Matematická analýza 2024/2025

Písomka číslo 03 – Derivácia funkcie a jej aplikácie

V teste (a následne na skúške) sa môžu vyskytnúť taktiež príklady prepočítané na prednáške a na cvičeniach, prípadné domáce úlohy a príklady uverejnené v prezentáciách z prednášok. Príklady sú vzorové, to znamená, že v teste môžu byť v pozmenenom tvare.

F. Derivácia funkcie reálnej premennej v bode a na množine. Pravidlá pre výpočet derivácií. Derivácia zloženej a inverznej funkcie.

(Naspamäť!) **Dôležité derivácie.** (Naspamäť!)

- $[c]' = 0$ pre $x \in R,\ c \in R$.
- $[x]' = 1$ pre $x \in R$.
- $[x^n]' = nx^{n-1}$ pre $x \in R,\ n \in N$.
- $[x^a]' = ax^{a-1}$ pre $x > 0,\ a \in R$.
- $[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x$ pre $x \in R$.
- $[a^x]' = a^x \ln a$ pre $x \in R,\ a > 0$.
- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ pre $x > 0$.
- $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$ pre $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$.
- $[\ln |x|]' = \frac{1}{x}$ pre $x \neq 0$.
- $[\log_a |x|]' = \frac{1}{x \ln a}$ pre $x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$.
- $[\sin x]' = \cos x$ pre $x \in R$.
- $[\cos x]' = -\sin x$ pre $x \in R$.
- $[\mathrm{tg}\, x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$.
- $[\mathrm{cotg}\, x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \neq k\pi,\ k \in Z$.
- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$.
- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$.
- $[\mathrm{arctg}\, x]' = \frac{1}{1+x^2}$ pre $x \in R$.
- $[\mathrm{arccotg}\, x]' = -\frac{1}{1+x^2}$ pre $x \in R$.
- $[\sinh x]' = \cosh x$ pre $x \in R$.
- $[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$.
- $[\mathrm{tgh}\, x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ pre $x \in R$.
- $[\mathrm{cotgh}\, x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pre $x \neq 0$.
- $[\mathrm{argsinh}\, x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ pre $x \in R$.
- $[\mathrm{argcosh}\, x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pre $x > 1$.
- $[\mathrm{argcotgh}\, x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pre $x \in R - \langle -1; 1\rangle$.
- $[\mathrm{argtgh}\, x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pre $x \in (-1; 1)$.
- $(cf)' = cf'$.
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
- $[g(f)]' = g' \cdot f'$.

1. $f'(x) = \left[\sqrt[3]{10x\sqrt[3]{14x\sqrt[3]{2x}}}\right]'$.

2. $f'(x) = \left[\arccos\cos\left(-5x^{-2} - 3\right)\right]'$.

3. $f'(x) = \left[x^{-3\sin(-2x)}\right]'$.

4. $f'(x) = \left[\mathrm{cotg}^{-4}(-5x)\right]' = \left[(\mathrm{cotg}(-5x))^{-4}\right]'$.

5. $f'(x) = \left[x^{-5x-2}\right]'$.

6. $f'(x) = \left[\mathrm{e}^{-3x-2}\right]'$.

7. $f'(x) = \left[8^{-3x-6}\right]'$.

8. $f'(x) = \left[(7x-3)^2\right]'$.

9. $f'(x) = \left[\arcsin\frac{1}{x^6-5}\right]'$.

10. $f'(x) = \left[\mathrm{arccotg}\,\frac{1}{x^6+5}\right]'$.

11. $f'(x) = \left[|-2x-5| + |-3x+4|\right]'$.

12. $f'(x) = \left[\sin(\sin(\sin(\sin(-4x))))\right]'$.

13. $f'(x) = \left[\ln(\ln(\ln(\ln(-3x))))\right]'$.

14. $f'(x) = \left[x^{-3\sinh(-2x)}\right]'$.

15. $f'(x) = \left[\sinh^{-3} 2x\right]' = \left[(\sinh 2x)^{-3}\right]'$.

