Matematická analýza 1

2023/2024

11. Určitý integrál

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

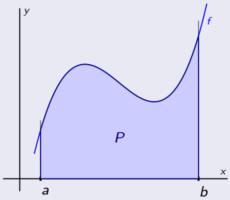
Kliknutím na text pred ikonou získate nápomoc.
Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

Integrálne súčty – Motivačný príklad

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2;\ x \in \langle a; b\rangle\,, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

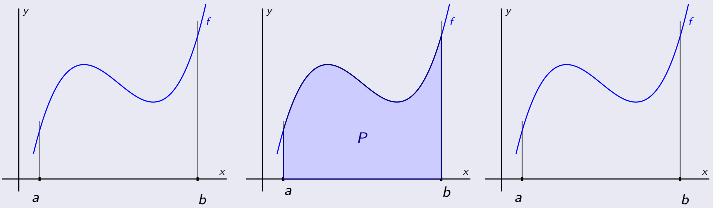


Integrálne súčty – Motivačný príklad

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2;\ x \in \langle a; b\rangle, 0 \le y \le f(x)\}$.

Rozdeľme interval $\langle a;b\rangle$

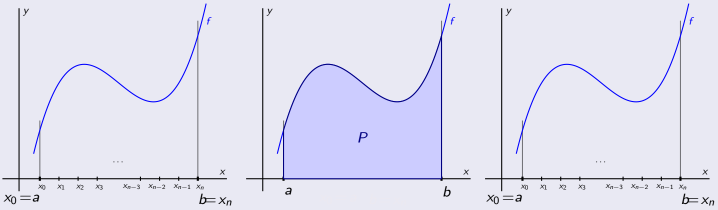


Integrálne súčty – Motivačný príklad

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2;\ x \in \langle a; b\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Rozdeľme interval $\langle a; b\rangle$ na n podintervalov $\langle x_0; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}; x_n\rangle$

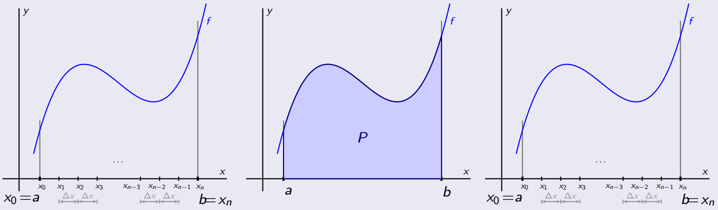


Integrálne súčty – Motivačný príklad

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2;\ x \in \langle a; b\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Rozdeľme interval $\langle a; b\rangle$ na n podintervalov $\langle x_0; x_1\rangle, \langle x_1; x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}; x_n\rangle$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n},\ n \in N$.



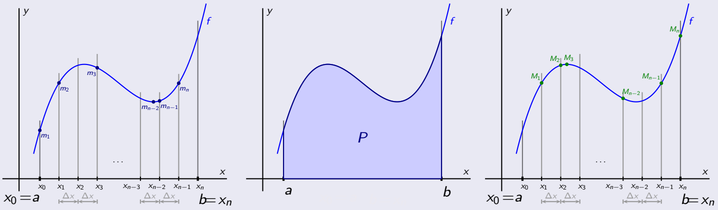
Integrálne súčty – Motivačný príklad

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2;\ x \in \langle a; b\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}.$

Rozdeľme interval $\langle a; b\rangle$ na n podintervalov $\langle x_0; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}; x_n\rangle$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$, $n \in N$.

Označme $m_i = \min\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \max\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.



Integrálne súčty – Motivačný príklad

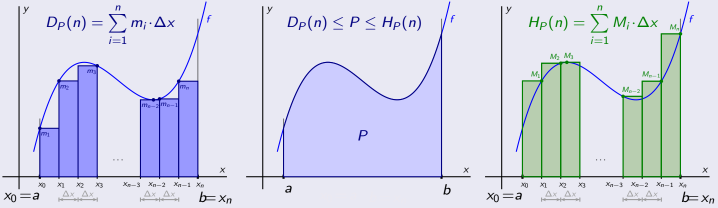
$y=f(x)>0,\ x\in\langle a;b\rangle,\ a,b\in R,\ a<b.$

Určte plošný obsah množiny $P=\{[x;y]\in R^2;\ x\in\langle a;b\rangle,\ 0\le y\le f(x)\}$.

Rozdeľme interval $\langle a;b\rangle$ na n podintervalov $\langle x_0;x_1\rangle$, $\langle x_1;x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1};x_n\rangle$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x = x_1-x_0 = x_2-x_1 = \cdots = x_n-x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$, $n\in N$.

Označme $m_i = \min\{f(x),\, x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$, $M_i = \max\{f(x),\, x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$ pre $i=1,2,\ldots,n$.

Plochu P pokryjeme n obdĺžnikmi a odhadneme zdola a zhora hodnotami $D_P(n)$ a $H_P(n)$.



Integrálne súčty – Motivačný príklad

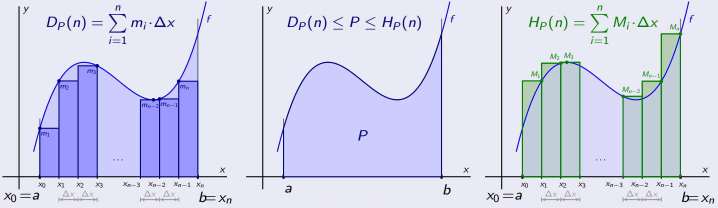
$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2;\ x \in \langle a; b\rangle,\ 0 \le y \le f(x)\}$.

Rozdeľme interval $\langle a; b\rangle$ na n podintervalov $\langle x_0; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}; x_n\rangle$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$, $n \in N$.

Označme $m_i = \min\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \max\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.

Plochu P pokryjeme n obdĺžnikmi a odhadneme zdola a zhora hodnotami $D_P(n)$ a $H_P(n)$.



Je zrejmé, že pre väčšie n sa odhady $D_P(n)$, $H_P(n)$ nezhoršia (zlepšia alebo ostanú rovnaké).

Integrálne súčty – Motivačný príklad

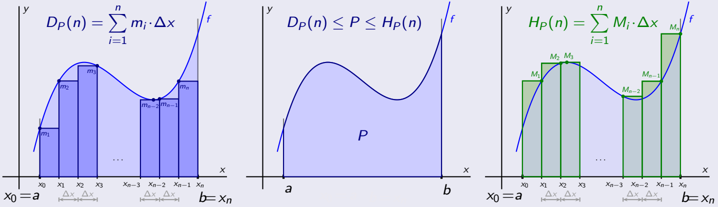
$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2;\ x \in \langle a; b\rangle,\ 0 \le y \le f(x)\}$.

Rozdeľme interval $\langle a;b\rangle$ na n podintervalov $\langle x_0; x_1\rangle$, $\langle x_1; x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}; x_n\rangle$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$, $n \in N$.

Označme $m_i = \min\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \max\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.

Plochu P pokryjeme n obdĺžnikmi a odhadneme zdola a zhora hodnotami $D_P(n)$ a $H_P(n)$.



Je zrejmé, že pre väčšie n sa odhady $D_P(n)$, $H_P(n)$ nezhoršia (zlepšia alebo ostanú rovnaké).

Ak $n \to \infty$, t. j. $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$, potom $D_P(n) \to P$ (dolný odhad), $H_P(n) \to P$ (horný odhad).

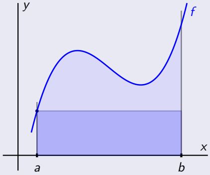
Integrálne súčty – Motivačný príklad

$y = f(x) > 0,\ x \in \langle a; b\rangle,\ a, b \in R,\ a < b.$

Určte plošný obsah množiny $P = \{[x; y] \in R^2;\ x \in \langle a; b\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

$D_P(n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \ \to\ P$

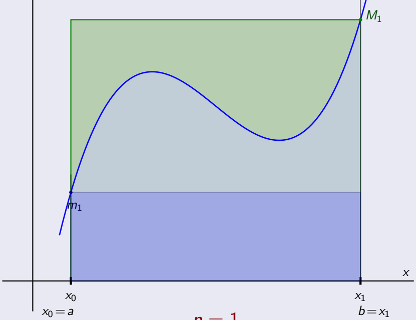
pre $n \to \infty$, t. j. $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$



$D_P(1) = \sum_{i=1}^{1} m_i \cdot \Delta x_i$

Dolný odhad

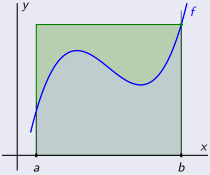
$D_P(n) \leq P \leq H_P(n)$



$n = 1$

$P \leftarrow \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = H_P(n)$

pre $n \to \infty$, t. j. $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$

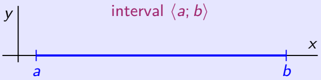


$H_P(1) = \sum_{i=1}^{1} M_i \cdot \Delta x_i$

Horný odhad

Integrálne súčty

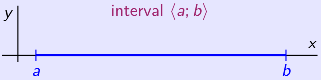
$\langle a; b \rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.



Integrálne súčty

$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$



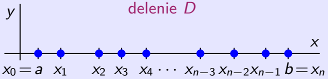
Integrálne súčty

$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$



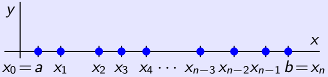
Integrálne súčty

$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.



Integrálne súčty

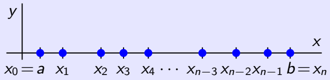
$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \; n \in N,$$

jednoznačne určujú delenie

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ sú deliace body.



Integrálne súčty

$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

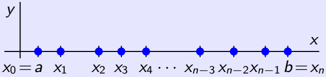
Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

jednoznačne určujú delenie

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}=\{D;\, D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.



Integrálne súčty

$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

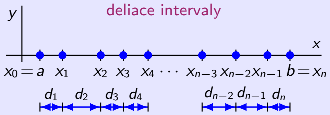
$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \; n \in N,$$

jednoznačne určujú delenie

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} = \{D;\, D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i = \langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$,



Integrálne súčty

$\langle a;b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a<b$.

Delením intervalu $\langle a;b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

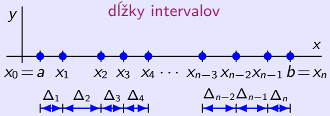
jednoznačne určujú delenie

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a;b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}=\{D;\,D \text{ je delenie } \langle a;b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i=\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$,

dĺžky intervalov: $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,n$,



Integrálne súčty

$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

jednoznačne určujú delenie

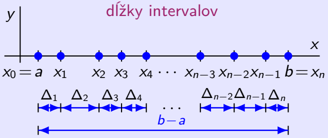
kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}=\{D;\, D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i=\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i=1,2,\dots,n$,

dĺžky intervalov: $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\dots,n$,

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0=b-a.$



Integrálne súčty

$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \ n \in N,$$

jednoznačne určujú delenie

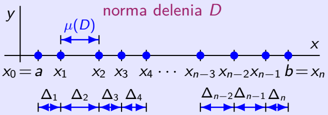
kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} = \{D;\ D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i = \langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

dĺžky intervalov: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a.$



Norma delenia D: $\mu(D) = \max\{\Delta x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ (dĺžka najdlhšieho z intervalov d_i).

Integrálne súčty

$\langle a;b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a<b$.

Delením intervalu $\langle a;b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

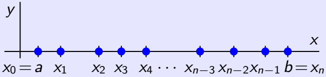
$$D=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

jednoznačne určujú delenie

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a;b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}=\{D;\, D \text{ je delenie } \langle a;b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i=\langle x_{i-1};x_i\rangle,\ i=1,2,\ldots,n,$



dĺžky intervalov: $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ i=1,2,\ldots,n,$

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0=b-a.$

Norma delenia D: $\mu(D)=\max\{\Delta x_i,\ i=1,2,\ldots,n\}$ (dĺžka najdlhšieho z intervalov d_i).

Ak $D^*,D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D^*\subset D^{**}$, potom delenie D^{**} sa nazýva zjemnenie delenia D^*.

Integrálne súčty

$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n}, \ n\in N,$$

jednoznačne určujú delenie

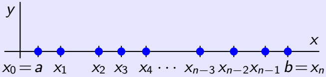
kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}=\{D;\, D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i=\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$,

dĺžky intervalov: $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,n$,

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) = x_n-x_0 = b-a.$



Norma delenia D: $\mu(D)=\max\{\Delta x_i,\, i=1,2,\ldots,n\}$ (dĺžka najdlhšieho z intervalov d_i).

Ak $D^*, D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D^*\subset D^{**}$, potom delenie D^{**} sa nazýva zjemnenie delenia D^*.

Každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ má nekonečne veľa zjemnení.

Integrálne súčty

$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

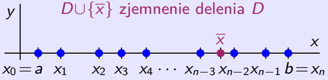
$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \; n \in N,$$

jednoznačne určujú delenie

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} = \{D;\, D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i = \langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$,



dĺžky intervalov: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a.$

Norma delenia D: $\mu(D) = \max\{\Delta x_i,\, i = 1, 2, \ldots, n\}$ (dĺžka najdlhšieho z intervalov d_i).

Ak $D^*, D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D^* \subset D^{**}$, potom delenie D^{**} sa nazýva zjemnenie delenia D^*.

Každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ má nekonečne veľa zjemnení.

Stačí zvoliť ľubovoľný bod $\overline{x} \in \langle a; b\rangle$, $\overline{x} \notin D$ a delenie $D \cup \{\overline{x}\}$ je zjemnením delenia D.

Integrálne súčty

$\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný interval, t. j. $a < b$.

Delením intervalu $\langle a; b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

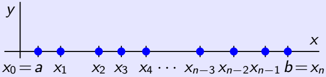
$$D=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n},\ n\in N,$$

jednoznačne určujú delenie

kde $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ sú deliace body.

Množinu všetkých delení $\langle a; b\rangle$ označujeme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}=\{D;\ D \text{ je delenie } \langle a; b\rangle\}$.

Deliace intervaly: $d_i=\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$,



dĺžky intervalov: $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,n$,

pričom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0=b-a.$

Norma delenia D: $\mu(D)=\max\{\Delta x_i,\ i=1,2,\ldots,n\}$ (dĺžka najdlhšieho z intervalov d_i).

Ak $D^*, D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D^*\subset D^{**}$, potom delenie D^{**} sa nazýva zjemnenie delenia D^*.

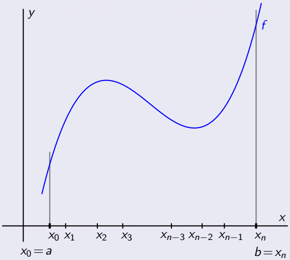
Každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ má nekonečne veľa zjemnení.

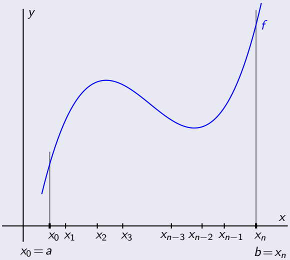
Stačí zvoliť ľubovoľný bod $\overline{x}\in\langle a; b\rangle$, $\overline{x}\notin D$ a delenie $D\cup\{\overline{x}\}$ je zjemnením delenia D.

Ak $D^*, D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, potom $D=D^*\cup D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ sa nazýva spoločné zjemenenie D^*, D^{**}.

Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,

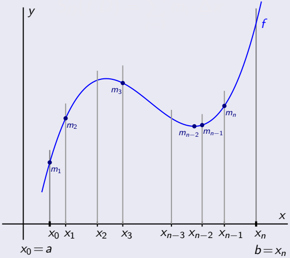


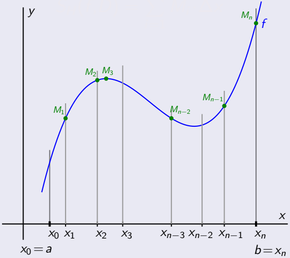


Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,

$m_i = \inf\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \sup\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.





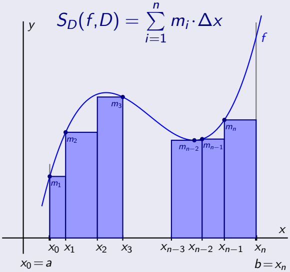
Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,

$m_i=\inf\{f(x), x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$, $M_i=\sup\{f(x), x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$, $i=1,2,\dots,n$.

Dolným Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_D(f,D)$ funkcie f pri delení D

nazývame $$S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x_i$$



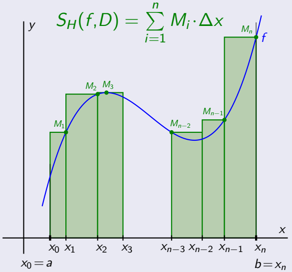
Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,
$m_i = \inf\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \sup\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

horným Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_H(f,D)$ funkcie f pri delení D

nazývame

$$S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$



Integrálne súčty

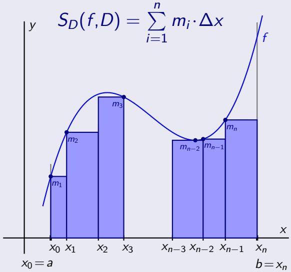
$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^n$, $n\in N$,

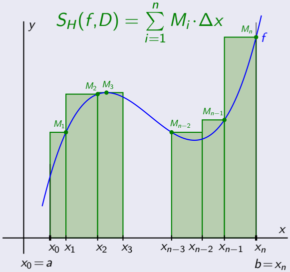
$m_i=\inf\{f(x), x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$, $M_i=\sup\{f(x), x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$, $i=1,2,\ldots,n$.

Dolným Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_D(f,D)$ funkcie f pri delení D

a horným Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_H(f,D)$ funkcie f pri delení D

nazývame čísla: $$S_D(f,D)=\sum_{i=1}^n m_i\cdot\Delta x_i,\quad S_H(f,D)=\sum_{i=1}^n M_i\cdot\Delta x_i.$$





Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená

Integrálne súčty

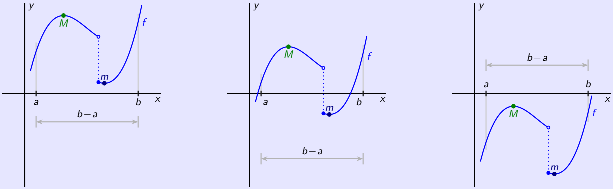
$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.

Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a;\, b\rangle$ je ohraničená

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.

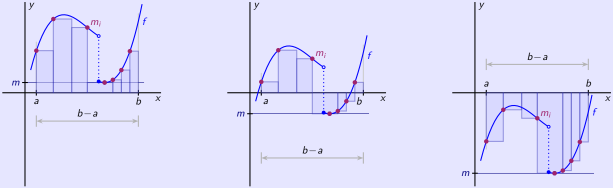


Označme $m = \inf\{f(x), x \in \langle a;\, b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x), x \in \langle a;\, b\rangle\}$.

Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.



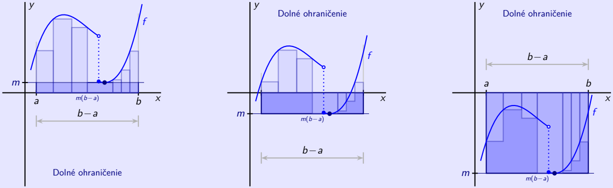
Označme $m = \inf\{f(x), x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x), x \in \langle a; b\rangle\}$.

Pre každé $D = \{x_i\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$ platí $m \leq m_i$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$.

Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.



Označme $m = \inf\{f(x), x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x), x \in \langle a; b\rangle\}$.

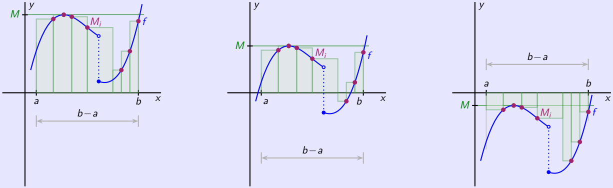
Pre každé $D = \{x_i\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$ platí $m \leq m_i$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$m(b-a) = m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = S_D(f,D)$$

Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.



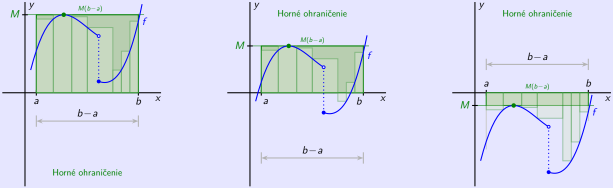
Označme $m = \inf\{f(x), x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x), x \in \langle a; b\rangle\}$.

Pre každé $D = \{x_i\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$ platí $M_i \leq M$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$.

Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.



Označme $m=\inf\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$.

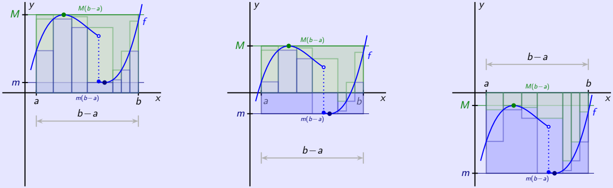
Pre každé $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$ platí $M_i\leq M$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$.

$$S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}M\Delta x_i=M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=M(b-a).$$

Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;\, b\rangle$ je ohraničená

$\Rightarrow$ množiny $\{S_D(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.



Označme $m=\inf\{f(x), x\in\langle a;\, b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x), x\in\langle a;\, b\rangle\}$.

Pre každé $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$ platí $m\le m_i\le M_i\le M$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$.

$$m(b-a)=m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}m\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=S_D(f,D)\le$$

$$\le S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}M\Delta x_i=M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=M(b-a).$$

Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D, D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D \subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D, D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D \subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) \leq S_D(f,D^*) \leq S_H(f,D^*) \leq S_H(f,D).$$

Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D, D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D \subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) \leq S_D(f,D^*) \leq S_H(f,D^*) \leq S_H(f,D).$$

D^* vznikne z $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,

Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D).$$

D^* vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,

t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$

a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.

