

Matematická analýza 1

2023/2024

9. Priebeh funkcie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou  získate nápomoc.

Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

- 1 Monotónnosť funkcie
- 2 Lokálne a globálne extrémny funkcie
- 3 Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''
- 4 Konvexnosť a konkávnosť funkcie
- 5 Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$
- 6 Asymptotické vlastnosti funkcií
- 7 Vyšetrenie priebehu funkcie

Monotónnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, $f'(x)$ konečná pre všetky $x \in I$.



Monotónnosť funkcie

f spojitá na I , $I \subset D(f)$ interval, $f'(x)$ konečná pre všetky $x \in I$.

Funkcia f je na intervale I :



Monotónnosť funkcie

f spojitá na I , $I \subset D(f)$ interval, $f'(x)$ konečná pre všetky $x \in I$.

Funkcia f je na intervale I :

konštantná

$$\Leftrightarrow f'(x) = 0$$

pre všetky $x \in I$,

Monotónnosť funkcie

f spojitá na I , $I \subset D(f)$ interval, $f'(x)$ konečná pre všetky $x \in I$.

Funkcia f je na intervale I :

konštantná

$$\Leftrightarrow f'(x) = 0$$

pre všetky $x \in I$,

rastúca

$$\Leftrightarrow f'(x) > 0$$

pre všetky $x \in I$,

Monotónnosť funkcie

f spojitá na I , $I \subset D(f)$ interval, $f'(x)$ konečná pre všetky $x \in I$.

Funkcia f je na intervale I :

konštantná $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ pre všetky $x \in I$,

klesajúca $\Leftrightarrow f'(x) < 0$ pre všetky $x \in I$.

Monotónnosť funkcie

f spojitá na I , $I \subset D(f)$ interval, $f'(x)$ konečná pre všetky $x \in I$.

Funkcia f je na intervale I :

konštantná $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ pre všetky $x \in I$,

neklesajúca $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ pre všetky $x \in I$,

Monotónnosť funkcie

f spojitá na I , $I \subset D(f)$ interval, $f'(x)$ konečná pre všetky $x \in I$.

Funkcia f je na intervale I :

konštantná $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ pre všetky $x \in I$,

nerastúca $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ pre všetky $x \in I$.

Monotónnosť funkcie

f spojitá na I , $I \subset D(f)$ interval, $f'(x)$ konečná pre všetky $x \in I$.

Funkcia f je na intervale I :

konštantná $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ pre všetky $x \in I$,

rastúca[☹] [resp. neklesajúca] $\Leftrightarrow f'(x) > 0$ [☹] [resp. $f'(x) \geq 0$] pre všetky $x \in I$,

klesajúca[☹] [resp. nerastúca] $\Leftrightarrow f'(x) < 0$ [☹] [resp. $f'(x) \leq 0$] pre všetky $x \in I$.

Monotónnosť funkcie

f spojitá na I , $I \subset D(f)$ interval, $f'(x)$ konečná pre všetky $x \in I$.

Funkcia f je na intervale I :

konštantná $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ pre všetky $x \in I$,

rastúca^o [resp. neklesajúca] $\Leftrightarrow f'(x) > 0$ ^o [resp. $f'(x) \geq 0$] pre všetky $x \in I$,

klesajúca^o [resp. nerastúca] $\Leftrightarrow f'(x) < 0$ ^o [resp. $f'(x) \leq 0$] pre všetky $x \in I$.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $O(x_0)$ okolie $[x_0 \text{ je stacionárny bod}]$.



