Matematická analýza 2024/2025
Písomka číslo 01 – Základy reálnych funkcií

V teste (a následne na skúške) sa môžu vyskytnúť taktiež príklady prepočítané na prednáške a na cvičeniach, prípadné domáce úlohy a príklady uverejnené v prezentáciách z prednášok. Príklady sú vzorové, to znamená, že v teste môžu byť v pozmenenom tvare.

A. Základné pojmy a základné vlastnosti funkcií. Množiny a ich základné vlastnosti (mohutnosť, ohraničenosť, extrémy, ap.). Operácie s nekonečnom. Otvorené, uzavreté množiny, intervaly a okolia.

1. Priamo a pomocou matematickej indukcie dokážte pre všetky $n \in N$ rovnosť:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{7^i} = \frac{7-7^{-n}}{6}, \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i} = \frac{3-3^{-n}}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(5i-2)(5i+3)} = \frac{n}{3(5n+3)}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(4i-1)(4i+3)} = \frac{n}{3(4n+3)}.$$

2. Kedysi existovali v Československu mince s hodnotou 3 Kčs a 5 Kčs. Predstavme si, že máme vrece plné trojkorún a vrece plné päťkorún (v neobmedzenom množstve). Dokážte, že každá suma väčšia ako 8 Kčs sa dá zaplatiť iba pomocou týchto mincí. Platí to aj v prípade, že máme iba 10 ks mincí v hodnote 3 Kčs a vrece plné päťkorún? Platí to aj v prípade, že máme iba 10 ks mincí v hodnote 5 Kčs a vrece plné trojkorún? Aký je najmenší počet mincí jednej hodnoty, ktorý nám postačí na nákup ľubovoľnej hodnoty.

3. Napíšte aspoň 6 prvkov, nájdite infimum, suprémum, minimum, maximum a všetky hromadné body množiny:

$\{\frac{2n+3}{3n-6}, n \in N, n \neq 2\}$, $\{\frac{2n+3}{2n-3}, n \in N\}$, $\{\frac{2n+3}{3n-6}, n \in Z, n \neq 2\}$, $\{\frac{2n+3}{2n-3}, n \in Z\}$, $\{\frac{2n+3}{2n-3}, n \in Q, n \neq \frac{3}{2}\}$. [Svoje tvrdenie zdôvodnite!]

4. Určte počet prvkov, vypíšte ich a nájdite všetky hromadné body množiny:

$\{\sin \frac{(n+1)\pi}{3}, n \in N\}$, $\{\cos \frac{(n+1)\pi}{3}, n \in N\}$, $\{\sin \frac{(n+2)\pi}{5}, n \in N\}$, $\{\cos \frac{(n+2)\pi}{5}, n \in N\}$.

[Píšte, presné hodnoty a nie ich priblíženia. Známe hodnoty vypíšte v ich zaužívanom tvare, napr. $\sin \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, nie iba $\sin \frac{\pi}{3}$, resp. $0,866$.]

B. Číselné postupnosti a ich základné vlastnosti. Konvergencia a divergencia, limita.

(Naspamäť!) **Dôležité limity.** (Naspamäť!)

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

5. Vypíšte prvých niekoľko členov (aspoň 6), určte množinu hromadných hodnôt, lim inf, lim sup a lim postupnosti:

$\{\sin \frac{(n+1)\pi}{3}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos \frac{(n+1)\pi}{3}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\sin \frac{(n+2)\pi}{5}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos \frac{(n+2)\pi}{5}\}_{n=1}^{\infty}$.

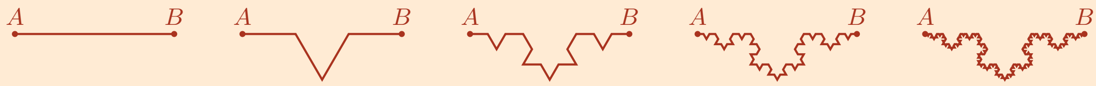
[Píšte, presné hodnoty a nie ich priblíženia. Známe hodnoty vypíšte v ich zaužívanom tvare, napr. $\sin \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, nie iba $\sin \frac{\pi}{3}$, resp. $0,866$.]

