Matematická analýza 2024/2025

Písomka číslo 02 – Funkcie, limita a spojitosť funkcií

V teste (a následne na skúške) sa môžu vyskytnúť taktiež príklady prepočítané na prednáške a na cvičeniach, prípadné domáce úlohy a príklady uverejnené v prezentáciách z prednášok. Príklady sú vzorové, to znamená, že v teste môžu byť v pozmenenom tvare.

C. Reálne funkcie. Vlastnosti (monotónnosť, extrémy, konvexnosť…) Elementárne funkcie a ich základné vlastnosti.

1. Nájdite zložené funkcie $f_2 = f(f)$, $f_3 = f(f(f))$, …, $f_n = f(f(f(\ldots(f))))$, $n \in N$, ak funkcia $f_1 = f$ je definovaná predpisom $f(x) = 3 + 2x$, $x \in R$.

2. Uvažujme funkcie f, g definované vo wxmaxima predpismi `f(x):=3*x+1; g(x,n):=if n>1 then f(g(x,n-1)) else f(x);`. Funkcia g je definovaná rekurzívne pomocou volania samej seba. Napíšte explicitný predpis pre g, t. j. `g(x,n):= ??? ;`.

3. Uvažujme funkcie definované vo wxmaxima predpismi `f(x):=(3*x+2)/(x+4); g(x):=f(f(x));`. Explicitne definujte funkciu `h(x):= ???;` tak, aby príkaz `plot2d(g(x)-h(x), [x,0,5]);` vykreslil konštantnú funkciu $y = 0$.

4. Funkcia $f_\alpha(x) = \alpha x(1 - x)$ je v pozadí niektorých dynamických modelov rastu populácie (Napr. Verhulstov model rastu populácie $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right)$, kde N je populácia, r je maximálny koeficient rastu populácie, k je kapacita prostredia.). Pre aké $\alpha \in R$ zobrazí funkcia f_α interval $\langle 0; 1\rangle$ do intervalu $\langle 0; 1\rangle$? Pre aké $\alpha \in R$ existuje tzv. pevný bod, t. j. bod x, pre ktorý platí $x = f_\alpha(x)$. Pre pevné body $x = x_0$ uvažujme nasledujúce iterácie $x_{n+1} = f_\alpha(x_n) =$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ako sa správajú tieto body? Overte na počítači (napr. vo wxmaxima).

5. Nájdite zložené funkcie $f_2 = f(f)$, $f_3 = f(f(f))$ a inverznú funkciu f^{-1}, ak funkcia f je definovaná predpisom $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$.

6. Nájdite zložené funkcie $f_2 = f(f)$, $f_3 = f(f(f))$ a inverznú funkciu f^{-1}, ak funkcia f je definovaná predpisom $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

7. Zostrojte periodickú funkciu $y = f(x)$ s primitívnou periódou 8 a načrtnite jej graf tak, aby bola párna, rastúca na intervale $\langle 9; 10\rangle$, klesajúca na intervale $\langle 13; 14\rangle$ a aby $f(4) = 3$. (Periódu zvýraznite!)

8. Zostrojte periodickú funkciu $y = f(x)$ s primitívnou periódou 16 a načrtnite jej graf tak, aby bola nepárna, rastúca na intervale $\langle 17; 18\rangle$, klesajúca na intervale $\langle 21; 22\rangle$ a aby $f(4) = 3$. (Periódu zvýraznite!)

9. Rozhodnite, či sú nasledujúce relácie funkciami:

$f = \left\{[x;\, y] \in R^2;\ x + |y - 1| = 0\right\}$, $f = \left\{[x;\, y] \in R^2;\ |x - 1| + y = 0\right\}$,
$f = \left\{[x;\, y] \in R^2;\ |x| + |y| = 2, y \geq 0\right\}$, $f = \left\{[x;\, y] \in R^2;\ |x - 1| + |y| = 0\right\}$.

