in R$ závislá premenná, resp. funkčná hodnota, resp. obraz.]

Pokým neurčíme ináč,
bude funkcia znamenať reálnu funkciu reálnej premennej, t. j. $D(f) \subset R$ a aj $H(f) \subset R$.

- $A \subset D(f)$, potom $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ nazývame **obraz množiny A** .
- $D(f) = \{x, \text{ pre ktoré existuje } y, \text{ že } [x; y] \in f\}$ sa nazýva **definičný obor f** . [Množina všetkých vzorov.]
Ak nie je $D(f)$ daný, potom myslíme maximálny možný, tzv. **prirodzený**.
- $H(f) = \{y, \text{ pre ktoré existuje } x, \text{ že } [x; y] \in f\} = \{f(x), x \in D(f)\}$ sa nazýva **obor hodnôt f** . [Množina všetkých obrazov, platí $H(f) = f(D(f))$.]



Základné pojmy – Definícia funkcie

Zobrazenie (funkcia) $y = f(x) : D(f) \rightarrow H(f)$ sa nazýva:

6

- Funkcia **reálnej premennej**, ak $x \in R$, t. j. ak $D(f) \subset R$. [$x \in R$ nezávislá premenná, resp. vzor.]
- Funkcia **reálna**, ak $f(x) \in R$, t. j. ak $H(f) \subset R$. [$y = f(x) \in R$ závislá premenná, resp. funkčná hodnota, resp. obraz.]

Pokým neurčíme ináč,
bude funkcia znamenať reálnu funkciu reálnej premennej, t. j. $D(f) \subset R$ a aj $H(f) \subset R$.

- $A \subset D(f)$, potom $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ nazývame **obraz množiny A**.
- $D(f) = \{x, \text{pre ktoré existuje } y, \text{ že } [x; y] \in f\}$ sa nazýva **definičný obor f**. [Množina všetkých vzorov.]
Ak nie je $D(f)$ daný, potom myslíme maximálny možný, tzv. **prirodzený**.
- $H(f) = \{y, \text{pre ktoré existuje } x, \text{ že } [x; y] \in f\} = \{f(x), x \in D(f)\}$ sa nazýva **obor hodnôt f**. [Množina všetkých obrazov, platí $H(f) = f(D(f))$.]
- Množina $\{[x; y], x \in D(f), y = f(x)\} = \{[x; f(x)], x \in D(f)\}$ sa nazýva **graf funkcie f**.
 - Funkciu f (reálnu funkciu reálnej premennej) tvoria usporiadané dvojice $[x; f(x)] \in R^2$.
 - Funkciu f môžeme graficky zobrazit v rovine R^2 .

Základné pojmy – Injekcia, surjekcia, bijekcia

Funkcia (zobrazenie) $f : A \rightarrow B$ sa nazýva:

1

- **Injektívna (injekcia, prostá)**, ak $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

[Rôznym vzorom x_1, x_2 z množiny A prislúchajú rôzne obrazy $f(x_1), f(x_2)$ z množiny B .]

T. j. (obrátaná implikácia) ak: $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

[Ak sa rovnajú obrazy $f(x_1), f(x_2)$, potom sa rovnajú aj vzory x_1, x_2 .]



Základné pojmy – Injekcia, surjekcia, bijekcia

Funkcia (zobrazenie) $f : A \rightarrow B$ sa nazýva:

2

- **Injektívna** (injekcia, *prostá*), ak $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

[Rôznym vzorom x_1, x_2 z množiny A prislúchajú rôzne obrazy $f(x_1), f(x_2)$ z množiny B .]

T. j. (obrátaná implikácia) ak: $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

[Ak sa rovnajú obrazy $f(x_1), f(x_2)$, potom sa rovnajú aj vzory x_1, x_2 .]

- **Surjektívna** (surjekcia, „na“), ak $\forall y \in B \exists x \in A: y = f(x)$, t. j. ak $f(A) = B$.

[Ku každému obrazu $y \in B$ existuje vzor $x \in A$ taký, že $y = f(x)$.]



Základné pojmy – Injekcia, surjekcia, bijekcia

Funkcia (zobrazenie) $f : A \rightarrow B$ sa nazýva:

3

- Injektívna (injekcia, *prostá*), ak $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

[Rôznym vzorom x_1, x_2 z množiny A prislúchajú rôzne obrazy $f(x_1), f(x_2)$ z množiny B .]

T. j. (obrátaná implikácia) ak: $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

[Ak sa rovnajú obrazy $f(x_1), f(x_2)$, potom sa rovnajú aj vzory x_1, x_2 .]

- Surjektívna (surjekcia, „na“), ak $\forall y \in B \exists x \in A: y = f(x)$, t. j. ak $f(A) = B$.

[Ku každému obrazu $y \in B$ existuje vzor $x \in A$ taký, že $y = f(x)$.]

- Bijektívna (bijekcia, „*prostá na*“), ak je injektívna a súčasne surjektívna. 

Základné pojmy – Injekcia, surjekcia, bijekcia

Funkcia (zobrazenie) $f : A \rightarrow B$ sa nazýva:

- **Injektívna** (injekcia, *prostá*), ak $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

[Rôznym vzorom x_1, x_2 z množiny A prislúchajú rôzne obrazy $f(x_1), f(x_2)$ z množiny B .]

T. j. (obrátená implikácia) ak: $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

[Ak sa rovnajú obrazy $f(x_1), f(x_2)$, potom sa rovnajú aj vzory x_1, x_2 .]

- **Surjektívna** (surjekcia, „na“), ak $\forall y \in B \exists x \in A: y = f(x)$, t. j. ak $f(A) = B$.

[Ku každému obrazu $y \in B$ existuje vzor $x \in A$ taký, že $y = f(x)$.]

- **Bijektívna** (bijekcia, „prostá na“), ak je injektívna a súčasne surjektívna. 

Pre funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$, t. j. funkciu $y = f(x): D(f) \rightarrow H(f)$

[Definičný obor funkcie je zadaný.]

platí: • f je **vždy** surjektívna, pretože $H(f) = \{y \in R, \text{ pre ktoré existuje } x \in R, \text{ že } [x; y] \in f\}$.

• f je injektívna, ak pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

• f je bijektívna, ak je injektívna.

[Funkcia už surjektívna je.]

Základné pojmy – Explicitne, parametricky, implicitne

Funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme definovať viacerými rôznymi spôsobmi,

napr. • **Explicitne** predpisom resp. analytickým vzorcom $y = f(x)$.

[Najčastejší spôsob zadávania funkcie.]

Základné pojmy – Explicitne, parametricky, implicitne

Funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme definovať viacerými rôznymi spôsobmi,

2

napr. • **Explicitne** predpisom resp. analytickým vzorcom $y = f(x)$.

[Najčastejší spôsob zadávania funkcie.]

• **Parametricky** pomocnými funkciami $f: x = \alpha(t), t \in J, J \subset \mathbb{R}$.
 $y = \beta(t)$, [Najpraktickejší spôsob zadávania funkcie.]

- Premenná t a funkcie α, β sú **pomocné** a používajú sa na definovanie premenných x a y danej funkcie f .
- Každú **explicitne** zadanú funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme **parametrizovať** funkciami $f: x = t, y = f(t), t \in D(f)$.

Základné pojmy – Explicitne, parametricky, implicitne

Funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme definovať viacerými rôznymi spôsobmi,

3

napr. • **Explicitne** predpisom resp. analytickým vzorcom $y = f(x)$. [Najčastejší spôsob zadávania funkcie.]

• **Parametricky** pomocnými funkciami $f: x = \alpha(t)$, $t \in J$, $J \subset \mathbb{R}$. [Najpraktickejší spôsob zadávania funkcie.]
 $y = \beta(t)$,

- Premenná t a funkcie α , β sú **pomocné** a používajú sa na definovanie premenných x a y danej funkcie f .
- Každú **explicitne** zadanú funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme **parametrizovať** funkciami $f: x = t$, $y = f(t)$, $t \in D(f)$.

• **Implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$ a podmienkami pre x , y . [Premenná y je zviazaná nejakým funkčným vzťahom.]



Základné pojmy – Explicitne, parametricky, implicitne

Funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme definovať viacerými rôznymi spôsobmi,

- napr.
- **Explicitne** predpisom resp. analytickým vzorcom $y = f(x)$. [Najčastejší spôsob zadávania funkcie.]
 - **Parametricky** pomocnými funkciami $f: x = \alpha(t)$, $t \in J$, $J \subset \mathbb{R}$.
 $y = \beta(t)$, [Najpraktickejší spôsob zadávania funkcie.]
 - Premenná t a funkcie α , β sú **pomocné** a používajú sa na definovanie premenných x a y danej funkcie f .
 - Každú **explicitne** zadanú funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme **parametrizovať** funkciami $f: x = t$, $y = f(t)$, $t \in D(f)$.
 - **Implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$ a podmienkami pre x , y . [Premenná y je zviazaná nejakým funkčným vzťahom.]

Funkciu $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ môžeme definovať rôznymi spôsobmi, napríklad:

- **Explicitne:** $y = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$,
- **Parametricky:** $x = t$, $t \in \mathbb{R}$,
 $y = |t|$,
- **Implicitne:** $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$,

Základné pojmy – Explicitne, parametricky, implicitne

Funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme definovať viacerými rôznymi spôsobmi,

5

napr. • **Explicitne** predpisom resp. analytickým vzorcom $y = f(x)$. [Najčastejší spôsob zadávania funkcie.]

• **Parametricky** pomocnými funkciami $f: x = \alpha(t)$, $t \in J$, $J \subset \mathbb{R}$. [Najpraktickejší spôsob zadávania funkcie.]
 $y = \beta(t)$,

- Premenná t a funkcie α , β sú **pomocné** a používajú sa na definovanie premenných x a y danej funkcie f .
- Každú **explicitne** zadanú funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme **parametrizovať** funkciami $f: x = t$, $y = f(t)$, $t \in D(f)$.

• **Implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$ a podmienkami pre x , y . [Premenná y je zviazaná nejakým funkčným vzťahom.]

Funkciu $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ môžeme definovať rôznymi spôsobmi, napríklad:

• **Explicitne:** $y = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, resp. $y = \max \{-x, x\}$,

• **Parametricky:** $x = t$, $t \in \mathbb{R}$, resp. $x = t$, $t \in \mathbb{R}$,
 $y = |t|$, $y = \sqrt{t^2}$,

• **Implicitne:** $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$, resp. $y - |x| = 0$,

Základné pojmy – Explicitne, parametricky, implicitne

Funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme definovať viacerými rôznymi spôsobmi,

6

napr. • **Explicitne** predpisom resp. analytickým vzorcom $y = f(x)$. [Najčastejší spôsob zadávania funkcie.]

• **Parametricky** pomocnými funkciami $f: x = \alpha(t)$, $t \in J$, $J \subset \mathbb{R}$. [Najpraktickejší spôsob zadávania funkcie.]
 $y = \beta(t)$,

- Premenná t a funkcie α , β sú **pomocné** a používajú sa na definovanie premenných x a y danej funkcie f .
- Každú **explicitne** zadanú funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ môžeme **parametrizovať** funkciami $f: x = t$, $y = f(t)$, $t \in D(f)$.

• **Implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$ a podmienkami pre x , y . [Premenná y je zviazaná nejakým funkčným vzťahom.]

Funkciu $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ môžeme definovať rôznymi spôsobmi, napríklad:

• **Explicitne:** $y = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, resp. $y = \max \{-x, x\}$, resp. $y = \begin{cases} -x & \text{pre } x < 0, \\ x & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

• **Parametricky:** $x = t$, $t \in \mathbb{R}$, resp. $x = t$, $t \in \mathbb{R}$, resp. $x = t^3$, $t \in \mathbb{R}$.
 $y = |t|$, $y = \sqrt{t^2}$, $y = |t^3|$,

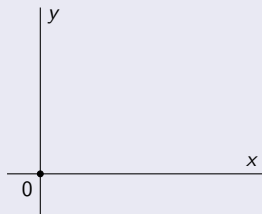
• **Implicitne:** $y^2 - x^2 = 0$, $y \geq 0$, resp. $y - |x| = 0$, resp. $y - \sqrt{x^2} = 0$.

Základné pojmy – Karteziánsky a polárny súradnicový systém

Karteziánsky súradnicový systém.

1

[Pravouhlý súradnicový systém.]



- Súradnicové osi x (x -ová os) a y (y -ová os).
- Počiatok súradnicového systému 0 .

[Dve na seba kolmé priamky.]

[Priesečník osí x a y .]

Polárny súradnicový systém.

[Pól zodpovedá počiatku 0 a poloos o zodpovedá kladnej poloosi x .]

- Pól (počiatok) súradnicového systému 0 .
- Polárna poloos o .

[Bod v rovine.]

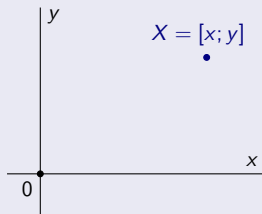
[Polpriamka vychádzajúca z pólu 0 .]

Základné pojmy – Karteziánsky a polárny súradnicový systém

Karteziánsky súradnicový systém.

2

[Pravouhlý súradnicový systém.]



$$X = [x; y]$$

- Súradnicové osi x (x -ová os) a y (y -ová os).

[Dve na seba kolmé priamky.]

- Počiatok súradnicového systému 0 .

[Priesečník osí x a y .]

- Každému bodu $X \in R^2$ sú priradené súradnice $[x; y]$:

Polárny súradnicový systém.

[Pól zodpovedá počiatku 0 a poloos o zodpovedá kladnej poloosi x .]

$$X = [\varphi; \rho]$$

- Pól (počiatok) súradnicového systému 0 .

[Bod v rovine.]

- Polárna poloos o .

[Polpriamka vychádzajúca z pólu 0 .]

- Každému bodu $X \in R^2$ sú priradené súradnice $[\varphi; \rho]$:

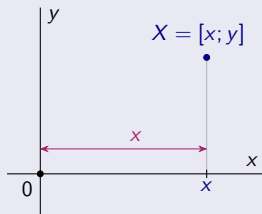


Základné pojmy – Karteziánsky a polárny súradnicový systém

Karteziánsky súradnicový systém.

3

[Pravouhlý súradnicový systém.]



- Súradnicové osi x (x -ová os) a y (y -ová os).

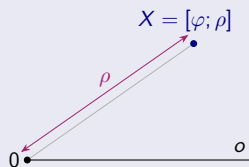
[Dve na seba kolmé priamky.]

- Počiatok súradnicového systému 0 .

[Priesečník osí x a y .]

- Každému bodu $X \in \mathbb{R}^2$ sú priradené súradnice $[x; y]$:
 $x \in \mathbb{R}$ (x -ová súradnica).

Polárny súradnicový systém.

[Pól zodpovedá počiatku 0 a poloos o zodpovedá kladnej poloosi x .]

- Pól (počiatok) súradnicového systému 0 .

[Bod v rovine.]

- Polárna poloos o .

[Polpriamka vychádzajúca z pólu 0 .]

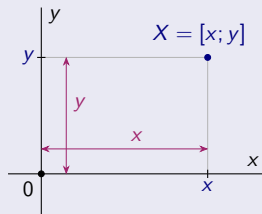
- Každému bodu $X \in \mathbb{R}^2$ sú priradené súradnice $[\varphi; \rho]$:
 $\rho \geq 0$ (sprievodič, rádiusvektor).

[Vzdialenosť X od pólu 0 .]

Základné pojmy – Karteziánsky a polárny súradnicový systém

Karteziánsky súradnicový systém.

[Pravouhlý súradnicový systém.]



- Súradnicové osi x (x-ová os) a y (y-ová os).

[Dve na seba kolmé priamky.]

- Počiatok súradnicového systému 0 .

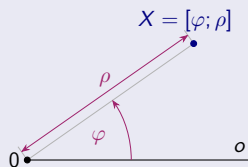
[Priesečník osí x a y .]

- Každému bodu $X \in R^2$ sú priradené súradnice $[x; y]$:

$$x \in R \text{ (x-ová súradnica).}$$

$$y \in R \text{ (y-ová súradnica).}$$

Polárny súradnicový systém.

[Pól zodpovedá počiatku 0 a poloos o zodpovedá kladnej poloosi x .]

- Pól (počiatok) súradnicového systému 0 .

[Bod v rovine.]

- Polárna poloos o .

[Polpriamka vychádzajúca z pólu 0 .]

- Každému bodu $X \in R^2$ sú priradené súradnice $[\varphi; \rho]$:

$$\rho \geq 0 \text{ (sprievodič, rádiusvektor).}$$

[Vzdialenosť X od pólu 0 .]

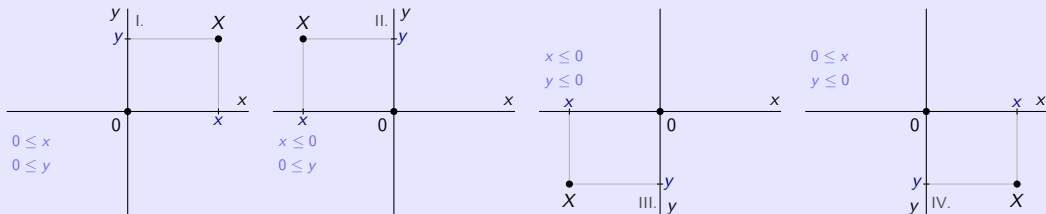
$$\varphi \in R \text{ (polárny uhol, amplitúda).}$$

[Orientovaný uhol poloosi o s polpriamkou OX .]

Základné pojmy – Karteziánsky a polárny súradnicový systém

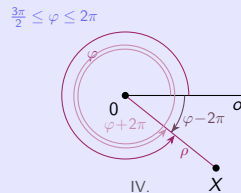
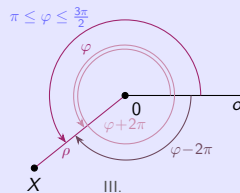
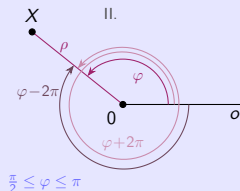
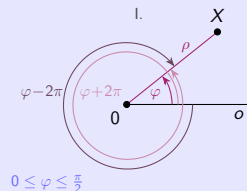
- Bod $X = [x; y] \in \mathbb{R}^2$ má v karteziánskom systéme jednoznačne určené súradnice $X = [x; y]$.

1



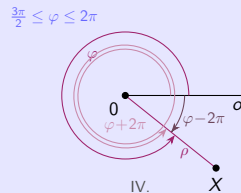
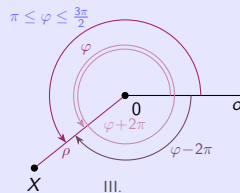
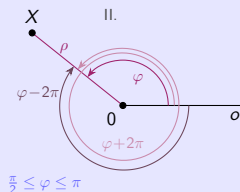
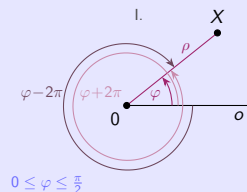
Základné pojmy – Karteziánsky a polárny súradnicový systém

- Bod $X = [x; y] \in \mathbb{R}^2$ má v karteziánskom systéme jednoznačne určené súradnice $X = [x; y]$. 2
- Bod $X = [\varphi; \rho] \in \mathbb{R}^2$ má polárnom systéme nekonečne veľa vyjadrení $X = [\varphi + 2k\pi; \rho]$, $k \in \mathbb{Z}$ (ľubovoľné).
[Pre rozsah uhla φ sa zvykne určiť interval dĺžky 2π , najčastejšie $\langle 0; 2\pi \rangle$, $\langle 0; 2\pi \rangle$, resp. $\langle -\pi; \pi \rangle$.]



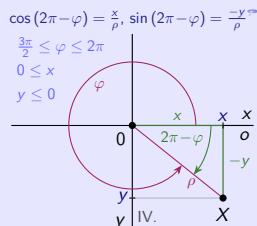
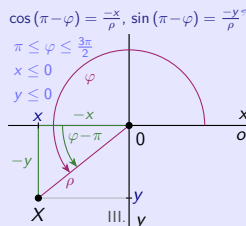
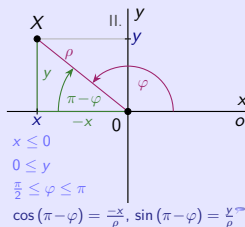
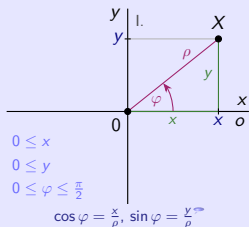
Základné pojmy – Karteziánsky a polárny súradnicový systém

- Bod $X = [x; y] \in R^2$ má v karteziánskom systéme jednoznačne určené súradnice $X = [x; y]$. 3
- Bod $X = [\varphi; \rho] \in R^2$ má polárnom systéme nekonečne veľa vyjadrení $X = [\varphi + 2k\pi; \rho]$, $k \in Z$ (ľubovoľné).
[Pre rozsah uhla φ sa zvykne určiť interval dĺžky 2π , najčastejšie $\langle 0; 2\pi \rangle$, $\langle 0; 2\pi \rangle$, resp. $\langle -\pi; \pi \rangle$.]
- Pól 0 má nekonečne veľa vyjadrení $0 = [\varphi; 0]$, kde $\varphi \in R$ (ľubovoľné).



Základné pojmy – Karteziánsky a polárny súradnicový systém

- Bod $X = [x; y] \in R^2$ má v karteziánskom systéme jednoznačne určené súradnice $X = [x; y]$. 4
- Bod $X = [\varphi; \rho] \in R^2$ má polárnom systéme nekonečne veľa vyjadrení $X = [\varphi + 2k\pi; \rho]$, $k \in Z$ (ľubovoľné).
[Pre rozsah uhla φ sa zvykne určiť interval dĺžky 2π , najčastejšie $\langle 0; 2\pi \rangle$, $\langle 0; 2\pi \rangle$, resp. $\langle -\pi; \pi \rangle$.]
- Pól 0 má nekonečne veľa vyjadrení $0 = [\varphi; 0]$, kde $\varphi \in R$ (ľubovoľné).



- $X = [x; y] \in R^2$, $X \neq [0; 0]$.