Integrálne súčty

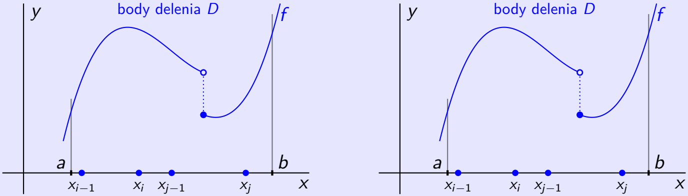
$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

$$\Rightarrow\quad S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D).$$

D^* vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,

t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$

a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.



Integrálne súčty

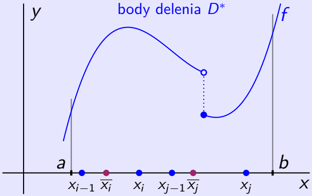
$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D, D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

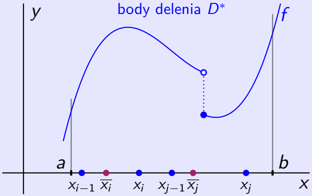
$$\Rightarrow \quad S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D).$$

D^* vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^n$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,

t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i}\in(x_{i-1};x_i)$, $\overline{x_j}\in(x_{j-1};x_j)$.]

a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.



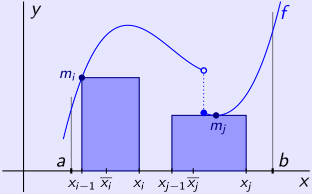


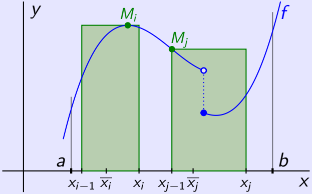
Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D).$$

D^* vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov, t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i}\in(x_{i-1};x_i)$, $\overline{x_j}\in(x_{j-1};x_j)$.] a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.



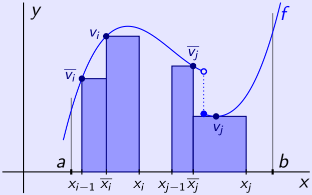


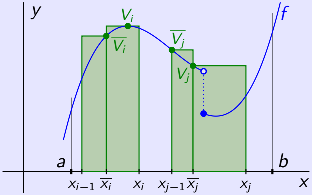
Integrálne súčty

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)\le S_D(f,D^*)\le S_H(f,D^*)\le S_H(f,D).$$

D^* vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,
t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i}\in(x_{i-1};x_i)$, $\overline{x_j}\in(x_{j-1};x_j)$.]
a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.





Integrálne súčty

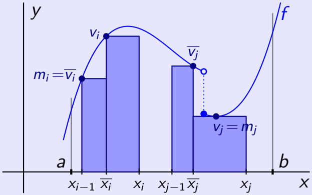
$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D,D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

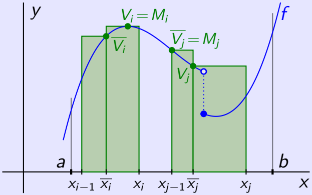
$$\Rightarrow \quad S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D).$$

D^* vznikne z $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,

t. j. stačí overiť iba prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i}\in(x_{i-1};x_i)$, $\overline{x_j}\in(x_{j-1};x_j)$.]

a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.





Integrálne súčty

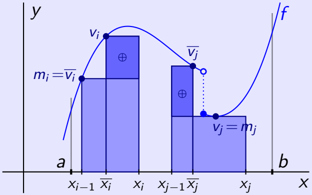
$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D, D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D \subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

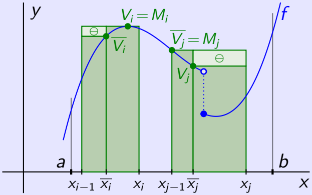
$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) \leq S_D(f,D^*) \leq S_H(f,D^*) \leq S_H(f,D).$$

D^* vznikne z $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,

t. j. stačí overiť iba prípad $D^* = D \cup \{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i} \in (x_{i-1}; x_i)$, $\overline{x_j} \in (x_{j-1}; x_j)$.]

a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.



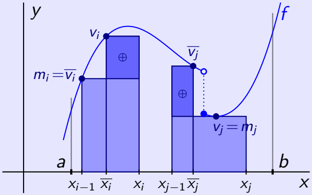


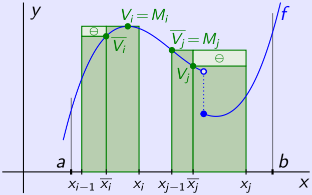
Integrálne súčty

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D, D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D \subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) \leq S_D(f,D^*) \leq S_H(f,D^*) \leq S_H(f,D).$$

D^* vznikne z $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov, t. j. stačí overiť iba prípad $D^* = D \cup \{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i} \in (x_{i-1}; x_i)$, $\overline{x_j} \in (x_{j-1}; x_j)$.] a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.





$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D^*, D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (D^*, D^{**} sú ľubovoľné delenia)

Integrálne súčty

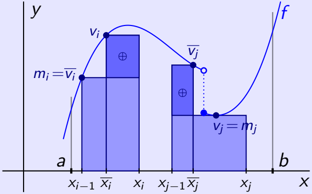
$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D, D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D \subset D^*$ (D^* je zjemnením delenia D)

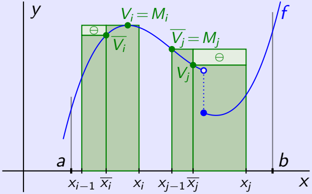
$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) \leq S_D(f,D^*) \leq S_H(f,D^*) \leq S_H(f,D).$$

D^* vznikne z $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pridaním najviac spočítateľného počtu bodov,

t. j. stačí overiť iba prípad $D^* = D \cup \{\overline{x}\}$ [Na obr. dva príklady $\overline{x_i} \in (x_{i-1}; x_i)$, $\overline{x_j} \in (x_{j-1}; x_j)$.]

a matematickou indukciou rozšíriť na počet pridaných bodov.





$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D^*, D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (D^*, D^{**} sú ľubovoľné delenia)

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D^*) \leq S_H(f,D^{**}).$$

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ je ohraničená,

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{S_H(f,D),\, D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

(určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ resp. od a po b.

Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{S_D(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov (určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a;b\rangle$ resp. od a po b.

Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{S_H(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{S_D(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a;b\rangle$ resp. od a po b.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S_H(f,D),\ D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{S_D(f,D),\ D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ resp. od a po b.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$,

Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{S_H(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{S_D(f,D),\, D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a;b\rangle$ resp. od a po b.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, potom číslo $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

sa nazýva Riemannov (určitý) integrál funkcie f na $\langle a;b\rangle$ resp. od a po b

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S_H(f,D),\ D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{S_D(f,D),\ D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ resp. od a po b.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, potom číslo $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

sa nazýva Riemannov (určitý) integrál funkcie f na $\langle a; b\rangle$ resp. od a po b

a f sa nazýva riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a; b\rangle$, ozn. $f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S_H(f,D),\, D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{S_D(f,D),\, D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ resp. od a po b.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, potom číslo $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

sa nazýva Riemannov (určitý) integrál funkcie f na $\langle a; b\rangle$ resp. od a po b

a f sa nazýva riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a; b\rangle$, ozn. $f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Dolný a horný Riemannov integrál existujú vždy

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{S_H(f,D),\, D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{S_D(f,D),\, D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ resp. od a po b.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, potom číslo $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

sa nazýva Riemannov (určitý) integrál funkcie f na $\langle a; b\rangle$ resp. od a po b

a f sa nazýva riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a; b\rangle$, ozn. $f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Dolný a horný Riemannov integrál existujú vždy a platí

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le M(b-a),$$

Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená,

číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{S_H(f,D),\ D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva horný Riemannov

číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{S_D(f,D),\ D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$ sa nazýva dolný Riemannov

(určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a;b\rangle$ resp. od a po b.

Ak $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, potom číslo $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

sa nazýva Riemannov (určitý) integrál funkcie f na $\langle a;b\rangle$ resp. od a po b

a f sa nazýva riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a;b\rangle$, ozn. $f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

Dolný a horný Riemannov integrál existujú vždy a platí

$$m(b-a)\le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le M(b-a),$$

pričom $m=\inf\{f(x),\ x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x),\ x\in\langle a;b\rangle\}$.

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b \rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b \rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b \rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b \rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b \rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = c, \quad M_i = \sup \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = c.$$

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f, D) = S_H(f, D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i$$

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f, D) = S_H(f, D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f, D) = S_H(f, D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \quad \underline{S}_D(f,D) = \overline{S}_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = c(b-a)$$

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f, D) = S_H(f, D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Riemannov určitý integrál

$f(x)=c$, $x\in\langle a;b\rangle$, $c\in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i=\inf\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c,\quad M_i=\sup\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)=S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}c\Delta x_i=c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=c(b-a).$$

$\Rightarrow\ \underline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x=\int_a^b c\,\mathrm{d}x=c(b-a)$, špeciálne $\underline{\int_a^b}\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b}\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x=b-a$.

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \; S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \; \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a), \text{ špeciálne } \underline{\int_a^b} dx = \overline{\int_a^b} dx = \int_a^b dx = b-a.$$

Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \notin Q$.

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a),\ \text{špeciálne}\ \underline{\int_a^b} dx = \overline{\int_a^b} dx = \int_a^b dx = b-a.$$

Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \notin Q$.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a), \text{ špeciálne } \underline{\int_a^b} dx = \overline{\int_a^b} dx = \int_a^b dx = b-a.$$

Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, $x \notin Q$.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i = \inf\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 0, \quad M_i = \sup\{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = 1.$$

Riemannov určitý integrál

$f(x)=c$, $x\in\langle a;b\rangle$, $c\in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i=\inf\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c,\quad M_i=\sup\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)=S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}c\Delta x_i=c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=c(b-a).$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_a^b}c\,dx=\overline{\int_a^b}c\,dx=\int_a^b c\,dx=c(b-a),\ \text{špeciálne}\ \underline{\int_a^b}dx=\overline{\int_a^b}dx=\int_a^b dx=b-a.$$

Dirichletova funkcia $\chi(x)=1$ pre $x\in\langle 0;1\rangle$, $x\in Q$, $\chi(x)=0$ pre $x\in\langle 0;1\rangle$, $x\notin Q$.

Pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i=\inf\{\chi(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=0,\ M_i=\sup\{\chi(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=1.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0=0,$$

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b \rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b \rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = c, \quad M_i = \sup \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f, D) = S_H(f, D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a), \text{ špeciálne } \underline{\int_a^b} dx = \overline{\int_a^b} dx = \int_a^b dx = b-a.$$

Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $x \notin Q$.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0;1 \rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf \{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = 0, \quad M_i = \sup \{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = 1.$$

$$\Rightarrow \quad S_D(f, D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0, \qquad S_H(f, D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1.$$

Riemannov určitý integrál

$f(x)=c$, $x\in\langle a;b\rangle$, $c\in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i=\inf\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c,\quad M_i=\sup\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)=S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}c\Delta x_i=c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=c(b-a).$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_a^b} c\,dx=\overline{\int_a^b} c\,dx=\int_a^b c\,dx=c(b-a),\ \text{špeciálne}\ \underline{\int_a^b} dx=\overline{\int_a^b} dx=\int_a^b dx=b-a.$$

Dirichletova funkcia $\chi(x)=1$ pre $x\in\langle 0;1\rangle$, $x\in Q$, $\chi(x)=0$ pre $x\in\langle 0;1\rangle$, $x\notin Q$.

Pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i=\inf\{\chi(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=0,\quad M_i=\sup\{\chi(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=1.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0=0,\qquad S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1-0=1.$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_0^1}\chi(x)\,dx=0,$$

Riemannov určitý integrál

$f(x) = c$, $x \in \langle a; b \rangle$, $c \in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b \rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = c, \quad M_i = \sup \{f(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = c.$$

$$\Rightarrow \; S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \; \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a), \text{ špeciálne } \underline{\int_a^b} dx = \overline{\int_a^b} dx = \int_a^b dx = b-a.$$

Dirichletova funkcia $\chi(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $x \notin Q$.

Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0;1 \rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_i = \inf \{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = 0, \quad M_i = \sup \{\chi(x); x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle\} = 1.$$

$$\Rightarrow \; S_D(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0, \quad S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1.$$

$$\Rightarrow \; \underline{\int_0^1} \chi(x)\,dx = 0, \quad \overline{\int_0^1} \chi(x)\,dx = 1,$$

Riemannov určitý integrál

$f(x)=c$, $x\in\langle a;b\rangle$, $c\in R$ je konštanta.

Pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i=\inf\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c,\quad M_i=\sup\{f(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=c.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)=S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}c\Delta x_i=c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=c(b-a).$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_a^b}c\,dx=\overline{\int_a^b}c\,dx=\int_a^b c\,dx=c(b-a),\ \text{špeciálne}\ \underline{\int_a^b}dx=\overline{\int_a^b}dx=\int_a^b dx=b-a.$$

Dirichletova funkcia $\chi(x)=1$ pre $x\in\langle 0;1\rangle$, $x\in Q$, $\chi(x)=0$ pre $x\in\langle 0;1\rangle$, $x\notin Q$.

Pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí

$$m_i=\inf\{\chi(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=0,\ M_i=\sup\{\chi(x);x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}=1.$$

$$\Rightarrow\ S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0=0,\quad S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1-0=1.$$

$$\Rightarrow\ \underline{\int_0^1}\chi(x)\,dx=0,\quad \overline{\int_0^1}\chi(x)\,dx=1,\quad \int_0^1\chi(x)\,dx\ \text{neexistuje}.$$

Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$f \in R_{\langle a;b\rangle} \quad \Rightarrow \quad f \in R_{\langle c;d\rangle}$

Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle},\ \text{t. j. existuje} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle},\ \text{t. j. existuje} \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,dx \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,dx.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ $\big($t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N\big)$

Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle},\ \text{t. j. existuje} \int_a^b f(x)\,dx \ \Rightarrow\ f \in R_{\langle c;d\rangle},\ \text{t. j. existuje} \int_c^d f(x)\,dx.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ $\big($t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N\big)$ sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

Riemannov určitý integrál

$\langle c;d\rangle \subset \langle a;b\rangle$ sú intervaly $(a \le c < d \le b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,dx \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,dx.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ $\big($t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N\big)$ sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0.$

$y = f(x)$, $x \in \langle a;b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť

Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle},\ \text{t. j. existuje} \int_a^b f(x)\,dx \ \Rightarrow\ f \in R_{\langle c;d\rangle},\ \text{t. j. existuje} \int_c^d f(x)\,dx.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ $\big($t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N\big)$ sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k),$$

Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,dx \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,dx.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0.$

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k).$$

Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, t. j. existuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}$, t. j. existuje $\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx$.

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k).$$

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \le c < d \le b)$.

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, t. j. existuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}$, t. j. existuje $\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx$.

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k), \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k).$$

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$

Riemannov určitý integrál

$\langle c; d\rangle \subset \langle a; b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,dx \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,dx.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k).$$

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$

$\Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$

Riemannov určitý integrál

$\langle c;d\rangle \subset \langle a;b\rangle$ sú intervaly $(a \leq c < d \leq b)$.

$$f \in R_{\langle a;b\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_a^b f(x)\,dx \;\Rightarrow\; f \in R_{\langle c;d\rangle}, \text{ t. j. existuje } \int_c^d f(x)\,dx.$$

Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ (t. j. $D_k \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ pre všetky $k \in N$) sa nazýva normálna práve vtedy, ak $\lim_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0.$

$y = f(x)$, $x \in \langle a;b\rangle$ je ohraničená, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_D(f,D_k), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_H(f,D_k).$$

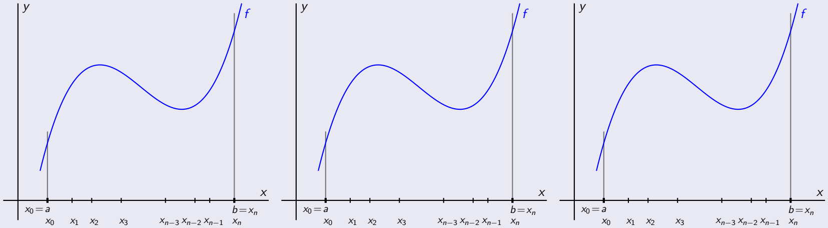
$y = f(x)$, $x \in \langle a;b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$

$\Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ platí $\lim_{k\to\infty} S_H(f,D_k) = \lim_{k\to\infty} S_D(f,D_k)$.

Riemannov určitý integrál

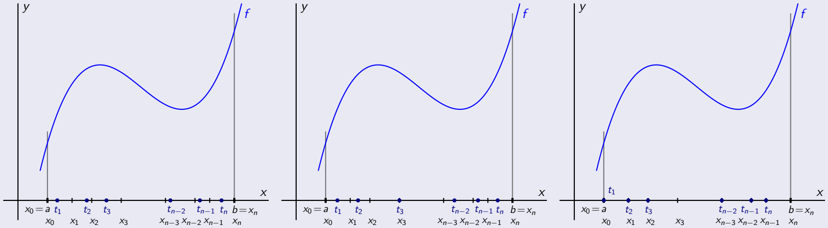
$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,



Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,

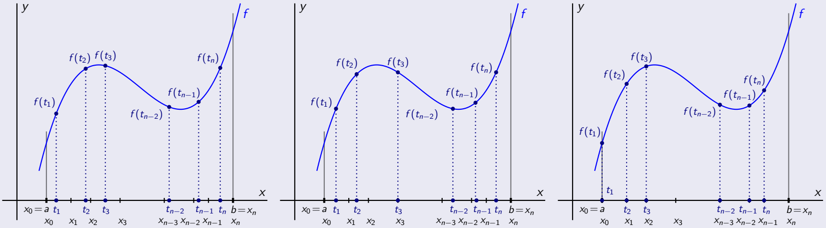
$T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ pričom $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$



Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$,

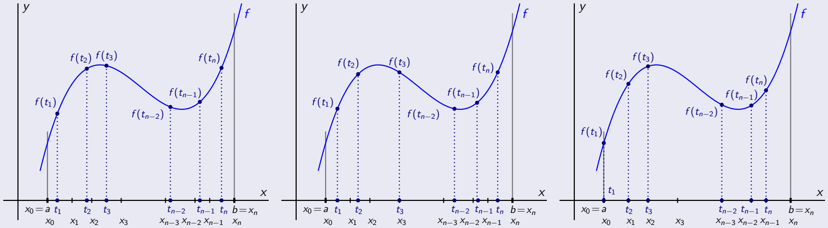
$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ pričom $t_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$.



Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,
$T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ pričom $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i=1,2,\ldots,n$.

Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_T(f,D)$ funkcie f pri delení D
a voľbe bodov $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}=\{t_i;\ t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$



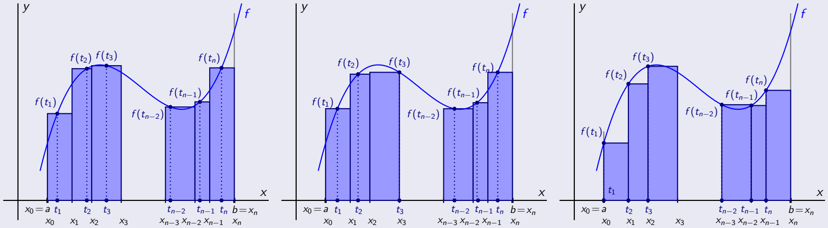
Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,

$T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ pričom $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i=1,2,\ldots,n$.

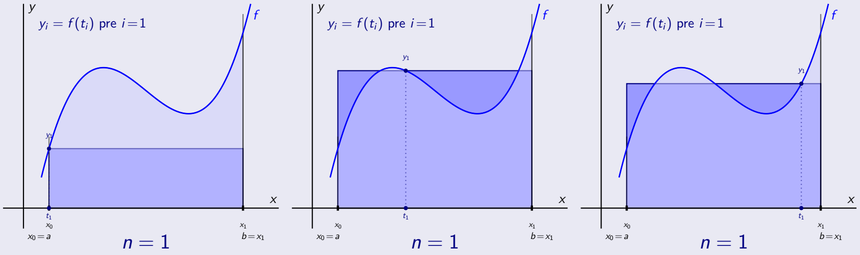
Riemannovým (integrálnym) súčtom $S_T(f,D)$ funkcie f pri delení D a voľbe bodov $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}=\{t_i;\ t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$

nazývame číslo $$S_T(f,D)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i.$$



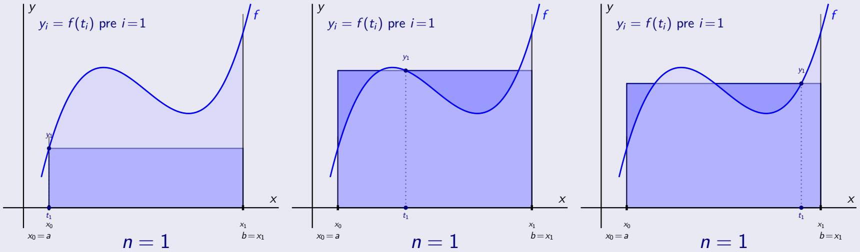
Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,
$T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ pričom $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i=1,2,\ldots,n$.



Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,
$T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ pričom $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i=1,2,\ldots,n$.

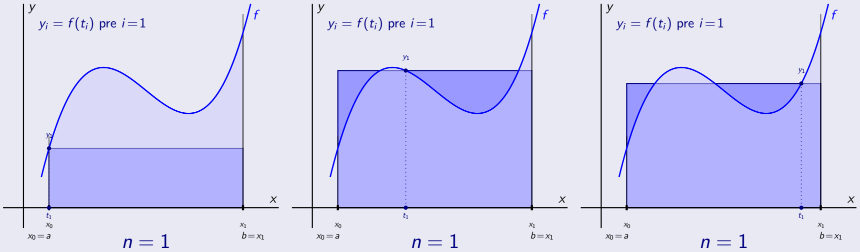


Pre integrálny súčet $S_T(f,D)$ pri ľubovoľnej voľbe bodov $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$

Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$,

$T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ pričom $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ a existuje $f(t_i)$ pre $i=1,2,\ldots,n$.