10. Zostrojte graf funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:

$y = \sin(x + 1)$, $y = |x| - |x - 1|$, $y = \arcsin 3x$, $y = \sin 3x$, $y = 3\sin x$,
$y = \max\left\{x, x^2\right\}$, $y = \mathrm{e}^{\lfloor x \rfloor}$, $y = \lfloor \mathrm{e}^x \rfloor$, $y = x^2 \sin x$, $y = x^3 \sin x$.

11. Zostrojte graf parametricky zadanej funkcie $y = f(x)$ a určte jej explictný tvar:

$x = 1 - t$, $y = t$, $t \in (-\infty; \infty)$, $x = t$, $y = t^2$, $t \in (-\infty; \infty)$,
$x = t - t^2$, $y = t^2 - t^3$, $t \in (-\infty; \infty)$, $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $t \in \langle 0; 2\pi)$.

12. Rozhodnite, či je funkcia $y = f(x)$ párna alebo nepárna:

$y = x^2 + \sin x^2$, $y = \cos(\pi - x)$, $y = x\cosh x$, $y = \sin x + \cos x$, $y = x \ln|x|$,
$y = x - x^3$, $y = x - x^2$, $y = |x|\, x^{-1}$, $y = x + \sin x$, $y = |x| + \cos x$.

13. Nech $y = f(x)$ je ľubovoľná funkcia definovaná na intervale $(-k; k)$, $k > 0$. Dokážte, že funkcia $f(x) + f(-x)$ je párna a funkcia $f(x) - f(-x)$ je nepárna na $(-k; k)$.

14. Je funkcia $y = f(x)$ periodická? Ak áno, určte jej primitívnu periódu:

$y = |\sin x|$, $y = \sin x^2$, $y = \sin^2 x$, $y = (-1)^{\lfloor x - 1 \rfloor}$, $y = x \arccos x$.
$y = \arcsin \sin x$, $y = \sin \arcsin x$, $y = \sin x + \cos x$, $y = \sin x + \operatorname{tg} x$, $y = \cos x - 3\sin 4x$.

15. Nech $f\colon\ y = x$, $g\colon\ y = 1 - x^2$, $h\colon\ y = \sin x$. Určte funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(h)$, $h(f)$, $g(h)$, $h(g)$, $f[g(h)]$, $f[h(g)]$, $g[f(h)]$, $g[h(f)]$, $h[f(g)]$, $h[g(f)]$.

16. Nájdite funkcie $f \pm g$, fg, f/g, $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$, ak:

$f(x) = 2x$, $g(x) = 4 - x$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{1 - |x|}$, $f(x) = (x + 1)^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

17. Nájdite funkcie $|f|$, $|g|$, $f + g$, g^2, fg, f/g, $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$ a ich definičné obory, ak $f(x) = x$ pre $x < 0$, $f(x) = x^2$ pre $x \geq 0$ a $g(x) = x^2$ pre $x < 0$, $g(x) = x + 1$ pre $x \geq 0$.

18. Nájdite inverznú funkciu k funkcii $y = f(x)$ zadanej predpisom (načrtnite grafy funkcií):

$y = \frac{x}{x+3}$, $x \in R - \{3\}$, $y = x^2 - 8x + 16$, $x \in \langle 4; 5\rangle$, $y = \sin(3x - 1)$, $|3x - 1| < \pi/2$,
$y = 3\sin x - 1$, $x \in \langle -1; 1\rangle$, $y = \ln\sqrt{x - 1}$, $x \in (1; \infty)$, $y = \ln(\sqrt{x} - 1)$, $x \in (1; \infty)$.

19. Uvažujme funkciu definovanú vo wxmaxima predpisom `f(x):=(4*x+1)/(x+3);`. Explicitne definujte funkciu `g(x):= ???;` tak, aby príkaz `plot2d(g(f(x))-x, [x,0,5]);` vykreslil konštantnú funkciu $y = 0$.

20. Uvažujme funkciu definovanú vo wxmaxima predpisom `f(x):=(3*x+1)/(x+4);`. Explicitne definujte funkciu `g(x):= ???;` tak, aby príkaz `plot2d(g(f(x)), [x,0,5]);` vykreslil konštantnú funkciu $y = 0$.