Lokálne a globálne extrémny funkcie

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

$$x_0 \in D(f), f'(x_0) = 0, O(x_0) \text{ okolie } [x_0 \text{ je stacionárny bod}].$$

Pre všetky $x \in O(x_0)$ platí:



Lokálne a globálne extrémny funkcie

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

$$x_0 \in D(f), f'(x_0) = 0, O(x_0) \text{ okolie } [x_0 \text{ je stacionárny bod}].$$

Pre všetky $x \in O(x_0)$ platí:

$$f'(x) > 0 \text{ pre } x < x_0, \quad f'(x) < 0 \text{ pre } x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \text{ je ostré lokálne max.}$$



Lokálne a globálne extrémny funkcie

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

$$x_0 \in D(f), f'(x_0) = 0, O(x_0) \text{ okolie } [x_0 \text{ je stacionárny bod}].$$

Pre všetky $x \in O(x_0)$ platí:

$$f'(x) < 0 \text{ pre } x < x_0, \quad f'(x) > 0 \text{ pre } x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \text{ je ostré lokálne min.}$$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

$$x_0 \in D(f), f'(x_0) = 0, O(x_0) \text{ okolie } [x_0 \text{ je stacionárny bod}].$$

Pre všetky $x \in O(x_0)$ platí:



$f'(x) > 0$ pre $x \neq x_0$, resp. $f'(x) < 0$ pre $x \neq x_0 \Rightarrow f(x_0)$ nie je lokálny extrém.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

$$x_0 \in D(f), f'(x_0) = 0, O(x_0) \text{ okolie } [x_0 \text{ je stacionárny bod}].$$

Pre všetky $x \in O(x_0)$ platí:

$$f'(x) > 0 \text{ pre } x < x_0, \quad f'(x) < 0 \text{ pre } x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \text{ je ostré lokálne max.}$$

$$f'(x) < 0 \text{ pre } x < x_0, \quad f'(x) > 0 \text{ pre } x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \text{ je ostré lokálne min.}$$

$$f'(x) > 0 \text{ pre } x \neq x_0, \text{ resp. } f'(x) < 0 \text{ pre } x \neq x_0 \Rightarrow f(x_0) \text{ nie je lokálny extrém.}$$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

$$x_0 \in D(f), f'(x_0) = 0, O(x_0) \text{ okolie } [x_0 \text{ je stacionárny bod}].$$

Pre všetky $x \in O(x_0)$ platí:

$$f'(x) > 0 \text{ pre } x < x_0, \quad f'(x) < 0 \text{ pre } x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \text{ je ostré lokálne max.}$$

$$f'(x) < 0 \text{ pre } x < x_0, \quad f'(x) > 0 \text{ pre } x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \text{ je ostré lokálne min.}$$

$$f'(x) > 0 \text{ pre } x \neq x_0, \text{ resp. } f'(x) < 0 \text{ pre } x \neq x_0 \Rightarrow f(x_0) \text{ nie je lokálny extrém.}$$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f ,



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod funkcie f** ,

ak v bode x_0 existuje derivácia f a platí $f'(x_0) = 0$.



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod funkcie f** ,

ak v bode x_0 existuje derivácia f a platí $f'(x_0) = 0$.

Lokálne extrémny funkcie f :

Globálne extrémny funkcie f :

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f ,

ak v bode x_0 existuje derivácia f a platí $f'(x_0) = 0$.

Lokálne extrémny funkcie f :

- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
pre ktoré $f'(x_0) = 0$
a overiť, či v nich nie sú extrémny.

Globálne extrémny funkcie f :

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod funkcie f** ,

ak v bode x_0 existuje derivácia f a platí $f'(x_0) = 0$.

Lokálne extrémny funkcie f :

- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
pre ktoré $f'(x_0) = 0$
a overiť, či v nich nie sú extrémny.
- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
v ktorých $f'(x_0)$ neexistuje
a overiť, či v nich nie sú extrémny.

Globálne extrémny funkcie f :

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod funkcie f** ,

ak v bode x_0 existuje derivácia f a platí $f'(x_0) = 0$.

Lokálne extrémny funkcie f :

- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
pre ktoré $f'(x_0) = 0$
a overiť, či v nich nie sú extrémny.
- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
v ktorých $f'(x_0)$ neexistuje
a overiť, či v nich nie sú extrémny.

Globálne extrémny funkcie f :

- Určiť lokálne extrémny funkcie f .

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod funkcie f** ,

ak v bode x_0 existuje derivácia f a platí $f'(x_0) = 0$.

Lokálne extrémny funkcie f :

- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
pre ktoré $f'(x_0) = 0$
a overiť, či v nich nie sú extrémny.
- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
v ktorých $f'(x_0)$ neexistuje
a overiť, či v nich nie sú extrémny.