Pre integrálny súčet $S_T(f,D)$ pri ľubovoľnej voľbe bodov $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$

platí $m(b-a)\leq S_D(f,D)\leq S_T(f,D)\leq S_H(f,D)\leq M(b-a)$,

pričom $m=\inf\{f(x);x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x);x\in\langle a;b\rangle\}$.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$

Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$,

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$,

pre ľubovoľnú voľbu bodov T

Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.

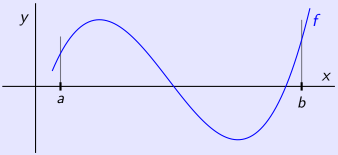
$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

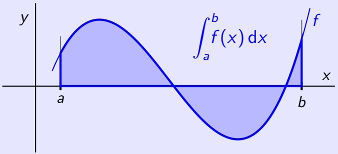


Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a; b\rangle$.

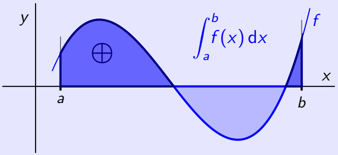


Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a;b\rangle$.
Pre $f(x)\geq 0$ je táto plocha kladná.

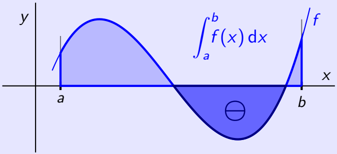


Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;\,b\rangle$ je ohraničená.

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a;\,b\rangle$. Pre $f(x)\le 0$ je táto plocha záporná.

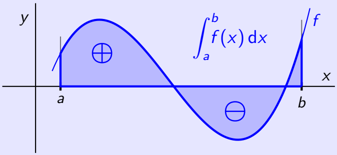


Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a;b\rangle$.
Pre $f(x)\leq 0$ je táto plocha záporná.

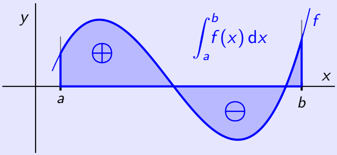


Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a;b\rangle$. Pre $f(x)\le 0$ je táto plocha záporná.



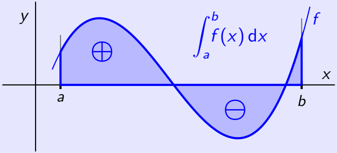
$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ spojitá, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$.

Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a;b\rangle$. Pre $f(x)\le 0$ je táto plocha záporná.



$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ spojitá, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$.

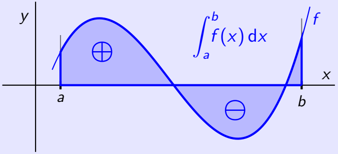
$\Rightarrow$ existujú $u_i, v_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ pre $i=1,2,\dots,n$

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená.

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a; b\rangle$. Pre $f(x) \leq 0$ je táto plocha záporná.



$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ spojitá, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$.

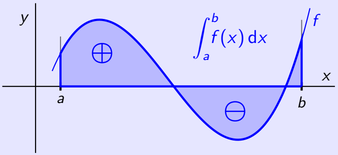
$\Rightarrow$ existujú $u_i, v_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ také, že $f(u_i) = m_i$, $f(v_i) = M_i$

Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená.

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a;b\rangle$.
Pre $f(x)\le 0$ je táto plocha záporná.



$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ spojitá, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$.

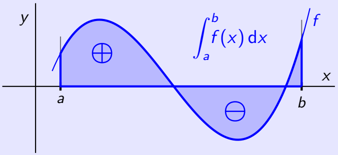
$\Rightarrow$ existujú $u_i,v_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ pre $i=1,2,\ldots,n$ také, že $f(u_i)=m_i$, $f(v_i)=M_i$
[f nadobúda extrémy na $\langle x_{i-1};x_i\rangle$].

Riemannov určitý integrál

$y=f(x)$, $x\in\langle a;\,b\rangle$ je ohraničená.

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow$ pre každú normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)$.

Geometricky predstavuje $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a;\,b\rangle$.
Pre $f(x)\leq 0$ je táto plocha záporná.



$y=f(x)$, $x\in\langle a;\,b\rangle$ spojitá, $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$.

$\Rightarrow$ existujú $u_i,v_i\in\langle x_{i-1};\,x_i\rangle$ pre $i=1,2,\ldots,n$ také, že $f(u_i)=m_i$, $f(v_i)=M_i$
[f nadobúda extrémy na $\langle x_{i-1};\,x_i\rangle$].

$\Rightarrow$ $S_D(f,D)$, $S_H(f,D)$ sú Riemannovými integrálnymi súčtami
pre konkrétne voľby bodov $T_D=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, $T_H=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

f sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset D(f)$,

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

f sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset D(f)$,
ak má na $\langle a; b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti,

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

f sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset D(f)$, ak má na $\langle a; b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti, ktoré sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

f sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset D(f)$,
ak má na $\langle a; b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti,
ktoré sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

f sa nazýva po častiach spojitá na intervale $I \subset D(f)$,

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

f sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset D(f)$, ak má na $\langle a; b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti, ktoré sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

f sa nazýva po častiach spojitá na intervale $I \subset D(f)$, ak je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset I$.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

f sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset D(f)$,
ak má na $\langle a; b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti,
ktoré sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

f sa nazýva po častiach spojitá na intervale $I \subset D(f)$,
ak je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset I$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je po častiach spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

Riemannov určitý integrál

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je monotónna na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

f sa nazýva po častiach spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset D(f)$, ak má na $\langle a; b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti, ktoré sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

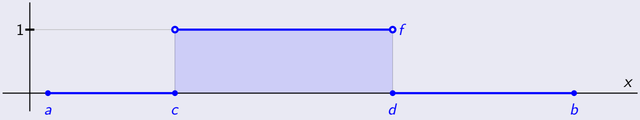
f sa nazýva po častiach spojitá na intervale $I \subset D(f)$, ak je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b\rangle \subset I$.

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je po častiach spojitá na intervale $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Rightarrow \quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Príklady

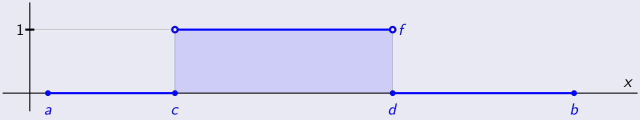
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad , \text{ pričom } \quad f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases} \qquad a<b<c<d, \quad a,b,c,d\in R.$$



Príklady

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pričom $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x \in \langle a;c\rangle \cup \langle d;b\rangle\,, \end{cases}$ $a<b<c<d,$ $a,b,c,d \in R.$

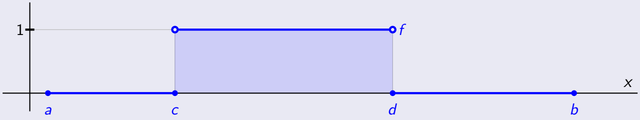
f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle$



Príklady

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases}$ $a<b<c<d,$ $a,b,c,d\in R.$

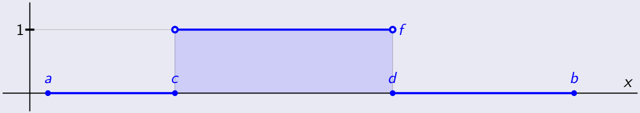
f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$.



Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

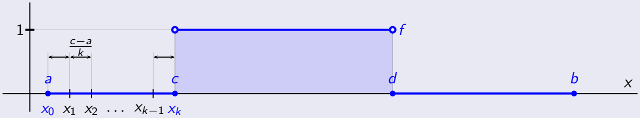


Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pre } x \in (c;d), & a<b<c<d, \\ 0 \text{ pre } x \in \langle a;c\rangle \cup \langle d;b\rangle, & a,b,c,d \in R. \end{cases}$

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k \in N$ zvoľme $D_k = \{x_i\}_{i=0}^{3k} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a = x_0, x_1, \ldots, x_k = c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1 = \frac{c-a}{k}$.

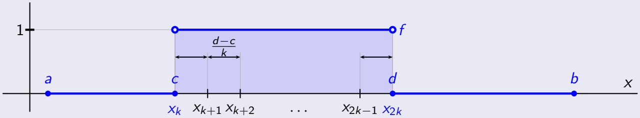


Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases}$ $a<b<c<d,\quad a,b,c,d\in R.$

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.

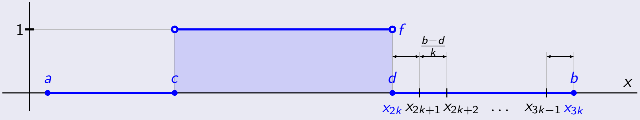


Príklady

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad , \text{ pričom } \quad f(x)=\begin{cases} 1 \text{ pre } x\in(c;d)\,, & a<b<c<d, \\ 0 \text{ pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, & a,b,c,d\in R. \end{cases}$$

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.



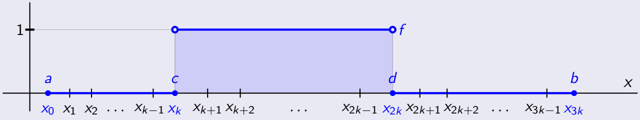
Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ pre } x\in(c;d), \\ 0 \text{ pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d,$ $a,b,c,d\in R.$

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna,



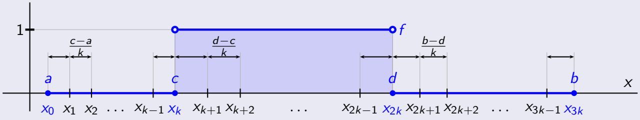
Príklady

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad , \text{ pričom } \quad f(x)=\begin{cases} 1 \text{ pre } x\in(c;d), & a<b<c<d,\\ 0 \text{ pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, & a,b,c,d\in R.\end{cases}$$

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.



Príklady

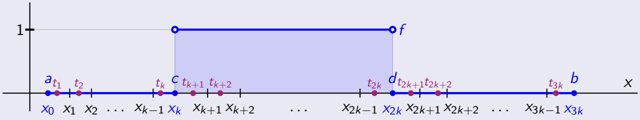
$\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d), \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [t_i je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].



Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ pre } x\in(c;d), \\ 0 \text{ pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

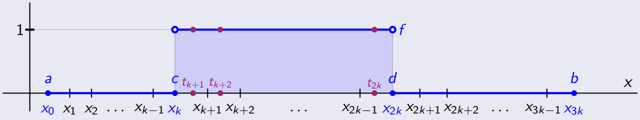
f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [t_i je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow$ $f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$,



Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x)=\begin{cases}1 & \text{pre } x\in(c;d),\\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle,\end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

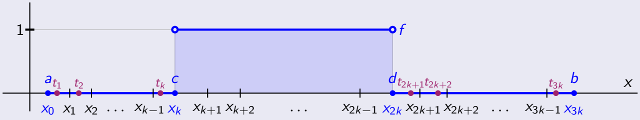
f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle$ $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [t_i je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow$ $f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$, $f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\ldots,3k$.



Príklady

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ pre } x\in(c;d), \\ 0 \text{ pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

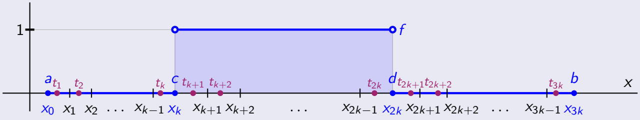
- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [t_i je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$, $f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\ldots,3k$.

$$\Rightarrow S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_1+\sum_{i=k+1}^{2k} f(t_i)\cdot\Delta x_2+\sum_{i=2k+1}^{3k} f(t_i)\cdot\Delta x_3$$



Príklady

$\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (c;d), \\ 0 & \text{pre } x \in \langle a;c\rangle \cup \langle d;b\rangle, \end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d \in R$.

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k \in N$ zvoľme $D_k = \{x_i\}_{i=0}^{3k} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

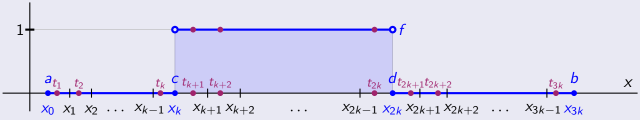
- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a = x_0, x_1, \ldots, x_k = c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1 = \frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{2k} = d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2 = \frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d = x_{2k}, x_{2k+1}, \ldots, x_{3k} = b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3 = \frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3\} = \max\left\{\frac{c-a}{k}, \frac{d-c}{k}, \frac{b-d}{k}\right\} \to 0$ pre $k \to \infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i \in (x_{i-1};x_i)$, $i = 1,2,\ldots,3k$ [t_i je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow$ $f(t_i) = 1$ pre $i = k+1, k+2, \ldots, 2k$, $f(t_i) = 0$ pre $i = k+1, k+2, \ldots, k$ a pre $i = 2k+1, 2k+2, \ldots, 3k$.

$$\Rightarrow S_T(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot \frac{c-a}{k} + \sum_{i=k+1}^{2k} 1 \cdot \frac{d-c}{k} + \sum_{i=2k+1}^{3k} 0 \cdot \frac{b-d}{k}$$



Príklady

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x)=\begin{cases}1 \text{ pre } x\in(c;d), \\ 0 \text{ pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle,\end{cases}$ $a<b<c<d$, $a,b,c,d\in R$.

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

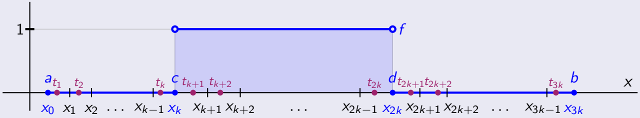
- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\dots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\dots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\dots,x_{3k}=b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\dots,3k$ [t_i je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow$ $f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\dots,2k$, $f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\dots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\dots,3k$.

$$\Rightarrow S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}0\cdot\frac{c-a}{k}+\sum_{i=k+1}^{2k}1\cdot\frac{d-c}{k}+\sum_{i=2k+1}^{3k}0\cdot\frac{b-d}{k}=\sum_{i=k+1}^{2k}\frac{d-c}{k}$$



Príklady

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{, pričom} \quad f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases} \qquad a<b<c<d,\quad a,b,c,d\in R.$$

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

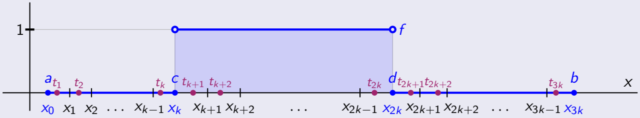
- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [t_i je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow$ $f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$, $\quad f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\ldots,3k$.

$$\Rightarrow\ S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}0\cdot\frac{c-a}{k}+\sum_{i=k+1}^{2k}1\cdot\frac{d-c}{k}+\sum_{i=2k+1}^{3k}0\cdot\frac{b-d}{k}=\sum_{i=k+1}^{2k}\frac{d-c}{k}=k\cdot\frac{d-c}{k}$$



Príklady

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, pričom $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ pre } x\in(c;d)\,, \\ 0 \text{ pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle\,, \end{cases}$ $a<b<c<d,\quad a,b,c,d\in R.$

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

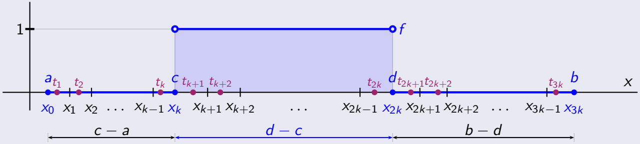
- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\ldots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\ldots,x_{3k}=b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\ldots,3k$ [t_i je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,2k$, $\quad f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\ldots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\ldots,3k$.

$$\Rightarrow S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}0\cdot\frac{c-a}{k}+\sum_{i=k+1}^{2k}1\cdot\frac{d-c}{k}+\sum_{i=2k+1}^{3k}0\cdot\frac{b-d}{k}=\sum_{i=k+1}^{2k}\frac{d-c}{k}=k\cdot\frac{d-c}{k}=d-c \text{ pre } k\in N.$$



Príklady

$$\int_a^b f(x)\,dx = d-c, \text{ pričom } f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pre } x\in(c;d), \\ 0 & \text{pre } x\in\langle a;c\rangle\cup\langle d;b\rangle, \end{cases} \qquad a<b<c<d,\quad a,b,c,d\in R.$$

f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre $k\in N$ zvoľme $D_k=\{x_i\}_{i=0}^{3k}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nasledovne:

- Rozdeľme $\langle a;c\rangle$ bodmi $a=x_0,x_1,\dots,x_k=c$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_1=\frac{c-a}{k}$.
- Rozdeľme $\langle c;d\rangle$ bodmi $c=x_k,x_{k+1},\dots,x_{2k}=d$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_2=\frac{d-c}{k}$.
- Rozdeľme $\langle d;b\rangle$ bodmi $d=x_{2k},x_{2k+1},\dots,x_{3k}=b$ na k intervalov rovnakej dĺžky $\Delta x_3=\frac{b-d}{k}$.

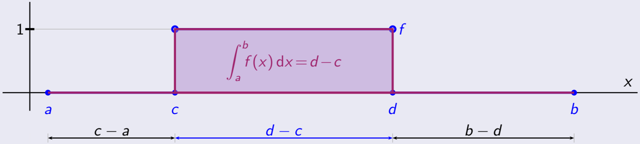
$\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\}=\max\left\{\frac{c-a}{k},\frac{d-c}{k},\frac{b-d}{k}\right\}\to 0$ pre $k\to\infty$.

Zvoľme ľubovoľne $t_i\in(x_{i-1};x_i)$, $i=1,2,\dots,3k$ [t_i je ľubovoľný vnútorný bod intervalu $(x_{i-1};x_i)$].

$\Rightarrow f(t_i)=1$ pre $i=k+1,k+2,\dots,2k$, $f(t_i)=0$ pre $i=k+1,k+2,\dots,k$ a pre $i=2k+1,2k+2,\dots,3k$.

$$\Rightarrow S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}0\cdot\frac{c-a}{k}+\sum_{i=k+1}^{2k}1\cdot\frac{d-c}{k}+\sum_{i=2k+1}^{3k}0\cdot\frac{b-d}{k}=\sum_{i=k+1}^{2k}\frac{d-c}{k}=k\cdot\frac{d-c}{k}=d-c \text{ pre } k\in N.$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=d-c.$$



Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f \in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k = \left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$,

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f \in R_{\langle 0;1 \rangle}$.

$D_k = \left\{ \frac{i}{k} \right\}_{i=0}^{k} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1 \rangle}$, $\Delta x_i = \frac{1}{k} \to 0$ pre $k \to \infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i = f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{2k}$,

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

Príklady

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\dots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$,

Príklady

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$,

Príklady

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\dots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\dots,k$.

Príklady

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$S_D(f,D_k)$

$S_T(f,D_k)$

$S_H(f,D_k)$

Príklady

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\dots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\dots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i$$

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}$$

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}$$

Príklady

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}$$

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2},\ x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle},\ \Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k},\ M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k-1}{4k}$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}=\frac{1}{4}$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k+1}{4k}$$

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k-1}{4k}\to\frac{1}{4},$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}=\frac{1}{4},$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k+1}{4k}\to\frac{1}{4}\ \text{pre}\ k\to\infty.$$

Príklady

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k-1}{4k}\to\frac{1}{4},$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}=\frac{1}{4},$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k+1}{4k}\to\frac{1}{4}\ \text{pre}\ k\to\infty.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k-1}{4k}\to\frac{1}{4},$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}=\frac{1}{4},$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k+1}{4k}\to\frac{1}{4}\ \text{pre}\ k\to\infty.$$

$$\Rightarrow\ \int_0^1\frac{x\,dx}{2}=\lim_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim_{k\to\infty}S_T(f,D_k)=\lim_{k\to\infty}S_H(f,D_k)$$

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}.$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$ pre $i=1,2,\ldots,k$.

$T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ zvoľme $t_i=\frac{i-1+i}{2k}=\frac{2i-1}{2k}$, t. j. stred $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$, $i=1,2,\ldots,k$.

$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i-1}{2k\cdot k}=\frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2}=\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k-1}{4k}\to\frac{1}{4},$$

$$S_T(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{4k\cdot k}=\frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2}=\frac{2k\cdot k}{2\cdot 4k^2}=\frac{1}{4},$$

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2k\cdot k}=\frac{1+2+\cdots+k}{2k^2}=\frac{(k+1)k}{2\cdot 2k^2}=\frac{k+1}{4k}\to\frac{1}{4}\ \text{pre}\ k\to\infty.$$

$$\Rightarrow \int_0^1\frac{x\,dx}{2}=\lim_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim_{k\to\infty}S_T(f,D_k)=\lim_{k\to\infty}S_H(f,D_k)=\frac{1}{4}.$$

Príklady

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{4}.$$

$f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

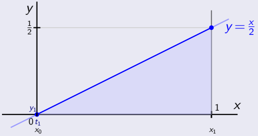
$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{i-1}{2k}$, $M_i=f(x_i)=\frac{i}{2k}$, $t_i=\frac{2i-1}{2k}$, $f(t_i)=\frac{2i-1}{4k}$ pre $i=1,2,\dots,k$.

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_D(f,D) = \lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{4k} = \frac{1}{4}$$

$y_i=m_i=\frac{i-1}{2\cdot 1}$ $i=1$

$\Delta x_i=\frac{1}{n}=\frac{1}{1}$ $t_i=\frac{i-1}{1}$ $n=1$

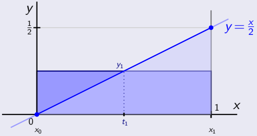


$S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{1}\frac{i-1}{2\cdot 1^2}=0$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_T(f,D) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$y_i=f(t_i)=\frac{2i-1}{4\cdot 1}$ $i=1$

$\Delta x_i=\frac{1}{n}=\frac{1}{1}$ $t_i=\frac{i}{1}$ $n=1$

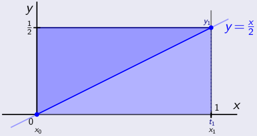


$S_T(f,D)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{1}\frac{2i-1}{4\cdot 1^2}=0.25$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_H(f,D) = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{4k} = \frac{1}{4}$$

$y_i=M_i=\frac{i}{2\cdot 1}$ $i=1$

$\Delta x_i=\frac{1}{n}=\frac{1}{1}$ $t_i=\frac{i}{1}$ $n=1$



$S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{1}\frac{i}{2\cdot 1^2}=0.5$

Príklady

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

Príklady

$\int_0^1 x^2 \, dx$

$f(x) = x^2$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je rastúca, spojitá

Príklady

$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

Príklady

$\int_0^1 x^2 \, dx$

$f(x) = x^2$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f \in R_{\langle 0;1 \rangle}$.