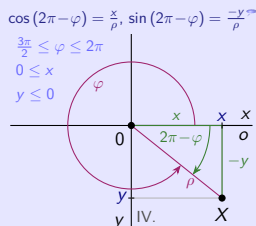
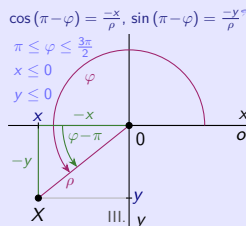
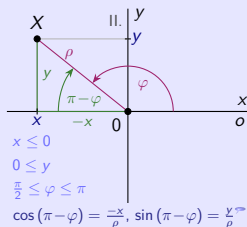
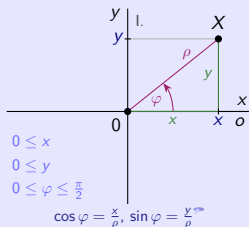
[Karteziánske súradnice.]

$$\Rightarrow \bullet \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \bullet \cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \bullet \sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

[Polárne súradnice.]

Základné pojmy – Karteziánsky a polárny súradnicový systém

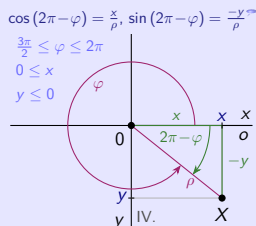
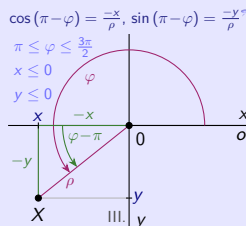
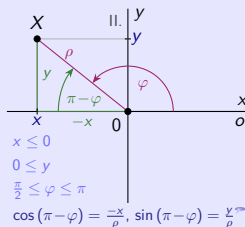
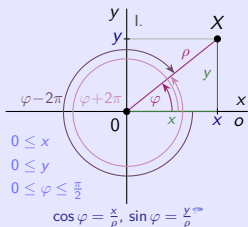
- Bod $X = [x; y] \in R^2$ má v karteziánskom systéme jednoznačne určené súradnice $X = [x; y]$. 5
- Bod $X = [\varphi; \rho] \in R^2$ má polárnom systéme nekonečne veľa vyjadrení $X = [\varphi + 2k\pi; \rho]$, $k \in Z$ (ľubovoľné).
[Pre rozsah uhla φ sa zvykne určiť interval dĺžky 2π , najčastejšie $\langle 0; 2\pi \rangle$, $\langle 0; 2\pi \rangle$, resp. $\langle -\pi; \pi \rangle$.]
- Pól 0 má nekonečne veľa vyjadrení $0 = [\varphi; 0]$, kde $\varphi \in R$ (ľubovoľné).



- $X = [x; y] \in R^2$, $X \neq [0; 0]$. [Karteziánske súradnice.]
 $\Rightarrow$ • $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, • $\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, • $\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. [Polárne súradnice.]
- $X = [\varphi; \rho] \in R \times \langle 0; \infty \rangle$. [Polárne súradnice.]
 $\Rightarrow$ • $x = \rho \cos \varphi$, • $y = \rho \sin \varphi$, • $X = [\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi]$. [Karteziánske súradnice.]

Základné pojmy – Karteziánsky a polárny súradnicový systém

- Bod $X = [x; y] \in R^2$ má v karteziánskom systéme jednoznačne určené súradnice $X = [x; y]$. 6
- Bod $X = [\varphi; \rho] \in R^2$ má polárnom systéme nekonečne veľa vyjadrení $X = [\varphi + 2k\pi; \rho]$, $k \in Z$ (ľubovoľné).
[Pre rozsah uhla φ sa zvykne určiť interval dĺžky 2π , najčastejšie $\langle 0; 2\pi \rangle$, $\langle 0; 2\pi \rangle$, resp. $\langle -\pi; \pi \rangle$.]
- Pól 0 má nekonečne veľa vyjadrení $0 = [\varphi; 0]$, kde $\varphi \in R$ (ľubovoľné).



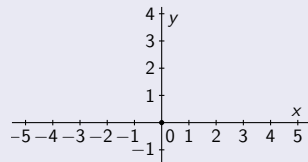
- $X = [x; y] \in R^2$, $X \neq [0; 0]$. [Karteziánske súradnice.]
 $\Rightarrow$ • $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, • $\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, • $\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. [Polárne súradnice.]
- $X = [\varphi; \rho] \in R \times \langle 0; \infty \rangle$. [Polárne súradnice.]
 $\Rightarrow$ • $x = \rho \cos \varphi$, • $y = \rho \sin \varphi$, • $X = [\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi]$. [Karteziánske súradnice.]

Základné pojmy – Príklady funkcií

Funkcia f má v karteziánskom systéme (pravouhlom) tvar:

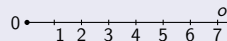
1

- $f = \{[x; y], x \in D(f), y = f(x)\}$, t. j.
- $f: y = f(x), x \in D(f)$.



Funkcia f má v polárnom systéme tvar:

- $f = \{[\varphi; \rho], \varphi \in D(f), \rho = f(\varphi)\}$, t. j.
- $f: \rho = f(\varphi), \varphi \in D(f)$.



Základné pojmy – Príklady funkcií

Funkcia f má v karteziánskom systéme (pravouhľom) tvar:

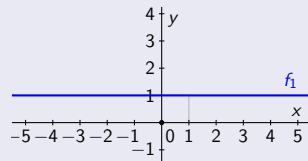
2

$$\bullet f = \{[x; y], x \in D(f), y = f(x)\}, \text{ t. j. } \bullet f: y = f(x), x \in D(f).$$

$$\bullet y = f_1(x) = 1, x \in \mathbb{R}.$$

[Konštantná funkcia.]

Grafom f_1 je priamka (rovnobežná s osou x).



Funkcia f má v polárnom systéme tvar:

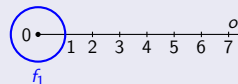
$$\bullet f = \{[\varphi; \rho], \varphi \in D(f), \rho = f(\varphi)\}, \text{ t. j. } \bullet f: \rho = f(\varphi), \varphi \in D(f).$$

$$\bullet \rho = f_1(\varphi) = 1, \varphi \in \mathbb{R}.$$

[Konštantná funkcia.]

Grafom f_1 je kružnica (so stredom 0 a polomerom 1).

[Kružnica v pravouhľom systéme nie je funkciou – nie je grafom funkcie.]



Základné pojmy – Príklady funkcií

Funkcia f má v karteziánskom systéme (pravouhlom) tvar:

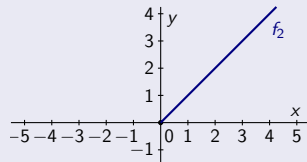
3

$$\bullet f = \{[x; y], x \in D(f), y = f(x)\}, \text{ t. j. } \bullet f: y = f(x), x \in D(f).$$

$$\bullet y = f_2(x) = x, x \geq 0.$$

[Identita.]

Grafom f_2 je polpriamka (začínajúca v bode 0).



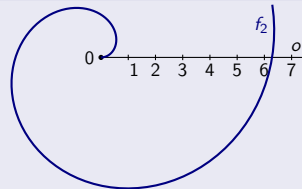
Funkcia f má v polárnom systéme tvar:

$$\bullet f = \{[\varphi; \rho], \varphi \in D(f), \rho = f(\varphi)\}, \text{ t. j. } \bullet f: \rho = f(\varphi), \varphi \in D(f).$$

$$\bullet \rho = f_2(\varphi) = \varphi, \varphi \geq 0.$$

[Identita.]

Grafom f_2 je špirála (začínajúca v bode 0).



Základné pojmy – Príklady funkcií

Funkcia f má v karteziánskom systéme (pravouhľom) tvar:

$$\bullet f = \{[x; y], x \in D(f), y = f(x)\}, \text{ t. j. } \bullet f: y = f(x), x \in D(f).$$

$$\bullet y = f_1(x) = 1, x \in R.$$

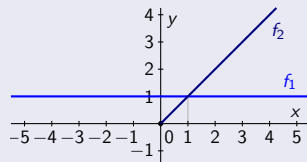
[Konštantná funkcia.]

Grafom f_1 je priamka (rovnobežná s osou x).

$$\bullet y = f_2(x) = x, x \geq 0.$$

[Identita.]

Grafom f_2 je polpriamka (začínajúca v bode 0).



Funkcia f má v polárnom systéme tvar:

$$\bullet f = \{[\varphi; \rho], \varphi \in D(f), \rho = f(\varphi)\}, \text{ t. j. } \bullet f: \rho = f(\varphi), \varphi \in D(f).$$

$$\bullet \rho = f_1(\varphi) = 1, \varphi \in R.$$

[Konštantná funkcia.]

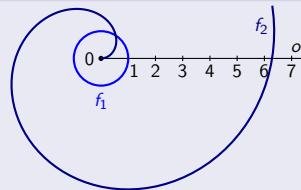
Grafom f_1 je kružnica (so stredom 0 a polomerom 1).

[Kružnica v pravouhľom systéme nie je funkciou – nie je grafom funkcie.]

$$\bullet \rho = f_2(\varphi) = \varphi, \varphi \geq 0.$$

[Identita.]

Grafom f_2 je špirála (začínajúca v bode 0).



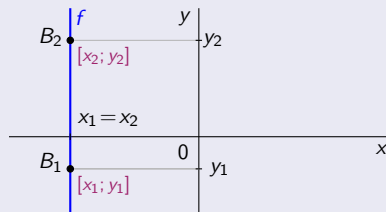
Základné pojmy – Rovnica priamky

Nájdite rovnicu priamky v rovine, ktorá prechádza bodmi $B_1 = [x_1; y_1]$, $B_2 = [x_2; y_2]$ s reálnymi súradnicami.

Základné pojmy – Rovnica priamky

Nájdite rovnicu priamky v rovine, ktorá prechádza bodmi $B_1 = [x_1; y_1]$, $B_2 = [x_2; y_2]$ s reálnymi súradnicami.

- $x_1 = x_2$. $\Rightarrow$ • Hľadaná priamka má tvar $f: x = x_1, y \in \mathbb{R}$ a nereprezentuje funkciu.

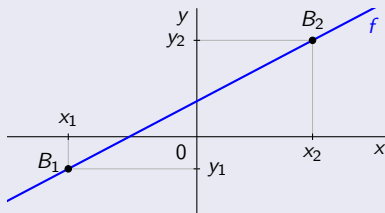


Základné pojmy – Rovnica priamky

Nájdite rovnicu priamky v rovine, ktorá prechádza bodmi $B_1 = [x_1; y_1]$, $B_2 = [x_2; y_2]$ s reálnymi súradnicami.

• $x_1 = x_2$. $\Rightarrow$ • Hľadaná priamka má tvar $f: x = x_1, y \in \mathbb{R}$ a nereprezentuje funkciu.

• $x_1 \neq x_2$. $\Rightarrow$ • Hľadaná priamka je grafom funkcie $f: y = ax + b, x \in \mathbb{R}$. [Musíme určiť koeficienty a, b , aby $B_1, B_2 \in f$.]



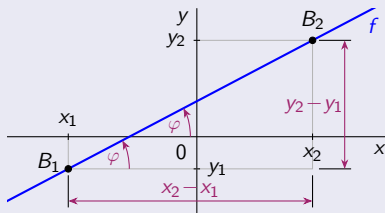
• $B_1 = [x_1; y_1] \in f$. $\Rightarrow$ • $y_1 = ax_1 + b$.

• $B_2 = [x_2; y_2] \in f$. $\Rightarrow$ • $y_2 = ax_2 + b$.

Základné pojmy – Rovnica priamky

Nájdite rovnicu priamky v rovine, ktorá prechádza bodmi $B_1 = [x_1; y_1]$, $B_2 = [x_2; y_2]$ s reálnymi súradnicami.

- $x_1 = x_2$. $\Rightarrow$ • Hľadaná priamka má tvar $f: x = x_1, y \in \mathbb{R}$ a nereprezentuje funkciu.
- $x_1 \neq x_2$. $\Rightarrow$ • Hľadaná priamka je grafom funkcie $f: y = ax + b, x \in \mathbb{R}$. [Musíme určiť koeficienty a, b , aby $B_1, B_2 \in f$.]



- $B_1 = [x_1; y_1] \in f$. $\Rightarrow$ • $y_1 = ax_1 + b$.

- $B_2 = [x_2; y_2] \in f$. $\Rightarrow$ • $y_2 = ax_2 + b$.

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1).$$

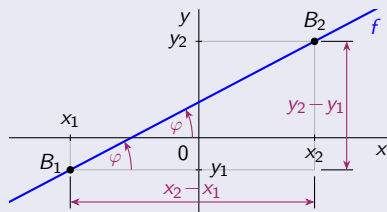
$$\Rightarrow \bullet a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \varphi. \quad [a \text{ je smernica priamky } f.]$$

Základné pojmy – Rovnica priamky

Nájdite rovnicu priamky v rovine, ktorá prechádza bodmi $B_1 = [x_1; y_1]$, $B_2 = [x_2; y_2]$ s reálnymi súradnicami.

• $x_1 = x_2$. $\Rightarrow$ • Hľadaná priamka má tvar $f: x = x_1, y \in \mathbb{R}$ a nereprezentuje funkciu.

• $x_1 \neq x_2$. $\Rightarrow$ • Hľadaná priamka je grafom funkcie $f: y = ax + b, x \in \mathbb{R}$. [Musíme určiť koeficienty a, b , aby $B_1, B_2 \in f$.]



• $B_1 = [x_1; y_1] \in f$. $\Rightarrow$ • $y_1 = ax_1 + b$.

• $B_2 = [x_2; y_2] \in f$. $\Rightarrow$ • $y_2 = ax_2 + b$.

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1).$$

$$\Rightarrow \bullet a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \varphi. \quad [a \text{ je smernica priamky } f.]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bullet b &= y_1 - ax_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{y_1 x_2 - y_1 x_1 - (x_1 y_2 - x_1 y_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 x_2 - y_1 x_1 - y_2 x_1 + y_1 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

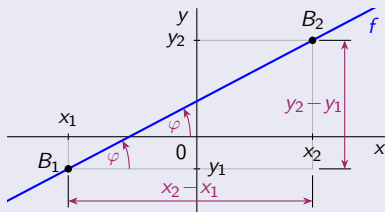
Základné pojmy – Rovnica priamky

Nájdite rovnicu priamky v rovine, ktorá prechádza bodmi $B_1 = [x_1; y_1]$, $B_2 = [x_2; y_2]$ s reálnymi súradnicami.

6

• $x_1 = x_2$. $\Rightarrow$ • Hľadaná priamka má tvar $f: x = x_1, y \in \mathbb{R}$ a nereprezentuje funkciu.

• $x_1 \neq x_2$. $\Rightarrow$ • Hľadaná priamka je grafom funkcie $f: y = ax + b, x \in \mathbb{R}$. [Musíme určiť koeficienty a, b , aby $B_1, B_2 \in f$.]



• $B_1 = [x_1; y_1] \in f$. $\Rightarrow$ • $y_1 = ax_1 + b$.

• $B_2 = [x_2; y_2] \in f$. $\Rightarrow$ • $y_2 = ax_2 + b$.

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1).$$

$$\Rightarrow \bullet a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \varphi. \quad [a \text{ je smernica priamky } f.]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bullet b &= y_1 - ax_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{y_1 x_2 - y_1 x_1 - (x_1 y_2 - x_1 y_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 x_2 - y_1 x_1 - y_2 x_1 + y_1 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

$$f: y = ax + b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 x - y_1 x + y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2(x - x_1) + y_1(-x + x_2)}{x_2 - x_1}.$$

$$\Rightarrow \bullet f: y = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot y_2 + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot y_1, x \in \mathbb{R}.$$

Operácie s funkciami – Rovnosť a usporiadanie funkcií

- Funkcie sú množiny usporiadaných dvojíc $[x; f(x)]$,
t. j. relácie a operácie s nimi, musíme chápať ako relácie a operácie s množinami.

1



Operácie s funkciami – Rovnosť a usporiadanie funkcií

- Funkcie sú množiny usporiadaných dvojíc $[x; f(x)]$,

2

t. j. relácie a operácie s nimi, musíme chápať ako relácie a operácie s množinami.

Funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a $y = g(x)$, $x \in D(g)$. [Globálna vlastnosť na definičných oboroch, t. j. na $D(f) \cap D(g)$.]

Funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a $y = g(x)$, $x \in D(g)$. [Lokálna vlastnosť na nejakej podmnožine $A \subset D(f) \cap D(g)$.]

Operácie s funkciami – Rovnosť a usporiadanie funkcií

- Funkcie sú množiny usporiadaných dvojíc $[x; f(x)]$,

3

t. j. relácie a operácie s nimi, musíme chápať ako relácie a operácie s množinami.

Funkcie $y=f(x)$, $x \in D(f)$ a $y=g(x)$, $x \in D(g)$. [Globálna vlastnosť na definičných oboroch, t. j. na $D(f) \cap D(g)$.]

- $f = g$, ak $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$. [Funkcie f a g sa rovnajú.]

- $f \neq g$ ak neplatí $f = g$, t. j. $D(f) \neq D(g)$ alebo $f(x) \neq g(x)$ pre nejaké $x \in R$. [Funkcie f a g sa nerovnajú.]

[Neexistuje $g(x)$ pre nejaké $x \in D(f)$, neexistuje $f(x)$ pre nejaké $x \in D(g)$ alebo $f(x) \neq g(x)$ pre nejaké $x \in D(g) \cap D(f)$.]

Funkcie $y=f(x)$, $x \in D(f)$ a $y=g(x)$, $x \in D(g)$. [Lokálna vlastnosť na nejakej podmnožine $A \subset D(f) \cap D(g)$.]

- $f = g$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$, označenie $f = g$, $x \in A$, ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = g(x)$.

[Funkcie f , g sa rovnajú na množine A .]

- Analogicky aj iné vlastnosti, napr. $f < g$, $x \in A$, resp. $f \leq g$, $x \in A$, resp. $f > g$, $x \in A$, resp. $f \geq g$, $x \in A$,

ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) < g(x)$, resp. $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) > g(x)$, resp. $f(x) \geq g(x)$.



Operácie s funkciami – Rovnosť a usporiadanie funkcií

- Funkcie sú množiny usporiadaných dvojíc $[x; f(x)]$,

4

t. j. relácie a operácie s nimi, musíme chápať ako relácie a operácie s množinami.

Funkcie $y=f(x)$, $x \in D(f)$ a $y=g(x)$, $x \in D(g)$. [Globálna vlastnosť na definičných oboroch, t. j. na $D(f) \cap D(g)$.]

- $f = g$, ak $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$. [Funkcie f a g sa rovnajú.]

- $f \neq g$ ak neplatí $f = g$, t. j. $D(f) \neq D(g)$ alebo $f(x) \neq g(x)$ pre nejaké $x \in R$. [Funkcie f a g sa nerovnajú.]

[Neexistuje $g(x)$ pre nejaké $x \in D(f)$, neexistuje $f(x)$ pre nejaké $x \in D(g)$ alebo $f(x) \neq g(x)$ pre nejaké $x \in D(f) \cap D(g)$.]

Funkcie $y=f(x)$, $x \in D(f)$ a $y=g(x)$, $x \in D(g)$. [Lokálna vlastnosť na nejakej podmnožine $A \subset D(f) \cap D(g)$.]

- $f = g$ na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$, označenie $f = g$, $x \in A$, ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = g(x)$.

[Funkcie f , g sa rovnajú na množine A .]

- Analogicky aj iné vlastnosti, napr. $f < g$, $x \in A$, resp. $f \leq g$, $x \in A$, resp. $f > g$, $x \in A$, resp. $f \geq g$, $x \in A$,

ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) < g(x)$, resp. $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) > g(x)$, resp. $f(x) \geq g(x)$.

- Funkcie vo všeobecnosti nemôžeme porovnávať.

- Môžeme určiť množiny, na ktorých platí $f < g$, $f = g$, $f > g$ alebo $f \leq g$, $f \geq g$.

Operácie s funkciami – Zúženie (reštrikcia) funkcie

- Funkcie môžeme sčítavať, odčítavať, násobiť, deliť, umocňovať...

1

Funkcie $y=f(x)$, $x \in D(f)$ a $y=g(x)$, $x \in D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$.

Pre $x \in D(f) \cap D(g)$ definujeme:

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$.
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pre $g(x) \neq 0$.

Operácie s funkciami – Zúženie (reštrikcia) funkcie

- Funkcie môžeme sčítavať, odčítavať, násobiť, deliť, umocňovať...

2

Funkcie $y=f(x)$, $x \in D(f)$ a $y=g(x)$, $x \in D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$.

Pre $x \in D(f) \cap D(g)$ definujeme:

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$.
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pre $g(x) \neq 0$.

A pre $x \in D(f)$ definujeme:

- $|f|(x) = |f(x)|$.
- $f^n(x) = [f(x)]^n$.

Operácie s funkciami – Zúženie (reštrikcia) funkcie

- Funkcie môžeme sčítavať, odčítavať, násobiť, deliť, umocňovať...

3

Funkcie $y=f(x)$, $x \in D(f)$ a $y=g(x)$, $x \in D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$.

Pre $x \in D(f) \cap D(g)$ definujeme:

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$.
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pre $g(x) \neq 0$.

A pre $x \in D(f)$ definujeme:

- $|f|(x) = |f(x)|$.
- $f^n(x) = [f(x)]^n$.

Funkcia $y=f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- Funkcia $y = h(x)$, $x \in A$ sa nazýva **zúženie (reštrikcia)** funkcie f na množinu A ,
označenie $h = f|_A$, ak pre všetky $x \in A$ platí $h(x) = f(x)$. [Graf funkcie h je podmnožinou grafu funkcie f .]

Operácie s funkciami – Zúženie (reštrikcia) funkcie

- Funkcie môžeme sčítavať, odčítavať, násobiť, deliť, umocňovať...

4

Funkcie $y=f(x)$, $x \in D(f)$ a $y=g(x)$, $x \in D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$.

Pre $x \in D(f) \cap D(g)$ definujeme:

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$.
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pre $g(x) \neq 0$.

A pre $x \in D(f)$ definujeme:

- $|f|(x) = |f(x)|$.
- $f^n(x) = [f(x)]^n$.

Funkcia $y=f(x)$, $x \in D(f)$ a množina $A \subset D(f)$.