Globálne extrémny funkcie f :

- Určiť **lokálne extrémny funkcie f** .
- Overiť funkčné hodnoty $f(x)$
v **hraničných bodoch $x \in D(f)$**
a porovnať tieto hodnoty
s lokálnymi extrémami.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod funkcie f** ,

ak v bode x_0 existuje derivácia f a platí $f'(x_0) = 0$.

Lokálne extrémny funkcie f :

- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
pre ktoré $f'(x_0) = 0$
a overiť, či v nich nie sú extrémny.
- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
v ktorých $f'(x_0)$ neexistuje
a overiť, či v nich nie sú extrémny.

Globálne extrémny funkcie f :

- Určiť **lokálne extrémny funkcie f** .
- Overiť funkčné hodnoty $f(x)$
v **hraničných bodoch $x \in D(f)$**
a porovnať tieto hodnoty
s lokálnymi extrémami.

f je spojitá a rýdzo monotónna (rastúca resp. klesajúca) na intervale I ,

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod funkcie f** ,

ak v bode x_0 existuje derivácia f a platí $f'(x_0) = 0$.

Lokálne extrémny funkcie f :

- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
pre ktoré $f'(x_0) = 0$
a overiť, či v nich nie sú extrémny.
- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
v ktorých $f'(x_0)$ neexistuje
a overiť, či v nich nie sú extrémny.

Globálne extrémny funkcie f :

- Určiť **lokálne extrémny funkcie f** .
- Overiť funkčné hodnoty $f(x)$
v **hraničných bodoch $x \in D(f)$**
a porovnať tieto hodnoty
s lokálnymi extrémami.

f je spojitá a rýdzo monotónna (rastúca resp. klesajúca) na intervale I ,

potom môže pre nejaké $x \in I$ platíť $f'(x) = 0$.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod funkcie f** ,

ak v bode x_0 existuje derivácia f a platí $f'(x_0) = 0$.

Lokálne extrémny funkcie f :

- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
pre ktoré $f'(x_0) = 0$
a overiť, či v nich nie sú extrémny.
- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
v ktorých $f'(x_0)$ neexistuje
a overiť, či v nich nie sú extrémny.

Globálne extrémny funkcie f :

- Určiť **lokálne extrémny funkcie f** .
- Overiť funkčné hodnoty $f(x)$
v **hraničných bodoch $x \in D(f)$**
a porovnať tieto hodnoty
s lokálnymi extrémami.

f je spojitá a rýdzo monotónna (rastúca resp. klesajúca) na intervale I ,

potom môže pre nejaké $x \in I$ platíť $f'(x) = 0$.

Môžu to byť iba jednotlivé izolované body,

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod funkcie f** ,

ak v bode x_0 existuje derivácia f a platí $f'(x_0) = 0$.

Lokálne extrémny funkcie f :

- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
pre ktoré $f'(x_0) = 0$
a overiť, či v nich nie sú extrémny.
- Určiť všetky body $x_0 \in D(f)$,
v ktorých $f'(x_0)$ neexistuje
a overiť, či v nich nie sú extrémny.

Globálne extrémny funkcie f :

- Určiť lokálne extrémny funkcie f .
- Overiť funkčné hodnoty $f(x)$
v hraničných bodoch $x \in D(f)$
a porovnať tieto hodnoty
s lokálnymi extrémami.

f je spojitá a rýdzo monotónna (rastúca resp. klesajúca) na intervale I ,

potom môže pre nejaké $x \in I$ platíť $f'(x) = 0$.

Môžu to byť iba jednotlivé izolované body, ale nemôžu tvoriť interval!