$D_k = \left\{ \frac{i}{k} \right\}_{i=0}^{k} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1 \rangle}$,

Príklady

$\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

Príklady

$\int_0^1 x^2 \, dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$,

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$,

Príklady

$\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

Príklady

$\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)$

$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)$

Príklady

$\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i$$

Príklady

$\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}$$

Príklady

$\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

Príklady

$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}$$

Príklady

$\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

Príklady

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Príklady

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}S_H(f,D_k)\\[2ex]\lim\limits_{k\to\infty}S_D(f,D_k)\end{cases}$$

Príklady

$\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\quad\text{pre } k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}S_H(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}\\ \lim\limits_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\end{cases}$$

Príklady

$\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}S_H(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{k})(2+\frac{1}{k})}{6}\\[2ex]\lim\limits_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{k})(2-\frac{1}{k})}{6}\end{cases}$$

Príklady

$\int_0^1 x^2\,dx$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\{\frac{i}{k}\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$
$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}S_H(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{k})(2+\frac{1}{k})}{6}=\frac{(1+0)(2+0)}{6}\\ \lim\limits_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{k})(2-\frac{1}{k})}{6}=\frac{(1-0)(2-0)}{6}\end{cases}$$

Príklady

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}.$$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

$$S_H(f,D_k)=S_{T_2}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}M_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k^2\cdot k}=\frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6\cdot k^3}=\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2},$$

$$S_D(f,D_k)=S_{T_1}(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^2}{k^2\cdot k}=\frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}=\frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$

$$=\frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6\cdot k^3}=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3}=\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}\ \text{pre}\ k\in N.$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}S_H(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{k})(2+\frac{1}{k})}{6}=\frac{(1+0)(2+0)}{6}=\frac{1}{3},\\[2mm] \lim\limits_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{k})(2-\frac{1}{k})}{6}=\frac{(1-0)(2-0)}{6}=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Príklady

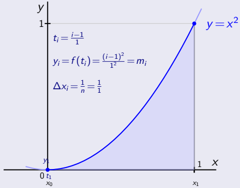
$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

$f(x)=x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca, spojitá $\Rightarrow$ $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

$D_k=\left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}\subset\mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $\Delta x_i=\frac{1}{k}\to 0$ pre $k\to\infty$, t. j. $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna.

$m_i=f(x_{i-1})=\frac{(i-1)^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_1=\{t_i=x_{i-1}\}_{i=1}^{k}$ [ľavé hranice intervalov].

$M_i=f(x_i)=\frac{i^2}{k^2}$ pre $i=1,2,\ldots,k$, t. j. voľba $T_2=\{t_i=x_i\}_{i=1}^{k}$ [pravé hranice intervalov].

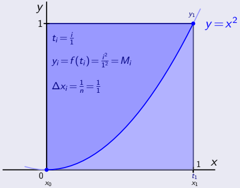


$S_{T_1}(f,D)=\sum_{i=1}^{1} f(t_i)\Delta x_i=S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{1} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{1}\frac{(i-1)^2}{1^3}=0$

$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\approx 0.333333$

$n=1$

$i=1$



$S_{T_2}(f,D)=\sum_{i=1}^{1} f(t_i)\Delta x_i=S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{1} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{1}\frac{i^2}{1^3}=1$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b \rangle}$, $c \in R$.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b \rangle}, \; c \in R.$

$\Rightarrow \quad cf, f+g \in R_{\langle a;b \rangle}$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,

pričom $m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf,\ f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,

pričom $m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$.

$\Rightarrow$ (zložená funkcia) $\varphi(f) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf,\, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,

pričom $m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$.

$\Rightarrow$ (zložená funkcia) $\varphi(f) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf,\ f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,

pričom $m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$.

$\Rightarrow$ (zložená funkcia) $\varphi(f) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $|f|,\ f^2,\ fg \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf, f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,

pričom $m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a;b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\ x \in \langle a;b\rangle\}$.

$\Rightarrow$ (zložená funkcia) $\varphi(f) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $|f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, pričom $\inf\{g(x); x \in \langle a;b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x); x \in \langle a;b\rangle\} < 0$.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$.

$\Rightarrow$ $cf,\ f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,\quad \int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $\varphi\colon \langle m; M\rangle \to R$ je spojitá,

pričom $m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\}$.

$\Rightarrow$ (zložená funkcia) $\varphi(f) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $|f|,\ f^2,\ fg \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, pričom $\inf\{g(x); x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x); x \in \langle a; b\rangle\} < 0$.

$\Rightarrow$ $\frac{1}{g},\ \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

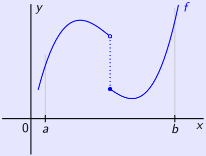
$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

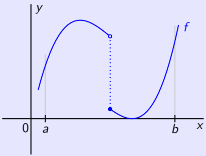
Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

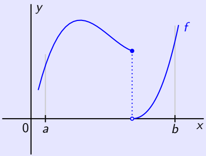
$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$



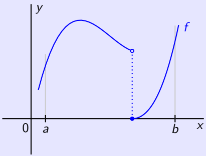
$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b)$



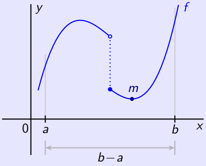
$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

$$f(x) \geq 0, \; x \in \langle a; b\rangle$$

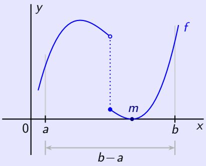
Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

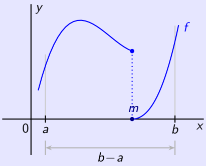
$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$



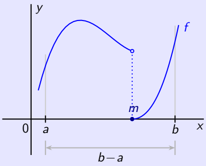
$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



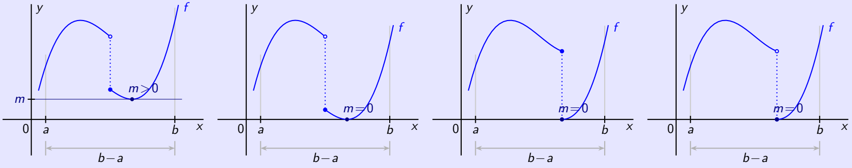
$f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

$$f(x) \geq 0,\ x \in \langle a; b\rangle \quad \Rightarrow \quad m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\} \geq 0$$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$



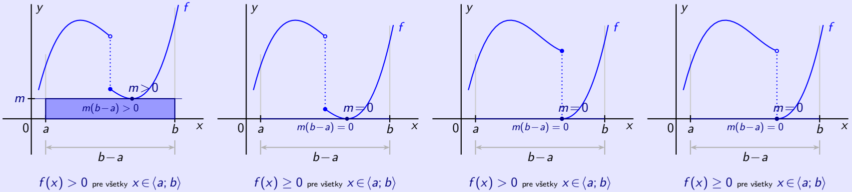
$f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ | $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ | $f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ | $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

$$f(x) \geq 0,\ x \in \langle a; b\rangle \quad \Rightarrow \quad m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\} \geq 0$$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$



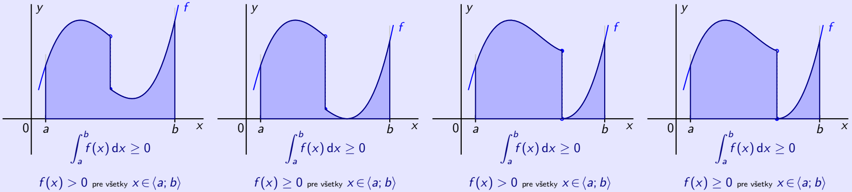
$$f(x) \geq 0,\ x \in \langle a; b\rangle \;\Rightarrow\; m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\} \geq 0$$

$$\Rightarrow \qquad m(b-a) \geq 0.$$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$



$$f(x) \geq 0,\ x \in \langle a; b\rangle \quad \Rightarrow \quad m = \inf\{f(x);\ x \in \langle a; b\rangle\} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq m(b-a) \geq 0.$$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

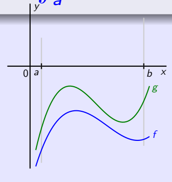
$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

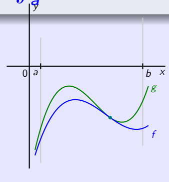
Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

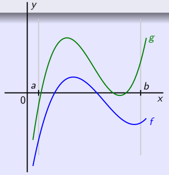
$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



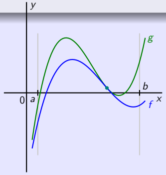
$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



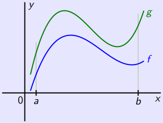
$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



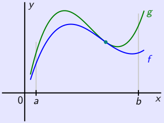
$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

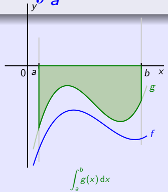


$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

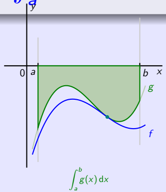
Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

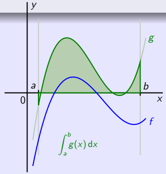
$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



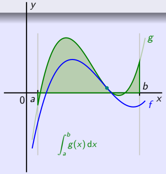
$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



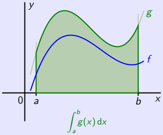
$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



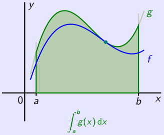
$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

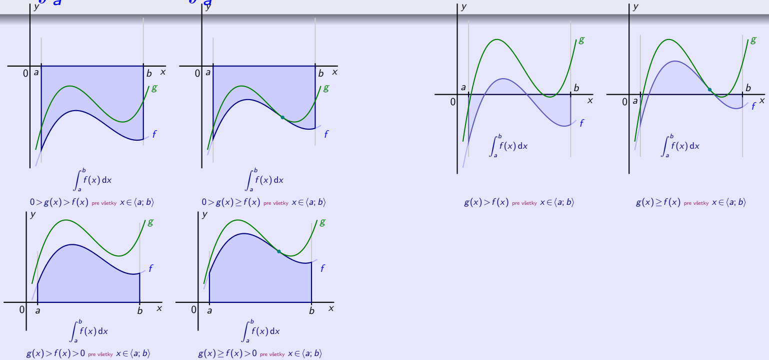


$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle},\ g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$.

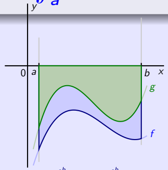
$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Vlastnosti Riemannovho integrálu

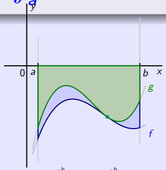
$f, g \in R_{\langle a;b \rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b \rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



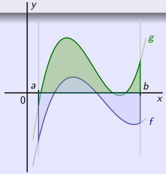
$0 > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b \rangle$

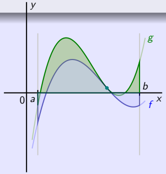


$0 > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

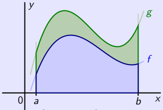
$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b \rangle$



$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b \rangle$

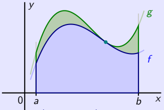


$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b \rangle$



$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a;\, b \rangle$



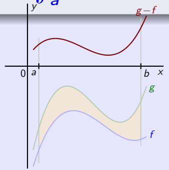
$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a;\, b \rangle$

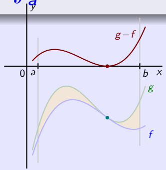
Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$.

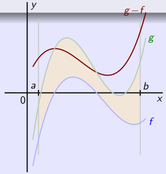
$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



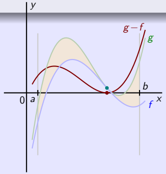
$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$



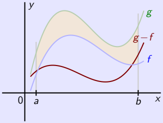
$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$



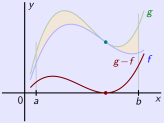
$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$



$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$



$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$

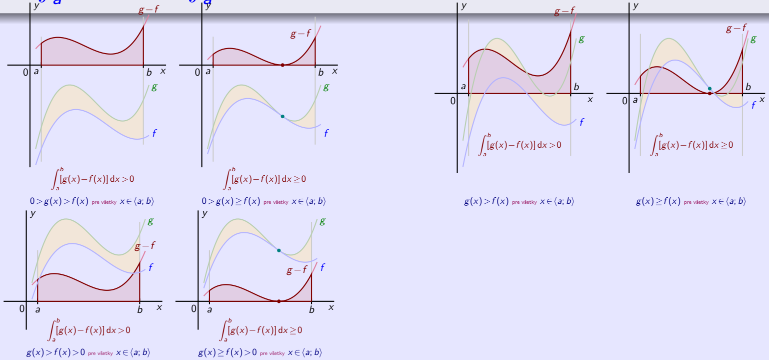


$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

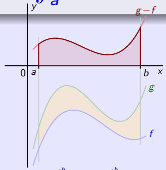
$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$$



Vlastnosti Riemannovho integrálu

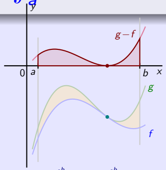
$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



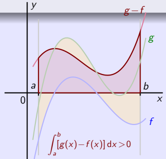
$0 > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$0 > g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



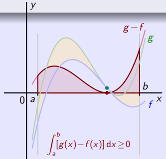
$0 > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$0 > g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



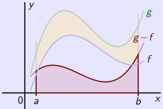
$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$g(x) > f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



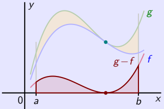
$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

$g(x) > f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$



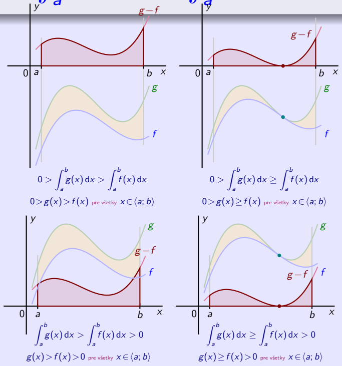
$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

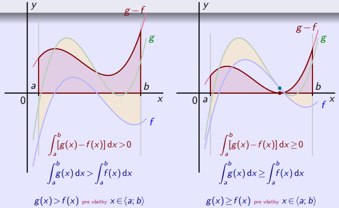
$g(x) \geq f(x) > 0$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$$



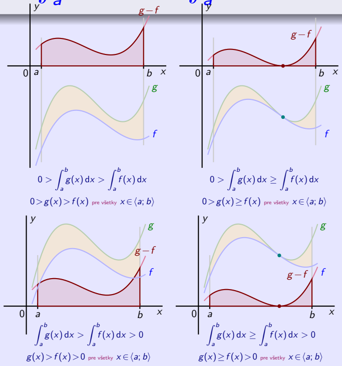


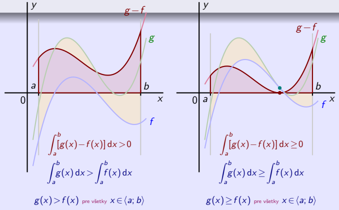
$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g(x) \geq f(x)$ pre všetky $x \in \langle a;\, b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$





$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;\, b\rangle$ sú ohraničené,

$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;\, b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow\quad g\in R_{\langle a;b\rangle}$$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x,\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$\Rightarrow \quad g\in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad g \in R_{\langle a;b\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Konečný počet bodov nemá vplyv na vlastnosti Riemannovho integrálu.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

$f\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad g\in R_{\langle a;b\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx.$$

- Konečný počet bodov nemá vplyv na vlastnosti Riemannovho integrálu.
- Riemannov integrál môžeme definovať pre ohraničenú funkciu,
  nedefinovanú v konečnom počte bodov

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad g \in R_{\langle a;b\rangle} \ \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Konečný počet bodov nemá vplyv na vlastnosti Riemannovho integrálu.
- Riemannov integrál môžeme definovať pre ohraničenú funkciu,
  nedefinovanú v konečnom počte bodov – vrátane krajných bodov a, b.

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ sú ohraničené,
$f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$, $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad g \in R_{\langle a;b \rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Konečný počet bodov nemá vplyv na vlastnosti Riemannovho integrálu.
- Riemannov integrál môžeme definovať pre ohraničenú funkciu,
  nedefinovanú v konečnom počte bodov – vrátane krajných bodov a, b.
- Riemannov integrál na intervale I s krajnými bodmi a, b môžeme značiť
  $$\int_a^b f(x)\,dx,$$

Vlastnosti Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $y=g(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ sú ohraničené,
$f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} g(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

$f\in R_{\langle a;b\rangle}$, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu bodov.

$$\Rightarrow \quad g\in R_{\langle a;b\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx.$$

- Konečný počet bodov nemá vplyv na vlastnosti Riemannovho integrálu.
- Riemannov integrál môžeme definovať pre ohraničenú funkciu, nedefinovanú v konečnom počte bodov – vrátane krajných bodov a, b.
- Riemannov integrál na intervale I s krajnými bodmi a, b môžeme značiť

$$\int_a^b f(x)\,dx, \text{ resp. } \int_I f(x)\,dx,\ \int_{\langle a;b\rangle} f(x)\,dx,\ \int_{\langle a;b)} f(x)\,dx,\ \int_{(a;b\rangle} f(x)\,dx,\ \int_{(a;b)} f(x)\,dx.$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $c \in (a; b)$.

Aditívnosť Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $c\in(a;b)$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^c} f(x)\,dx+\underline{\int_c^b} f(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^c} f(x)\,dx+\overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

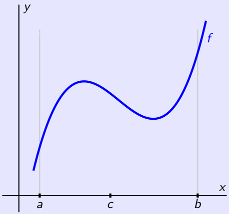
Aditívnosť Riemannovho integrálu

$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $c \in (a; b)$.

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Aditívnosť integrálu

$c \in (a; b)$ [ľubovoľný vnútorný bod]



Aditívnosť Riemannovho integrálu

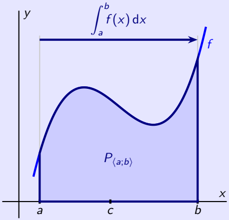
$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $c \in (a; b)$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Aditívnosť integrálu

$c \in (a; b)$ [ľubovoľný vnútorný bod]

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$



Aditívnosť Riemannovho integrálu

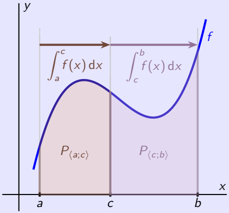
$y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je ohraničená, $c \in (a; b)$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Aditívnosť integrálu

$c \in (a; b)$ [ľubovoľný vnútorný bod]

$$f \in R_{\langle a;b\rangle} \Leftrightarrow f \in R_{\langle a;c\rangle},\ f \in R_{\langle c;b\rangle}$$



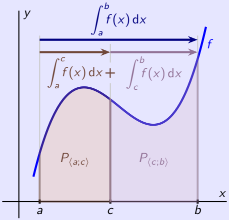
Aditívnosť Riemannovho integrálu

$y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, $c\in(a;b)$.

$$\Rightarrow\ \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x+\underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x+\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aditívnosť integrálu $c\in(a;b)$ [ľubovoľný vnútorný bod]

$$f\in R_{\langle a;b\rangle}\ \Leftrightarrow\ f\in R_{\langle a;c\rangle},\ f\in R_{\langle c;b\rangle}\ \text{a platí}\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$,

Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$.

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,dx.$

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a\in R$ a všetky funkcie $y=f(x)$ definujeme $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0.$
- Pre $a>b$ definujeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx,$ pokiaľ $f\in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx.$

$f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx+\int_b^a f(x)\,dx=0,\qquad \int_a^a f(x)\,dx=\int_b^b f(x)\,dx=0.$$

Aditívnosť $f\in R_I$, $I\subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c\in I$.

Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,dx$.

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,dx$.

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

[Aditívnosť nezávisí od vzájomnej polohy a,b,c.]

Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a \rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,dx$.

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

[Aditívnosť nezávisí od vzájomnej polohy a,b,c.]

Aditívnosť môžeme názorne ilustrovať na vektoroch,

Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a \rangle}$, t. j. existuje $\int_b^a f(x)\,dx$.

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

[Aditívnosť nezávisí od vzájomnej polohy a,b,c.]

Aditívnosť môžeme názorne ilustrovať na vektoroch, napr.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

- Pre všetky $a \in R$ a všetky funkcie $y = f(x)$ definujeme $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
- Pre $a > b$ definujeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, pokiaľ $f \in R_{\langle b;a\rangle}$, t. j. existuje $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$.

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

[Aditívnosť nezávisí od vzájomnej polohy a,b,c.]

Aditívnosť môžeme názorne ilustrovať na vektoroch, napr.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx,$$

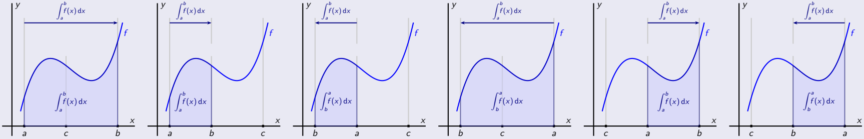
resp. $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} = \overrightarrow{ac} - \overrightarrow{bc}$.