- Funkcia $y = h(x)$, $x \in A$ sa nazýva **zúženie (reštrikcia)** funkcie f na množinu A ,
označenie $h = f|_A$, ak pre všetky $x \in A$ platí $h(x) = f(x)$. [Graf funkcie h je podmnožinou grafu funkcie f .]

- Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases} \Rightarrow \bullet \chi|_{\mathbb{Q}}: y = 1, x \in \mathbb{Q}. \bullet \chi|_I: y = 0, x \in I.$

- $\left. \begin{matrix} \bullet f: y = x^2, x \in \mathbb{R}, \\ \bullet g: y = x^2, x \in \langle 0; 2 \rangle. \end{matrix} \right\} \Rightarrow \bullet g = f|_{\langle 0; 2 \rangle}.$
- $\left. \begin{matrix} \bullet f: y = 0, x \in \langle 0; 1 \rangle, \\ \bullet g: y = \lfloor x \rfloor. \end{matrix} \right\} \Rightarrow \bullet f = g|_{\langle 0; 1 \rangle}.$

Operácie s funkciami – Nulový bod, zložená funkcia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

- Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **nulový bod** (**koreň**) funkcie f , ak platí $f(c) = 0$.

Operácie s funkciami – Nulový bod, zložená funkcia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

2

• Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **nulový bod (koreň)** funkcie f , ak platí $f(c) = 0$.

- **Korene** funkcie f nájdeme riešením rovnice $f(x) = 0$ pre $x \in D(f)$.
- V praxi väčšinou **korene funkcie f** hľadáme pomocou **približných numerických metód**.

Operácie s funkciami – Nulový bod, zložená funkcia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

3

- Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **nulový bod (koreň)** funkcie f , ak platí $f(c) = 0$.

- **Korene** funkcie f nájdeme riešením rovnice $f(x) = 0$ pre $x \in D(f)$.
- V praxi väčšinou **korene funkcie f** hľadáme pomocou **približných numerických metód**.

Funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a $y = g(x)$, $x \in D(g)$ také, že $H(f) \subset D(g)$.

- **Zloženou funkciou** (funkcií) f a g nazývame funkciu $y = F(x) = g[f(x)]$, $x \in D(f)$
a označujeme $F = g(f)$, resp. $F = f \circ g$.

Funkcia f sa nazýva **vnútorná zložka** a funkcia g sa nazýva **vonkajšia zložka**.

Operácie s funkciami – Nulový bod, zložená funkcia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

- Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **nulový bod (koreň)** funkcie f , ak platí $f(c) = 0$.

- **Korene** funkcie f nájdeme riešením rovnice $f(x) = 0$ pre $x \in D(f)$.
- V praxi väčšinou **korene funkcie f** hľadáme pomocou **približných numerických metód**.

Funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a $y = g(x)$, $x \in D(g)$ také, že $H(f) \subset D(g)$.

- **Zloženou funkciou** (funkcií) f a g nazývame funkciu $y = F(x) = g[f(x)]$, $x \in D(f)$
a označujeme $F = g(f)$, resp. $F = f \circ g$.

Funkcia f sa nazýva **vnútorná zložka** a funkcia g sa nazýva **vonkajšia zložka**.

- Ak sú f , g zadané $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $H(f) \subset D(g)$, potom vzorec pre zloženú funkciu $F = g(f)$
 $y = g(x)$, $x \in D(g)$,
dostaneme, ak výraz $u = f(x)$ dosadíme za u do vzorca $y = g(u)$, t. j. $F: y = g(u) = g(f(x))$.

[Proces nazývame **substitúcia** premennej u výrazom $f(x)$.]

Operácie s funkciami – Nulový bod, zložená funkcia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

5

- Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **nulový bod** (**koreň**) funkcie f , ak platí $f(c) = 0$.

- **Korene** funkcie f nájdeme riešením rovnice $f(x) = 0$ pre $x \in D(f)$.
- V praxi väčšinou **korene funkcie f** hľadáme pomocou **približných numerických metód**.

Funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a $y = g(x)$, $x \in D(g)$ také, že $H(f) \subset D(g)$.

- **Zloženou funkciou** (funkcií) f a g nazývame funkciu $y = F(x) = g[f(x)]$, $x \in D(f)$
a označujeme $F = g(f)$, resp. $F = f \circ g$.

Funkcia f sa nazýva **vnútorná zložka** a funkcia g sa nazýva **vonkajšia zložka**.

- Ak sú f , g zadané $y = f(x)$, $x \in D(f)$, $H(f) \subset D(g)$, potom vzorec pre zloženú funkciu $F = g(f)$
 $y = g(x)$, $x \in D(g)$,
dostaneme, ak výraz $u = f(x)$ dosadíme za u do vzorca $y = g(u)$, t. j. $F: y = g(u) = g(f(x))$.

[Proces nazývame **substitúcia** premennej u výrazom $f(x)$.]

- Rozklad (zloženej) funkcie na zložky (vnútornú a vonkajšiu) nebýva jednoznačný,

[Rozklad na zložky musíme prispôsobiť našim možnostiam a daným požiadavkám.]

Operácie s funkciami – Príklad na skladanie funkcií

Funkcia $f: y = \sin x: R \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$ a funkcia $g: y = \sqrt{1+x}: \langle -1; \infty \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$.

1

Zložené funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$ sú:

Operácie s funkciami – Príklad na skladanie funkcií

Funkcia $f: y = \sin x: R \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$ a funkcia $g: y = \sqrt{1+x}: \langle -1; \infty \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$.

2

Zložené funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$ sú:

$$\bullet f(g): y = \begin{cases} f[g(x)] \\ f[g(x)] \end{cases}$$

$$\bullet g(f): y = \begin{cases} g[f(x)] \\ g[f(x)] \end{cases}$$

$$\bullet f(f): y = \begin{cases} f[f(x)] \\ f[f(x)] \end{cases}$$

$$\bullet g(g): y = \begin{cases} g[g(x)] \\ g[g(x)] \end{cases}$$

Operácie s funkciami – Príklad na skladanie funkcií

Funkcia $f: y = \sin x: R \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$ a funkcia $g: y = \sqrt{1+x}: \langle -1; \infty \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$.

3

Zložené funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$ sú:

$$\bullet f(g): y = \begin{cases} f[g(x)] = f(\sqrt{1+x}) = \sin(\sqrt{1+x}) \end{cases}$$

$$\bullet g(f): y = \begin{cases} g[f(x)] = g(\sin x) = \sqrt{1+\sin x} \end{cases}$$

$$\bullet f(f): y = \begin{cases} f[f(x)] = f(\sin x) = \sin(\sin x) \end{cases}$$

$$\bullet g(g): y = \begin{cases} g[g(x)] = g(\sqrt{1+x}) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} \end{cases}$$

Operácie s funkciami – Príklad na skladanie funkcií

Funkcia $f: y = \sin x: R \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$ a funkcia $g: y = \sqrt{1+x}: \langle -1; \infty \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$.

4

Zložené funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$ sú:

$$\bullet f(g): y = \begin{cases} f[g(x)] = \sin(g(x)) = \sin \sqrt{1+x} \end{cases}$$

$$\bullet g(f): y = \begin{cases} g[f(x)] = \sqrt{1+f(x)} = \sqrt{1+\sin x} \end{cases}$$

$$\bullet f(f): y = \begin{cases} f[f(x)] = \sin(f(x)) = \sin(\sin x) \end{cases}$$

$$\bullet g(g): y = \begin{cases} g[g(x)] = \sqrt{1+g(x)} = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} \end{cases}$$

Operácie s funkciami – Príklad na skladanie funkcií

Funkcia $f: y = \sin x: R \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$ a funkcia $g: y = \sqrt{1+x}: \langle -1; \infty \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$.

5

Zložené funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$ sú:

$$\bullet f(g): y = \left\{ \begin{array}{l} f[g(x)] = f(\sqrt{1+x}) = \sin(\sqrt{1+x}) \\ f[g(x)] = \sin(g(x)) = \sin \sqrt{1+x} \end{array} \right\}: \langle -1; \infty \rangle \rightarrow \langle -1; 1 \rangle.$$

$$\bullet g(f): y = \left\{ \begin{array}{l} g[f(x)] = g(\sin x) = \sqrt{1+\sin x} \\ g[f(x)] = \sqrt{1+f(x)} = \sqrt{1+\sin x} \end{array} \right\}: R \rightarrow \langle 0; \sqrt{2} \rangle.$$

$$\bullet f(f): y = \left\{ \begin{array}{l} f[f(x)] = f(\sin x) = \sin(\sin x) \\ f[f(x)] = \sin(f(x)) = \sin(\sin x) \end{array} \right\}: R \rightarrow \langle -1; 1 \rangle.$$

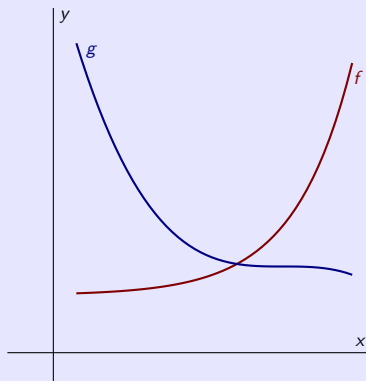
$$\bullet g(g): y = \left\{ \begin{array}{l} g[g(x)] = g(\sqrt{1+x}) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} \\ g[g(x)] = \sqrt{1+g(x)} = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} \end{array} \right\}: \langle -1; \infty \rangle \rightarrow \langle 1; \infty \rangle.$$

Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia zloženej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu zloženej funkcie $g[f]$.

Zostrojte $g(f)$, ak $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je vnútorná zložka,

$y = g(x)$, $x \in D(g)$ je vonkajšia zložka,



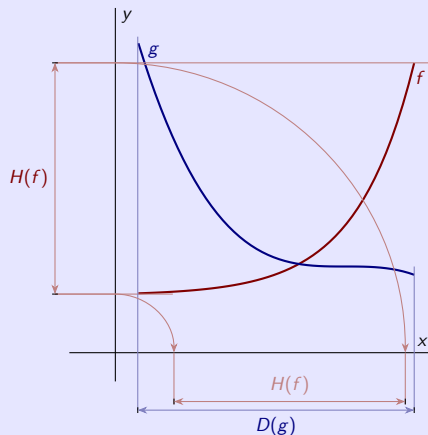
Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia zloženej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu zloženej funkcie $g[f]$.

2

Zostrojte $g(f)$, ak $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je vnútorná zložka,

$y = g(x)$, $x \in D(g)$ je vonkajšia zložka, $H(f) \subset D(g)$.



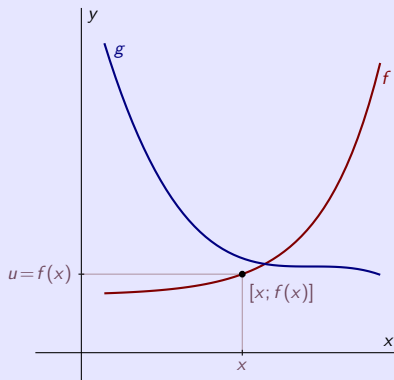
Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia zloženej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu zloženej funkcie $g[f]$.

3

Zostrojte $g(f)$, ak $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je vnútorná zložka,

$y = g(x)$, $x \in D(g)$ je vonkajšia zložka, $H(f) \subset D(g)$.



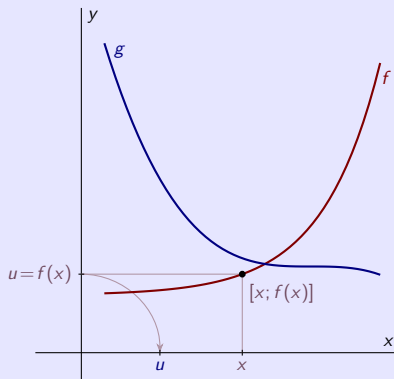
- Zvoľme na osi x bod $x \in D(f)$.
- Označme bod $[x; f(x)] \in f$.
- Označme na osi y hodnotu $u = f(x)$.

Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia zloženej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu zloženej funkcie $g[f]$.

Zostrojte $g(f)$, ak $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je vnútorná zložka,

$y = g(x)$, $x \in D(g)$ je vonkajšia zložka, $H(f) \subset D(g)$.



- Zvoľme na osi x bod $x \in D(f)$.
- Označme bod $[x; f(x)] \in f$.
- Označme na osi y hodnotu $u = f(x)$.
- Označme na osi x hodnotu u .

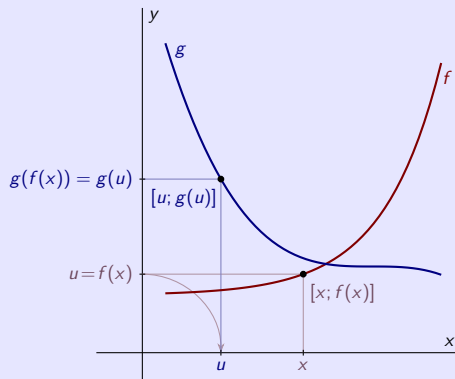
Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia zloženej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu zloženej funkcie $g[f]$.

5

Zostrojte $g(f)$, ak $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je vnútorná zložka,

$y = g(x)$, $x \in D(g)$ je vonkajšia zložka, $H(f) \subset D(g)$.



- Zvoľme na osi x bod $x \in D(f)$.
- Označme bod $[x; f(x)] \in f$.
- Označme na osi y hodnotu $u = f(x)$.
- Označme na osi x hodnotu u .
- Označme bod $[u; g(u)] \in g$.
- Označme na osi y hodnotu $g(u)$.

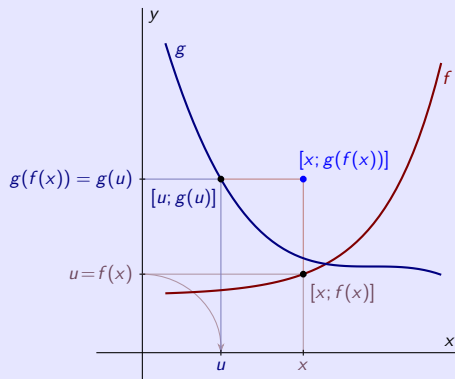
Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia zloženej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu zloženej funkcie $g[f]$.

6

Zostrojte $g(f)$, ak $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je vnútorná zložka,

$y = g(x)$, $x \in D(g)$ je vonkajšia zložka, $H(f) \subset D(g)$.



- Zvoľme na osi x bod $x \in D(f)$.
 - Označme bod $[x; f(x)] \in f$.
 - Označme na osi y hodnotu $u = f(x)$.
 - Označme na osi x hodnotu u .
 - Označme bod $[u; g(u)] \in g$.
 - Označme na osi y hodnotu $g(u)$.
 - Označme bod $[x; g(f(x))]$, pričom $g(f(x)) = g(u)$.
- $\Rightarrow [x; g(f(x))]$ je hľadaný bod grafu $g(f)$.

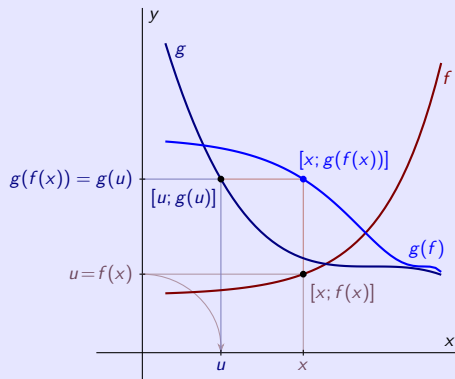
Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia zloženej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu zloženej funkcie $g[f]$.

7

Zostrojte $g(f)$, ak $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je vnútorná zložka,

$y = g(x)$, $x \in D(g)$ je vonkajšia zložka, $H(f) \subset D(g)$.



- Zvoľme na osi x bod $x \in D(f)$.
 - Označme bod $[x; f(x)] \in f$.
 - Označme na osi y hodnotu $u = f(x)$.
 - Označme na osi x hodnotu u .
 - Označme bod $[u; g(u)] \in g$.
 - Označme na osi y hodnotu $g(u)$.
 - Označme bod $[x; g(f(x))]$, pričom $g(f(x)) = g(u)$.
- $\Rightarrow [x; g(f(x))]$ je hľadaný bod grafu $g(f)$.

- Postup opakujeme pre každé $x \in D(f)$.

Operácie s funkciami – Identita, inverzná funkcia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva

identická (identita), ak sa každý obraz y zhoduje so svojim vzorom x .

[Funkcia $y = f(x) = x$, $H(f) = D(f)$, t. j. $y = x$, $x \in D(f)$.]

Operácie s funkciami – Identita, inverzná funkcia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva

2

identická (identita), ak sa každý obraz y zhoduje so svojim vzorom x .

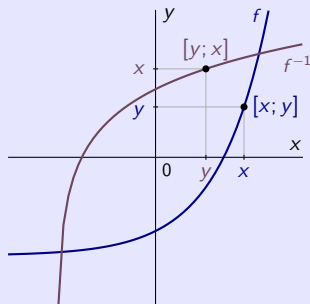
[Funkcia $y = f(x) = x$, $H(f) = D(f)$, t. j. $y = x$, $x \in D(f)$.]

Funkcia $y = f(x): D(f) \rightarrow H(f)$ je **prostá**.

[Funkcia f je zároveň aj bijektívna.]

Inverzná funkcia k funkcii f sa nazýva funkcia $x = f^{-1}(y): H(f) \rightarrow D(f)$ také, že:

$[x; y] \in f$ práve vtedy, ak $[y; x] \in f^{-1}$.



Operácie s funkciami – Identita, inverzná funkcia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva

3

identická (identita), ak sa každý obraz y zhoduje so svojim vzorom x .

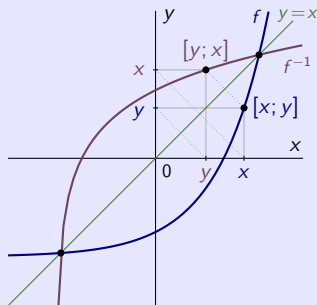
[Funkcia $y = f(x) = x$, $H(f) = D(f)$, t. j. $y = x$, $x \in D(f)$.]

Funkcia $y = f(x): D(f) \rightarrow H(f)$ je **prostá**.

[Funkcia f je zároveň aj bijektívna.]

Inverzná funkcia k funkcii f sa nazýva funkcia $x = f^{-1}(y): H(f) \rightarrow D(f)$ taká, že:

$[x; y] \in f$ práve vtedy, ak $[y; x] \in f^{-1}$.



Pre funkcie f a f^{-1} platí:

- $[x; y] \in f \Leftrightarrow [y; x] \in f^{-1}$. [$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.]
- Body $[x; y] \in f$ a $[y; x] \in f^{-1}$ sa líšia iba poradím prvkov.
- Grafy funkcií f , f^{-1} sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.

Operácie s funkciami – Identita, inverzná funkcia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva

identická (identita), ak sa každý obraz y zhoduje so svojim vzorom x .

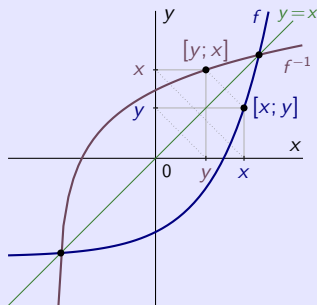
[Funkcia $y = f(x) = x$, $H(f) = D(f)$, t. j. $y = x$, $x \in D(f)$.]

Funkcia $y = f(x): D(f) \rightarrow H(f)$ je **prostá**.

[Funkcia f je zároveň aj bijektívna.]

Inverzná funkcia k funkcii f sa nazýva funkcia $x = f^{-1}(y): H(f) \rightarrow D(f)$ taká, že:

$[x; y] \in f$ práve vtedy, ak $[y; x] \in f^{-1}$.



Pre funkcie f a f^{-1} platí:

- $[x; y] \in f \Leftrightarrow [y; x] \in f^{-1}$. [$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.]
- Body $[x; y] \in f$ a $[y; x] \in f^{-1}$ sa líšia iba poradím prvkov.
- Grafy funkcií f , f^{-1} sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$.
- Namiesto $x = f^{-1}(y)$ píšeme $y = f^{-1}(x)$.

[Spravidla sa dodržiava pravidlo, že argumenty (nezávislé premenné)

oboch funkcií f , f^{-1} značíme rovnakým symbolom x .]

Operácie s funkciami – Vlastnosti inverznej funkcie

Ak je $y = f(x): D(f) \rightarrow H(f)$ funkcia **prostá**,

1

[Funkcia f je zároveň aj bijektívna.]

Operácie s funkciami – Vlastnosti inverznej funkcie

Ak je $y = f(x): D(f) \rightarrow H(f)$ funkcia **prostá**,

2

[Funkcia f je zároveň aj bijektívna.]

potom platí: • $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ je bijekcia.

• $f^{-1}[f(x)] = x$ pre všetky $x \in D(f)$.

• $[f^{-1}]^{-1} = f$.

• $f[f^{-1}(y)] = y$ pre všetky $y \in H(f)$.

Operácie s funkciami – Vlastnosti inverznej funkcie

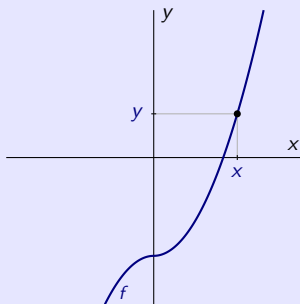
Ak je $y = f(x): D(f) \rightarrow H(f)$ funkcia **prostá**,

3

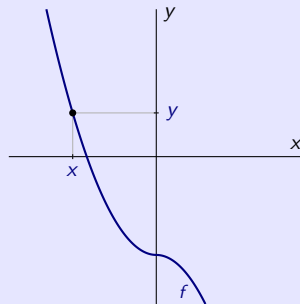
[Funkcia f je zároveň aj bijektívna.]

- potom platí:
- $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ je bijekcia.
 - $f^{-1}[f(x)] = x$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $[f^{-1}]^{-1} = f$.
- $f[f^{-1}(y)] = y$ pre všetky $y \in H(f)$.



Funkcia $f: D(f) \rightarrow H(f)$ je **rastúca**.



Funkcia $f: D(f) \rightarrow H(f)$ je **klesajúca**.