16. $f'(x) = \left[\sqrt[3]{2x + 5\sqrt[3]{2x + 8\sqrt[3]{2x}}}\right]'$.

17. $f'(x) = \left[\ln|\mathrm{tg}\, 6x|^3\right]'$.

18. $f'(x) = \left[\frac{-6\sin(-2x)-4}{-7\cos(-2x)-3}\right]'$.

19. $f'(x) = \left[\frac{-6\,\mathrm{cotgh}(-2x)+5}{4\,\mathrm{tgh}(-2x)+7}\right]'$.

20. $f'(x) = \left[(2x^3 - 5x^2 - 2x + 3)(5x^4 - 5x^3 + 7x + 6)\right]'$.

21. $f'(x) = \left[(4x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 3x + 2)\,\mathrm{e}^{2x}\right]'$.

22. $f'(x) = \left[\ln(5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 9x + 8)^2\right]'$.

23. $f'(x) = \left[\left(4\sin 2x - 7\cos 2x\right) \cdot \left(5x^4 + 6x^2 + 5x + 4\right)\right]'$.

24. $f'(x) = \left[\arcsin\cos(2x^2 - 5)\right]'$.

G. Derivácie vyšších rádov, aplikácie derivácií (Lagrangeova veta, L'Hospitalovo pravidlo, Taylorov vzorec...).

53. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 8x}$

54. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{4^x - 1}$

55. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^3 - 5^3}{x^6 - 5^6}$

56. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{5}}$

57. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln 7x}{\ln 3x}$

58. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}$

59. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\cos 4x}{\ln\cos 5x}$ H

60. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - x}{x^4 - x}$

61. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 1}{x^5 - 1}$

62. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{\sin 6x}$

63. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{arctg}\, 3x}{\arcsin 2x}$

64. $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin\frac{4}{x}$

65. Vypočítajte $f^{(101)}(x)$ funkcie f:

$y = \sin 3x$, $\quad y = \frac{-1}{2x+1}$. $\quad y = \sin^2 x$, $\quad y = \frac{x+1}{x-1}$, $\quad y = x\,\mathrm{e}^x$, $\quad y = x \ln x$, $\quad y = x^{n-1} \ln x$.

66. Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ pre funkciu $f(x)$:

$y = \mathrm{e}^{(x^3)}$, $x \in R$, $\quad y = \sin(x^3)$, $x \in R$, $\quad y = \cos(x^3)$, $x \in R$, $\quad y = \ln(1 + x^2)^3$, $x \in R$.

H. Vyšetrovanie priebehu funkcie pomocou diferenciálneho počtu.

[$D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti ∗ párnosť, nepárnosť, periodickosť ap. ∗ jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v bodoch $\pm\infty$ a na hraniciach $D(f)$ ∗ nulové body, kladnosť, zápornosť ∗ $f'(x)$, monotónnosť, stacionárne body, lokálne a globálne extrémy ∗ $f''(x)$, konvexnosť, konkávnosť, inflexné body ∗ asymptoty bez smernice, asymptoty so smernicou ∗ graf funkcie.]

67. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$, $x \in D(f)$:

$y = \frac{2x-1}{3x-2}$, $\quad y = \frac{|2x-1|}{3x-2}$, $\quad y = \frac{2x-1}{|3x-2|}$, $\quad y = \frac{2x^2-1}{3x^2-2}$,

$y = \arcsin\frac{2x-1}{3x-2}$, $\quad y = \arccos\frac{2x-1}{3x-2}$, $\quad y = \mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{3x-2}$, $\quad y = \mathrm{arccotg}\,\frac{2x-1}{3x-2}$,

$y = \mathrm{arctg}\,\frac{2x^2-1}{3x^2-2}$, $\quad y = \mathrm{arccotg}\,\frac{2x^2-1}{3x^2-2}$, $\quad y = \arcsin\sin(2x)$, $\quad y = \sin\arcsin(2x)$,

$y = \arcsin\cos(2x)$, $\quad y = \sin\arccos(2x)$, $\quad y = \mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\,(2x)$, $\quad y = \mathrm{cotg}\,\mathrm{arccotg}\,(2x)$.