Aditívnosť Riemannovho integrálu

Aditívnosť

$f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

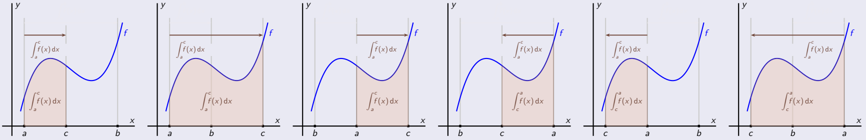


$a<c<b$ $a<b<c$ $b<a<c$ $b<c<a$ $c<a<b$ $c<b<a$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

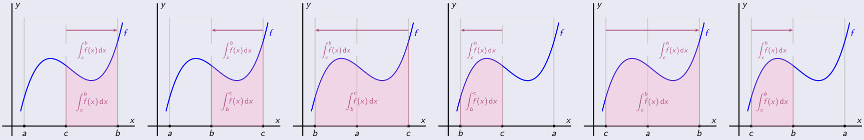


$a<c<b$ $\quad$ $a<b<c$ $\quad$ $b<a<c$ $\quad$ $b<c<a$ $\quad$ $c<a<b$ $\quad$ $c<b<a$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

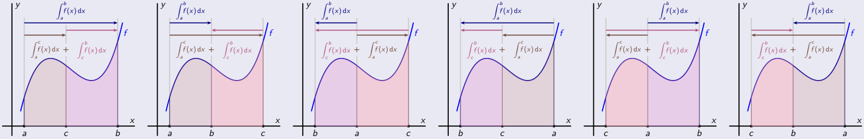


$a<c<b$ $\quad a<b<c$ $\quad b<a<c$ $\quad b<c<a$ $\quad c<a<b$ $\quad c<b<a$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

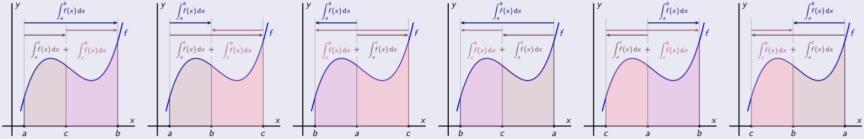


$a < c < b$ $a < b < c$ $b < a < c$ $b < c < a$ $c < a < b$ $c < b < a$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



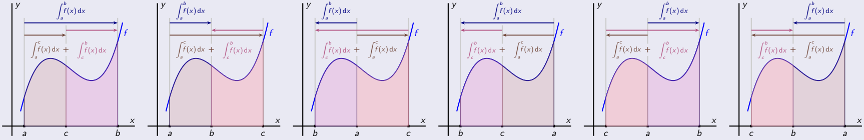
$a<c<b$ $a<b<c$ $b<a<c$ $b<c<a$ $c<a<b$ $c<b<a$

Zvyšné možnosti $a=b=c$, $a=b<c$, $\ldots$, $a<b=c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

Aditívnosť Riemannovho integrálu

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



$a < c < b$ $a < b < c$ $b < a < c$ $b < c < a$ $c < a < b$ $c < b < a$

Zvyšné možnosti $a = b = c$, $a = b < c$, ..., $a < b = c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

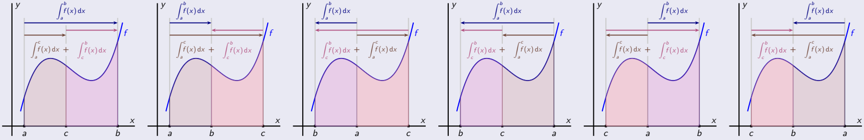
$A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné (t.j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$) intervaly, $f \in R_{I_1}, f \in R_{I_2}, \ldots, f \in R_{I_k}$. Riemannov (určitý) integrál funkcie f na množine A definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{I_k} f(x)\,dx.$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



$a<c<b$ $a<b<c$ $b<a<c$ $b<c<a$ $c<a<b$ $c<b<a$

Zvyšné možnosti $a=b=c$, $a=b<c$, $\ldots$, $a<b=c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

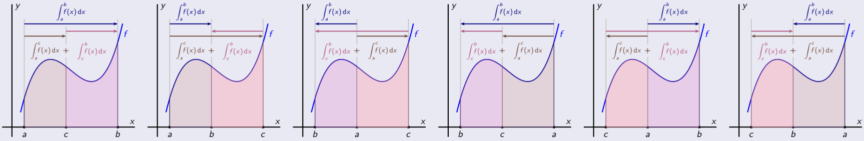
$A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné intervaly, $f \in R_{I_1}$, $f \in R_{I_2}$, $\ldots$, $f \in R_{I_k}$.
Riemannov (určitý) integrál funkcie f na množine A definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{I_k} f(x)\,dx.$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



$a<c<b$ $a<b<c$ $b<a<c$ $b<c<a$ $c<a<b$ $c<b<a$

Zvyšné možnosti $a=b=c$, $a=b<c$, ..., $a<b=c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

$A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné (t. j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$) intervaly, $f \in R_{I_1}$, $f \in R_{I_2}$, ..., $f \in R_{I_k}$.

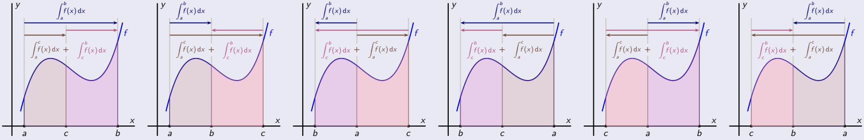
Riemannov (určitý) integrál funkcie f na množine A definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{I_k} f(x)\,dx.$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



$a < c < b$ $a < b < c$ $b < a < c$ $b < c < a$ $c < a < b$ $c < b < a$

Zvyšné možnosti $a = b = c$, $a = b < c$, $\ldots$, $a < b = c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

$A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné (t. j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$) intervaly, $f \in R_{I_1}$, $f \in R_{I_2}$, $\ldots$, $f \in R_{I_k}$.

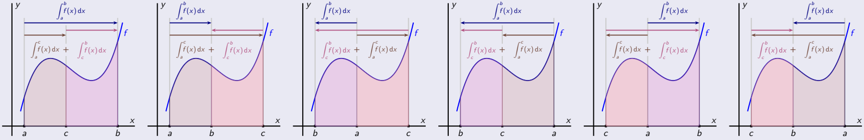
Riemannov (určitý) integrál funkcie f na množine A definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{I_k} f(x)\,dx.$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



$a < c < b$ $a < b < c$ $b < a < c$ $b < c < a$ $c < a < b$ $c < b < a$

Zvyšné možnosti $a = b = c$, $a = b < c$, ..., $a < b = c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

$A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné (t. j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$) intervaly, $f \in R_{I_1}$, $f \in R_{I_2}$, ..., $f \in R_{I_k}$.

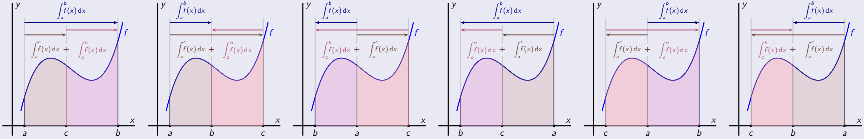
Riemannov (určitý) integrál funkcie f na množine A definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{I_k} f(x)\,dx.$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu

Aditívnosť $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, ľubovoľné body $a, b, c \in I$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



$a<c<b$ $a<b<c$ $b<a<c$ $b<c<a$ $c<a<b$ $c<b<a$

Zvyšné možnosti $a=b=c$, $a=b<c$, $\ldots$, $a<b=c$ spĺňajú danú rovnosť triviálne.

$A = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$, kde $I_1, I_2, \ldots, I_k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené po dvoch disjunktné (t. j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$) intervaly, $f \in R_{I_1}$, $f \in R_{I_2}$, $\ldots$, $f \in R_{I_k}$.
Riemannov (určitý) integrál funkcie f na množine A definujeme vzťahom

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)\,dx + \int_{I_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{I_k} f(x)\,dx.$$

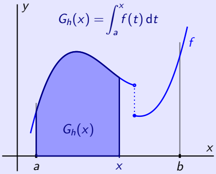
Výpočet Riemannovho integrálu

Neurčitý Riemannov integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ $f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Výpočet Riemannovho integrálu

Neurčitý Riemannov integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ $f \in R_{\langle a;b\rangle}$

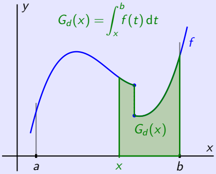
Funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).



Výpočet Riemannovho integrálu

Neurčitý Riemannov integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ $f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

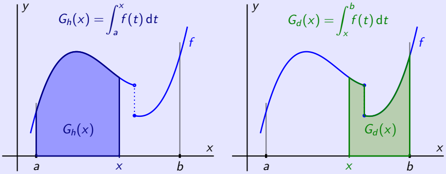


Výpočet Riemannovho integrálu

Neurčitý Riemannov integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ $\quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).



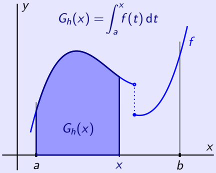
Výpočet Riemannovho integrálu

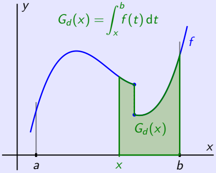
Neurčitý Riemannov integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ $\quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,dt,\ x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

Geometricky predstavujú funkčné hodnoty $G_h(x)$, resp. $G_d(x)$ plochy krivočiarych lichobežníkov určených funkciou f a $\langle a; x\rangle$, resp. $\langle x; b\rangle$.





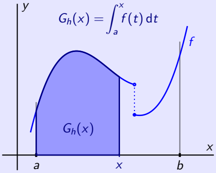
Výpočet Riemannovho integrálu

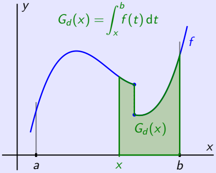
Neurčitý Riemannov integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ $f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

Geometricky predstavujú funkčné hodnoty $G_h(x)$, resp. $G_d(x)$ plochy krivočiarych lichobežníkov určených funkciou f a $\langle a; x\rangle$, resp. $\langle x; b\rangle$.





$$G_h(a) = 0 = G_d(b).$$

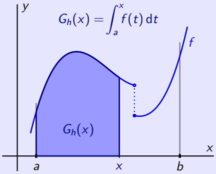
Výpočet Riemannovho integrálu

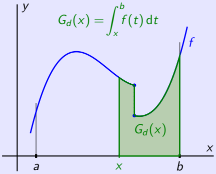
Neurčitý Riemannov integrál funkcie f na intervale $\langle a;b\rangle$ $\quad f\in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_h(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt,\ x\in\langle a;b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x)=\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt,\ x\in\langle a;b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

Geometricky predstavujú funkčné hodnoty $G_h(x)$, resp. $G_d(x)$ plochy krivočiarych lichobežníkov určených funkciou f a $\langle a;x\rangle$, resp. $\langle x;b\rangle$.





$$G_h(a)=0=G_d(b).$$

$$G_h(b)=\int_a^b f(t)\,dt=G_d(a).$$

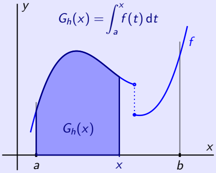
Výpočet Riemannovho integrálu

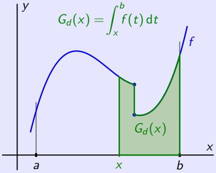
Neurčitý Riemannov integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ $\quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,dt,\ x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

Geometricky predstavujú funkčné hodnoty $G_h(x)$, resp. $G_d(x)$ plochy krivočiarych lichobežníkov určených funkciou f a $\langle a; x\rangle$, resp. $\langle x; b\rangle$.





$$G_h(a) = 0 = G_d(b).$$

$$G_h(b) = \int_a^b f(t)\,dt = G_d(a).$$

$$G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Výpočet Riemannovho integrálu

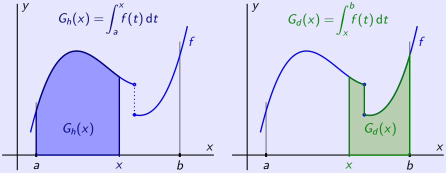
Neurčitý Riemannov integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ $\quad f \in R_{\langle a;b\rangle}$

Funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia hornej hranice (hornej medze).

Funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,dt$, $x \in \langle a; b\rangle$ sa nazýva integrál ako funkcia dolnej hranice (dolnej medze).

Funkciu G_h, resp. G_d nazývame tiež neurčitý Riemannov integrál funkcie f na $\langle a; b\rangle$.

Geometricky predstavujú funkčné hodnoty $G_h(x)$, resp. $G_d(x)$ plochy krivočiarych lichobežníkov určených funkciou f a $\langle a; x\rangle$, resp. $\langle x; b\rangle$.



$$G_h(a) = 0 = G_d(b).$$

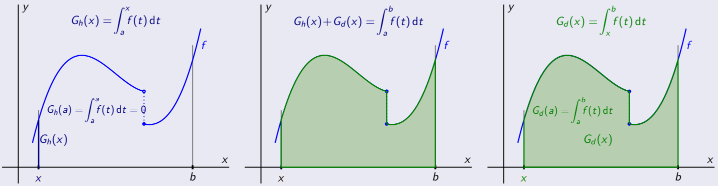
$$G_h(b) = \int_a^b f(t)\,dt = G_d(a).$$

$$G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

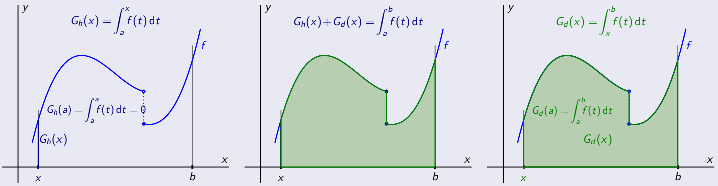
$$\Rightarrow\ G_h(a)=G_d(b)=0, \qquad G_h(b)=G_d(a)=\int_a^b f(t)\,dt, \qquad G_h(x)+G_d(x)=\int_a^b f(t)\,dt.$$



Výpočet Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \; G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t)\,dt, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

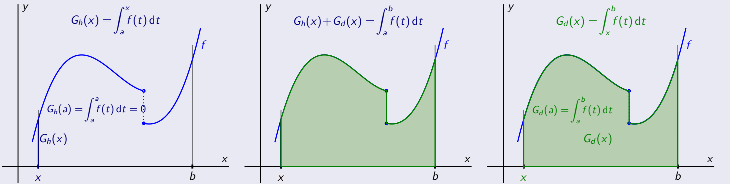


$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c, d \in \langle a; b\rangle$.

Výpočet Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \; G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



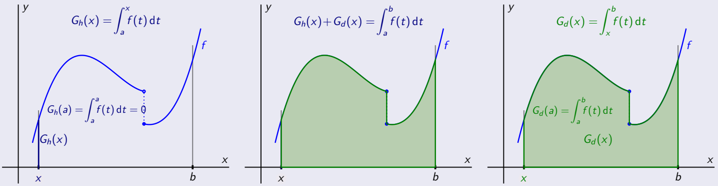
$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c, d \in \langle a; b\rangle$.

- $\displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = G_h(d) - G_h(c),$

Výpočet Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



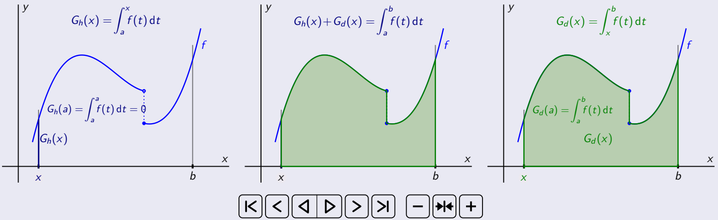
$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c, d \in \langle a; b\rangle$.

- $\displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = G_h(d) - G_h(c), \quad \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = G_d(c) - G_d(d).$

Výpočet Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow\ G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t)\,dt, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$



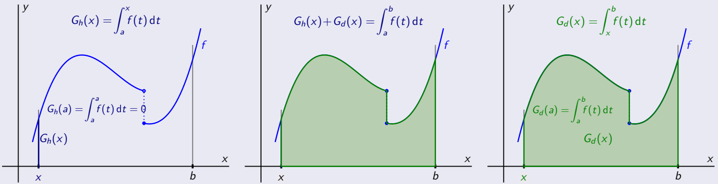
$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c, d \in \langle a; b\rangle$.

- $\int_c^d f(t)\,dt = G_h(d) - G_h(c)$, $\quad \int_c^d f(t)\,dt = G_d(c) - G_d(d)$.
- Funkcie G_h, G_d sú spojité na $\langle a; b\rangle$.

Výpočet Riemannovho integrálu

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $x \in \langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow\ G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t)\,dt, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,dt.$$



$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c, d \in \langle a; b\rangle$.

- $\int_c^d f(t)\,dt = G_h(d) - G_h(c), \quad \int_c^d f(t)\,dt = G_d(c) - G_d(d).$
- Funkcie G_h, G_d sú spojité na $\langle a; b\rangle$.
- Funkcie G_h, $-G_d$ sú primitívne k f na $\langle a; b\rangle$.

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b\rangle$.

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu, často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F.

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$$

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu, často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$,

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu, často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b \rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2 \cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je primitívna k f,

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b \rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2 \cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je primitívna k f, $F(1) = \frac{1}{4}$,

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b \rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2 \cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je primitívna k f, $F(1) = \frac{1}{4}$, $F(0) = 0$.

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu, často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2\cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je primitívna k f, $F(1) = \frac{1}{4}$, $F(0) = 0$.

V praxi píšeme priamo: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2} = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_0^1$

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b \rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2\cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je primitívna k f, $F(1) = \frac{1}{4}$, $F(0) = 0$.

V praxi píšeme priamo: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2} = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1$

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b .$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2}$$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2\cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je primitívna k f, $F(1) = \frac{1}{4}$, $F(0) = 0$.

V praxi píšeme priamo:
$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2} = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1^2}{4} - \frac{0^2}{4}$$

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b\rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b\rangle$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2\cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je primitívna k f, $F(1) = \frac{1}{4}$, $F(0) = 0$.

V praxi píšeme priamo: $$\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1^2}{4} - \frac{0^2}{4} = \frac{1}{4} - 0$$

Výpočet Riemannovho integrálu

Nasledujúci vzorec je základom pre výpočet určitého integrálu,
často sa nazýva základná veta integrálneho počtu.

Newton-Leibnizov vzorec

$f \in R_{\langle a;b \rangle}$, F je ľubovoľná primitívna funkcia k f na $\langle a; b \rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{ozn.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

[Pred použitím vzorca musíme overiť oba predpoklady pre f a F. V praxi sa overujú počas výpočtu.]

$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2} = \frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$, $F(x) = \frac{x^2}{2\cdot 2} + c$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je primitívna k f, $F(1) = \frac{1}{4}$, $F(0) = 0$.

V praxi píšeme priamo: $$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{2} = \left[\frac{x^2}{2\cdot 2}\right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1^2}{4} - \frac{0^2}{4} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

$$\int_{-1}^0 x^2 \, dx$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

$$\int_{-1}^0 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3}$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0.$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(1+\sqrt{2})$$

$$= \left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{1^2+1}) - \ln(0+\sqrt{0^2+1})$$
$$= \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0 - 0$$

Výpočet Riemannovo integrálu

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{-1}^0 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{1^2+1}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = 0$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0.$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

$$= \Big[\ln |x| \Big]_{-1}^{1}$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

$$= \Big[\ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1|$$

Výpočet Riemannovo integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

$$= \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

$$= \Big[\ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\xcancel{= \Big[\ln |x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[\ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1 \rangle}$,

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[\ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1 \rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=???$$

$$\cancel{=\Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1}=\ln|1|-\ln|-1|=\ln 1-\ln 1=0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x}\in R_{\langle -1;1\rangle}$, pretože $y=\frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2 x\,dx$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1\rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1\rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[\ln |x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1 \rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[\ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1\rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Big) dx$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[\ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1\rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Big) dx$$

$$= \Big[\operatorname{tg} x - x \Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

Výpočet Riemannovo integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[\ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1\rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Big) dx$$

$$= \Big[\operatorname{tg} x - x \Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\operatorname{tg} 0 - 0)$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$= \cancel{\Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1\rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\Big) dx$$

$$= \Big[\operatorname{tg} x - x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\operatorname{tg} 0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4} - (0-0)$$

Výpočet Riemannovho integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ???$$

$$\cancel{= \Big[\ln|x| \Big]_{-1}^{1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0.}$$

Newton-Leibnizov vzorec nemôžeme použiť.