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4(1+x)} \right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4(1+x)} \right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $x(2+x) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x=-2$.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4(1+x)} \right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $x(2+x) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x=-2$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$,

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4(1+x)} \right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $x(2+x) = 0$, t. j. $x = 0$, resp. $x = -2$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $4(1+x)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-2) = 0, \quad f'(0) = 0,$$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4(1+x)} \right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $x(2+x) = 0$, t. j. $x = 0$, resp. $x = -2$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $4(1+x)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-2) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad -1 \notin D(f),$$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4(1+x)} \right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $x(2+x) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x=-2$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $4(1+x)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-2) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad -1 \notin D(f),$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4(1+x)} \right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

príčom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $x(2+x) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x=-2$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $4(1+x)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-2) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad -1 \notin D(f),$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4(1-3)^2} > 0$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4(1-\frac{3}{2})^2} < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4(1-\frac{1}{2})^2} < 0$	$f'(1) = \frac{2+1}{4(1+1)^2} > 0$

[Na zistenie znamienka funkcie f' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4(1+x)} \right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

príčom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $x(2+x) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x=-2$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $4(1+x)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-2) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad -1 \notin D(f),$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4(1-3)^2} > 0$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4(1-\frac{3}{2})^2} < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4(1-\frac{1}{2})^2} < 0$	$f'(1) = \frac{2+1}{4(1+1)^2} > 0$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

[Na zistenie znamienka funkcie f' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4(1+x)} \right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

príčom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $x(2+x) = 0$, t. j. $x = 0$, resp. $x = -2$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $4(1+x)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-2) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad -1 \notin D(f),$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4(1-3)^2} > 0$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4(1-3)^2} < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4(1-3)^2} < 0$	$f'(1) = \frac{2+1}{4(1+1)^2} > 0$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
↗ f rastie ↗	↘ f klesá ↘	↘ f klesá ↘	↗ f rastie ↗

[Na zistenie znamienka funkcie f' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4(1+x)} \right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

príčom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $x(2+x) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x=-2$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $4(1+x)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-2) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad -1 \notin D(f),$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4(1-3)^2} > 0$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4(1-\frac{3}{2})^2} < 0$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4(1-\frac{1}{2})^2} < 0$	$f'(1) = \frac{2+1}{4(1+1)^2} > 0$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
↗ f rastie ↗	↘ f klesá ↘	↘ f klesá ↘	↗ f rastie ↗
$f(-2) = -1$ je lokálne max		$f(0) = 0$ je lokálne min	

[Na zistenie znamienka funkcie f' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2} \right]' = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2} \right]' = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $4(1-x)(1+x) = 0$, t. j. $x = \pm 1$.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2} \right]' = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $4(1-x)(1+x) = 0$, t. j. $x = \pm 1$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$,

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2} \right]' = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $4(1-x)(1+x) = 0$, t. j. $x = \pm 1$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-1) = 0, \quad f'(1) = 0,$$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2} \right]' = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $4(1-x)(1+x) = 0$, t. j. $x = \pm 1$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-1) = 0, \quad f'(1) = 0,$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2} \right]' = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $4(1-x)(1+x) = 0$, t. j. $x = \pm 1$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-1) = 0, \quad f'(1) = 0,$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4 \cdot (1-4)}{(1+4)^2} < 0$	$f'(0) = \frac{4 \cdot (1-0)}{(1+0)^2} > 0$	$f'(2) = \frac{4 \cdot (1-4)}{(1+4)^2} < 0$

[Na zistenie znamienka funkcie f' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2} \right]' = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $4(1-x)(1+x) = 0$, t. j. $x = \pm 1$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-1) = 0, \quad f'(1) = 0,$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4 \cdot (1-4)}{(1+4)^2} < 0$	$f'(0) = \frac{4 \cdot (1-0)}{(1+0)^2} > 0$	$f'(2) = \frac{4 \cdot (1-4)}{(1+4)^2} < 0$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$

[Na zistenie znamienka funkcie f' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2} \right]' = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $4(1-x)(1+x) = 0$, t. j. $x = \pm 1$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-1) = 0, \quad f'(1) = 0,$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4 \cdot (1-4)}{(1+4)^2} < 0$	$f'(0) = \frac{4 \cdot (1-0)}{(1+0)^2} > 0$	$f'(2) = \frac{4 \cdot (1-4)}{(1+4)^2} < 0$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
↘ f klesá ↘	↗ f rastie ↗	↘ f klesá ↘

[Na zistenie znamienka funkcie f' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2} \right]' = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} \text{ pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $4(1-x)(1+x) = 0$, t. j. $x = \pm 1$.