D. Limita funkcie. Základné vlastnosti. Pravidlá pre počítanie s limitami.

(Naspamäť!) **Dôležité limity.** (Naspamäť!)

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} (1+\frac{1}{x})^{x} = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{a}$ pre $a\in R.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} (1+\frac{a}{x})^{x} = \mathrm{e}^{a}$ pre $a\in R.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ pre $a>0.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \ln \mathrm{e} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{a^x}{x^n} = \begin{cases} \infty, & \text{pre } a>1,\ n\in N, \\ 0, & \text{pre } a\leq 1,\ n\in N. \end{cases}$

21. Vypočítajte bez použitia L'Hospitalovho pravidla nasledujúce limity:

- $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin 3x)^{\frac{1}{2x}}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\operatorname{tg} 3x)^{\frac{1}{2x}}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} (1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin 2x}}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\sin \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}.$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\operatorname{tg} \frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} (1+\arcsin 2x)^{\frac{1}{7x}}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} (1+\arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 9x}}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\operatorname{arctg} \frac{4}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{5}{x}}}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(2x-1)^{400}(3x+1)^{400}}{(5x+1)^{1100}}.$
- $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} x\,[\ln x - \ln(x+2)].$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln 3x}{\ln 2x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{2}{x}}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{2x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-1}{2^x-1}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^3-x}{x^2-x}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3-x}{x^2-x}.$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x}{x^2-x}.$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2^x x^3}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{2^x x^3}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{(\frac{1}{2})^x(\frac{1}{x})^3}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^3}{2^x}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3}{2^x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2^x(\frac{1}{x})^3}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{2^x(\frac{1}{x})^3}.$
- $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+3}{x+2}.$
- $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x+3}{x+2}.$
- $\lim\limits_{x\to -2^-} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x+2}.$
- $\lim\limits_{x\to -2^+} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x+2}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|\operatorname{tg} 3x|}{2x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x}{\sin 2x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3x}{|\sin 2x|}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{3}{x}.$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{x}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3}{x\sin\frac{2}{x}}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\left|\frac{3}{x}\right|}{\sin(-\frac{2}{x})}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-3^x}{\sin 3x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^x}{4x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}.$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}.$
- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x-2}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}.$
- $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln 3x}{\ln 2x}.$

E. Spojitosť funkcie v bode a na množine, vzťah s limitou. Dôležité vlastnosti spojitých funkcií.

22. Vyšetrite spojitosť a charakter bodov nespojitosti funkcie:

$y = x\sin\frac{1}{x},\qquad y = x^2\sin\frac{1}{x},\qquad y = \frac{1}{\sin x},\qquad y = \sin\frac{1}{x},\qquad y = \frac{\sin x}{x},\qquad y = \frac{x}{|x|}.$

23. Nech je funkcia f nespojitá v bode $a\in D(f)$. Aká je funkcia $|f|$ v bode a?

24. Zostrojte funkciu, ktorá je definovaná na množine R, je všade spojitá a má práve $0, 1, 2, \ldots, n$, $(n\in N)$, resp. nespočítateľne veľa bodov nespojitosti.

25. Určte $f(0)$ tak, aby bola funkcia f spojitá v bode 0, ak pre $x\neq 0$ platí:

$f(x) = \frac{\sin x}{2x},\qquad f(x) = \frac{(x+2)^2-4}{x},\qquad f(x) = (1+2x)^{1/x},\qquad f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$

26. Nech sú funkcie f, g nespojité v bode $a\in D(f)\cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode a. Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi. **pomocna tabuľka**

$f+g,\qquad |f+g|,\qquad f/g,\qquad |f/g|,\qquad fg,\qquad |fg|,\qquad f(g),\qquad |f(g)|.$

27. Nech je funkcia f nekonštantná spojitá a funkcia g nespojitá v bode $a\in D(f)\cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode a. Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi. **pomocna tabuľka**

$f+g,\qquad f/g,\qquad g/f,\qquad fg,\qquad g(f),\qquad |g(f)|,\qquad f(g),\qquad |f(g)|.$

28. Metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite aspoň jeden koreň rovnice $0 = x^3+2x-1$.