Neplatí $\frac{1}{x} \in R_{\langle -1;1 \rangle}$, pretože $y = \frac{1}{x}$ nie je spojitá v bode 0,

v bode 0 je neohraničená, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Big) dx$$

$$= \Big[\operatorname{tg} x - x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\operatorname{tg} 0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4} - (0 - 0) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Metóda per partes

Metóda per partes $u, v \in R_{\langle a;b \rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b \rangle}.$

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Metóda per partes

Metóda per partes

$u, v \in R_{\langle a;b \rangle}, \ u', v' \in R_{\langle a;b \rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x) \Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

Metóda per partes

Metóda per partes

$u, v \in R_{\langle a;b\rangle}$, $u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned} u(x)v(x) &= \int \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x \\ &= \int \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Metóda per partes

Metóda per partes $u, v \in R_{\langle a;b\rangle}, \ u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big]\,\mathrm{d}x$$

Metóda per partes

Metóda per partes

$u, v \in R_{\langle a;b\rangle},\ u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]' \,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Metóda per partes

Metóda per partes $u, v \in R_{\langle a;b\rangle}$, $u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\, dx$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, dx = \int_a^b u'(x)v(x)\, dx + \int_a^b u(x)v'(x)\, dx.$$

$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$

Metóda per partes

Metóda per partes $u, v \in R_{\langle a;b \rangle},\ u', v' \in R_{\langle a;b \rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \Big[u(x)v(x)\Big]'\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \Big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\Big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\int_0^{2\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right]$$

Metóda per partes

Metóda per partes

$u, v \in R_{\langle a;b\rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\int_0^{2\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$$

Metóda per partes

Metóda per partes

$u, v \in R_{\langle a;b\rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\int_0^{2\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[-2\pi\cos 2\pi + 0\cdot\cos 0\Big] + \Big[\sin x\Big]_0^{2\pi}$$

Metóda per partes

Metóda per partes $u, v \in R_{\langle a;b\rangle}, \; u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[-2\pi\cos 2\pi + 0\cdot\cos 0\Big] + \Big[\sin x\Big]_0^{2\pi} = -2\pi + \Big[\sin 2\pi - \sin 0\Big]$$

Metóda per partes

Metóda per partes

$u, v \in R_{\langle a;b\rangle},\ u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}.$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\int_0^{2\pi} x \sin x\,\mathrm{d}x = -2\pi$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[-2\pi\cos 2\pi + 0\cdot\cos 0\Big] + \Big[\sin x\Big]_0^{2\pi} = -2\pi + \Big[\sin 2\pi - \sin 0\Big] = -2\pi.$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[-x^2 \cos x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0) \Big] + 2 \int_0^{2\pi} x \cos x \, dx$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{bmatrix}$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \left[-x^2 \cos x \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \left[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0) \right] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right]$$

$$= \left[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \right] + 2\left[\left[x \sin x \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx \right]$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[-x^2 \cos x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0) \Big] + 2 \int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \Big] + 2 \left[\Big[x \sin x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx \right]$$

$$= -4\pi^2 + 2 \Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0 \Big] - 2 \Big[-\cos x \Big]_0^{2\pi}$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big]$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{bmatrix}$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1\Big]$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \,dx = -4\pi^2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x)\,dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \,dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1\Big] = -4\pi^2.$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \,dx = -4\pi^2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x)\,dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \,dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1\Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = -4\pi^2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[-x^2 \cos x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0) \Big] + 2 \int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \Big] + 2 \left[\Big[x \sin x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx \right]$$

$$= -4\pi^2 + 2 \Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0 \Big] - 2 \Big[-\cos x \Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2 \Big[2\pi \cdot 0 - 0 \Big] - 2 \Big[-\cos 2\pi + \cos 0 \Big] = -4\pi^2 + 0 - 2 \Big[-1 + 1 \Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \Big[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \Big]_0^{2\pi}$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = -4\pi^2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1\Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \Big[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 \cos 2\pi + 2 \cdot 2\pi \sin 2\pi + 2 \cos 2\pi - (-4 \cdot 0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \sin 0 + 2 \cos 0)$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = -4\pi^2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[-x^2 \cos x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0) \Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \Big] + 2\left[\Big[x \sin x \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx \right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0 \Big] - 2\Big[-\cos x \Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0 \Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0 \Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1 \Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \Big[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 \cos 2\pi + 2 \cdot 2\pi \sin 2\pi + 2 \cos 2\pi - (-4 \cdot 0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \sin 0 + 2 \cos 0)$$

$$= -4\pi^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2\pi \cdot 0 + 2 \cdot 1 - (0 + 0 + 2 \cdot 1)$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = -4\pi^2$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x \cos x) \, dx$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cos 2\pi - (-0^2 \cdot \cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \, dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi \cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1 + 1\Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \Big[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 \cos 2\pi + 2 \cdot 2\pi \sin 2\pi + 2 \cos 2\pi - (-4 \cdot 0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \sin 0 + 2 \cos 0)$$

$$= -4\pi^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2\pi \cdot 0 + 2 \cdot 1 - (0 + 0 + 2 \cdot 1) = -4\pi^2 + 2 - 2$$

Metóda per partes

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \,dx = -4\pi^2$$

$$=\left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2\cos x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-2x\cos x)\,dx$$

$$= \Big[-4\pi^2\cos 2\pi - (-0^2\cdot\cos 0)\Big] + 2\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= \Big[-4\pi^2\cdot 1 + 0\cdot 1\Big] + 2\left[\Big[x\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x\,dx\right]$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi\sin 2\pi - 0\cdot\sin 0\Big] - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2 + 2\Big[2\pi\cdot 0 - 0\Big] - 2\Big[-\cos 2\pi + \cos 0\Big] = -4\pi^2 + 0 - 2\Big[-1+1\Big] = -4\pi^2.$$

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \Big[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= -4\pi^2\cos 2\pi + 2\cdot 2\pi\sin 2\pi + 2\cos 2\pi - (-4\cdot 0^2\cos 0 + 2\cdot 0\sin 0 + 2\cos 0)$$

$$= -4\pi^2\cdot 1 + 2\cdot 2\pi\cdot 0 + 2\cdot 1 - (0+0+2\cdot 1) = -4\pi^2 + 2 - 2 = -4\pi^2.$$

Metóda substitúcie

Metóda substitúcie $y=f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, φ' je spojitá na J.

Metóda substitúcie

Metóda substitúcie $y=f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, φ' je spojitá na J.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$

Metóda substitúcie

Metóda substitúcie $y=f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, φ' je spojitá na J.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Metóda substitúcie

Metóda substitúcie $y = f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b, $x = \varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J) \subset I$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, φ' je spojitá na J.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi (f je spojitá na $I \Rightarrow f \in R_I$).

Metóda substitúcie

Metóda substitúcie $y = f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b, $x = \varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J) \subset I$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, φ' je spojitá na J.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Metódu môžeme použiť obomi smermi (f je spojitá na $I \Rightarrow f \in R_I$).

Pre $y = f(x)$, $x \in I$ ohraničenú

Metóda substitúcie

Metóda substitúcie $y=f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, φ' je spojitá na J.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi (f je spojitá na $I \Rightarrow f\in R_I$).

Pre $y=f(x)$, $x\in I$ ohraničenú a pre $x=\varphi(t)$, $t\in J$ rýdzo monotónnu,

Metóda substitúcie

Metóda substitúcie $y=f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, φ' je spojitá na J.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi (f je spojitá na $I \Rightarrow f\in R_I$).

Pre $y=f(x)$, $x\in I$ ohraničenú a pre $x=\varphi(t)$, $t\in J$ rýdzo monotónnu, môžeme metódu substitúcie zovšeobecniť.

Metóda substitúcie

Metóda substitúcie $y=f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, φ' je spojitá na J.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi (f je spojitá na $I \Rightarrow f \in R_I$).

Pre $y=f(x)$, $x\in I$ ohraničenú a pre $x=\varphi(t)$, $t\in J$ rýdzo monotónnu,
môžeme metódu substitúcie zovšeobecniť.

Metóda substitúcie $y=f(x)$ je ohraničená na intervale I s hranicami a, b, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$.

Metóda substitúcie

Metóda substitúcie $y=f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, φ' je spojitá na J.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi'\in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi (f je spojitá na $I \Rightarrow f\in R_I$).

Pre $y=f(x)$, $x\in I$ ohraničenú a pre $x=\varphi(t)$, $t\in J$ rýdzo monotónnu, môžeme metódu substitúcie zovšeobecniť.

Metóda substitúcie $y=f(x)$ je ohraničená na intervale I s hranicami a, b, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$. Potom platí:

$f\in R_I \Leftrightarrow f(\varphi)\cdot\varphi'\in R_J$

Metóda substitúcie

Metóda substitúcie $y=f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, φ' je spojitá na J.

$\Rightarrow$ $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Metódu môžeme použiť obomi smermi (f je spojitá na $I \Rightarrow f \in R_I$).

Pre $y=f(x)$, $x\in I$ ohraničenú a pre $x=\varphi(t)$, $t\in J$ rýdzo monotónnu, môžeme metódu substitúcie zovšeobecniť.

Metóda substitúcie $y=f(x)$ je ohraničená na intervale I s hranicami a, b, $x=\varphi(t)$ je definovaná na intervale J s hranicami α, β, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$. Potom platí:

$f\in R_I \Leftrightarrow f(\varphi)\cdot\varphi' \in R_J$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|r|c} \text{Subst.} \quad x = \sin t & x \in \langle -1; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \frac{\pi}{2} & 1 = \sin \frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\,dt & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle & x = -1 \mapsto t = -\frac{\pi}{2} & -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t \geq 0 \text{ pre všetky } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|r|c} \text{Subst.} \quad x = \sin t & x \in \langle -1; 1 \rangle & x = 1 \;\;\; \mapsto t = \frac{\pi}{2} & 1 = \sin \frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\,dt & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle & x = -1 \mapsto t = -\frac{\pi}{2} & -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t \geq 0 \text{ pre všetky } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I = \langle -1; 1 \rangle$, $x = \varphi(t) = \sin t$ má na $J = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t) = \cos t$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l|r|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1\ \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|r|c} \text{Subst.} \quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \;\; \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\, dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1 \mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1+\cos 2t\right] dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|r|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1 \mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l|c} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1+\cos 2t]\,dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1+\cos 2t]\,dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|r|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \ \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|r|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \;\mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ \quad dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|r|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \ \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l|l|c|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \ \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1 \mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\arcsin x}{2}\right]_{-1}^{1}$$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|r|c} \text{Subst.} \quad x = \sin t & x \in \langle -1; 1 \rangle & x = 1 \ \mapsto t = \frac{\pi}{2} & 1 = \sin \frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \\ dx = \cos t\, dt & t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle & x = -1 \mapsto t = -\frac{\pi}{2} & -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t \geq 0 \text{ pre všetky } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \end{array} \right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos 2t]\, dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0 \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I = \langle -1; 1 \rangle$, $x = \varphi(t) = \sin t$ má na $J = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t) = \cos t$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$.

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$= \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} \right]_{-1}^{1} = \frac{1 \cdot \sqrt{1-1^2}}{2} + \frac{\arcsin 1}{2} - \left(\frac{-1 \cdot \sqrt{1-(-1)^2}}{2} + \frac{\arcsin(-1)}{2} \right)$$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos 2t\right]dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$=\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\arcsin x}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1\cdot\sqrt{1-1^2}}{2}+\frac{\arcsin 1}{2}-\left(\frac{-1\cdot\sqrt{1-(-1)^2}}{2}+\frac{\arcsin(-1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1\cdot 0}{2}+\frac{\frac{\pi}{2}}{2}-\left(\frac{-1\cdot 0}{2}+\frac{-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|l|c} \text{Subst.}\quad x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \;\mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos 2t\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$=\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\arcsin x}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1\cdot\sqrt{1-1^2}}{2}+\frac{\arcsin 1}{2}-\left(\frac{-1\cdot\sqrt{1-(-1)^2}}{2}+\frac{\arcsin(-1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1\cdot 0}{2}+\frac{\frac{\pi}{2}}{2}-\left(\frac{-1\cdot 0}{2}+\frac{-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=0+\frac{\pi}{4}-0+\frac{\pi}{4}$$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$=\left[\begin{array}{l|l|l|c|c} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & x=1 \mapsto t=\frac{\pi}{2} & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ dx=\cos t\,dt & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & x=-1\mapsto t=-\frac{\pi}{2} & -1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\cos 2t\right]dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+0-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton-Leibnizovho vzorca.

$$=\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\arcsin x}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1\cdot\sqrt{1-1^2}}{2}+\frac{\arcsin 1}{2}-\left(\frac{-1\cdot\sqrt{1-(-1)^2}}{2}+\frac{\arcsin(-1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1\cdot 0}{2}+\frac{\frac{\pi}{2}}{2}-\left(\frac{-1\cdot 0}{2}+\frac{-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=0+\frac{\pi}{4}-0+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin\left(t^2+1\right) \mathrm{d}t$$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin\left(t^2+1\right) \mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 2 \rangle & t = 2 \mapsto x = 2^2+1 = 5 \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t & x \in \langle 1; 5 \rangle & t = -1 \mapsto x = (-1)^2+1 = 2 \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin\left(t^2+1\right) dt$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1\mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array}\right]=\frac{1}{2}\int_{2}^{5} \sin x\, dx$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin\left(t^2+1\right) dt$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\, dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin(t^2+1)\,dt$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin(t^2+1)\,dt = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin(t^2+1)\, dt = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = t^2+1 & t \in \langle -1; 2\rangle & t=2 \mapsto x = 2^2+1=5 \\ dx = 2\, dt & x \in \langle 1; 5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\, dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x) = \sin x$ je spojitá na $I = \langle 2; 5\rangle$, $x = \varphi(t) = t^2+1$ má na $J = \langle -1; 2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t) = 2t$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(-1) = 2$, $\varphi(2) = 5$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos t\, dt$$

$$\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & t \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle & t=\frac{\pi}{2} \mapsto x = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ dx = \cos t\, dt & x \in \langle 0; 1\rangle & t=0 \mapsto x = \sin 0 = 0 \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin(t^2+1)\, dt = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \ \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx = 2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} \sin x\, dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos t\, dt$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst. } x=\sin t & t\in\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle & t=\frac{\pi}{2} \mapsto x=\sin\frac{\pi}{2}=1 \\ dx=\cos t\, dt & x\in\langle 0;1\rangle & t=0 \ \mapsto x=\sin 0=0 \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \frac{\cos 2-\cos 5}{2}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l}\text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5\\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx=\frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\cos 5+\cos 2\Big]=\frac{\cos 2-\cos 5}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cdot\cos t\,dt$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l}\text{Subst. } x=\sin t & t\in\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle & t=\frac{\pi}{2} \mapsto x=\sin\frac{\pi}{2}=1\\ dx=\cos t\,dt & x\in\langle 0;1\rangle & t=0 \mapsto x=\sin 0=0\end{array}\right]=\int_0^1 x^3\,dx$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=x^3$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\frac{\pi}{2})=1$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin(t^2+1)\,dt = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} \sin x\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_{2}^{5}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cdot\cos t\,dt$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & t\in\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle & t=\frac{\pi}{2} \mapsto x=\sin\frac{\pi}{2}=1 \\ dx=\cos t\,dt & x\in\langle 0;1\rangle & t=0 \mapsto x=\sin 0=0 \end{array}\right] = \int_{0}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=x^3$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\frac{\pi}{2})=1$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,dt = \frac{\cos 2-\cos 5}{2}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1\mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\cos 5+\cos 2\Big] = \frac{\cos 2-\cos 5}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cdot\cos t\,dt$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & t\in\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle & t=\frac{\pi}{2}\mapsto x=\sin\frac{\pi}{2}=1 \\ dx=\cos t\,dt & x\in\langle 0;1\rangle & t=0\mapsto x=\sin 0=0 \end{array}\right] = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{0}{4}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=x^3$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\frac{\pi}{2})=1$.

Metóda substitúcie

$$\int_{-1}^{2} t \sin(t^2+1)\,dt = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;2\rangle & t=2 \mapsto x=2^2+1=5 \\ dx=2\,dt & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1 \mapsto x=(-1)^2+1=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} \sin x\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_{2}^{5}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos 5 + \cos 2\Big] = \frac{\cos 2 - \cos 5}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=\sin x$ je spojitá na $I=\langle 2;5\rangle$, $x=\varphi(t)=t^2+1$ má na $J=\langle -1;2\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cdot\cos t\,dt = \frac{1}{4}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & t\in\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle & t=\frac{\pi}{2} \mapsto x=\sin\frac{\pi}{2}=1 \\ dx=\cos t\,dt & x\in\langle 0;1\rangle & t=0 \mapsto x=\sin 0=0 \end{array}\right] = \int_{0}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(x)=x^3$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$ má na $J=\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\frac{\pi}{2})=1$.

Metóda substitúcie

$$\int_1^e \frac{\ln x \, dx}{x}$$

Metóda substitúcie

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x \, dx}{x}$$

$$= \left[\begin{array}{r|c|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; \mathrm{e} \rangle & x = \mathrm{e} \mapsto t = \ln \mathrm{e} = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x \, \mathrm{d}x}{x}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; \mathrm{e} \rangle & x = \mathrm{e} \mapsto t = \ln \mathrm{e} = 1 \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, \mathrm{d}t$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; \mathrm{e} \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(\mathrm{e}) = 1$.

Metóda substitúcie

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x \, dx}{x}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; \mathrm{e} \rangle & x = \mathrm{e} \mapsto t = \ln \mathrm{e} = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; \mathrm{e} \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(\mathrm{e}) = 1$.

Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1;e\rangle & x=e\mapsto t=\ln e=1 \\ dt=\frac{dx}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto t=\ln 1=0 \end{array} \right] = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;e\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(e)=1$.

Metóda substitúcie

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x \,\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|c|c} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; \mathrm{e} \rangle & x = \mathrm{e} \mapsto t = \ln \mathrm{e} = 1 \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; \mathrm{e} \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(\mathrm{e}) = 1$.

Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x\,dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1; e\rangle & x=e \mapsto t=\ln e=1 \\ dt=\frac{dx}{x} & t\in\langle 0; 1\rangle & x=1 \mapsto t=\ln 1=0 \end{array} \right] = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;e\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(e)=1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x\,dx = \int_\pi^0 \sin^2 x \cdot \sin x\,dx$$

Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; e \rangle & x = e \mapsto t = \ln e = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; e \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(e) = 1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x \, dx = \int_\pi^0 \sin^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int_\pi^0 (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$

Metóda substitúcie

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x \, dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; \mathrm{e} \rangle & x = \mathrm{e} \mapsto t = \ln \mathrm{e} = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; \mathrm{e} \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(\mathrm{e}) = 1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x \, dx = \int_\pi^0 \sin^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int_\pi^0 (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \cos x & x \in \langle 0; \pi \rangle & x = 0 \mapsto t = \cos 0 = 1 \\ dt = -\sin x \, dx & t \in \langle -1; 1 \rangle & x = \pi \mapsto t = \cos \pi = -1 \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; e \rangle & x = e \mapsto t = \ln e = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;e\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(e)=1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x \, dx = \int_\pi^0 \sin^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int_\pi^0 (1-\cos^2 x) \sin x \, dx = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \cos x & x \in \langle 0; \pi \rangle & x = 0 \mapsto t = \cos 0 = 1 \\ dt = -\sin x \, dx & t \in \langle -1; 1 \rangle & x = \pi \mapsto t = \cos \pi = -1 \end{array} \right] = -\int_{-1}^1 (1-t^2) \, dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=1-t^2$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\cos x$ má na $J=\langle 0;\pi\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-\sin x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\pi)=-1$.

Metóda substitúcie

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x \, dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \ln x & x \in \langle 1; \mathrm{e} \rangle & x = \mathrm{e} \mapsto t = \ln \mathrm{e} = 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & t \in \langle 0; 1 \rangle & x = 1 \mapsto t = \ln 1 = 0 \end{array} \right] = \int_0^1 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = t$ je spojitá na $I = \langle 0; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \ln x$ má na $J = \langle 1; \mathrm{e} \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(\mathrm{e}) = 1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x \, dx = \int_\pi^0 \sin^2 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int_\pi^0 (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t = \cos x & x \in \langle 0; \pi \rangle & x = 0 \mapsto t = \cos 0 = 1 \\ dt = -\sin x \, dx & t \in \langle -1; 1 \rangle & x = \pi \mapsto t = \cos \pi = -1 \end{array} \right] = -\int_{-1}^1 (1 - t^2) \, dt$$

$$= \int_1^{-1} (1 - t^2) \, dt$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t) = 1 - t^2$ je spojitá na $I = \langle -1; 1 \rangle$, $t = \varphi(x) = \cos x$ má na $J = \langle 0; \pi \rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x) = -\sin x$, $\varphi(J) = I$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\pi) = -1$.

Metóda substitúcie

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x\,dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1;\mathrm{e}\rangle & x=\mathrm{e}\mapsto t=\ln\mathrm{e}=1 \\ dt=\frac{dx}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto t=\ln 1=0 \end{array}\right] = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;\mathrm{e}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(\mathrm{e})=1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x\,dx = \int_\pi^0 \sin^2 x\cdot\sin x\,dx$$

$$= \int_\pi^0 (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\cos x & x\in\langle 0;\pi\rangle & x=0\mapsto t=\cos 0=1 \\ dt=-\sin x\,dx & t\in\langle -1;1\rangle & x=\pi\mapsto t=\cos\pi=-1 \end{array}\right] = -\int_{-1}^1 (1-t^2)\,dt$$

$$= \int_1^{-1} (1-t^2)\,dt = \left[t-\frac{t^3}{3}\right]_1^{-1}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=1-t^2$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\cos x$ má na $J=\langle 0;\pi\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-\sin x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\pi)=-1$.

Metóda substitúcie

$$\int_1^{e} \frac{\ln x \, dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1; e\rangle & x=e \mapsto t=\ln e=1 \\ dt=\frac{dx}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1 \mapsto t=\ln 1=0 \end{array} \right] = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;e\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(e)=1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x\,dx = \int_\pi^0 \sin^2 x \cdot \sin x\,dx$$

$$= \int_\pi^0 (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\cos x & x\in\langle 0;\pi\rangle & x=0 \mapsto t=\cos 0=1 \\ dt=-\sin x\,dx & t\in\langle -1;1\rangle & x=\pi \mapsto t=\cos\pi=-1 \end{array} \right] = -\int_{-1}^1 (1-t^2)\,dt$$

$$= \int_1^{-1} (1-t^2)\,dt = \left[t-\frac{t^3}{3}\right]_1^{-1} = \left[-1-\frac{(-1)^3}{3} - \left(1-\frac{1^3}{3}\right)\right]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=1-t^2$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\cos x$ má na $J=\langle 0;\pi\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-\sin x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\pi)=-1$.

Metóda substitúcie

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1;\mathrm{e}\rangle & x=\mathrm{e}\mapsto t=\ln\mathrm{e}=1 \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto t=\ln 1=0 \end{array}\right] = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;\mathrm{e}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(\mathrm{e})=1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int_\pi^0 \sin^2 x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_\pi^0 (1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\cos x & x\in\langle 0;\pi\rangle & x=0\mapsto t=\cos 0=1 \\ \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x & t\in\langle -1;1\rangle & x=\pi\mapsto t=\cos\pi=-1 \end{array}\right] = -\int_{-1}^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^{-1} (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t-\frac{t^3}{3}\right]_1^{-1} = \left[-1-\frac{(-1)^3}{3} - \left(1-\frac{1^3}{3}\right)\right] = -2+\frac{2}{3}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=1-t^2$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\cos x$ má na $J=\langle 0;\pi\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-\sin x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\pi)=-1$.