6. Uveďte príklady postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$, resp. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$

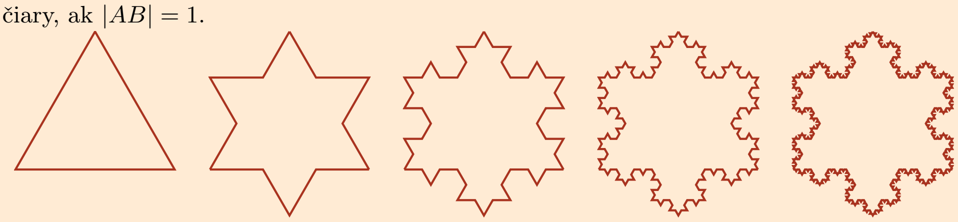
tak, aby: $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$, $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$, $\{\frac{b_n}{a_n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$, $\{\frac{1}{a_n b_n}\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto$,

$\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$, $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$, $\{\frac{b_n}{a_n}\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$, $\{\frac{1}{a_n b_n}\}_{n=1}^{\infty} \not\longmapsto$. **pomocna tabuľka**

7. Vypočítajte limity: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n+3^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n-3^n}$.



8. Na obrázku pred príkladom je znázornený postup konštrukcie lomenej čiary (časť Kochovej vločky – viď obrázok za príkladom), ktorá vznikne z úsečky AB. Každá jednotlivá úsečka sa postupne rozdelí na tri rovnaké časti, pričom stredná časť sa zväčší na dvojnásobok (dve strany rovnostranného trojuholníka). Tento proces sa opakuje do nekonečna. Vypočítajte dĺžku lomenej čiary, ak $|AB| = 1$.



9. Vypočítajte [Platí $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$, $a-b = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a-b = (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$]:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3+5n^4+6n^2+3}{4n^2-2n^3+3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n^3-3}{4n^3+5n^4+6n^2+3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n^3+5n+6\cdot 3^n}{3n+4n^3-2\cdot 3^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n^2+4n^3+5n-6\cdot 3^n}{3n+4n^3+2\cdot 3^{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[3]{n}+4\sqrt[4]{n}-2}{3\sqrt[4]{n}+4\sqrt[5]{n}+5\sqrt[3]{n}+6}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[5]{n}+4\sqrt[6]{n}+5\sqrt[4]{n}+6}{3\sqrt[6]{n}+4\sqrt[5]{n}-2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+3n+1}-\sqrt[3]{n^3+2n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n-3}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+4}-n-3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}-\sqrt[3]{n+3}}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n-1}\right]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+n}-n+1\right]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n+3}{n+5}\right]^4$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n+3}{n+2}\right]^{n+2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{n}+2}{\sqrt[3]{n}+1}\right]^{\sqrt[3]{n}+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n+5}{n+7}\right]^{n^4+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^2+3}{n^2+4}\right]^{n+3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^4+3}{n^4+6}\right]^{n^4+4}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+(-3)^n}{(-2)^{n+1}+(-3)^{n+1}}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n^5+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n+2}{n+1}\right]^{\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n+2}{n+1}\right]^{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n+2}{n+1}\right]^{n^2}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^n\, n!}{(2n)^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^n\, n!}{(3n)^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^n\, n!}{(5n)^n}$.

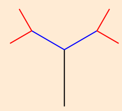
[Niekedy je vhodná substitúcia, napr. pre $n \to \infty$ platí tiež $m = \sqrt{n} \to \infty$, $m = n^2 \to \infty$.]

C. Číselné rady ich základné vlastnosti. Konvergencia a divergencia, základné kritéria konvergencie, súčet radu. Rady s nezápornými členmi.

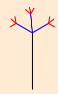
(Naspamäť!) **Dôležité rady.** (Naspamäť!)

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$ pre $1 \le q$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \longrightarrow$ pre $1 < p$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pre $-1 < q < 1$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ osciluje pre $q \le -1$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ pre $p < 1$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

10. Matematický strom rastie nasledovným spôsobom: za prvý rok pozasadení semienka narastie jeho kmeň o 1 m nahor. Ďalší rok sa koniec kmeňa rozvetví na 2 konáre a tieto narastú na 2/3 dĺžky predošlého kmeňa. Toto sa opakuje a každý nový rok sa existujúce konáre rozvetvia na 2 časti a narastú na 2/3 dĺžky predošlého konára (viď obrázok, kde sú znázornené 3 roky). Vyčíslite, akú selkovú dĺžku majú každý rok konáre, ktoré pribudnú.



11. Opäť si vezmime Matematický strom, ktorý rastie tentoraz nasledovným spôsobom: Za prvý rok po zasadení semiačka narastie jeho kmeň o 1 m dohora. Ďalší rok sa koniec kmeňa rozvetví na 3 konáre a tieto narastú na 1/4 dĺžky predošlého kmeňa. Toto sa opakuje a každý nový rok sa existujúce konáre rozvetvia na 3 časti a narastú na 1/4 dĺžky predošlého konára (viď obrázok, kde sú znázornené 3 roky). Vyčíslite, akú celkovú dĺžku majú každý rok konáre, ktoré pribudnú. Vypočítajte aj celkovú dĺžku kmeňa s konármi v závislosti od veku stromu v rokoch.