Funkcia f' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^2 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-1) = 0, \quad f'(1) = 0,$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4 \cdot (1-4)}{(1+4)^2} < 0$	$f'(0) = \frac{4 \cdot (1-0)}{(1+0)^2} > 0$	$f'(2) = \frac{4 \cdot (1-4)}{(1+4)^2} < 0$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
↘ f klesá ↘	↗ f rastie ↗	↘ f klesá ↘
$f(-1) = -2$ je lokálne min	$f(1) = 1$ je lokálne max	

[Na zistenie znamienka funkcie f' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Funkcia f' je spojitá,



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$,



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,



Lokálne a globálne extrémym funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémym



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne, nemá globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémny (ani lokálne a ani globálne).

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne, nemá globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémny (ani lokálne a ani globálne).

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne, nemá globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémny (ani lokálne a ani globálne).

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne, nemá globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémny (ani lokálne a ani globálne).

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne, nemá globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémny (ani lokálne a ani globálne).

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Funkcia f' je spojitá,



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne, nemá globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémny (ani lokálne a ani globálne).

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$,

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne, nemá globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémny (ani lokálne a ani globálne).

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne, nemá globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémny (ani lokálne a ani globálne).

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ je uzavretá,

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne, nemá globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémny (ani lokálne a ani globálne).

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ je uzavretá,

t. j. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ je globálne minimum,

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne, nemá globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémny (ani lokálne a ani globálne).

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ je uzavretá,

t. j. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ je globálne minimum, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ je globálne maximum.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne, nemá globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ je otvorená,

t. j. f nemá extrémny (ani lokálne a ani globálne).

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ nemá lokálne, má globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$ je uzavretá,

t. j. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ je globálne minimum, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ je globálne maximum.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$,



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

Funkcia f' je spojitá,



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$,



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ je zľava otvorená a sprava uzavretá,



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ je zľava otvorená a sprava uzavretá,

t. j. f nemá lokálne a globálne minimum,



Lokálne a globálne extrémny funkcie

$$f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$,

$$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in D(f'), \text{ pričom } D(f') = D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ je zľava otvorená a sprava uzavretá,

t. j. f nemá lokálne a globálne minimum, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ je globálne maximum. 

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (0; \frac{\pi}{4})$ nemá lokálne, má globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$ je zľava otvorená a sprava uzavretá,

t. j. f nemá lokálne a globálne minimum, $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ je globálne maximum. 

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (0; \frac{\pi}{4})$ nemá lokálne, má globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$ je zľava otvorená a sprava uzavretá,

t. j. f nemá lokálne a globálne minimum, $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ je globálne maximum.

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in R - Q \end{cases}$$

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (0; \frac{\pi}{4})$ nemá lokálne, má globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$,


$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$ je zľava otvorená a sprava uzavretá,

t. j. f nemá lokálne a globálne minimum, $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ je globálne maximum. 

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in R - Q \end{cases}$$

Funkcia $\chi(x)$ nemá deriváciu v žiadnom bode $x \in D(\chi) = R$, 

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (0; \frac{\pi}{4})$ nemá lokálne, má globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$ je zľava otvorená a sprava uzavretá,

t. j. f nemá lokálne a globálne minimum, $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ je globálne maximum. ☞

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in R - Q \end{cases}$$

Funkcia $\chi(x)$ nemá deriváciu v žiadnom bode $x \in D(\chi) = R$, ☞

t. j. jej extrémny nezistíme pomocou derivácie $\chi'(x)$.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (0; \frac{\pi}{4})$ nemá lokálne, má globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$ je zľava otvorená a sprava uzavretá,

t. j. f nemá lokálne a globálne minimum, $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ je globálne maximum.

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in R - Q \end{cases}$$

Funkcia $\chi(x)$ nemá deriváciu v žiadnom bode $x \in D(\chi) = R$,

t. j. jej extrémny nezistíme pomocou derivácie $\chi'(x)$.