Metóda substitúcie

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x\,dx}{x} = \frac{1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1;\mathrm{e}\rangle & x=\mathrm{e}\mapsto t=\ln\mathrm{e}=1 \\ dt=\frac{dx}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto t=\ln 1=0 \end{array}\right] = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=t$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\ln x$ má na $J=\langle 1;\mathrm{e}\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(\mathrm{e})=1$.

$$\int_\pi^0 \sin^3 x\,dx = \int_\pi^0 \sin^2 x\cdot\sin x\,dx = -\frac{4}{3}$$

$$= \int_\pi^0 (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\cos x & x\in\langle 0;\pi\rangle & x=0\mapsto t=\cos 0=1 \\ dt=-\sin x\,dx & t\in\langle -1;1\rangle & x=\pi\mapsto t=\cos\pi=-1 \end{array}\right] = -\int_{-1}^1 (1-t^2)\,dt$$

$$= \int_1^{-1} (1-t^2)\,dt = \left[t-\frac{t^3}{3}\right]_1^{-1} = \left[-1-\frac{(-1)^3}{3} - \left(1-\frac{1^3}{3}\right)\right] = -2+\frac{2}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=1-t^2$ je spojitá na $I=\langle -1;1\rangle$, $t=\varphi(x)=\cos x$ má na $J=\langle 0;\pi\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-\sin x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(\pi)=-1$.

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x e^{1-x^2}\,dx$$

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x e^{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u = 1-x^2 & x \in \langle 0; 1\rangle & x = 1 \mapsto u = 1-1^2 = 0 \\ du = -2x\,dx & u \in \langle 0; 1\rangle & x = 0 \mapsto u = 1-0^2 = 1 \end{array} \right]$$

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right]=\int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{-2}$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right]=\int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{-2}=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x e^{1-x^2}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right]=\int_1^0 \frac{e^u\,du}{-2}=\frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du=\frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_0^1$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=e^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right]=\int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{-2}=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^u\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\right]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x e^{1-x^2}\,dx = \frac{e-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1 \mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0 \mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{e^u\,du}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^1 - e^0\Big] = \frac{e-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=e^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x e^{1-x^2}\,dx = \frac{e-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|c|c} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{e^u\,du}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^1 - e^0\Big] = \frac{e-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=e^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\operatorname{tg} 1}^{\operatorname{tg} \frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$$

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{1-x^2}\,dx = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l}\text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0\\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1\end{array}\right]=\int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,du}{-2}=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,du=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^u\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\Big]=\frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\mathrm{tg}\,1}^{\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{r|l|l}\text{Subst. } t=\operatorname{arctg} x & x\in\langle \mathrm{tg}\,1;\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\rangle & x=\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\mapsto t=\operatorname{arctg}\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\\ dt=\frac{dx}{x^2+1} & t\in\langle 1;\frac{3}{2}\rangle & x=\mathrm{tg}\,1\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg} 1=1\end{array}\right]$$

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1 \mapsto u=1-1^2=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0 \mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^u\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\Big] = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\operatorname{tg} 1}^{\operatorname{tg}\frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\operatorname{arctg} x & x\in\left\langle \operatorname{tg}1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg}\frac{3}{2} \mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} & t\in\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg}1 \mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg}1=1 \end{array}\right] = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln t\,\mathrm{d}t$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=\ln t$ je spojitá na $I=\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle$, $t=\varphi(x)=\operatorname{arctg} x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ je spojitá na $J=\left\langle \operatorname{tg}1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\rangle$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\operatorname{tg}1)=1$, $\varphi(\operatorname{tg}\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{1-x^2}\,dx = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

$$=\left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,du}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,du = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^u\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\right] = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\mathrm{tg}\,1}^{\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst. } t=\operatorname{arctg} x & x\in\langle \mathrm{tg}\,1;\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\rangle & x=\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\mapsto t=\operatorname{arctg}\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ dt=\frac{dx}{x^2+1} & t\in\langle 1;\frac{3}{2}\rangle & x=\mathrm{tg}\,1\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg} 1=1 \end{array}\right] = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln t\,dt = \left[\begin{array}{c|c} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=1 & v=t \end{array}\right]$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=\ln t$ je spojitá na $I=\langle 1;\frac{3}{2}\rangle$, $t=\varphi(x)=\operatorname{arctg} x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ je spojitá na $J=\langle \mathrm{tg}\,1;\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\rangle$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\mathrm{tg}\,1)=1$, $\varphi(\mathrm{tg}\,\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array} \right] = \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^u\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\Big] = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\operatorname{tg} 1}^{\operatorname{tg}\frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\operatorname{arctg} x & x\in\left\langle \operatorname{tg} 1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg}\frac{3}{2}\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} & t\in\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle & x=\operatorname{tg} 1\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg} 1=1 \end{array} \right] = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=1 & v=t \end{array} \right]$$

$$= \Big[t\ln t\Big]_1^{\frac{3}{2}} - \int_1^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}t$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=\ln t$ je spojitá na $I=\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle$, $t=\varphi(x)=\operatorname{arctg} x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ je spojitá na $J=\left\langle \operatorname{tg} 1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\right\rangle$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\operatorname{tg} 1)=1$, $\varphi(\operatorname{tg}\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^u\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\right] = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\mathrm{tg}\,1}^{\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\operatorname{arctg} x & x\in\left\langle \mathrm{tg}\,1;\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\right\rangle & x=\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\mapsto t=\operatorname{arctg}\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} & t\in\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle & x=\mathrm{tg}\,1\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg} 1=1 \end{array}\right] = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=1 & v=t \end{array}\right]$$

$$= \Big[t\ln t\Big]_1^{\frac{3}{2}} - \int_1^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = \left[\frac{3}{2}\cdot\ln\frac{3}{2}-1\cdot\ln 1\right] - \left(\frac{3}{2}-1\right)$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=\ln t$ je spojitá na $I=\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle$, $t=\varphi(x)=\operatorname{arctg} x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ je spojitá na $J=\left\langle \mathrm{tg}\,1;\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\right\rangle$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\mathrm{tg}\,1)=1$, $\varphi(\mathrm{tg}\,\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

Metóda substitúcie

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{1-x^2}\,dx = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=1-1^2=0 \\ du=-2x\,dx & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1-0^2=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,du}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,du = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^u\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\Big] = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(u)=\mathrm{e}^u$ je spojitá na $I=\langle 0;1\rangle$, $u=\varphi(x)=1-x^2$ má na $J=\langle 0;1\rangle$ spojitú deriváciu $\varphi'(x)=-2x$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(0)=1$.

$$\int_{\operatorname{tg}1}^{\operatorname{tg}\frac{3}{2}} \frac{\ln\operatorname{arctg}x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2} = \frac{3\ln 3-3\ln 2-1}{2} = \frac{\ln 27-\ln 8-\ln\mathrm{e}}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{27}{8\mathrm{e}} = \ln\sqrt{\frac{27}{8\mathrm{e}}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\operatorname{arctg}x & x\in\langle\operatorname{tg}1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\rangle & x=\operatorname{tg}\frac{3}{2}\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ dt=\frac{dx}{x^2+1} & t\in\langle 1;\frac{3}{2}\rangle & x=\operatorname{tg}1\mapsto t=\operatorname{arctg}\operatorname{arctg}1=1 \end{array}\right] = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln t\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=1 & v=t \end{array}\right]$$

$$= \Big[t\ln t\Big]_1^{\frac{3}{2}} - \int_1^{\frac{3}{2}} dt = \Big[\tfrac{3}{2}\cdot\ln\tfrac{3}{2}-1\cdot\ln 1\Big] - \big(\tfrac{3}{2}-1\big) = \frac{3}{2}\cdot\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené.

$f(t)=\ln t$ je spojitá na $I=\langle 1;\frac{3}{2}\rangle$, $t=\varphi(x)=\operatorname{arctg}x$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ je spojitá na $J=\langle\operatorname{tg}1;\operatorname{tg}\frac{3}{2}\rangle$, $\varphi(J)=I$, $\varphi(\operatorname{tg}1)=1$, $\varphi(\operatorname{tg}\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x=-t & \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a\mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,\mathrm{d}t$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x=-t & dx=-dt \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a \mapsto t=-a & x=b \mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

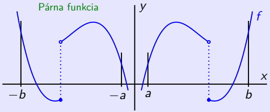
Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

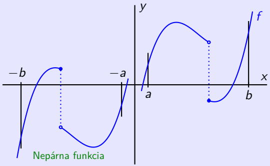
$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } x=-t & dx=-dt \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a \mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna.
- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna.





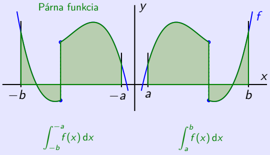
Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

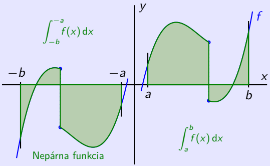
$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } x=-t & dx=-dt \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a \mapsto t=-a & x=b \mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna. $\quad \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$
- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna. $\quad \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$





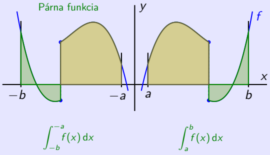
Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

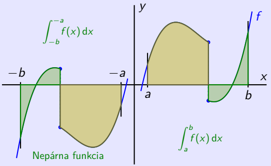
$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle} \ \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.}\quad x=-t & dx=-dt \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a \mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna. $\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$
- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna. $\qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$





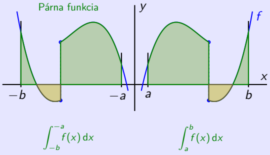
Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

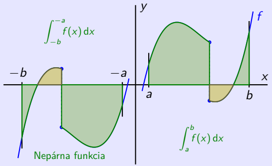
$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} \quad x=-t & dx=-dt \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a \mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$
- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$





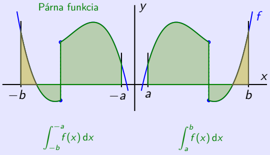
Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

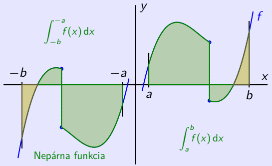
$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Rightarrow \quad f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } x=-t & dx=-dt \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a\mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$
- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$





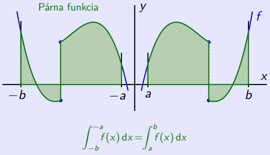
Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

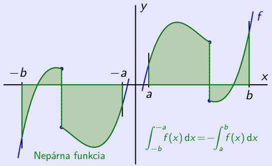
$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$\Rightarrow$ $f(-x) \in R_{\langle -b;-a\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } x=-t & dx=-dt \\ x\in\langle a;b\rangle & t\in\langle -b;-a\rangle \\ x=a\mapsto t=-a & x=b\mapsto t=-b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx.$$

- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je párna. $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx.$
- $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je nepárna. $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx.$





Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

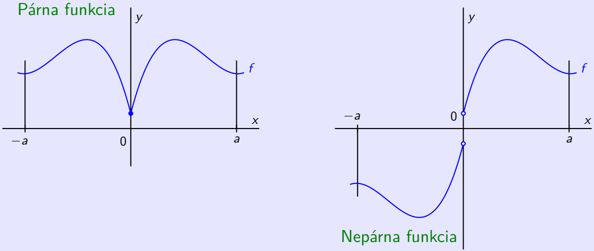
$f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, $a > 0$.

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, $a > 0$.

f je párna

f je nepárna

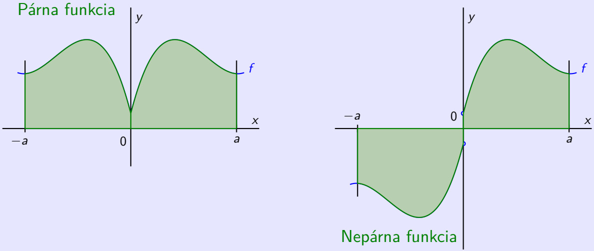


Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f \in R_{\langle -a;a \rangle}$, $a > 0$.

f je párna $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

f je nepárna $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

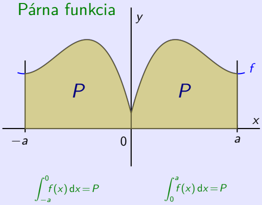


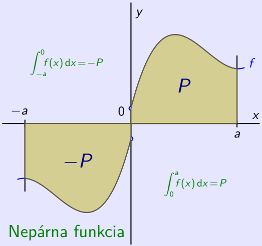
Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, $a > 0$.

f je párna $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

f je nepárna $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$



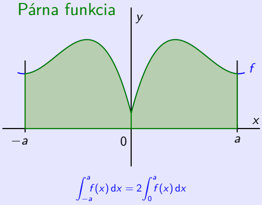


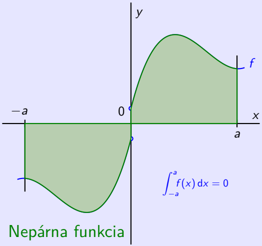
Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$f \in R_{\langle -a;a\rangle}$, $a > 0$.

f je párna $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

f je nepárna $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$





Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx$$

$$= \left[f(x) = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle \quad \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle \qquad \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x) = \frac{(-x)^3 \sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1} = \frac{-x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} = -f(x) \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x) = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x) = \frac{(-x)^3 \sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1} = \frac{-x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} = -f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array} \right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f \in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna}\end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \qquad \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x)\Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ \end{array}\right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f \in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x) = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x) = \frac{(-x)^3 \sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1} = \frac{-x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} = -f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array} \right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f \in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x) = \sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi; \pi\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x) = \sin|-x| = \sin|x| = f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_{0}^{\pi} \sin|x|\, dx$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x) = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x) = \frac{(-x)^3 \sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1} = \frac{-x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} = -f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array} \right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f \in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x) = \sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi; \pi\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x) = \sin|-x| = \sin|x| = f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_{0}^{\pi} \sin|x|\, dx = \left[\begin{array}{c} x \in \langle 0; \pi\rangle, \ |x| = x \\ \sin|x| = \sin x \end{array} \right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna}\end{array}\right]=0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) \quad \Rightarrow f \text{ je párna}\end{array}\right]=2\int_0^{\pi}\sin|x|\,dx=\left[\begin{array}{c} x\in\langle 0;\pi\rangle,\ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x\end{array}\right]$$

$$=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle \qquad \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x) = \frac{(-x)^3 \sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1} = \frac{-x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} = -f(x) \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array} \right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f \in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x) = \sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi; \pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x) = \sin|-x| = \sin|x| = f(x) \qquad \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_0^{\pi} \sin|x|\, dx = \left[\begin{array}{c} x \in \langle 0; \pi\rangle, \quad |x| = x \\ \sin|x| = \sin x \end{array} \right]$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2\Big[-\cos x \Big]_0^{\pi}$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna}\end{array}\right]=0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) \quad \Rightarrow f \text{ je párna}\end{array}\right]=2\int_0^{\pi}\sin|x|\,dx=\left[\begin{array}{c} x\in\langle 0;\pi\rangle,\ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x\end{array}\right]$$

$$=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=-2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi}$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x) = \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x) = \frac{(-x)^3 \sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1} = \frac{-x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} = -f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array} \right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f \in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x) = \sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi; \pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x) = \sin|-x| = \sin|x| = f(x) \quad \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_0^{\pi} \sin|x|\,dx = \left[\begin{array}{c} x \in \langle 0; \pi\rangle, \ |x| = x \\ \sin|x| = \sin x \end{array} \right]$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos\pi - \cos 0\Big]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\, dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle & \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3 \sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1} = \frac{-x^3 \sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} = -f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array} \right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f \in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi; \pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_0^{\pi} \sin|x|\, dx = \left[\begin{array}{c} x \in \langle 0; \pi\rangle, \ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x \end{array} \right]$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos\pi - \cos 0\Big]$$

$$= -2\Big[-1-1\Big]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna}\end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna}\end{array}\right] = 2\int_0^{\pi} \sin|x|\,dx = \left[\begin{array}{c} x\in\langle 0;\pi\rangle,\ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x\end{array}\right]$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos\pi - \cos 0\Big]$$

$$= -2\Big[-1-1\Big] = (-2)\cdot(-2)$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1} \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=\frac{(-x)^3\sqrt[3]{(-x)^2+\sin^2(-x)}}{(-x)^4+1}=\frac{-x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Keďže je funkcia $f\in R_{\langle -1;1\rangle}$ nepárna, primitívnu funkciu nemusíme počítať.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,dx = 4$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin|x| \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=\sin|-x|=\sin|x|=f(x) \quad \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right] = 2\int_0^{\pi} \sin|x|\,dx = \left[\begin{array}{c} x\in\langle 0;\pi\rangle,\ |x|=x \\ \sin|x|=\sin x \end{array}\right]$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = -2\Big[\cos\pi - \cos 0\Big]$$

$$= -2\Big[-1-1\Big] = (-2)\cdot(-2) = 4.$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,\mathrm{d}x$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,dx$$

$$= \left[f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -1;1\rangle} \;\middle|\; g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1; 1\rangle \Rightarrow g \in R_{\langle -1;1\rangle} \right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \quad \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) \quad \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x)\Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4-\sin^3 4x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\begin{array}{l|l} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \qquad \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) \qquad \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x)\Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$=\int_{-1}^{1}x^4\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,\mathrm{d}x$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \qquad \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) \qquad \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\, dx - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\, dx = 2\int_0^1 x^4\, dx - 0$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \quad \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) \quad \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x)\Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,dx = 2\int_0^1 x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,dx = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\, dx = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\, dx - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\, dx = 2\int_{0}^{1} x^4\, dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x^2\, dx$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\,dx = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array} \right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\,dx = 2\int_0^1 x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ & \end{array} \right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,dx = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,dx = 2\int_0^1 x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4-\sin^3 4x)\,dx=\frac{2}{5}$$

$$=\left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$=\int_{-1}^{1}x^4\,dx-\int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,dx=2\int_{0}^{1}x^4\,dx-0=2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=2\left[\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right]=\frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x^2\,dx=0$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right]=0.$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - \sin^3 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \sin^3 4x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^4\,\mathrm{d}x - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2\,\mathrm{d}x = 0$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x) \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x^2\,\mathrm{d}x$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,dx = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,dx = 2\int_0^1 x^4\,dx - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2\,dx = 0$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x^2\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=x\cos x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ & \end{array}\right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4 - \sin^3 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x)\Rightarrow g \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^4\,\mathrm{d}x - 0 = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x^2\,\mathrm{d}x = 0$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x)\Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=x\cos x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\cos(-x)^2=-x\cos x^2=-f(x)\Rightarrow f \text{ je nepárna} \end{array}\right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-1}^{1}(x^4-\sin^3 4x)\,dx=\frac{2}{5}$$

$$=\left[\begin{array}{ll|ll} f(x)=x^4 \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -1;1\rangle} & g(x)=\sin^3 4x \text{ je spojitá na } \langle -1;1\rangle & \Rightarrow g\in R_{\langle -1;1\rangle} \\ f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x) & \Rightarrow f \text{ je párna} & g(-x)=\sin^3(-4x)=(-\sin 4x)^3=-\sin^3 4x=-g(x) & \Rightarrow g \text{ je nepárna}\end{array}\right]$$

$$=\int_{-1}^{1}x^4\,dx-\int_{-1}^{1}\sin^3 4x\,dx=2\int_{0}^{1}x^4\,dx-0=2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=2\left[\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right]=\frac{2}{5}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x^2\,dx=0$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=x\sin x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna}\end{array}\right]=0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x^2\,dx=0$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=x\cos x^2 \text{ je spojitá na } \langle -\pi;\pi\rangle & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\cos(-x)^2=-x\cos x^2=-f(x) & \Rightarrow f \text{ je nepárna}\end{array}\right]=0.$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi; 2\pi\rangle} \right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi;2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=x\sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -2\pi;2\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x) \\ \qquad\qquad =-x(-\sin x)=x\sin x=f(x)\Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right]=2\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi; 2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi;2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

$$= 2\Big[-x \cos x \Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[-x \cos x \Big]_{-2\pi}^{2\pi} + \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x \, dx$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi;2\pi\rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

$$= 2\Big[-x \cos x\Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 2\Big[-2\pi \cos 2\pi + 0 \cdot \cos 0\Big] + 2\Big[\sin x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[-x \cos x\Big]_{-2\pi}^{2\pi} + \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x \, dx$$

$$= \Big[-2\pi \cos 2\pi + (-2\pi) \cos(-2\pi)\Big] + \Big[\sin x\Big]_{-2\pi}^{2\pi}$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=x\sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -2\pi;2\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x) \\ \qquad =-x(-\sin x)=x\sin x=f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array}\right] = 2\int_0^{2\pi} x\sin x\, dx = \left[\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\sin x & v=-\cos x \end{array}\right]$$

$$= 2\Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = 2\Big[-2\pi\cos 2\pi + 0\cdot\cos 0\Big] + 2\Big[\sin x\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 2\Big[-2\pi\cdot 1 + 0\Big] + 2\Big[\sin 2\pi - \sin 0\Big]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\sin x & v=-\cos x \end{array}\right] = \Big[-x\cos x\Big]_{-2\pi}^{2\pi} + \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x\, dx$$

$$= \Big[-2\pi\cos 2\pi + (-2\pi)\cos(-2\pi)\Big] + \Big[\sin x\Big]_{-2\pi}^{2\pi}$$

$$= \Big[-2\pi\cdot 1 - 2\pi\cdot 1\Big] + \Big[\sin 2\pi - \sin(-2\pi)\Big]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx$$

$$=\begin{bmatrix} f(x)=x\sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi;2\pi\rangle \Rightarrow f\in R_{\langle -2\pi;2\pi\rangle} \\ f(-x)=-x\sin(-x) \\ \qquad =-x(-\sin x)=x\sin x=f(x)\Rightarrow f \text{ je párna}\end{bmatrix}=2\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx=\left[\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\sin x & v=-\cos x\end{array}\right]$$

$$=2\Big[-x\cos x\Big]_0^{2\pi}+2\int_0^{2\pi}\cos x\,dx=2\Big[-2\pi\cos 2\pi+0\cdot\cos 0\Big]+2\Big[\sin x\Big]_0^{2\pi}$$

$$=2\Big[-2\pi\cdot 1+0\Big]+2\Big[\sin 2\pi-\sin 0\Big]=-4\pi+2\Big[0-0\Big]$$

$$=\left[\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\sin x & v=-\cos x\end{array}\right]=\Big[-x\cos x\Big]_{-2\pi}^{2\pi}+\int_{-2\pi}^{2\pi}\cos x\,dx$$

$$=\Big[-2\pi\cos 2\pi+(-2\pi)\cos(-2\pi)\Big]+\Big[\sin x\Big]_{-2\pi}^{2\pi}$$

$$=\Big[-2\pi\cdot 1-2\pi\cdot 1\Big]+\Big[\sin 2\pi-\sin(-2\pi)\Big]=-4\pi+\Big[0-0\Big]$$

Integrovanie párnych a nepárnych funkcií

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx = -4\pi$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x) = x \sin x \text{ je spojitá na } \langle -2\pi; 2\pi \rangle \Rightarrow f \in R_{\langle -2\pi; 2\pi \rangle} \\ f(-x) = -x \sin(-x) \\ \qquad = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \Rightarrow f \text{ je párna} \end{array} \right] = 2 \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right]$$

$$= 2 \Big[-x \cos x \Big]_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 2 \Big[-2\pi \cos 2\pi + 0 \cdot \cos 0 \Big] + 2 \Big[\sin x \Big]_0^{2\pi}$$

$$= 2 \Big[-2\pi \cdot 1 + 0 \Big] + 2 \Big[\sin 2\pi - \sin 0 \Big] = -4\pi + 2 \Big[0 - 0 \Big] = -4\pi.$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = \Big[-x \cos x \Big]_{-2\pi}^{2\pi} + \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x \, dx$$

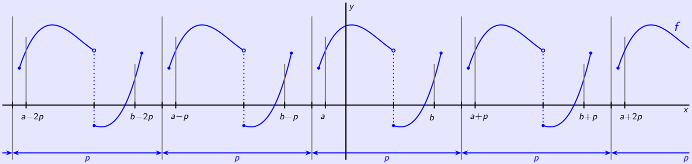
$$= \Big[-2\pi \cos 2\pi + (-2\pi) \cos(-2\pi) \Big] + \Big[\sin x \Big]_{-2\pi}^{2\pi}$$

$$= \Big[-2\pi \cdot 1 - 2\pi \cdot 1 \Big] + \Big[\sin 2\pi - \sin(-2\pi) \Big] = -4\pi + \Big[0 - 0 \Big] = -4\pi.$$

Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, f je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a;b\rangle$.