12. Vyšetrite konvergenciu radu:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n^5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5+2n+4}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-3n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n+5}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+3}{n+2}\right]^{n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}\right], \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n-3}}{n}.$$

13. Vyšetrite relatívnu a absolútnu konvergenciu radu: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^3-2}}$, $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n-2}}$, $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}+2}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}$.

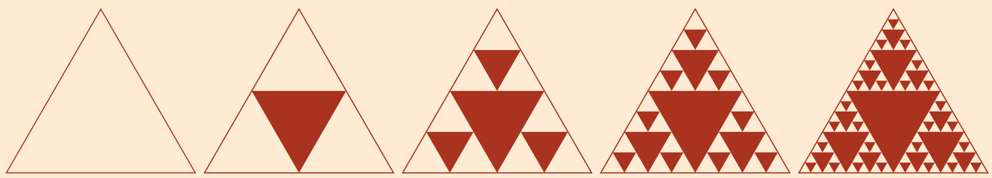
14. Vypočítajte súčet radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+2)(5n+7)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right], \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(-\tfrac{5}{4}\right)^{n-2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\tfrac{7}{2}\right)^{n-4}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-5)}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+7}{(n+1)!}.$$

15. V banke zväčša úročia raz za rok. V tom prípade, ak klient uloží A peňazí na 1 rok s úrokom p percent, na konci roka má $A(1 + 0.01p)$ peňazí. Pokiaľ sa banka rozhodne prilákať klientov, môže ponúkať úročenie 2 krát za rok, avšak s polovičným úrokom $p/2$. Koľko peňazí bude mať na konci roka klient v takomto prípade?
Pokračujeme a predstavíme si ešte štedrejšiu banku, ktorá úročí, trikrát za rok s tretinovým úrokom, prípadne n krát za rok s úrokom p/n. Koľko bude mať klient peňazí v takýchto prípadoch? Rastie zisk klienta ak sa počet úročení ročne zvyšuje? Ak áno, rastie zisk neobmedzene? Ak nie, k čomu sa hodnota zisku blíži, ak by sme počet úročení n neobmedzene zvyšovali a upravovali úrok na p/n?

16. V Petriho miske je kolónia buniek. Bunky sa rozmnožujú a to takým spôsobom, že každú hodinu pribudne v miske polovica buniek. Čiže ak je na začiatku 20 buniek, po hodine ich bude 30 a po ďalšej hodine ich bude 45, atď. Biológovia chcú rast udržať na uzde a preto na konci každej druhej hodiny Petriho misku ožiaria UV svetlom a pritom zahynie 50 % aktuálneho počtu buniek. Ako sa bude vyvíjať počet buniek každú hodinu pri takomto procese? Bude ich počet celkovo stúpať, či klesať? Ak biológovia zvýšia intenzitu lampy, vedia usmrtiť väčší podiel buniek, nielen 50 %. Koľko percent musia usmrtiť na konci každej druhej hodiny tak, aby počet buniek ani nenarastal ani sa nezmenšoval?

17. Vytvoríme fraktálový trojuholník (tzv. Sierpiňského trojuholník) podľa obrázku (zobrazené prvé 4 kroky) nasledovným spôsobom: V trojuholníku spojíme stredy strán a tým ho rozdelíme na štyri zhodné trojuholníky. Vnútorný trojuholník zafarbíme a so zvyšnými troma trojuholníkmi urobíme opäť to, čo s pôvodným trojuholníkom. Tento proces opakujeme do nekonečna. Vieme, že pôvodný trojuholník má obsah plochy $2\,\mathrm{cm}^2$. Aká je plocha všetkých zafarbených trojuholníkov?



18. Vytvoríme fraktálový štvorec (tzv. Sierpiňského koberec) podľa obrázku (zobrazené prvé 4 kroky) nasledovným spôsobom: Štvorec rozdelíme na 9 rovnakých štvorcov a vnútorný z nich zafarbíme inou farbou. Každý zo zostávajúcich ôsmych štvorcov rozdelíme na 9 rovnakých štvorcov a vnútorný z týchto štvorcov zafarbíme inou farbou. Tento proces opakujeme do nekonečna. Vieme, že pôvodný štvorec má obsah plochy $1\,\mathrm{cm}^2$. Aká je plocha všetkých zafarbených štvorcov?