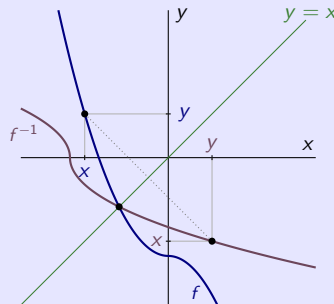
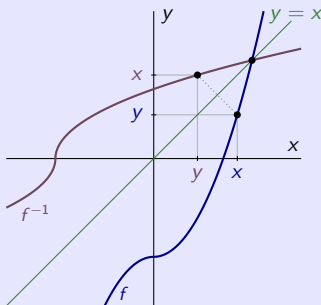
Operácie s funkciami – Vlastnosti inverznej funkcie

Ak je $y = f(x): D(f) \rightarrow H(f)$ funkcia **prostá**,

[Funkcia f je zároveň aj bijektívna.]

- potom platí:
- $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ je bijekcia.
 - $f^{-1}[f(x)] = x$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $[f^{-1}]^{-1} = f$.
- $f[f^{-1}(y)] = y$ pre všetky $y \in H(f)$.



Funkcia $f: D(f) \rightarrow H(f)$ je **rastúca**.

- $\Leftrightarrow$ • $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ je **rastúca**.

Funkcia $f: D(f) \rightarrow H(f)$ je **klesajúca**.

- $\Leftrightarrow$ • $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ je **klesajúca**.

Operácie s funkciami – Inverzná funkcia a monotónnosť

Funkcia f má parametrický tvar $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $t \in J$, pričom α je funkcia **prostá**. 1

$\Rightarrow$ • Existuje inverzná funkcia $t = \alpha^{-1}(x): \alpha(J) \rightarrow J$.

Operácie s funkciami – Inverzná funkcia a monotónnosť

Funkcia f má parametrický tvar $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $t \in J$, pričom α je funkcia **prostá**.

2

- $\Rightarrow$
- Existuje inverzná funkcia $t = \alpha^{-1}(x): \alpha(J) \rightarrow J$.
 - Funkcia f má explicitný tvar $y = \beta(\alpha^{-1}(x))$, $x \in \alpha(J)$.

[Tento prechod k explicitnému tvaru funkcie f nazývame vylúčenie parametra t .]

Operácie s funkciami – Inverzná funkcia a monotónnosť

Funkcia f má parametrický tvar $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $t \in J$, pričom α je funkcia **prostá**. 3

- $\Rightarrow$
- Existuje inverzná funkcia $t = \alpha^{-1}(x): \alpha(J) \rightarrow J$.
 - Funkcia f má explicitný tvar $y = \beta(\alpha^{-1}(x))$, $x \in \alpha(J)$.

[Tento prechod k explicitnému tvaru funkcie f nazývame vylúčenie parametra t .]

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je **rýdzo monotónna**. [T. j. rastúca alebo klesajúca.]

- $\Rightarrow$
- Funkcia f je **prostá**, t. j. súčasne aj **bijektívna**.

Operácie s funkciami – Inverzná funkcia a monotónnosť

Funkcia f má parametrický tvar $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $t \in J$, pričom α je funkcia **prostá**. 4

- $\Rightarrow$
- Existuje inverzná funkcia $t = \alpha^{-1}(x): \alpha(J) \rightarrow J$.
 - Funkcia f má explicitný tvar $y = \beta(\alpha^{-1}(x))$, $x \in \alpha(J)$.

[Tento prechod k explicitnému tvaru funkcie f nazývame vylúčenie parametra t .]

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je **rýdzo monotónna**. [T. j. rastúca alebo klesajúca.]

- $\Rightarrow$
- Funkcia f je **prostá**, t. j. súčasne aj **bijektívna**. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Funkcia f môže byť **prostá** a nemusí byť **rýdzo monotónna**,

Operácie s funkciami – Inverzná funkcia a monotónnosť

Funkcia f má parametrický tvar $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $t \in J$, pričom α je funkcia **prostá**.

5

- $\Rightarrow$ • Existuje inverzná funkcia $t = \alpha^{-1}(x): \alpha(J) \rightarrow J$.
- Funkcia f má explicitný tvar $y = \beta(\alpha^{-1}(x))$, $x \in \alpha(J)$.

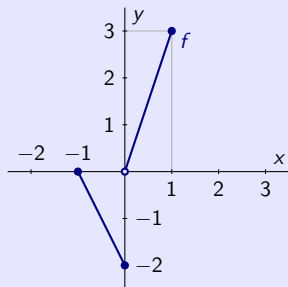
[Tento prechod k explicitnému tvaru funkcie f nazývame vylúčenie parametra t .]

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je rýdzo monotónna.

[T. j. rastúca alebo klesajúca.]

- $\Rightarrow$ • Funkcia f je **prostá**, t. j. súčasne aj **bijektívna**.

[Opačné tvrdenie neplatí.]



Funkcia f môže byť **prostá** a nemusí byť rýdzo monotónna, napr.

$$\bullet f: y = \begin{cases} -2x - 2 & \text{pre } x \in \langle -1; 0 \rangle, \\ 3x & \text{pre } x \in (0; 1 \rangle. \end{cases}$$

[f je klesajúca na $\langle -1; 0 \rangle$.]

[f je rastúca na $(0; 1 \rangle$.]

Operácie s funkciami – Inverzná funkcia a monotónnosť

Funkcia f má parametrický tvar $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$, $t \in J$, pričom α je funkcia **prostá**.

6

- $\Rightarrow$ • Existuje inverzná funkcia $t = \alpha^{-1}(x): \alpha(J) \rightarrow J$.
- Funkcia f má explicitný tvar $y = \beta(\alpha^{-1}(x))$, $x \in \alpha(J)$.

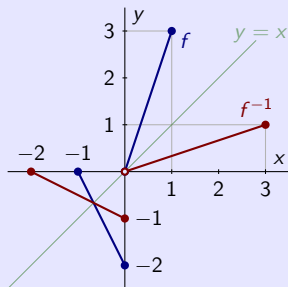
[Tento prechod k explicitnému tvaru funkcie f nazývame vylúčenie parametra t .]

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je **rýdzo monotónna**.

[T. j. rastúca alebo klesajúca.]

- $\Rightarrow$ • Funkcia f je **prostá**, t. j. súčasne aj **bijektívna**.

[Opačné tvrdenie neplatí.]



Funkcia f môže byť **prostá** a nemusí byť **rýdzo monotónna**, napr.

$$\bullet f: y = \begin{cases} -2x - 2 & \text{pre } x \in \langle -1; 0 \rangle, \\ 3x & \text{pre } x \in (0; 1]. \end{cases}$$

[f je klesajúca na $\langle -1; 0 \rangle$.]

[f je rastúca na $(0; 1]$.]

Inverzná funkcia f^{-1} existuje a má tvar:

$$\bullet f^{-1}: y = \begin{cases} -\frac{x}{2} - 1 & \text{pre } x \in \langle -2; 0 \rangle, \\ \frac{x}{3} & \text{pre } x \in (0; 3]. \end{cases}$$

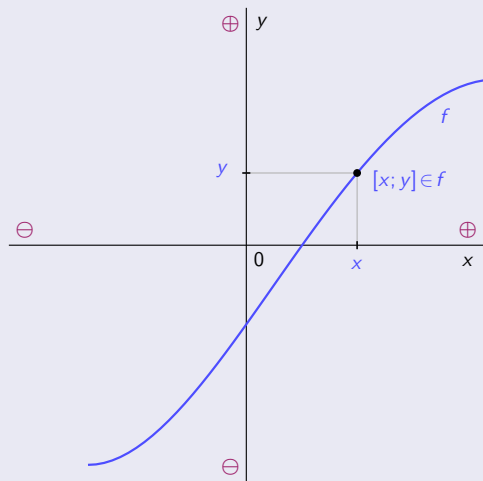
[$y = -2x - 2 \Rightarrow 2x = -y - 2 \Rightarrow x = -\frac{y}{2} - 1$.]

[$y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3}$.]

Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia inverznej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu inverznej funkcie $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ k funkcii f .

1

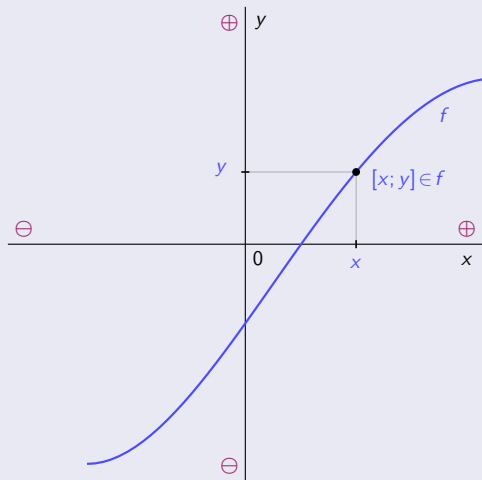


- $f: D(f) \rightarrow H(f)$, platí $[x; y] \in f$.

Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia inverznej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu inverznej funkcie $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ k funkcii f .

2



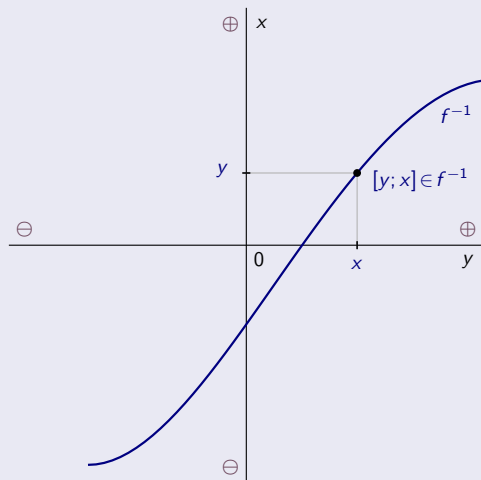
- $f: D(f) \rightarrow H(f)$, platí $[x; y] \in f$.

- Vymeníme súradnicové osi x a y .

Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia inverznej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu inverznej funkcie $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ k funkcii f .

3



• $f: D(f) \rightarrow H(f)$, platí $[x; y] \in f$.

• Vymeníme súradnicové osi x a y .

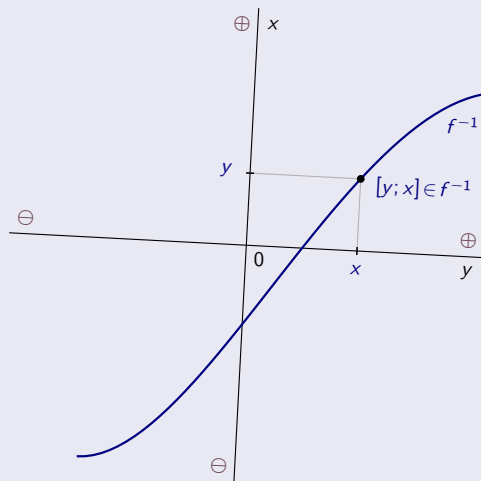
Z grafu funkcie f sa stane graf funkcie f^{-1} .

$[Bod [x; y] \in f. \Leftrightarrow Bod [y; x] \in f^{-1}]$

Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia inverznej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu inverznej funkcie $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ k funkcii f .

4



• $f: D(f) \rightarrow H(f)$, platí $[x; y] \in f$.

• Vymeníme súradnicové osi X a y .

Z grafu funkcie f sa stane graf funkcie f^{-1} .

[Bod $[x; y] \in f \Leftrightarrow$ Bod $[y; x] \in f^{-1}$.]

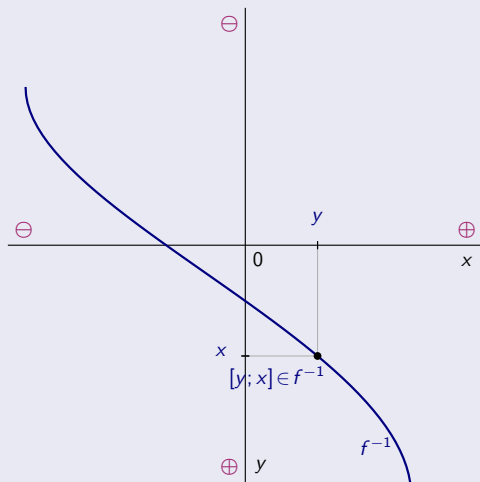
• Súradnicový systém (aj graf f^{-1}) otočíme o uhol -90° .

[Systém otočíme o uhol $\pi/2$ v smere hodinových ručičiek.]

Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia inverznej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu inverznej funkcie $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ k funkcii f .

5



- $f: D(f) \rightarrow H(f)$, platí $[x; y] \in f$.

- Vymeníme súradnicové osi X a y .

Z grafu funkcie f sa stane graf funkcie f^{-1} .

[Bod $[x; y] \in f \Leftrightarrow$ Bod $[y; x] \in f^{-1}$.]

- Súradnicový systém (aj graf f^{-1}) otočíme o uhol -90° .

[Systém otočíme o uhol $\pi/2$ v smere hodinových ručičiek.]

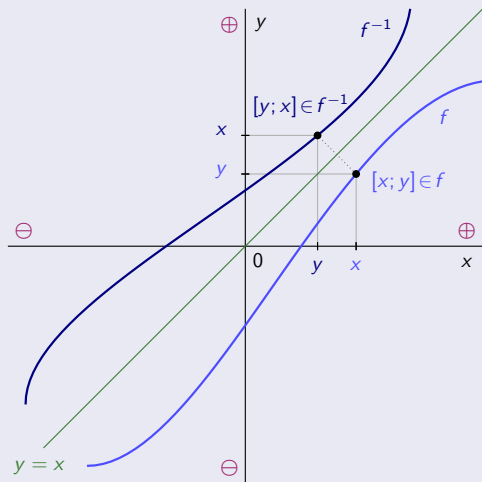
- Súradnicový systém (aj graf f^{-1}) preklopíme okolo osi X .

[Systém zobrazíme súmerne podľa osi x .]

Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia inverznej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu inverznej funkcie $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ k funkcii f .

6



• $f: D(f) \rightarrow H(f)$, platí $[x; y] \in f$.

• Vymeníme súradnicové osi X a Y .

Z grafu funkcie f sa stane graf funkcie f^{-1} .

[Bod $[x; y] \in f \Leftrightarrow$ Bod $[y; x] \in f^{-1}$.]

• Súradnicový systém (aj graf f^{-1}) otočíme o uhol -90° .

[Systém otočíme o uhol $\pi/2$ v smere hodinových ručičiek.]

• Súradnicový systém (aj graf f^{-1}) preklopíme okolo osi X .

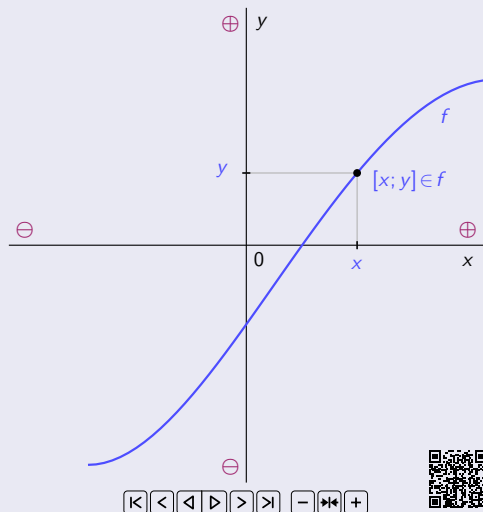
[Systém zobrazíme súmerne podľa osi x .]

Súradnicový systém (aj graf f^{-1}) je zobrazený v zvyčajnom tvare.

Operácie s funkciami – Geometrická konštrukcia inverznej funkcie

Geometrická konštrukcia grafu inverznej funkcie $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ k funkcii f .

7



• $f: D(f) \rightarrow H(f)$, platí $[x; y] \in f$.

• Vymeníme súradnicové osi X a y .

Z grafu funkcie f sa stane graf funkcie f^{-1} .

[Bod $[x; y] \in f \Leftrightarrow$ Bod $[y; x] \in f^{-1}$.]

• Súradnicový systém (aj graf f^{-1}) otočíme o uhol -90° .

[Systém otočíme o uhol $\pi/2$ v smere hodinových ručičiek.]

• Súradnicový systém (aj graf f^{-1}) preklopíme okolo osi X .

[Systém zobrazíme súmerne podľa osi x .]

Súradnicový systém (aj graf f^{-1}) je zobrazený v zvyčajnom tvare.

• $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$ a platí $[y; x] \in f^{-1}$.



Vlastnosti funkcií I – Lokálne a globálne vlastnosti

Vlastnosť funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva:

- Globálna (absolútna), ak platí pre všetky $x \in D(f)$.
- Lokálna na množine $A \subset D(f)$, ak platí pre všetky $x \in A$.

[Vlastnosť na celom definičnom obore $D(f)$.]

[Vlastnosť na podmnožine definičného oboru $A \subset D(f)$.]

Vlastnosti funkcií I – Lokálne a globálne vlastnosti

Vlastnosť funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva:

2

- **Globálna (absolútna)**, ak platí pre všetky $x \in D(f)$. [Vlastnosť na celom definičnom obore $D(f)$.]
- **Lokálna** na množine $A \subset D(f)$, ak platí pre všetky $x \in A$. [Vlastnosť na podmnožine definičného oboru $A \subset D(f)$.]
- Prívlastky globálna, resp. na množine $D(f)$ často vynechávame a hovoríme „iba“ o vlastnosti funkcie f .
- Lokálne vlastnosti sa často vyšetrujú v nejakom okolí $O(c) \subset D(f)$ bodu $c \in D(f)$ alebo na intervale $I \subset D(f)$.

Vlastnosti funkcií I – Lokálne a globálne vlastnosti

Vlastnosť funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva:

3

- **Globálna (absolútna)**, ak platí pre všetky $x \in D(f)$. [Vlastnosť na celom definičnom obore $D(f)$.]
- **Lokálna** na množine $A \subset D(f)$, ak platí pre všetky $x \in A$. [Vlastnosť na podmnožine definičného oboru $A \subset D(f)$.]
- Prívlastky globálna, resp. na množine $D(f)$ často vynechávame a hovoríme „iba“ o vlastnosti funkcie f .
- Lokálne vlastnosti sa často vyšetrujú v nejakom okolí $O(c) \subset D(f)$ bodu $c \in D(f)$ alebo na intervale $I \subset D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **na množine $A \subset D(f)$** :

- **Zhora ohraničená**, ak existuje číslo $M \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq M$.
- **Zdola ohraničená**, ak existuje číslo $m \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $m \leq f(x)$.

Vlastnosti funkcií I – Lokálne a globálne vlastnosti

Vlastnosť funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva:

- **Globálna** (absolútna), ak platí pre všetky $x \in D(f)$. [Vlastnosť na celom definičnom obore $D(f)$.]
- **Lokálna** na množine $A \subset D(f)$, ak platí pre všetky $x \in A$. [Vlastnosť na podmnožine definičného oboru $A \subset D(f)$.]
- Prívlastky globálna, resp. na množine $D(f)$ často vynechávame a hovoríme „iba“ o vlastnosti funkcie f .
- Lokálne vlastnosti sa často vyšetrujú v nejakom okolí $O(c) \subset D(f)$ bodu $c \in D(f)$ alebo na intervale $I \subset D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **na množine $A \subset D(f)$:**

- **Zhora neohraničená**, ak nie je ohraničená zhora.
- **Zdola neohraničená**, ak nie je ohraničená zdola.

Vlastnosti funkcií I – Lokálne a globálne vlastnosti

Vlastnosť funkcie $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva:

5

- **Globálna (absolútna)**, ak platí pre všetky $x \in D(f)$. [Vlastnosť na celom definičnom obore $D(f)$.]
- **Lokálna** na množine $A \subset D(f)$, ak platí pre všetky $x \in A$. [Vlastnosť na podmnožine definičného oboru $A \subset D(f)$.]
- **Prívlastky** globálna, resp. na množine $D(f)$ často vynechávame a hovoríme „iba“ o vlastnosti funkcie f .
- **Lokálne** vlastnosti sa často vyšetrujú v nejakom okolí $O(c) \subset D(f)$ bodu $c \in D(f)$ alebo na intervale $I \subset D(f)$.

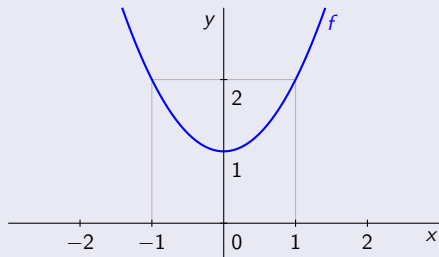
Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **na množine $A \subset D(f)$** :

- **Zhora ohraničená**, ak existuje číslo $M \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq M$.
- **Zhora neohraničená**, ak nie je ohraničená zhora.
- **Zdola ohraničená**, ak existuje číslo $m \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $m \leq f(x)$.
- **Zdola neohraničená**, ak nie je ohraničená zdola.
- **Ohraničená**, ak je ohraničená zhora a súčasne je ohraničená zdola. [Ohraničená z oboch strán.]
- **Neohraničená**, ak nie je ohraničená zhora alebo nie je ohraničená zdola. [Neohraničená z aspoň jednej strany.]

Vlastnosti funkcií I – Príklady

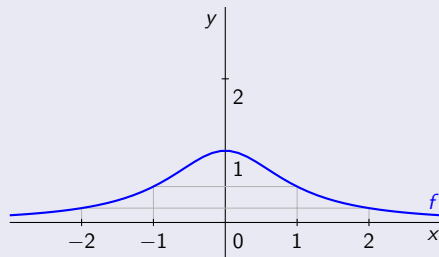
Funkcia $f: y = x^2 + 1$.

- $D(f) = \mathbb{R}$.



Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

- $D(f) = \mathbb{R}$.

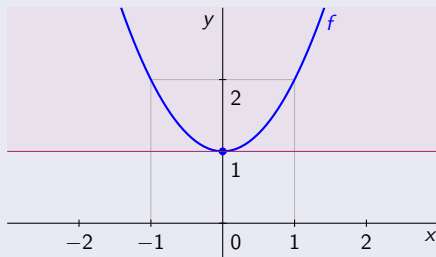


Vlastnosti funkcií I – Príklady

Funkcia $f: y = x^2 + 1$.

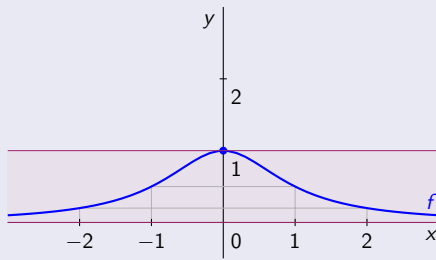
2

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- f je ohraničená zdola. [$1 \leq f(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.]
- f nie je ohraničená zhora.



Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (0; 1)$.
- f je ohraničená. [$0 < f(x) \leq 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.]

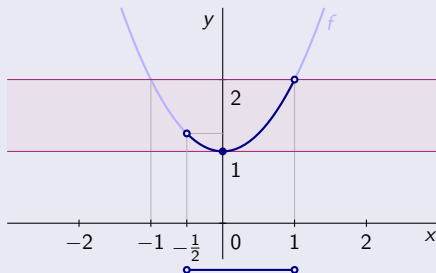


Vlastnosti funkcií I – Príklady

Funkcia $f: y = x^2 + 1$.

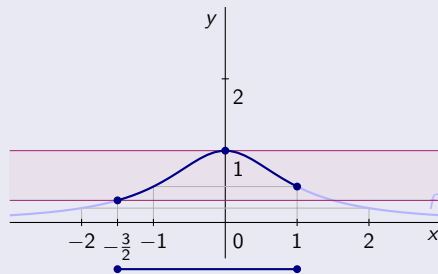
3

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \langle 1; \infty \rangle$.
- f je ohraničená zdola. [$1 \leq f(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.]
- f nie je ohraničená zhora.
- f je ohraničená napr. na $(-\frac{1}{2}; 1)$.
[$1 \leq f(x) < 2$ pre všetky $x \in (-\frac{1}{2}; 1)$.]



Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (0; 1)$.
- f je ohraničená. [$0 < f(x) \leq 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.]
- f je ohraničená napr. na $(-\frac{3}{2}; 1)$.
[$\frac{4}{13} \leq f(x) \leq 1$ pre všetky $x \in (-\frac{3}{2}; 1)$.]

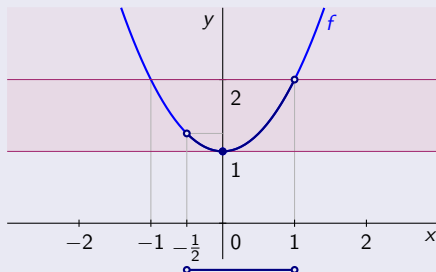


Vlastnosti funkcií I – Príklady

Funkcia $f: y = x^2 + 1$.

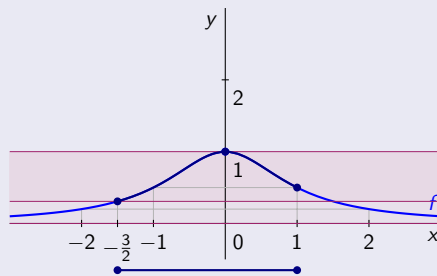
4

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = \langle 1; \infty \rangle$.
- f je ohraničená zdola. [$1 \leq f(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.]
- f nie je ohraničená zhora.
- f je ohraničená napr. na $(-\frac{1}{2}; 1)$.
[$1 \leq f(x) < 2$ pre všetky $x \in (-\frac{1}{2}; 1)$.]



Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $H(f) = (0; 1]$.
- f je ohraničená. [$0 < f(x) \leq 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.]
- f je ohraničená napr. na $(-\frac{3}{2}; 1)$.
[$\frac{4}{13} \leq f(x) \leq 1$ pre všetky $x \in (-\frac{3}{2}; 1)$.]
- f je ohraničená na každej $A \subset \mathbb{R}$.



Vlastnosti funkcií I – Infimum a suprémum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

Suprémum funkcie f , označenie $\sup f(x)$, sa nazýva

- $\sup f(x) = \sup H(f)$

Infimum funkcie f , označenie $\inf f(x)$, sa nazýva

- $\inf f(x) = \inf H(f)$

Suprémum funkcie f na množine A , označenie $\sup f(x)$, $x \in A$, resp. $\sup_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$

Infimum funkcie f na množine A , označenie $\inf f(x)$, $x \in A$, resp. $\inf_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$

Vlastnosti funkcií I – Infimum a suprémum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

2

Suprémum funkcie f , označenie $\sup f(x)$, sa nazýva

- $\sup f(x) = \sup H(f) = \sup f(D(f)) = \sup \{f(x); x \in D(f)\}$. [Globálne suprémum na $D(f)$.]

Infimum funkcie f , označenie $\inf f(x)$, sa nazýva

- $\inf f(x) = \inf H(f) = \inf f(D(f)) = \inf \{f(x); x \in D(f)\}$. [Globálne infimum na $D(f)$.]

Suprémum funkcie f na množine A , označenie $\sup f(x)$, $x \in A$, resp. $\sup_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A) = \sup \{f(x); x \in A\}$. [Lokálne suprémum na A .]

Infimum funkcie f na množine A , označenie $\inf f(x)$, $x \in A$, resp. $\inf_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A) = \inf \{f(x); x \in A\}$. [Lokálne infimum na A .]

Vlastnosti funkcií I – Infimum a suprérum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

3

Suprérum funkcie f , označenie $\sup f(x)$, sa nazýva

- $\sup f(x) = \sup H(f) = \sup f(D(f)) = \sup \{f(x); x \in D(f)\}$. [Globálne suprérum na $D(f)$.]

Infimum funkcie f , označenie $\inf f(x)$, sa nazýva

- $\inf f(x) = \inf H(f) = \inf f(D(f)) = \inf \{f(x); x \in D(f)\}$. [Globálne infimum na $D(f)$.]

Suprérum funkcie f na množine A , označenie $\sup f(x)$, $x \in A$, resp. $\sup_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A) = \sup \{f(x); x \in A\}$. [Lokálne suprérum na A .]

Infimum funkcie f na množine A , označenie $\inf f(x)$, $x \in A$, resp. $\inf_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A) = \inf \{f(x); x \in A\}$. [Lokálne infimum na A .]

- f je na množine $A \subset D(f)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{zhora neohraničená.} \\ \text{(zhora i zdola) ohraničená.} \\ \text{zdola neohraničená.} \end{array} \right.$

Vlastnosti funkcií I – Infimum a suprérum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

Suprérum funkcie f , označenie $\sup f(x)$, sa nazýva

- $\sup f(x) = \sup H(f) = \sup f(D(f)) = \sup \{f(x); x \in D(f)\}$. [Globálne suprérum na $D(f)$.]

Infimum funkcie f , označenie $\inf f(x)$, sa nazýva

- $\inf f(x) = \inf H(f) = \inf f(D(f)) = \inf \{f(x); x \in D(f)\}$. [Globálne infimum na $D(f)$.]

Suprérum funkcie f na množine A , označenie $\sup f(x)$, $x \in A$, resp. $\sup_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A) = \sup \{f(x); x \in A\}$. [Lokálne suprérum na A .]

Infimum funkcie f na množine A , označenie $\inf f(x)$, $x \in A$, resp. $\inf_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A) = \inf \{f(x); x \in A\}$. [Lokálne infimum na A .]

- f je na množine $A \subset D(f)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{zhora neohraničená.} \Rightarrow \sup \{f(x); x \in A\} = \infty. \\ \text{(zhora i zdola) ohraničená.} \\ \text{zdola neohraničená.} \Rightarrow \inf \{f(x); x \in A\} = -\infty. \end{array} \right.$

Vlastnosti funkcií I – Infimum a suprérum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

5

Suprérum funkcie f , označenie $\sup f(x)$, sa nazýva

- $\sup f(x) = \sup H(f) = \sup f(D(f)) = \sup \{f(x); x \in D(f)\}.$ [Globálne suprérum na $D(f)$.]

Infimum funkcie f , označenie $\inf f(x)$, sa nazýva

- $\inf f(x) = \inf H(f) = \inf f(D(f)) = \inf \{f(x); x \in D(f)\}.$ [Globálne infimum na $D(f)$.]

Suprérum funkcie f na množine A , označenie $\sup f(x)$, $x \in A$, resp. $\sup_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A) = \sup \{f(x); x \in A\}.$ [Lokálne suprérum na A .]

Infimum funkcie f na množine A , označenie $\inf f(x)$, $x \in A$, resp. $\inf_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A) = \inf \{f(x); x \in A\}.$ [Lokálne infimum na A .]

- f je na množine $A \subset D(f)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{zhora neohraničená.} \\ \text{(zhora i zdola) ohraničená.} \\ \text{zdola neohraničená.} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sup \{f(x); x \in A\} \in \mathbb{R}. \\ \inf \{f(x); x \in A\} \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$

Vlastnosti funkcií I – Infimum a suprérum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

6

Suprérum funkcie f , označenie $\sup f(x)$, sa nazýva

- $\sup f(x) = \sup H(f) = \sup f(D(f)) = \sup \{f(x); x \in D(f)\}.$ [Globálne suprérum na $D(f)$.]

Infimum funkcie f , označenie $\inf f(x)$, sa nazýva

- $\inf f(x) = \inf H(f) = \inf f(D(f)) = \inf \{f(x); x \in D(f)\}.$ [Globálne infimum na $D(f)$.]

Suprérum funkcie f na množine A , označenie $\sup f(x)$, $x \in A$, resp. $\sup_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A) = \sup \{f(x); x \in A\}.$ [Lokálne suprérum na A .]

Infimum funkcie f na množine A , označenie $\inf f(x)$, $x \in A$, resp. $\inf_{x \in A} f(x)$, sa nazýva

- $\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A) = \inf \{f(x); x \in A\}.$ [Lokálne infimum na A .]

- f je na množine $A \subset D(f)$ $\left\{ \begin{array}{ll} \text{zhora neohraničená.} \Rightarrow & \sup \{f(x); x \in A\} = \infty. \\ \text{(zhora i zdola) ohraničená.} \Rightarrow & \begin{cases} \sup \{f(x); x \in A\} \in \mathbb{R}. \\ \inf \{f(x); x \in A\} \in \mathbb{R}. \end{cases} \\ \text{zdola neohraničená.} \Rightarrow & \inf \{f(x); x \in A\} = -\infty. \end{array} \right.$

Vlastnosti funkcií I – Minimum a maximum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$, bod $c \in A$.

Funkcia f **nadobúda** (má) v bode c **extrém** na množine A ,

[T. j. minimum alebo maximum na A .]

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq f(c)$,

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(c) \leq f(x)$,

Vlastnosti funkcií I – Minimum a maximum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$, bod $c \in A$.

2

Funkcia f **nadobúda** (má) v bode c **extrém** na množine A , [T. j. minimum alebo maximum na A .]

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq f(c)$, označenie $f(c) = \max f(x)$, $x \in A$

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(c) \leq f(x)$, označenie $f(c) = \min f(x)$, $x \in A$

Vlastnosti funkcií I – Minimum a maximum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$, bod $c \in A$.

3

Funkcia f **nadobúda** (má) v bode c **extrém** na množine A , [T. j. minimum alebo maximum na A .]

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq f(c)$, označenie $f(c) = \max f(x)$, $x \in A$

a funkčnú hodnotu $f(c)$ nazývame **maximum** (maximálna hodnota, resp. najväčšia hodnota).

$$[f(c) = \max f(A) = \max_{x \in A} f(x) = \max \{f(x); x \in A\}.]$$

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(c) \leq f(x)$, označenie $f(c) = \min f(x)$, $x \in A$

a funkčnú hodnotu $f(c)$ nazývame **minimum** (minimálna hodnota, resp. najmenšia hodnota).

$$[f(c) = \min f(A) = \min_{x \in A} f(x) = \min \{f(x); x \in A\}.]$$

Vlastnosti funkcií I – Minimum a maximum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$, bod $c \in A$.

Funkcia f **nadobúda** (má) v bode c **extrém** na množine A , [T. j. minimum alebo maximum na A .]

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq f(c)$, označenie $f(c) = \max f(x)$, $x \in A$

a funkčnú hodnotu $f(c)$ nazývame **maximum** (maximálna hodnota, resp. najväčšia hodnota).

$$[f(c) = \max f(A) = \max_{x \in A} f(x) = \max \{f(x); x \in A\}.]$$

Ak pre všetky $x \in A$, $x \neq c$ platí $f(x) < f(c)$, potom $f(c)$ je **ostré (rýdze) maximum**.

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(c) \leq f(x)$, označenie $f(c) = \min f(x)$, $x \in A$

a funkčnú hodnotu $f(c)$ nazývame **minimum** (minimálna hodnota, resp. najmenšia hodnota).

$$[f(c) = \min f(A) = \min_{x \in A} f(x) = \min \{f(x); x \in A\}.]$$

Ak pre všetky $x \in A$, $x \neq c$ platí $f(c) < f(x)$, potom $f(c)$ je **ostré (rýdze) minimum**.

Vlastnosti funkcií I – Minimum a maximum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$, bod $c \in A$.

5

Funkcia f **nadobúda** (má) v bode c **extrém** na množine A , [T. j. minimum alebo maximum na A .]

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq f(c)$, označenie $f(c) = \max f(x)$, $x \in A$

a funkčnú hodnotu $f(c)$ nazývame **maximum** (maximálna hodnota, resp. najväčšia hodnota).

$$[f(c) = \max f(A) = \max_{x \in A} f(x) = \max \{f(x); x \in A\}.]$$

Ak pre všetky $x \in A$, $x \neq c$ platí $f(x) < f(c)$, potom $f(c)$ je **ostré** (rýdze) **maximum**.

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(c) \leq f(x)$, označenie $f(c) = \min f(x)$, $x \in A$

a funkčnú hodnotu $f(c)$ nazývame **minimum** (minimálna hodnota, resp. najmenšia hodnota).

$$[f(c) = \min f(A) = \min_{x \in A} f(x) = \min \{f(x); x \in A\}.]$$

Ak pre všetky $x \in A$, $x \neq c$ platí $f(c) < f(x)$, potom $f(c)$ je **ostré** (rýdze) **minimum**.

- Ak $A = D(f)$, potom sa extrémny funkcie f nazývajú **globálne** (absolútne)

a označujú sa stručne $f(c) = \min f(x)$, resp. $f(c) = \max f(x)$.

Vlastnosti funkcií I – Minimum a maximum funkcie

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$, bod $c \in A$.

6

Funkcia f **nadobúda** (má) v bode c **extrém** na množine A , [T. j. minimum alebo maximum na A .]

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) \leq f(c)$, označenie $f(c) = \max f(x)$, $x \in A$

a funkčnú hodnotu $f(c)$ nazývame **maximum** (maximálna hodnota, resp. najväčšia hodnota).

$$[f(c) = \max f(A) = \max_{x \in A} f(x) = \max \{f(x); x \in A\}.]$$

Ak pre všetky $x \in A$, $x \neq c$ platí $f(x) < f(c)$, potom $f(c)$ je **ostré** (rýdze) **maximum**.

- ak pre všetky $x \in A$ platí $f(c) \leq f(x)$, označenie $f(c) = \min f(x)$, $x \in A$

a funkčnú hodnotu $f(c)$ nazývame **minimum** (minimálna hodnota, resp. najmenšia hodnota).

$$[f(c) = \min f(A) = \min_{x \in A} f(x) = \min \{f(x); x \in A\}.]$$

Ak pre všetky $x \in A$, $x \neq c$ platí $f(c) < f(x)$, potom $f(c)$ je **ostré** (rýdze) **minimum**.

- Ak $A = D(f)$, potom sa extrém funkcie f nazývajú **globálne** (absolútne)

a označujú sa stručne $f(c) = \min f(x)$, resp. $f(c) = \max f(x)$.

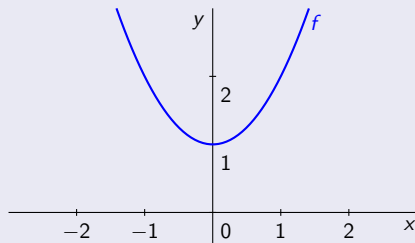
- Ak $A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$, potom sa extrém funkcie f nazývajú **lokálne** (na množine A).

[Postačí ich vyšetrovať na nejakom okolí $O(c) \subset D(f)$ alebo intervale $I \subset D(f)$.]

Vlastnosti funkcí I – Příklady

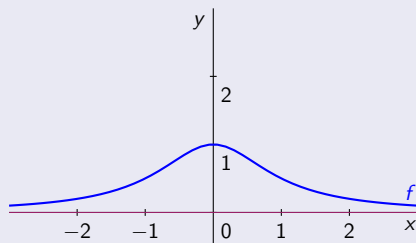
Funkcia $f: y = x^2 + 1, R \rightarrow \langle 1; \infty \rangle$.

[Vid' příklad PR-03-I ľavý.]



Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2+1}, R \rightarrow (0; 1]$.

[Vid' příklad PR-03-I pravý.]

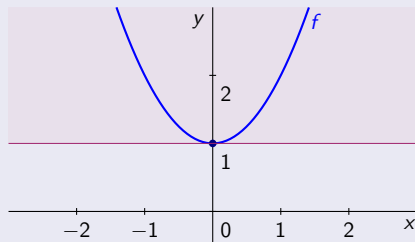


Vlastnosti funkcií I – Príklady

Funkcia $f: y = x^2 + 1, R \rightarrow \langle 1; \infty \rangle$. 2

[Vid' príklad PR-03-I ľavý.]

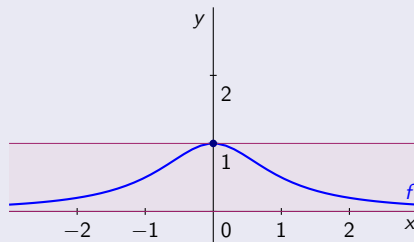
- f je ohraničená zdola ale nie zhora.
- $\max f(x)$ neexistuje. • $\sup f(x) = \infty$.
- $\min f(x) = \inf f(x) = 1$.



Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2 + 1}, R \rightarrow (0; 1]$.

[Vid' príklad PR-03-I pravý.]

- f je ohraničená zdola a aj zhora.
- $\max f(x) = \sup f(x) = 1$.
- $\min f(x)$ neexistuje. • $\inf f(x) = 0$.



Vlastnosti funkcií I – Príklady

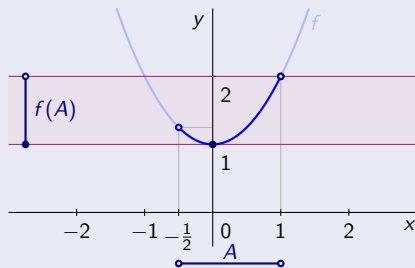
Funkcia $f: y = x^2 + 1, R \rightarrow \langle 1; \infty \rangle$.

[Viď príklad PR-03-I ľavý.]

- f je ohraničená zdola ale nie zhora.
- $\max f(x)$ neexistuje. • $\sup f(x) = \infty$.
- $\min f(x) = \inf f(x) = 1$.

Ak $A = (-\frac{1}{2}; 1)$. $\Rightarrow$ • $f(A) = \langle 1; 2 \rangle$.

- $\max f(A)$ neexistuje. • $\sup f(A) = 2$.
- $\min f(A) = \inf f(A) = 1$.



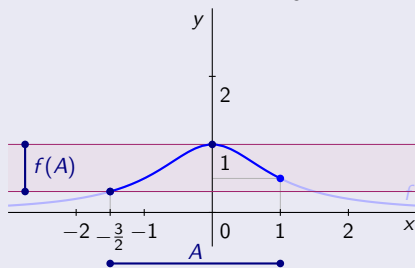
Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2+1}, R \rightarrow (0; 1]$.

[Viď príklad PR-03-I pravý.]

- f je ohraničená zdola a aj zhora.
- $\max f(x) = \sup f(x) = 1$.
- $\min f(x)$ neexistuje. • $\inf f(x) = 0$.

Ak $A = (-\frac{3}{2}; 1)$. $\Rightarrow$ • $f(A) = \langle \frac{4}{13}; 1 \rangle$.

- $\max f(A) = \sup f(A) = 1$.
- $\min f(A) = \inf f(A) = \frac{4}{13}$.



Vlastnosti funkcií I – Príklady

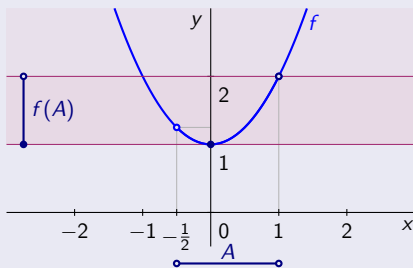
Funkcia $f: y = x^2 + 1, R \rightarrow \langle 1; \infty \rangle$.

[Viď príklad PR-03-I ľavý.]

- f je ohraničená zdola ale nie zhora.
- $\max f(x)$ neexistuje. • $\sup f(x) = \infty$.
- $\min f(x) = \inf f(x) = 1$.

Ak $A = (-\frac{1}{2}; 1)$. $\Rightarrow$ • $f(A) = \langle 1; 2 \rangle$.

- $\max f(A)$ neexistuje. • $\sup f(A) = 2$.
- $\min f(A) = \inf f(A) = 1$.



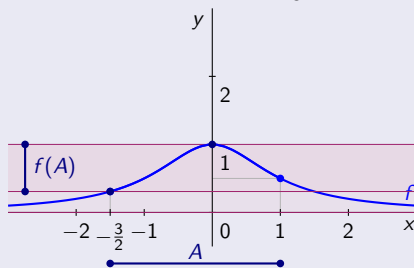
Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2+1}, R \rightarrow (0; 1]$.

[Viď príklad PR-03-I pravý.]

- f je ohraničená zdola a aj zhora.
- $\max f(x) = \sup f(x) = 1$.
- $\min f(x)$ neexistuje. • $\inf f(x) = 0$.

Ak $A = \langle -\frac{3}{2}; 1 \rangle$. $\Rightarrow$ • $f(A) = \langle \frac{4}{13}; 1 \rangle$.

- $\max f(A) = \sup f(A) = 1$.
- $\min f(A) = \inf f(A) = \frac{4}{13}$.



Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie na množine

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

Funkcia f sa nazýva **monotónna** na množine A , ak spĺňa aspoň jednu z nasledujúcich vlastností:

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie na množine

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

2

Funkcia f sa nazýva **monotónna** na množine A , ak spĺňa aspoň jednu z nasledujúcich vlastností:

- **Rastúca** (rastie),
 - **Klesajúca** (klesá),
- ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí
- $$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2). \\ f(x_1) > f(x_2). \end{cases}$$

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie na množine

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

3

Funkcia f sa nazýva **monotónna** na množine A , ak spĺňa aspoň jednu z nasledujúcich vlastností:

- **Rastúca** (rastie),
 - **Klesajúca** (klesá),
- ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí
- $$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2). \\ f(x_1) > f(x_2). \end{cases}$$
-
- **Neklesajúca** (neklesá),
 - **Nerastúca** (nerastie),
- ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí
- $$\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2). \\ f(x_1) \geq f(x_2). \end{cases}$$

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie na množine

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

Funkcia f sa nazýva **monotónna** na množine A , ak spĺňa aspoň jednu z nasledujúcich vlastností:

- **Rastúca** (rastie),
• **Klesajúca** (klesá),
} ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$,
 $x_1 < x_2$ platí $\begin{cases} f(x_1) < f(x_2). \\ f(x_1) > f(x_2). \end{cases}$
- **Neklesajúca** (neklesá),
• **Nerastúca** (nerastie),
} ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$,
 $x_1 < x_2$ platí $\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2). \\ f(x_1) \geq f(x_2). \end{cases}$
- **Konštantná**, označenie $f(x) = \text{konšt.}$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ platí $f(x_1) = f(x_2)$.
[T. j. existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = c$.]

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie na množine

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

5

Funkcia f sa nazýva **monotónna** na množine A , ak spĺňa aspoň jednu z nasledujúcich vlastností:

- **Rastúca** (rastie),
 - **Klesajúca** (klesá),
- $$\left. \begin{array}{l} \text{• Rastúca (rastie),} \\ \text{• Klesajúca (klesá),} \end{array} \right\} \text{ ak pre všetky } x_1, x_2 \in A, \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2). \\ f(x_1) > f(x_2). \end{array} \right. \text{ platí } \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ rýdzo (ostro) monotónna}$$

- **Neklesajúca** (neklesá),
 - **Nerastúca** (nerastie),
- $$\left. \begin{array}{l} \text{• Neklesajúca (neklesá),} \\ \text{• Nerastúca (nerastie),} \end{array} \right\} \text{ ak pre všetky } x_1, x_2 \in A, \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) \leq f(x_2). \\ f(x_1) \geq f(x_2). \end{array} \right. \text{ platí}$$

- **Konštantná**, označenie $f(x) = \text{konšt.}$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ platí $f(x_1) = f(x_2)$.

[T. j. existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = c$.] [Navyše je súčasne neklesajúca aj nerastúca.]

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie na množine

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

6

Funkcia f sa nazýva **monotónna** na množine A , ak spĺňa aspoň jednu z nasledujúcich vlastností:

- **Rastúca** (rastie),
 - **Klesajúca** (klesá),
- $$\left. \begin{array}{l} \text{ak pre všetky } x_1, x_2 \in A, \\ x_1 < x_2 \text{ platí} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2). \\ f(x_1) > f(x_2). \end{array} \right\} \text{ rýdzo (ostro) monotónna}$$

- **Neklesajúca** (neklesá),
 - **Nerastúca** (nerastie),
- $$\left. \begin{array}{l} \text{ak pre všetky } x_1, x_2 \in A, \\ x_1 < x_2 \text{ platí} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) \leq f(x_2). \\ f(x_1) \geq f(x_2). \end{array} \right.$$

- **Konštantná**, označenie $f(x) = \text{konšt.}$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ platí $f(x_1) = f(x_2)$.

[T. j. existuje $c \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = c$.] [Navyše je súčasne neklesajúca aj nerastúca.]

- Ak $A = D(f)$, potom sa uvedené vlastnosti funkcie f nazývajú **globálne (absolútne)**.

- Prívlastky „na množine $D(f)$ “, „na celom definičnom obore“, ap. obyčajne vynechávame. [f je rastúca, f je neklesajúca, f je monotónna, ...]
- Ak nie je uvedená množina, na ktorej má nejaká vlastnosť platiť, automaticky sa myslí celý definičný obor $D(f)$.

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie na množine

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, množina $A \subset D(f)$.

7

Funkcia f sa nazýva **monotónna** na množine A , ak spĺňa aspoň jednu z nasledujúcich vlastností:

- **Rastúca** (rastie),
 - **Klesajúca** (klesá),
- $$\left. \begin{array}{l} \text{ak pre všetky } x_1, x_2 \in A, \\ x_1 < x_2 \text{ platí} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2). \\ f(x_1) > f(x_2). \end{array} \right\} \text{ rýdzo (ostro) monotónna}$$

- **Neklesajúca** (neklesá),
 - **Nerastúca** (nerastie),
- $$\left. \begin{array}{l} \text{ak pre všetky } x_1, x_2 \in A, \\ x_1 < x_2 \text{ platí} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) \leq f(x_2). \\ f(x_1) \geq f(x_2). \end{array} \right.$$

- **Konštantná**, označenie $f(x) = \text{konšt.}$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ platí $f(x_1) = f(x_2)$.

[T. j. existuje $c \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = c$.] [Navyše je súčasne neklesajúca aj nerastúca.]

- Ak $A = D(f)$, potom sa uvedené vlastnosti funkcie f nazývajú **globálne (absolútne)**.

- Prívlastky „na množine $D(f)$ “, „na celom definičnom obore“, ap. obyčajne vynechávame. [f je rastúca, f je neklesajúca, f je monotónna, ...]
- Ak nie je uvedená množina, na ktorej má nejaká vlastnosť platiť, automaticky sa myslí celý definičný obor $D(f)$.

- Ak $A \subset D(f)$, $A \neq D(f)$, potom sa dané vlastnosti funkcie f nazývajú **lokálne (na množine A)**.

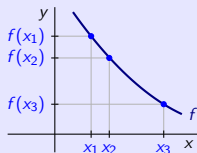
[f je rastúca na množine A , f je neklesajúca na intervale A , ...]

Vlastnosti funkcií I – Príklady



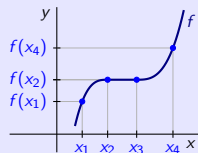
$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$$

Rastúca funkcia



Klesajúca funkcia

$$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$$



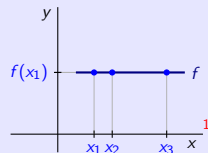
$$f(x_1) < f(x_2) = f(x_3) < f(x_4)$$

Neklesajúca funkcia



Nerastúca funkcia

$$f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$



$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$$

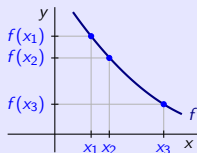
Konštantná funkcia

Vlastnosti funkcií I – Príklady



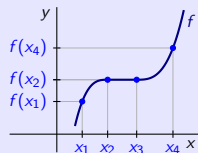
$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$$

Rastúca funkcia



Klesajúca funkcia

$$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$$



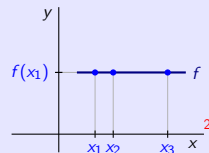
$$f(x_1) < f(x_2) = f(x_3) < f(x_4)$$

Neklesajúca funkcia



Nerastúca funkcia

$$f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$



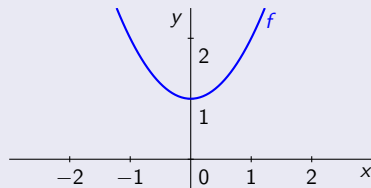
$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$$

Konštantná funkcia

Funkcia $f: y = x^2 + 1, R \rightarrow \langle 1; \infty \rangle$.

[Viď príklad PR-03-I ľavý.]

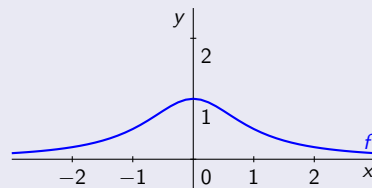
- f nie je monotónna.



Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2+1}, R \rightarrow (0; 1]$.

[Viď príklad PR-03-I pravý.]

- f nie je monotónna.

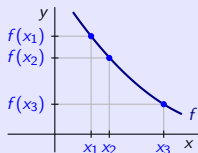


Vlastnosti funkcií I – Príklady



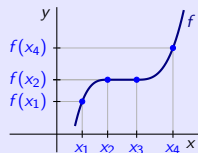
$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$$

Rastúca funkcia



Klesajúca funkcia

$$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$$



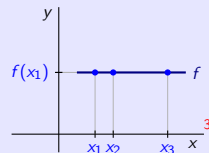
$$f(x_1) < f(x_2) = f(x_3) < f(x_4)$$

Neklesajúca funkcia



Nerastúca funkcia

$$f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$



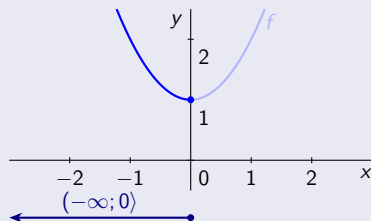
$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$$

Konštantná funkcia

Funkcia $f: y = x^2 + 1, R \rightarrow \langle 1; \infty \rangle$.

[Viď príklad PR-03-I ľavý.]

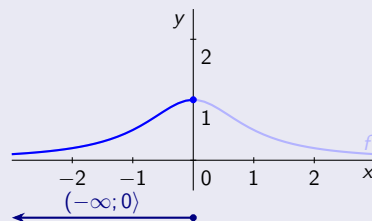
- f nie je monotónna.
- f klesá na $(-\infty; 0]$



Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2+1}, R \rightarrow (0; 1]$.

[Viď príklad PR-03-I pravý.]

- f nie je monotónna.
- f rastie na $(-\infty; 0]$

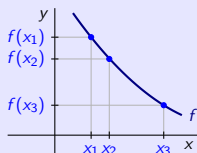


Vlastnosti funkcií I – Príklady



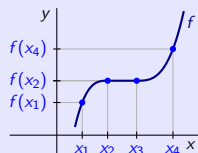
$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$$

Rastúca funkcia



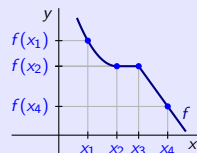
Klesajúca funkcia

$$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$$



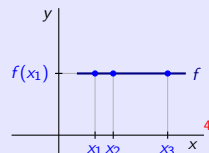
$$f(x_1) < f(x_2) = f(x_3) < f(x_4)$$

Neklesajúca funkcia



Nerastúca funkcia

$$f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$



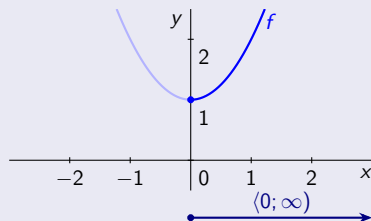
$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$$

Konštantná funkcia

Funkcia $f: y = x^2 + 1, R \rightarrow \langle 1; \infty \rangle$.

[Vid' príklad PR-03-I ľavý.]

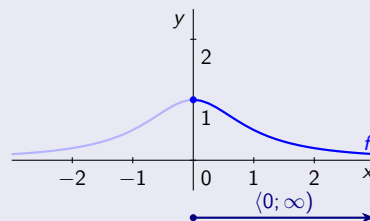
- f nie je monotónna.
- f klesá na $(-\infty; 0)$ a rastie na $\langle 0; \infty \rangle$.



Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2 + 1}, R \rightarrow (0; 1]$.

[Vid' príklad PR-03-I pravý.]

- f nie je monotónna.
- f rastie na $(-\infty; 0)$ a klesá na $\langle 0; \infty \rangle$.

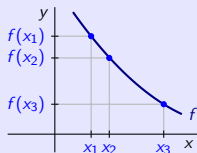


Vlastnosti funkcií I – Príklady



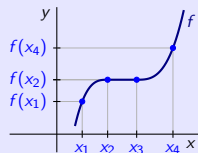
$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$$

Rastúca funkcia



Klesajúca funkcia

$$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$$



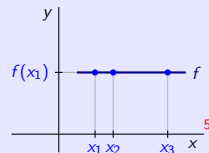
$$f(x_1) < f(x_2) = f(x_3) < f(x_4)$$

Neklesajúca funkcia



Nerastúca funkcia

$$f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$



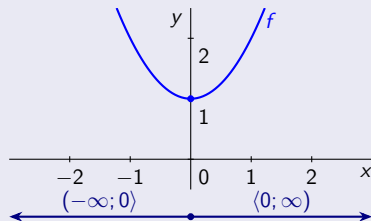
$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$$

Konštantná funkcia

Funkcia $f: y = x^2 + 1, R \rightarrow \langle 1; \infty \rangle$.

[Vid' príklad PR-03-I ľavý.]

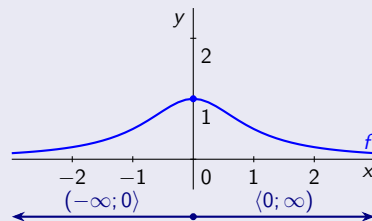
- f nie je monotónna.
- f klesá na $(-\infty; 0)$ a rastie na $\langle 0; \infty \rangle$.



Funkcia $f: y = \frac{1}{x^2+1}, R \rightarrow (0; 1]$.

[Vid' príklad PR-03-I pravý.]

- f nie je monotónna.
- f rastie na $(-\infty; 0)$ a klesá na $\langle 0; \infty \rangle$.



Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie v bode

- Niekedy je výhodné definovať monotónnosť funkcie v nejakom konkrétnom bode definičného oboru.

Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$ bod $c \in D(f)$.

Funkcia f sa nazýva v bode $c \in D(f)$:

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie v bode

- Niekedy je výhodné definovať monotónnosť funkcie v nejakom konkrétnom bode definičného oboru.

Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$ bod $c \in D(f)$.

2

Funkcia f sa nazýva v bode $c \in D(f)$:

- Rastúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky

$$\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) < f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) < f(x). \end{cases}$$
- Neklesajúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky

$$\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) \leq f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) \leq f(x). \end{cases}$$

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie v bode

- Niekedy je výhodné definovať monotónnosť funkcie v nejakom konkrétnom bode definičného oboru.

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$ bod $c \in D(f)$.

Funkcia f sa nazýva v bode $c \in D(f)$:

- Klesajúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky
$$\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) > f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) > f(x). \end{cases}$$

- Nerastúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky
$$\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) \geq f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) \geq f(x). \end{cases}$$

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie v bode

- Niekedy je výhodné definovať monotónnosť funkcie v nejakom konkrétnom bode definičného oboru.

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$ bod $c \in D(f)$.

Funkcia f sa nazýva v bode $c \in D(f)$:

- Rastúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky
$$\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) < f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) < f(x). \end{cases}$$
- Klesajúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky
$$\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) > f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) > f(x). \end{cases}$$
- Neklesajúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky
$$\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) \leq f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) \leq f(x). \end{cases}$$
- Nerastúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky
$$\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) \geq f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) \geq f(x). \end{cases}$$

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie v bode

- Niekedy je výhodné definovať monotónnosť funkcie v nejakom konkrétnom bode definičného oboru.

Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$ bod $c \in D(f)$.

5

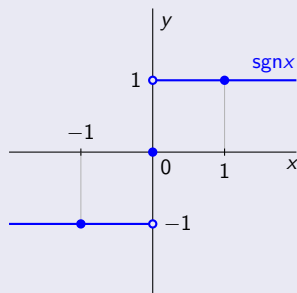
Funkcia f sa nazýva v bode $c \in D(f)$:

- Rastúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky $\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) < f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) < f(x). \end{cases}$
- Klesajúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky $\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) > f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) > f(x). \end{cases}$
- Neklesajúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky $\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) \leq f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) \leq f(x). \end{cases}$
- Nerastúca**, ak existuje okolie $O(c)$ také, že pre všetky $\begin{cases} x \in O^-(c) & \text{platí } f(x) \geq f(c), \\ x \in O^+(c) & \text{platí } f(c) \geq f(x). \end{cases}$

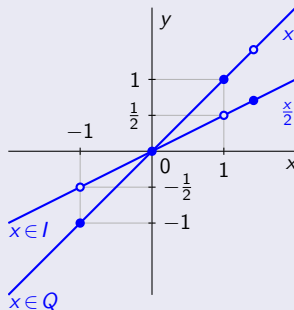
- Ak je funkcia f rastúca v bode $c \in D(f)$, potom ešte nemusí rásť aj v jeho okolí $O(c)$.
- Ak je funkcia f klesajúca v bode $c \in D(f)$, potom ešte nemusí klesať aj v jeho okolí $O(c)$. [Viď príklad PR-03-IV.]

Vlastnosti funkcií I – Funkcie rastúce v bode c , ale nie v $O(c)$

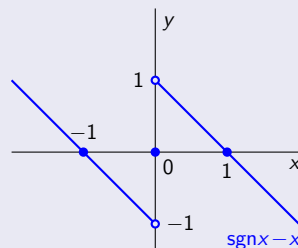
$$f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}.$$



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{x}{2} & \text{pre } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$



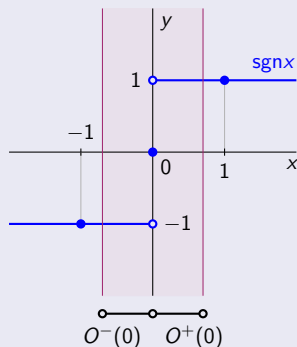
$$f(x) = \operatorname{sgn} x - x, x \in \mathbb{R}.$$



Vlastnosti funkcií I – Funkcie rastúce v bode c , ale nie v $O(c)$

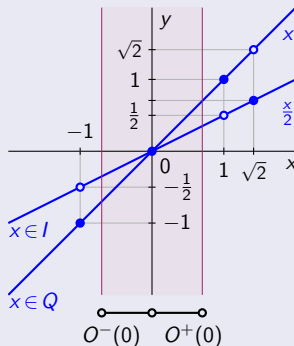
$$f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}.$$

- f je rastúca v bode 0.



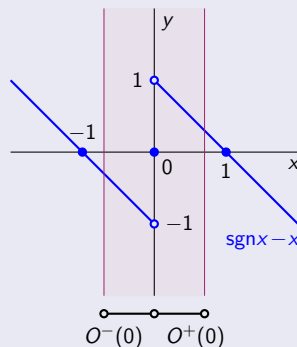
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{x}{2} & \text{pre } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

- f je rastúca v bode 0.



$$f(x) = \operatorname{sgn} x - x, x \in \mathbb{R}.$$

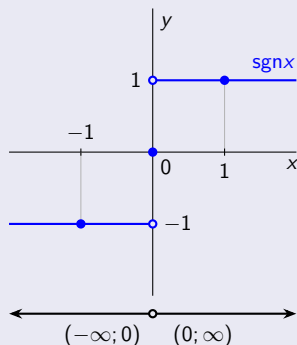
- f je rastúca v bode 0.



Vlastnosti funkcií I – Funkcie rastúce v bode c , ale nie v $O(c)$

$$f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}.$$

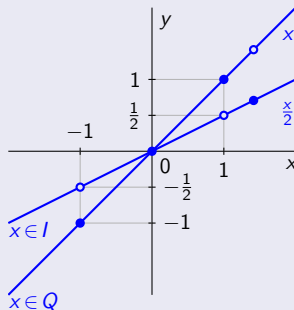
- f je rastúca v bode 0.
- f je konštantná na $(-\infty; 0)$ a na $(0; \infty)$.



$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{x}{2} & \text{pre } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

f je rastúca v bode 0.

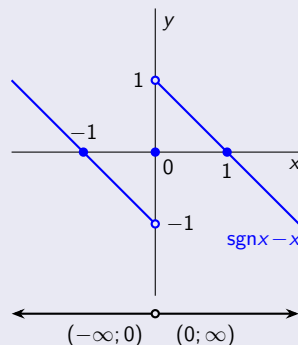
- f je rastúca na $\mathbb{Q}$ a na $\mathbb{I}$.



$$f(x) = \operatorname{sgn} x - x, x \in \mathbb{R}.$$

f je rastúca v bode 0.

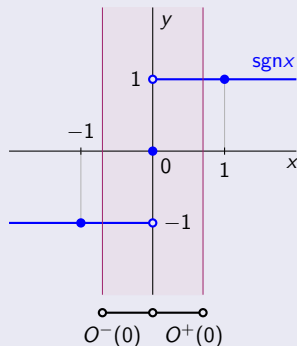
- f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(0; \infty)$.



Vlastnosti funkcií I – Funkcie rastúce v bode c , ale nie v $O(c)$

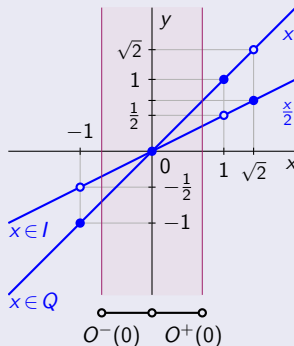
$$f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}.$$

- f je rastúca v bode 0.
- f je konštantná na $(-\infty; 0)$ a na $(0; \infty)$.



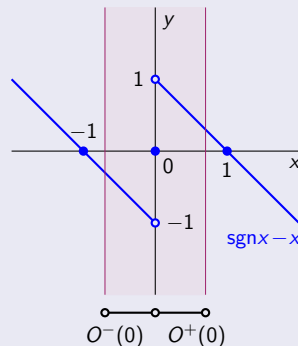
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{x}{2} & \text{pre } x \in I. \end{cases}$$

- f je rastúca v bode 0.
- f je rastúca na $\mathbb{Q}$ a na I .
- Neexistuje okolie $O(0) \subset \mathbb{R}$, kde je f rastúca.



$$f(x) = \operatorname{sgn} x - x, x \in \mathbb{R}.$$

- f je rastúca v bode 0.
- f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(0; \infty)$.



Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie v bode a na množine

Pre funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a ľubovoľný interval $(a; b) \subset D(f)$ platí:

- f je rastúca na intervale $(a; b)$. $\Leftrightarrow$ • f je rastúca v každom bode $c \in (a; b)$.
- f je klesajúca na intervale $(a; b)$. $\Leftrightarrow$ • f je klesajúca v každom bode $c \in (a; b)$.

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie v bode a na množine

Pre funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a ľubovoľný interval $(a; b) \subset D(f)$ platí:

2

- f je rastúca na intervale $(a; b)$. $\Leftrightarrow$ • f je rastúca v každom bode $c \in (a; b)$.
- f je klesajúca na intervale $(a; b)$. $\Leftrightarrow$ • f je klesajúca v každom bode $c \in (a; b)$.

Pre funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$, a ľubovoľnú množinu $A \subset D(f)$ platí:

- f je konštantná na množine A . $\Leftrightarrow$ • f je neklesajúca a súčasne nerastúca na množine A .