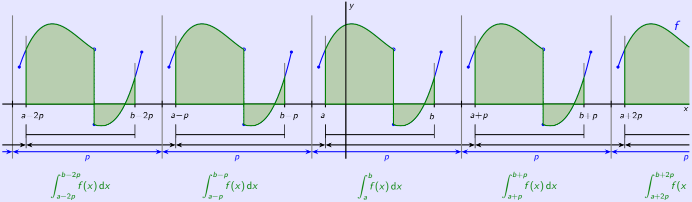


Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, f je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a;\, b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k \in Z$

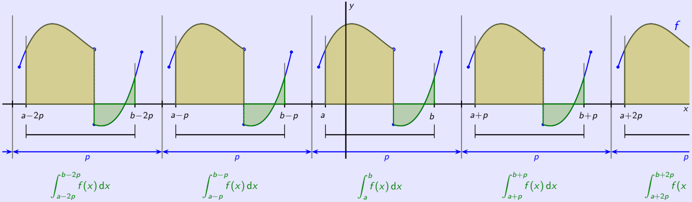


Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b \rangle}$, f je periodická s periódou $p > 0$,

t. j. $f(x+kp) = f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a; b \rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp; b+kp \rangle}$ pre všetky $k \in Z$

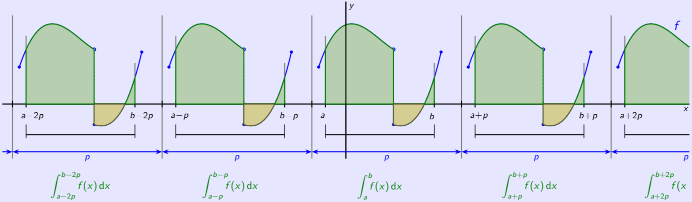


Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, f je periodická s periódou $p > 0$,

t. j. $f(x+kp) = f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a; b\rangle$.

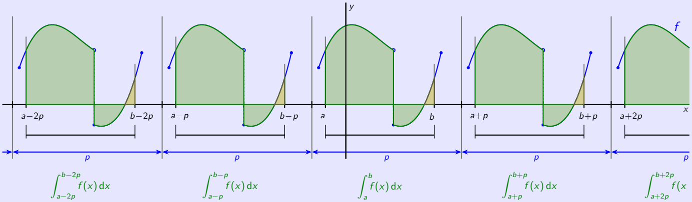
$\Rightarrow$ $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k \in Z$



Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, f je periodická s periódou $p>0$,
t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k \in Z$

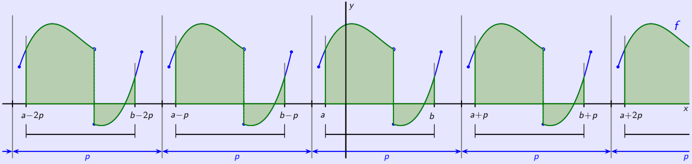


Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b \rangle}$, f je periodická s periódou $p > 0$,

t. j. $f(x+kp) = f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a; b \rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp; b+kp \rangle}$ pre všetky $k \in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx$.



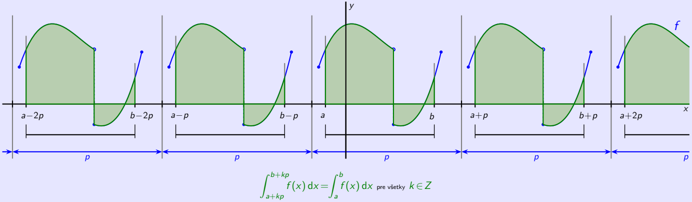
$\displaystyle\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ pre všetky $k \in Z$

Integrovanie periodických funkcií

$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, f je periodická s periódou $p>0$,
t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k \in Z$, $x \in \langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp) \in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k \in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx.$

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx$$



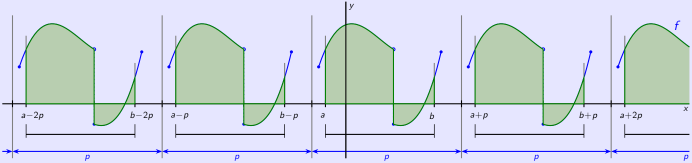
Integrovanie periodických funkcií

$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}$, f je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k\in Z$, $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp)\in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k\in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx.$

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx=\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.}\quad x=t+kp & x\in\langle a+kp;\,b+kp\rangle & x=b+kp\mapsto t=b\\ t=x-kp,\ \ dx=dt & t\in\langle a;\,b\rangle & x=a+kp\mapsto t=a\end{array}\right]$$



$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \text{ pre všetky } k\in Z$$

Integrovanie periodických funkcií

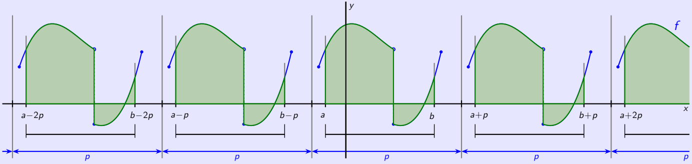
$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, f je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k\in Z$, $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp)\in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k\in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx.$

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad x=t+kp & x\in\langle a+kp;\,b+kp\rangle & x=b+kp \mapsto t=b \\ t=x-kp,\ \ dx=dt & t\in\langle a;\,b\rangle & x=a+kp\mapsto t=a \end{array}\right]$$

$$=\int_a^b f(t+kp)\,dt$$



$\displaystyle\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ pre všetky $k\in Z$

Integrovanie periodických funkcií

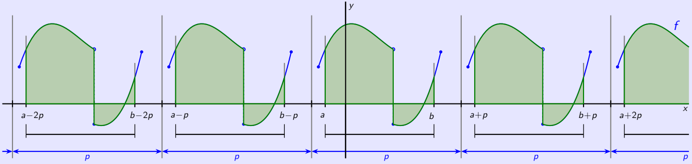
$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}$, f je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k\in Z$, $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp)\in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k\in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad x=t+kp & x\in\langle a+kp;\, b+kp\rangle & x=b+kp\mapsto t=b \\ t=x-kp,\ \ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t & t\in\langle a;\, b\rangle & x=a+kp\mapsto t=a \end{array}\right]$$

$$=\int_a^b f(t+kp)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$



$\displaystyle\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pre všetky $k\in Z$

Integrovanie periodických funkcií

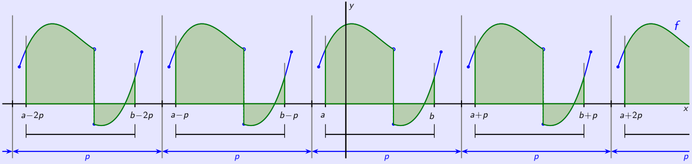
$f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$, f je periodická s periódou $p>0$,

t. j. $f(x+kp)=f(x)$ pre všetky $k\in Z$, $x\in\langle a;b\rangle$.

$\Rightarrow$ $f(x+kp)\in R_{\langle a+kp;b+kp\rangle}$ pre všetky $k\in Z$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx.$

$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad x=t+kp & x\in\langle a+kp;\, b+kp\rangle & x=b+kp \mapsto t=b \\ t=x-kp,\ dx=dt & t\in\langle a;\, b\rangle & x=a+kp \mapsto t=a \end{array}\right]$$

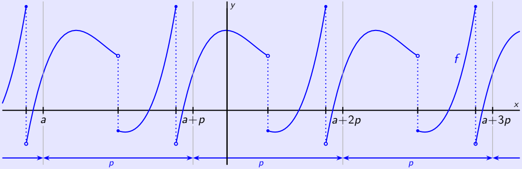
$$= \int_a^b f(t+kp)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx.$$



$\displaystyle\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ pre všetky $k\in Z$

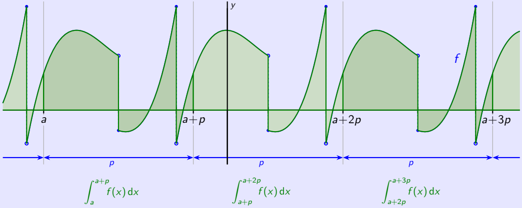
Integrovanie periodických funkcií

f je periodická s periódou $p>0$, $a \in R$.



Integrovanie periodických funkcií

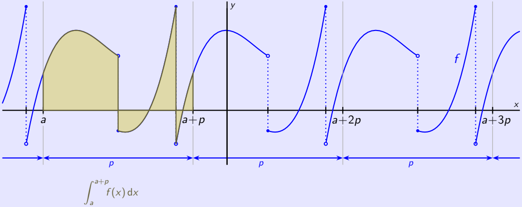
f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.



Integrovanie periodických funkcií

f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

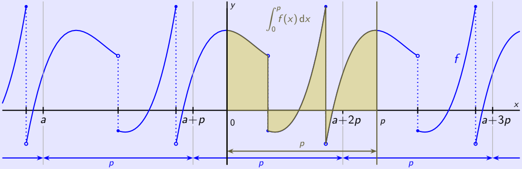
$f\in R_{\langle a;a+p\rangle}$



Integrovanie periodických funkcií

f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

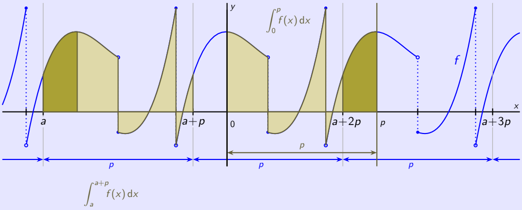
$$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \iff f\in R_{\langle 0;p\rangle}$$



Integrovanie periodických funkcií

f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

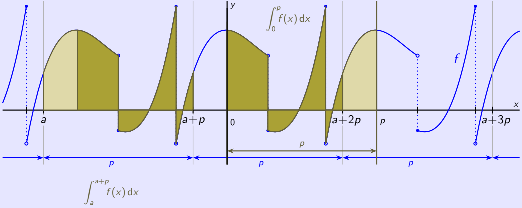
$$f \in R_{\langle a;a+p\rangle} \Leftrightarrow f \in R_{\langle 0;p\rangle}$$



Integrovanie periodických funkcií

f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

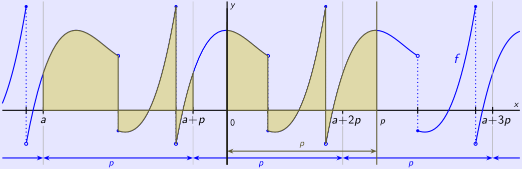
$$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \;\Leftrightarrow\; f\in R_{\langle 0;p\rangle}$$



Integrovanie periodických funkcií

f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \Leftrightarrow f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$



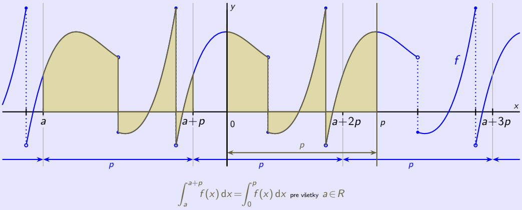
$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ pre všetky $a\in R$

Integrovanie periodických funkcií

f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \Leftrightarrow f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,dx=\int_a^{a+p} f(x)\,dx.$

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p;\, kp\rangle$.



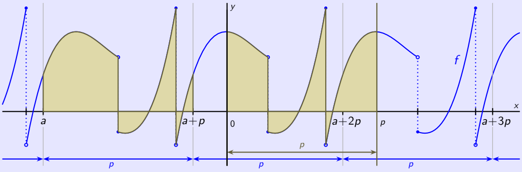
Integrovanie periodických funkcií

f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \Leftrightarrow f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,dx=\int_a^{a+p} f(x)\,dx.$

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p;kp\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,dx$$



$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_0^p f(x)\,dx$ pre všetky $a\in R$

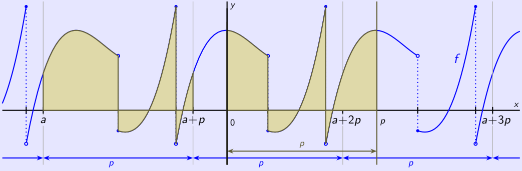
Integrovanie periodických funkcií

f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \Leftrightarrow f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p; kp\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{kp} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{kp}^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x$$



$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ pre všetky $a\in R$

Integrovanie periodických funkcií

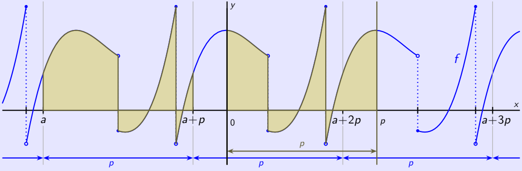
f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \Leftrightarrow f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p; kp\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{kp} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{kp}^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^{kp} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{kp-p}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$



$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ pre všetky $a\in R$

Integrovanie periodických funkcií

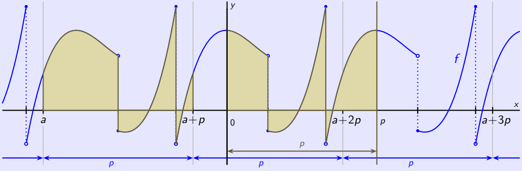
f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \Leftrightarrow f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,dx=\int_a^{a+p} f(x)\,dx.$

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p;\, kp\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_a^{kp} f(x)\,dx+\int_{kp}^{a+p} f(x)\,dx$$

$$=\int_a^{kp} f(x)\,dx+\int_{kp-p}^{a} f(x)\,dx=\int_{kp-p}^{kp} f(x)\,dx$$



$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_0^p f(x)\,dx$ pre všetky $a\in R$

Integrovanie periodických funkcií

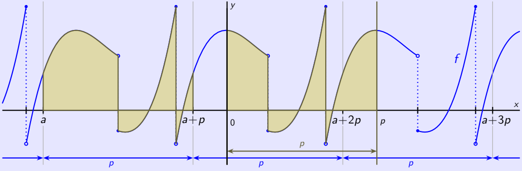
f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \Leftrightarrow f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,dx=\int_a^{a+p} f(x)\,dx$.

$k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p;kp\rangle$.

$$\Rightarrow \int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_a^{kp} f(x)\,dx+\int_{kp}^{a+p} f(x)\,dx$$

$$=\int_a^{kp} f(x)\,dx+\int_{kp-p}^{a} f(x)\,dx=\int_{kp-p}^{kp} f(x)\,dx=\int_0^p f(x)\,dx.$$

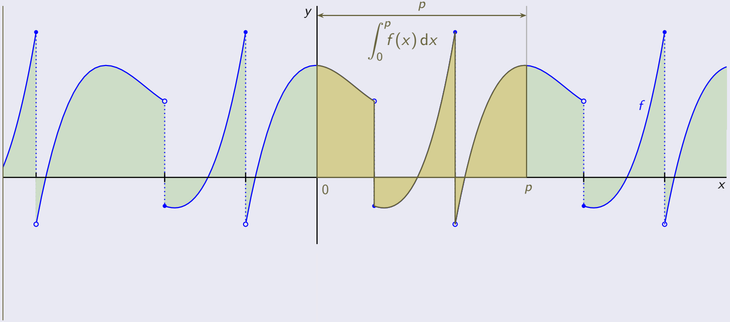


$\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,dx=\int_0^p f(x)\,dx$ pre všetky $a\in R$

Integrovanie periodických funkcií

f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R$.

$f\in R_{\langle a;a+p\rangle} \quad\Leftrightarrow\quad f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ a pokiaľ existujú, platí $\displaystyle\int_0^p f(x)\,dx=\int_a^{a+p} f(x)\,dx.$



Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

Integrovanie periodických funkcií

$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx$ $\qquad a\in R,\ n\in N$

$= \left[f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \right]$

$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx$ $\qquad a\in R,\ n\in N$

$= \left[f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \right]$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right]$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2nx)}{2}\right] dx$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2nx)}{2}\right] dx$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx = \left[\frac{x}{2}+\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi}$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle}\end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2}-\frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n}-\frac{0}{2}+\frac{\sin 0}{4n}$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle}\end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx = \left[\frac{x}{2}+\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2}+\frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n}-\frac{0}{2}-\frac{\sin 0}{4n}$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2}-\frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n}-\frac{0}{2}+\frac{\sin 0}{4n}$$

$$=\pi-0-0+0$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$=\left[\begin{array}{l} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R \ \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos(2nx)}{2}\right]dx = \left[\frac{x}{2}+\frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2}+\frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n}-\frac{0}{2}-\frac{\sin 0}{4n}$$

$$=\pi+0-0-0$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{matrix} f(x)=\sin^2(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle}\end{matrix}\right] = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2nx)}{2}\right] dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} - \frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n} - \frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4n}$$

$$= \pi - 0 - 0 + 0 = \pi.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{matrix} f(x)=\cos^2(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle}\end{matrix}\right] = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2nx)}{2}\right] dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} + \frac{\sin(2n\cdot 2\pi)}{4n} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4n}$$

$$= \pi + 0 - 0 - 0 = \pi.$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx)\, dx \qquad a \in R,\ m, n \in N,\ m \neq n$$

$$= \left[f(x) = \sin(mx) \cdot \sin(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f \in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx)\, dx \qquad a \in R,\ m, n \in N,\ m \neq n$$

$$= \begin{bmatrix} f(x) = \sin(mx) \cdot \sin(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f \in R_{\langle a; a+2\pi \rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \qquad \Rightarrow f \in R_{\langle 0; 2\pi \rangle} \end{bmatrix}$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] dx$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi}$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \quad\Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0-0-0+0\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0-0-0+0\right] = 0.$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \quad \Rightarrow & f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0-0-0+0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\Big]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[0-0-0+0\Big] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\sin(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ \ \end{array}\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0-0-0+0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0-0-0+0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \qquad \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0-0-0+0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\sin(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \qquad \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = \left[\begin{array}{c} f \text{ je} \\ \text{nepárna} \end{array}\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\sin(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} + \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0-0-0+0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = \left[\begin{array}{c} f \text{ je} \\ \text{nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_{a}^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right]dx$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \begin{bmatrix} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \qquad \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\big]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi}$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \qquad \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$=\left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R & \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle}\end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}+\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n}+\frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n}-\frac{\sin 0}{m-n}-\frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[0+0-0-0\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\big]\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[0+0-0-0\Big] = 0.$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \begin{bmatrix} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+0-0-0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m, n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+0-0-0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\sin(nx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ \ \end{array}\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+0-0-0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(nx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m, n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle}\end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+0-0-0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(nx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle}\end{array}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \quad \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+0-0-0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{l} f(x)=\sin(nx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi \quad \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx = \left[\begin{array}{c} f \text{ je} \\ \text{nepárna} \end{array}\right]$$

Integrovanie periodických funkcií

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ m,n\in N,\ m\neq n$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\cos(mx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle 0;2\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\cdot 2\pi}{m-n} + \frac{\sin(m+n)\cdot 2\pi}{m+n} - \frac{\sin 0}{m-n} - \frac{\sin 0}{m+n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0+0-0-0\right] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx = 0 \qquad a\in R,\ n\in N$$

$$= \left[\begin{array}{ll} f(x)=\sin(nx)\cdot\cos(nx) \text{ je spojitá na } R \Rightarrow & f\in R_{\langle a;a+2\pi\rangle} \\ f(x) \text{ je periodická s periódou } 2\pi & \Rightarrow f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle} \end{array}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cdot\cos(nx)\,dx = \left[\begin{array}{c} f \text{ je} \\ \text{nepárna} \end{array}\right] = 0.$$

Koniec 11. časti

Ďakujem za pozornosť.