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie v bode a na množine

Pre funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a ľubovoľný interval $(a; b) \subset D(f)$ platí:

3

- f je rastúca na intervale $(a; b)$. $\Leftrightarrow$ • f je rastúca v každom bode $c \in (a; b)$.
- f je klesajúca na intervale $(a; b)$. $\Leftrightarrow$ • f je klesajúca v každom bode $c \in (a; b)$.

Pre funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$, a ľubovoľnú množinu $A \subset D(f)$ platí:

- f je konštantná na množine A . $\Leftrightarrow$ • f je neklesajúca a súčasne nerastúca na množine A .
- f je rastúca na A . $\Rightarrow \begin{cases} \bullet f \text{ je rastúca v každom vnútornom bode } c \in A. \\ \bullet f \text{ je neklesajúca na množine } A. \end{cases}$
- f je klesajúca na A . $\Rightarrow \begin{cases} \bullet f \text{ je klesajúca v každom vnútornom bode } c \in A. \\ \bullet f \text{ je nerastúca na množine } A. \end{cases}$

Vlastnosti funkcií I – Monotónnosť funkcie v bode a na množine

Pre funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a ľubovoľný interval $(a; b) \subset D(f)$ platí:

- f je rastúca na intervale $(a; b)$. $\Leftrightarrow$ • f je rastúca v každom bode $c \in (a; b)$.
- f je klesajúca na intervale $(a; b)$. $\Leftrightarrow$ • f je klesajúca v každom bode $c \in (a; b)$.

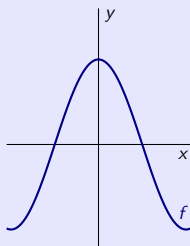
Pre funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$, a ľubovoľnú množinu $A \subset D(f)$ platí:

- f je konštantná na množine A . $\Leftrightarrow$ • f je neklesajúca a súčasne nerastúca na množine A .
- f je rastúca na A . $\Rightarrow \begin{cases} \bullet f \text{ je rastúca v každom vnútornom bode } c \in A. \\ \bullet f \text{ je neklesajúca na množine } A. \end{cases}$
- f je rastúca na A . $\Leftrightarrow$ • f je neklesajúca na množine A
a na každej podmnožine (s aspoň dvomi prvkami) $B \subset A$ nie je konštantná.
- f je klesajúca na A . $\Rightarrow \begin{cases} \bullet f \text{ je klesajúca v každom vnútornom bode } c \in A. \\ \bullet f \text{ je nerastúca na množine } A. \end{cases}$
- f je klesajúca na A . $\Leftrightarrow$ • f je nerastúca na množine A
a na každej podmnožine (s aspoň dvomi prvkami) $B \subset A$ nie je konštantná.

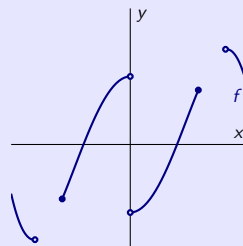
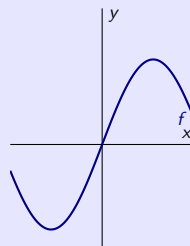
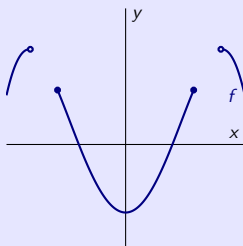
Vlastnosti funkcií II – Párna a nepárna funkcia

Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$ sa nazýva:

- Párna,
- Nepárna,



Párna funkcia

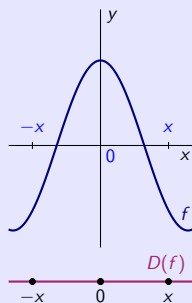


Nepárna funkcia

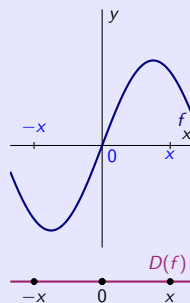
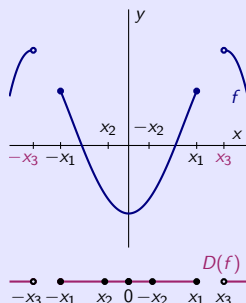
Vlastnosti funkcií II – Párna a nepárna funkcia

Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$ sa nazýva:

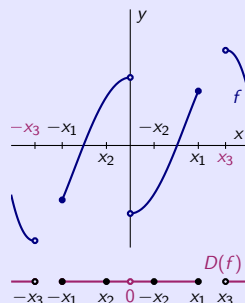
- **Párna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$
- **Nepárna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$



Párna funkcia



Nepárna funkcia

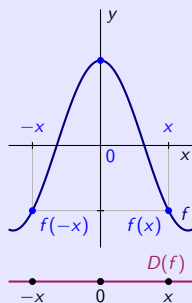


Vlastnosti funkcií II – Párna a nepárna funkcia

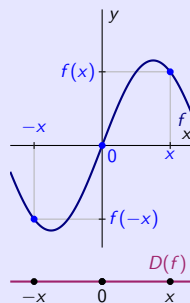
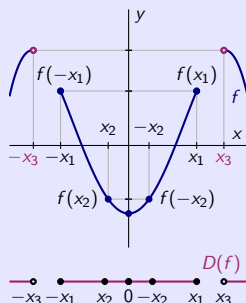
Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$ sa nazýva:

3

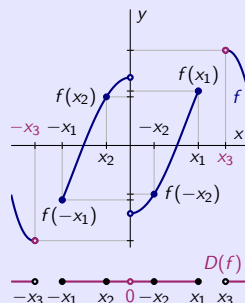
- **Párna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a navyše $f(x) = f(-x)$.
- **Nepárna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a navyše $f(x) = -f(-x)$.



Párna funkcia



Nepárna funkcia



Vlastnosti funkcií II – Párna a nepárna funkcia

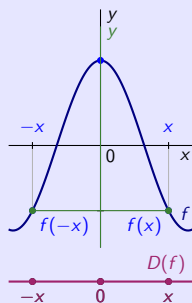
Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$ sa nazýva:

- **Párna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a navyše $f(x) = f(-x)$.

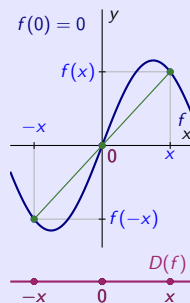
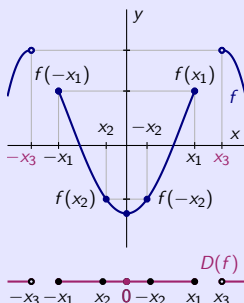
[Graf párnej funkcie je (osoivo) súmerný podľa súradnicovej osi y .]

- **Nepárna**, ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a navyše $f(x) = -f(-x)$.

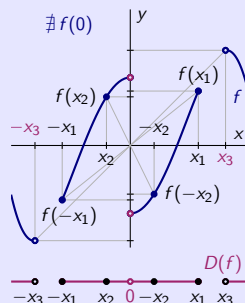
[Graf nepárnej funkcie je (bodovo) súmerný podľa počiatku súradnicového systému 0. Ak $0 \in D(f)$, potom platí $f(0) = 0$.]



Párna funkcia



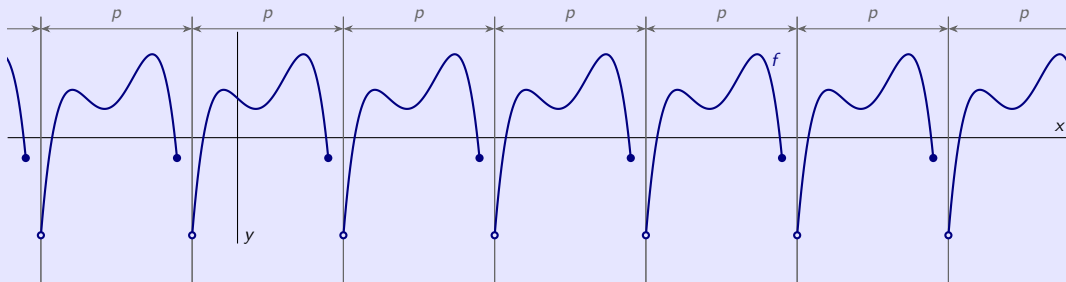
Nepárna funkcia



Vlastnosti funkcií II – Periodická funkcia

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva

- **Periodická**, ak existuje číslo $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, ktoré nazývame **perióda** funkcie f ,

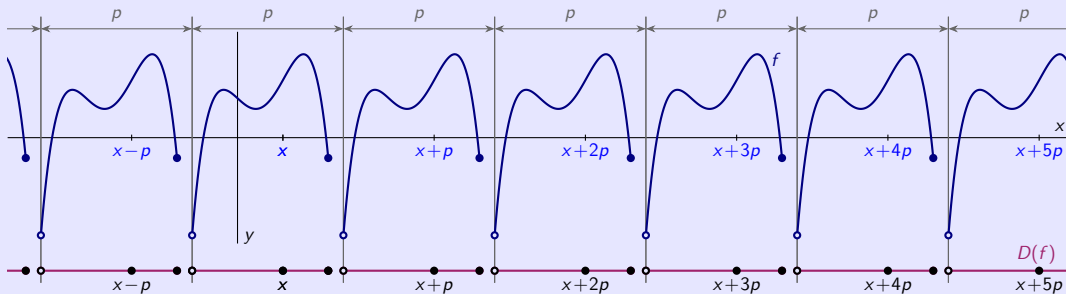


Vlastnosti funkcií II – Periodická funkcia

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva

2

- **Periodická**, ak existuje číslo $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, ktoré nazývame **perióda** funkcie f ,
také že pre všetky $x \in D(f)$ platí $x \pm p \in D(f)$

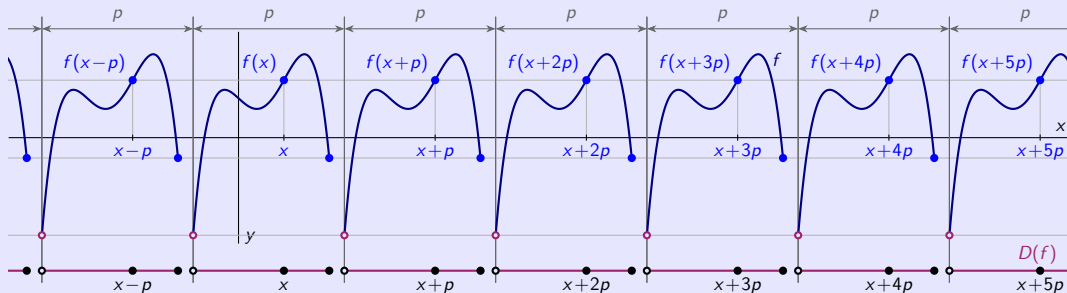


Vlastnosti funkcií II – Periodická funkcia

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva

3

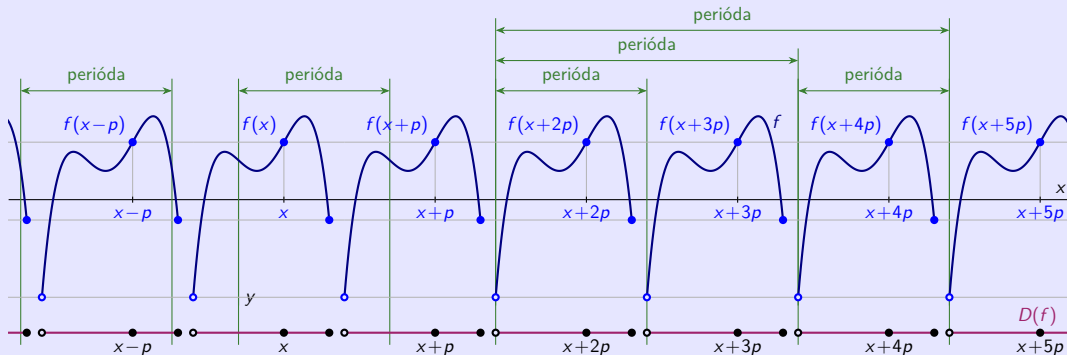
- **Periodická**, ak existuje číslo $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, ktoré nazývame **perióda** funkcie f ,
také že pre všetky $x \in D(f)$ platí $x \pm p \in D(f)$ a navyše platí $f(x) = f(x \pm p)$.



Vlastnosti funkcií II – Periodická funkcia

Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$ sa nazýva

- **Periodická**, ak existuje číslo $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$, ktoré nazývame **perióda** funkcie f ,
také že pre všetky $x \in D(f)$ platí $x \pm p \in D(f)$ a navyše platí $f(x) = f(x \pm p)$.
- Každý interval s dĺžkou periódy $p > 0$ sa nazýva **interval periodicity**. [Perióda môže byť aj záporná, t. j. $p < 0$.]

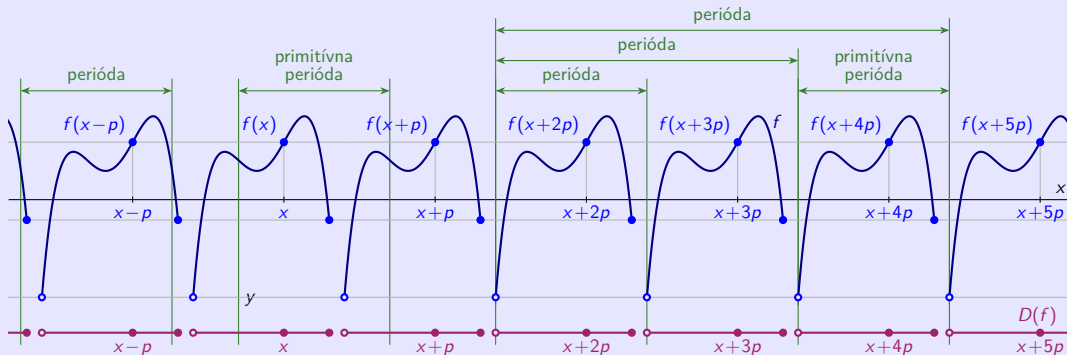


Vlastnosti funkcií II – Periodická funkcia

Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$ sa nazýva

5

- **Periodická**, ak existuje číslo $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$, ktoré nazývame **perióda** funkcie f ,
také že pre všetky $x \in D(f)$ platí $x \pm p \in D(f)$ a navyše platí $f(x) = f(x \pm p)$.
- Každý interval s dĺžkou periódy $p > 0$ sa nazýva **interval periodicity**. [Perióda môže byť aj záporná, t. j. $p < 0$]
- Najmenšia kladná perióda $p > 0$ (pokiaľ existuje) sa nazýva **primitívna (základná) perióda**.



Vlastnosti funkcií II – Vlastnosti periodickej funkcie

Ak je $f: y = f(x), x \in D(f)$ funkcia periodická s periódou $p \in R, p \neq 0$. potom platí:

- Pre každé $m \in Z, m \neq 0$ je f periodická aj s periódou mp . [Periódami sú aj $-p, 2p, -2p, 3p, -3p, 4p, -4p, \dots$]

Vlastnosti funkcí II – Vlastnosti periodickej funkcie

Ak je $f: y = f(x), x \in D(f)$ funkcia periodická s periódou $p \in R, p \neq 0$. potom platí:

2

- Pre každé $m \in Z, m \neq 0$ je f periodická aj s periódou mp . [Periódami sú aj $-p, 2p, -2p, 3p, -3p, 4p, -4p, \dots$]
- f je periodická s kladnou periódou $|p| > 0$ a stačí ju vyšetrovať na (ľubovoľnom) intervale s dĺžkou $|p|$.

Vlastnosti funkcií II – Vlastnosti periodickej funkcie

Ak je $f: y = f(x), x \in D(f)$ funkcia periodická s periódou $p \in R, p \neq 0$. potom platí:

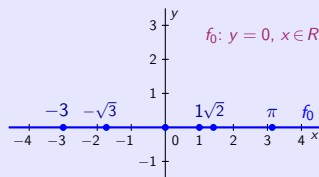
3

- Pre každé $m \in Z, m \neq 0$ je f periodická aj s periódou mp . [Periódami sú aj $-p, 2p, -2p, 3p, -3p, 4p, -4p, \dots$]
- f je periodická s kladnou periódou $|p| > 0$ a stačí ju vyšetrovať na (ľubovoľnom) intervale s dĺžkou $|p|$.
- f nemusí mať primitívnu periódu. [Např. funkcia $y = 0, x \in R$ je periodická, ale primitívna perióda neexistuje.]

Vlastnosti funkcií II – Vlastnosti periodickej funkcie

Ak je $f: y = f(x), x \in D(f)$ funkcia periodická s periódou $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$, potom platí:

- Pre každé $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ je f periodická aj s periódou mp . [Periódami sú aj $-p, 2p, -2p, 3p, -3p, 4p, -4p, \dots$]
- f je periodická s kladnou periódou $|p| > 0$ a stačí ju vyšetrovať na (ľubovoľnom) intervale s dĺžkou $|p|$.
- f nemusí mať primitívnu periódu. [Např. funkcia $y = 0, x \in \mathbb{R}$ je periodická, ale primitívna perióda neexistuje.]
- Konštantná funkcia $f_0: y = 0, x \in \mathbb{R}$ je párna, je nepárna, je periodická. [Periódou je každé $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$. Primitívna perióda neexistuje.]



Vlastnosti funkcií II – Vlastnosti periodickej funkcie

Ak je $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$ funkcia periodická s periódou $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, potom platí:

5

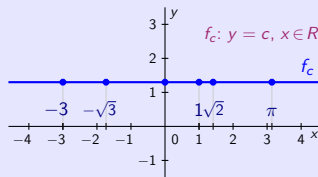
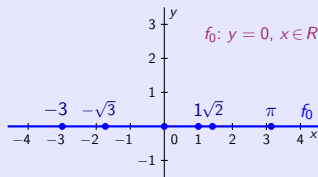
- Pre každé $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ je f periodická aj s periódou mp . [Periódami sú aj $-p$, $2p$, $-2p$, $3p$, $-3p$, $4p$, $-4p$, ...]
- f je periodická s kladnou periódou $|p| > 0$ a stačí ju vyšetrovať na (ľubovoľnom) intervale s dĺžkou $|p|$.
- f nemusí mať primitívnu periódu. [Např. funkcia $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je periodická, ale primitívna perióda neexistuje.]

- Konštantná funkcia $f_0: y = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je párna, je nepárna, je periodická.

[Periódou je každé $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$. Primitívna perióda neexistuje.]

- Konštantná funkcia $f_c: y = c$, $x \in \mathbb{R}$, pre $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, je párna, nie je nepárna, je periodická.

[Periódou je každé $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$. Primitívna perióda neexistuje.]



Vlastnosti funkcií II – Vlastnosti periodickej funkcie

Ak je $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$ funkcia periodická s periódou $p \in R$, $p \neq 0$, potom platí:

6

- Pre každé $m \in Z$, $m \neq 0$ je f periodická aj s periódou mp . [Periódami sú aj $-p$, $2p$, $-2p$, $3p$, $-3p$, $4p$, $-4p$, ...]
- f je periodická s kladnou periódou $|p| > 0$ a stačí ju vyšetrovať na (ľubovoľnom) intervale s dĺžkou $|p|$.
- f nemusí mať primitívnu periódu. [Např. funkcia $y = 0$, $x \in R$ je periodická, ale primitívna perióda neexistuje.]

- Konštantná funkcia $f_0: y = 0$, $x \in R$ je párna, je nepárna, je periodická.

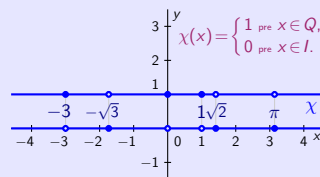
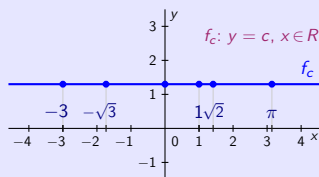
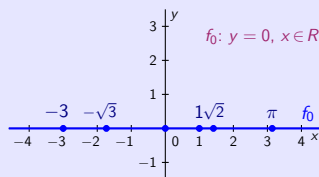
[Periódou je každé $p \in R$, $p \neq 0$. Primitívna perióda neexistuje.]

- Konštantná funkcia $f_c: y = c$, $x \in R$, pre $c \in R$, $c \neq 0$, je párna, nie je nepárna, je periodická.

[Periódou je každé $p \in R$, $p \neq 0$. Primitívna perióda neexistuje.]

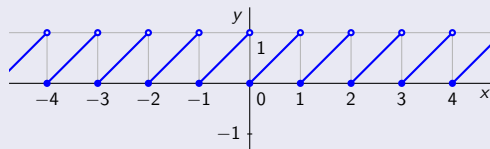
- Dirichletova funkcia $y = \chi(x)$, $x \in R$ je párna, nie je nepárna, je periodická.

[Periódou je každé $p \in Q$, $p \neq 0$, ale $p \notin I$, pretože súčet iracionálnych čísel môže byť racionálny, např. $-\pi + \pi = 0$. Primitívna perióda neexistuje.]

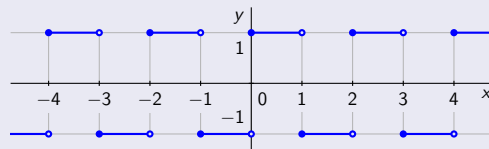


Vlastnosti funkcií II – Príklady

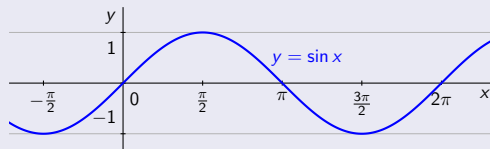
Funkcia $f: y = x - \lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$.



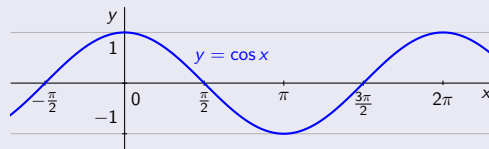
Funkcia $f: y = (-1)^{\lfloor x \rfloor}, x \in \mathbb{R}$.



Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$.



Funkcia $f: y = \cos x, x \in \mathbb{R}$.

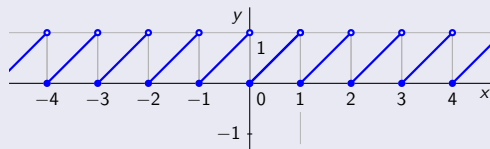


Vlastnosti funkcií II – Príklady

Funkcia $f: y = x - \lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$.

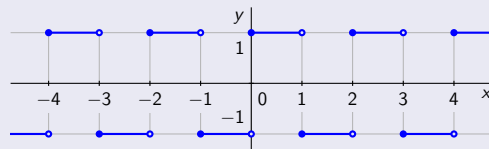
2

- f nie je párna a nie je nepárna.



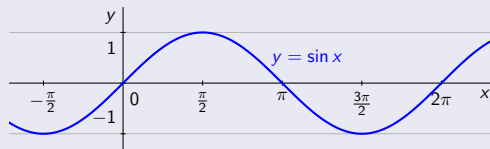
Funkcia $f: y = (-1)^{\lfloor x \rfloor}, x \in \mathbb{R}$.

- f nie je párna a nie je nepárna.



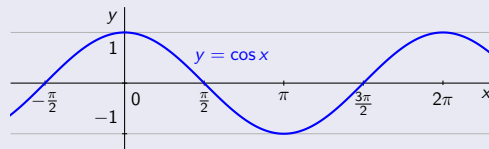
Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$.

- f je nepárna.



Funkcia $f: y = \cos x, x \in \mathbb{R}$.

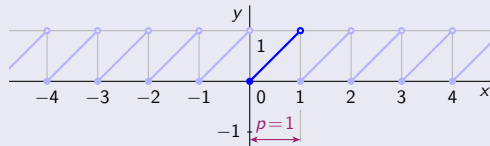
- f je párna.



Vlastnosti funkcií II – Príklady

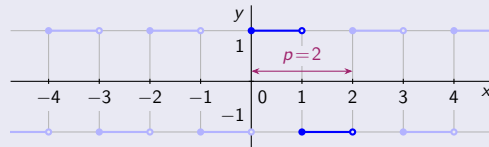
Funkcia $f: y = x - \lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$.

- f nie je párna a nie je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = 1$.



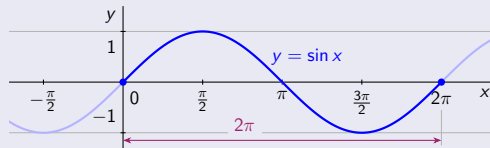
Funkcia $f: y = (-1)^{\lfloor x \rfloor}, x \in \mathbb{R}$.

- f nie je párna a nie je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = 2$.



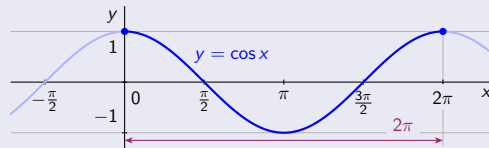
Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$.

- f je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda 2π .



Funkcia $f: y = \cos x, x \in \mathbb{R}$.

- f je párna.
- f je periodická, primitívna perióda 2π .

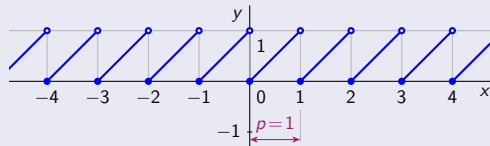


Vlastnosti funkcií II – Príklady

Funkcia $f: y = x - [x], x \in \mathbb{R}$.

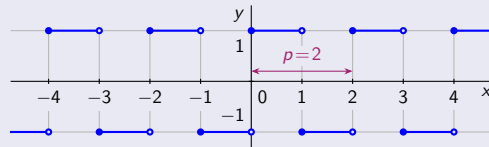
4

- f nie je párna a nie je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = 1$.



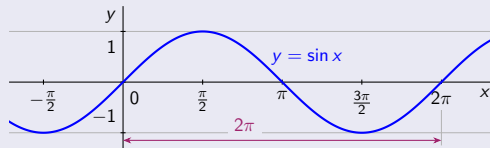
Funkcia $f: y = (-1)^{[x]}, x \in \mathbb{R}$.

- f nie je párna a nie je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda $p = 2$.



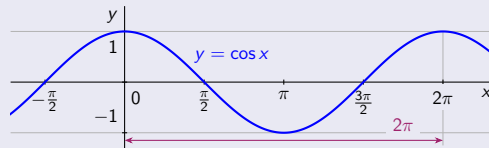
Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$.

- f je nepárna.
- f je periodická, primitívna perióda 2π .



Funkcia $f: y = \cos x, x \in \mathbb{R}$.

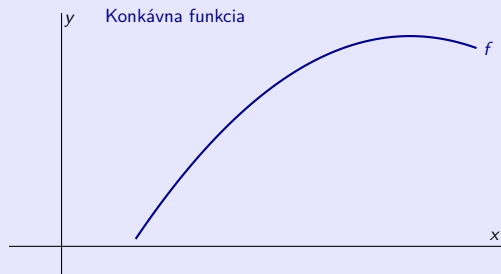
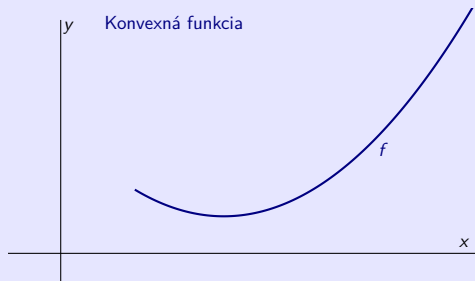
- f je párna.
- f je periodická, primitívna perióda 2π .



Vlastnosti funkcií II – Konvexnosť a konkávnosť na intervale

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, sa nazýva **na intervale** $I \subset D(f)$:

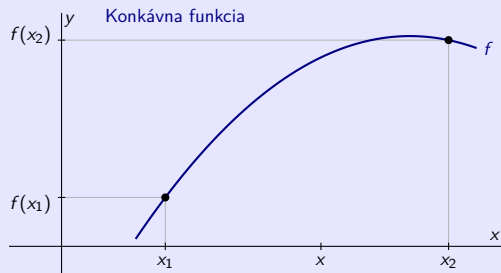
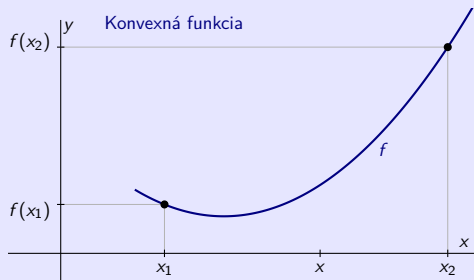
- Konvexná,
- Konkávna,



Vlastnosti funkcií II – Konvexnosť a konkávnosť na intervale

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, sa nazýva **na intervale** $I \subset D(f)$:

- Konvexná,
 - Konkávna,
- } ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$



Vlastnosti funkcií II – Konvexnosť a konkávnosť na intervale

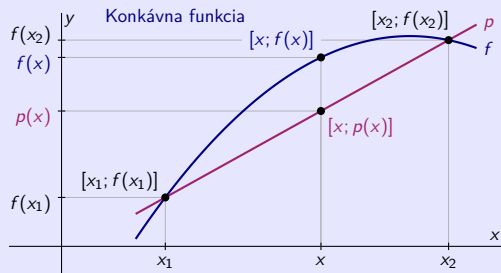
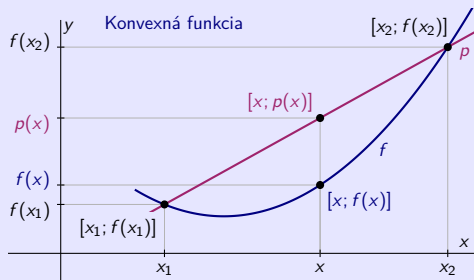
Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, sa nazýva **na intervale** $I \subset D(f)$:

3

- Konvexná,
 - Konkávna,
- ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí
- $$\begin{cases} f(x) \leq p(x). \\ f(x) \geq p(x). \end{cases}$$

$$p(x) = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

[Priamka p spája body $[x_1; f(x_1)]$, $[x_2; f(x_2)]$.]



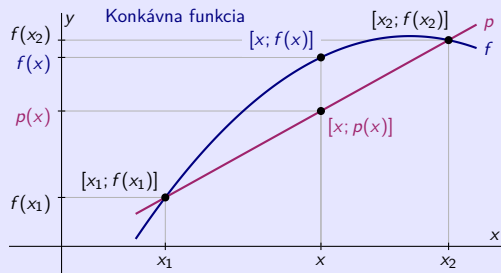
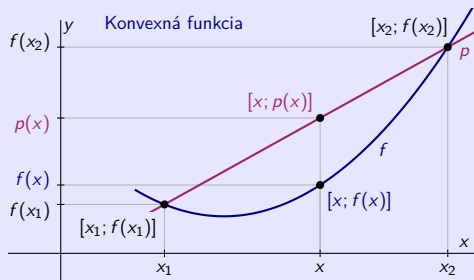
Vlastnosti funkcií II – Konvexnosť a konkávnosť na intervale

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, sa nazýva **na intervale** $I \subset D(f)$:

- Konvexná,
 - Konkávna,
- ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí
- $$\begin{cases} f(x) \leq p(x). \\ f(x) \geq p(x). \end{cases}$$
- Rýdzo (ostro) konvexná,
 - Rýdzo (ostro) konkávna,
- ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí
- $$\begin{cases} f(x) < p(x). \\ f(x) > p(x). \end{cases}$$

$$p(x) = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

[Priamka p spája body $[x_1; f(x_1)]$, $[x_2; f(x_2)]$.]



Vlastnosti funkcií II – Konvexnosť a konkávnosť na intervale

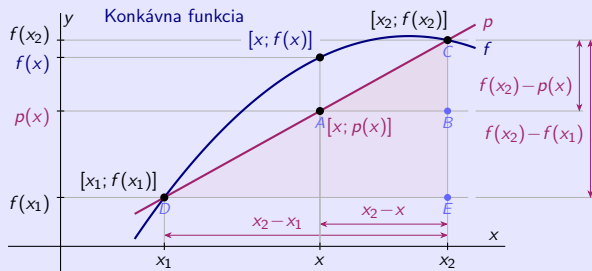
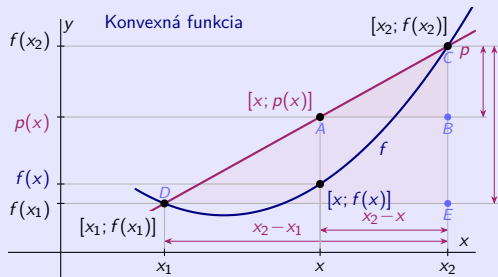
Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, sa nazýva **na intervale** $I \subset D(f)$:

5

- Konvexná,
 - Konkávna,
- $$\left. \begin{array}{l} \text{ak pre všetky } x, x_1, x_2 \in I, x_1 < x < x_2 \text{ platí} \end{array} \right\} \begin{cases} f(x) \leq p(x). \\ f(x) \geq p(x). \end{cases}$$
-
- Rýdzo (ostro) konvexná,
 - Rýdzo (ostro) konkávna,
- $$\left. \begin{array}{l} \text{ak pre všetky } x, x_1, x_2 \in I, x_1 < x < x_2 \text{ platí} \end{array} \right\} \begin{cases} f(x) < p(x). \\ f(x) > p(x). \end{cases}$$

- Trojuholníky ABC , DEC sú podobné: $|BC| : |AB| = \frac{f(x_2) - p(x)}{x_2 - x} = |EC| : |DE| = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

[Priamka p spája body $[x_1; f(x_1)]$, $[x_2; f(x_2)]$.]



Vlastnosti funkcií II – Konvexnosť a konkávnosť na intervale

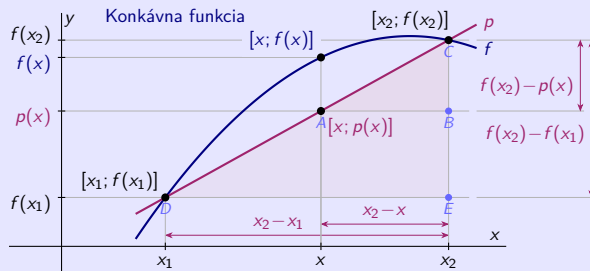
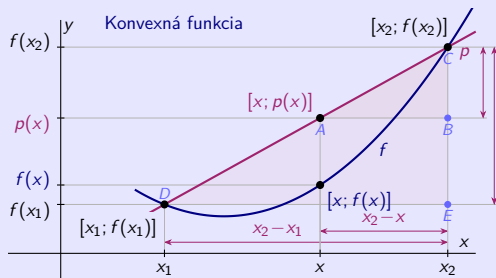
Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, sa nazýva **na intervale** $I \subset D(f)$:

6

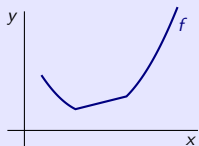
- Konvexná,
 - Konkávna,
- ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí
- $$\begin{cases} f(x) \leq p(x). \\ f(x) \geq p(x). \end{cases}$$
-
- Rýdzo (ostro) konvexná,
 - Rýdzo (ostro) konkávna,
- ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí
- $$\begin{cases} f(x) < p(x). \\ f(x) > p(x). \end{cases}$$

- Trojuholníky ABC , DEC sú podobné: $|BC| : |AB| = \frac{f(x_2) - p(x)}{x_2 - x} = |EC| : |DE| = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. $\Rightarrow$ • $p(x) = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

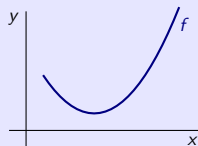
[Priamka p spája body $[x_1; f(x_1)]$, $[x_2; f(x_2)]$.]



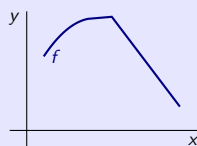
Vlastnosti funkcií II – Konvexnosť a konkávnosť v bode



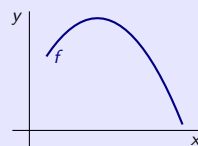
konvexná



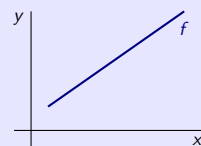
rýdzo konvexná



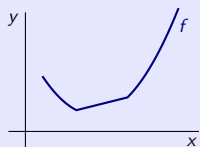
konkávna



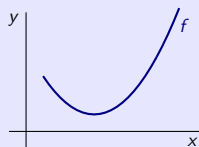
rýdzo konkávna

konvexná aj konkávna¹

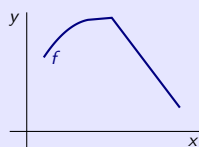
Vlastnosti funkcií II – Konvexnosť a konkávnosť v bode



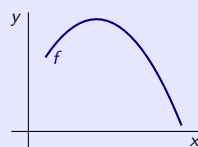
konvexná



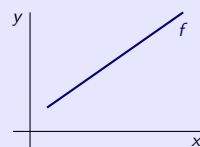
rýdzo konvexná



konkávna



rýdzo konkávna

konvexná aj konkávna²

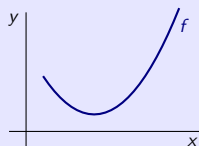
Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$ je na intervale $I \subset D(f)$:

- Konvexná. $\Leftrightarrow$ • Platí $f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2)$
pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, $p \in (0; 1)$, $q = 1 - p$.
- Konkávna. $\Leftrightarrow$ • Platí $f(px_1 + qx_2) \geq pf(x_1) + qf(x_2)$
pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, $p \in (0; 1)$, $q = 1 - p$.

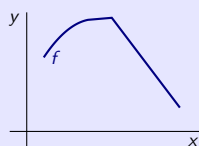
Vlastnosti funkcií II – Konvexnosť a konkávnosť v bode



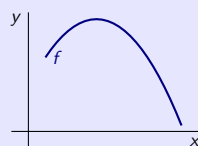
konvexná



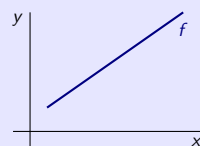
rýdzo konvexná



konkávna



rýdzo konkávna

konvexná aj konkávna³

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$ je na intervale $I \subset D(f)$:

- Konvexná. $\Leftrightarrow$ • Platí $f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2)$
pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, $p \in (0; 1)$, $q = 1 - p$.
- Konkávna. $\Leftrightarrow$ • Platí $f(px_1 + qx_2) \geq pf(x_1) + qf(x_2)$
pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, $p \in (0; 1)$, $q = 1 - p$.

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **v bode** $c \in D(f)$:

- Rýdzo konvexná,
 - Rýdzo konkávna,
- ak existuje okolie $O(c)$, v ktorom je funkcia f $\begin{cases} \text{rýdzo konvexná.} \\ \text{rýdzo konkávna.} \end{cases}$

Vlastnosti funkcií II – Inflexný bod a príklady

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

Funkcia f má inflexiu v bode c (bod c sa nazýva inflexný),

Vlastnosti funkcií II – Inflexný bod a príklady

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

2

Funkcia f má **inflexiu** v bode c (bod c sa nazýva **inflexný**), ak existuje okolie $O(c)$, také, že

- v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konvexná a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konkávna,
- resp. • v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konkávna a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konvexná.

[V bode c sa mení rýdza konvexnosť na rýdzu konkávnosť, resp. sa mení rýdza konkávnosť na rýdzu konvexnosť.]

Vlastnosti funkcií II – Inflexný bod a príklady

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

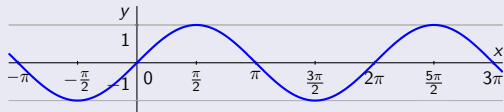
3

Funkcia f má **inflexiu** v bode c (bod c sa nazýva **inflexný**), ak existuje okolie $O(c)$, také, že

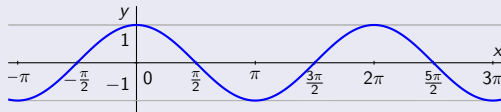
- v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konvexná a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konkávna,
- resp. • v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konkávna a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konvexná.

[V bode c sa mení rýdza konvexnosť na rýdzu konkávnosť, resp. sa mení rýdza konkávnosť na rýdzu konvexnosť.]

Funkcia $f: y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.



Funkcia $f: y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.



Vlastnosti funkcií II – Inflexný bod a príklady

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

Funkcia f má **inflexiu** v bode c (bod c sa nazýva **inflexný**), ak existuje okolie $O(c)$, také, že

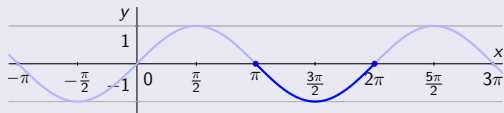
- v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konvexná a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konkávna,
- resp. • v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konkávna a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konvexná.

[V bode c sa mení rýdza konvexnosť na rýdzu konkávnosť, resp. sa mení rýdza konkávnosť na rýdzu konvexnosť.]

Funkcia $f: y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- f je rýdzo konvexná

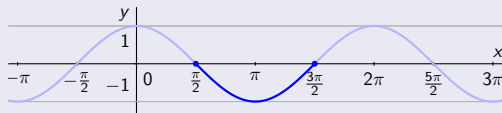
na intervale $\langle \pi; 2\pi \rangle$.



Funkcia $f: y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

- f je rýdzo konvexná

na intervale $\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle$.



Vlastnosti funkcií II – Inflexný bod a príklady

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

5

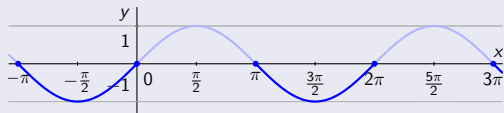
Funkcia f má **inflexiu** v bode c (bod c sa nazýva **inflexný**), ak existuje okolie $O(c)$, také, že

- v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konvexná a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konkávna,
- resp. • v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konkávna a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konvexná.

[V bode c sa mení rýdza konvexnosť na rýdzu konkávnosť, resp. sa mení rýdza konkávnosť na rýdzu konvexnosť.]

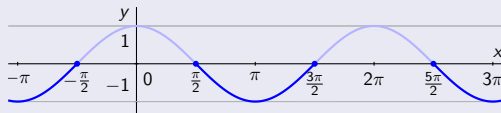
Funkcia $f: y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- f je rýdzo konvexná
na intervaloch $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.



Funkcia $f: y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

- f je rýdzo konvexná
na intervaloch $\langle \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.



Vlastnosti funkcií II – Inflexný bod a príklady

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

6

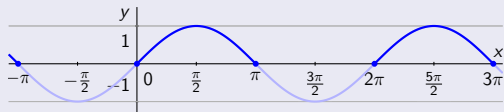
Funkcia f má **inflexiu** v bode c (bod c sa nazýva **inflexný**), ak existuje okolie $O(c)$, také, že

- v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konvexná a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konkávna,
- resp. • v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konkávna a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konvexná.

[V bode c sa mení rýdza konvexnosť na rýdzu konkávnosť, resp. sa mení rýdza konkávnosť na rýdzu konvexnosť.]

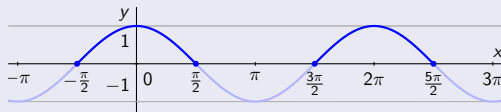
Funkcia $f: y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- f je rýdzo konvexná
na intervaloch $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- f je rýdzo konkávna
na intervaloch $\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.



Funkcia $f: y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

- f je rýdzo konvexná
na intervaloch $\langle \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- f je rýdzo konkávna
na intervaloch $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.



Vlastnosti funkcií II – Inflexný bod a príklady

Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$, bod $c \in D(f)$.

7

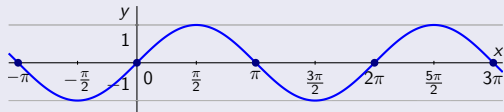
Funkcia f má **inflexiu** v bode c (bod c sa nazýva **inflexný**), ak existuje okolie $O(c)$, také, že

- v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konvexná a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konkávna,
- resp. • v intervale $O^-(c)$ je f rýdzo konkávna a v intervale $O^+(c)$ je f rýdzo konvexná.

[V bode c sa mení rýdza konvexnosť na rýdzu konkávnosť, resp. sa mení rýdza konkávnosť na rýdzu konvexnosť.]

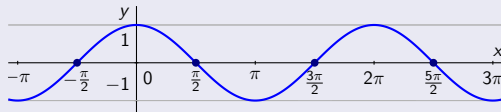
Funkcia $f: y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- f je rýdzo konvexná
na intervaloch $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- f je rýdzo konkávna
na intervaloch $\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Inflexné body sú $0 + k\pi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Funkcia $f: y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

- f je rýdzo konvexná
na intervaloch $\langle \frac{3\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- f je rýdzo konkávna
na intervaloch $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Inflexné body sú $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Koniec 4. časti

Ďakujem za pozornosť.