$\chi(x) = 0$ pre $x \in R - Q$ je lokálne a aj globálne minimum,

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (0; \frac{\pi}{4})$ nemá lokálne, má globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$ je zľava otvorená a sprava uzavretá,

t. j. f nemá lokálne a globálne minimum, $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ je globálne maximum. ☞

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in R - Q \end{cases}$$

Funkcia $\chi(x)$ nemá deriváciu v žiadnom bode $x \in D(\chi) = R$,

t. j. jej extrémny nezistíme pomocou derivácie $\chi'(x)$.

$\chi(x) = 0$ pre $x \in R - Q$ je lokálne a aj globálne minimum,

$\chi(x) = 1$ pre $x \in Q$ je lokálne a aj globálne maximum.

Lokálne a globálne extrémny funkcie

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (0; \frac{\pi}{4})$ nemá lokálne, má globálne extrémny.

Funkcia f je spojitá na celom $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$,

$f'(x) = [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in D(f')$, pričom $D(f') = D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$.

Funkcia f' je spojitá, $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$ pre všetky $x \in D(f')$, t. j. f je rastúca.

Množina $D(f) = (0; \frac{\pi}{4})$ je zľava otvorená a sprava uzavretá,

t. j. f nemá lokálne a globálne minimum, $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ je globálne maximum. ☞

$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in R - Q \end{cases}$ má lokálne, má globálne extrémny.

Funkcia $\chi(x)$ nemá deriváciu v žiadnom bode $x \in D(\chi) = R$, ☞

t. j. jej extrémny nezistíme pomocou derivácie $\chi'(x)$.

$\chi(x) = 0$ pre $x \in R - Q$ je lokálne a aj globálne minimum,

$\chi(x) = 1$ pre $x \in Q$ je lokálne a aj globálne maximum.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$$f(x) = -x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}$$

Vyšetovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3(x+1)(x-\frac{1}{3})$, $x \in \mathbb{R}$,

f' je spojitá na \mathbb{R} ,

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3(x+1)(x-\frac{1}{3})$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -6x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

f' je spojitá na \mathbb{R} ,

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3(x+1)(x-\frac{1}{3})$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -6x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$ (stacionárne body).

f' je spojitá na \mathbb{R} , na $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$ nemení znamienko.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3(x+1)(x-\frac{1}{3})$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -6x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$ (stacionárne body).

f' je spojitá na \mathbb{R} , na $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$ nemení znamienko.

$x \in (-\infty; -1)$:

$x \in (-1; \frac{1}{3})$:

$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$:

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3(x+1)(x-\frac{1}{3})$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -6x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$ (stacionárne body).

f' je spojitá na \mathbb{R} , na $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$ nemení znamienko.

$x \in (-\infty; -1)$: $f'(-2) = -7$,

$x \in (-1; \frac{1}{3})$: $f'(0) = 1$,

$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f'(1) = -4$,

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3(x+1)(x-\frac{1}{3})$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -6x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$ (stacionárne body).

f' je spojitá na \mathbb{R} , na $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$ nemení znamienko.

$x \in (-\infty; -1)$: $f'(-2) = -7$, $f'(x) < 0$, f klesá

$x \in (-1; \frac{1}{3})$: $f'(0) = 1$, $f'(x) > 0$, f rastie

$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f'(1) = -4$, $f'(x) < 0$, f klesá

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3(x+1)(x-\frac{1}{3})$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -6x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$ (stacionárne body).

$f''(-1) = 4 > 0$, t. j. $f(-1) = -1$ je lokálne minimum,

f' je spojitá na \mathbb{R} , na $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$ nemení znamienko.

$x \in (-\infty; -1)$: $f'(-2) = -7$, $f'(x) < 0$, f klesá } $f(-1) = -1$ je lokálne min.

$x \in (-1; \frac{1}{3})$: $f'(0) = 1$, $f'(x) > 0$, f rastie

$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f'(1) = -4$, $f'(x) < 0$, f klesá

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3(x+1)(x-\frac{1}{3})$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -6x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$ (stacionárne body).

$f''(-1) = 4 > 0$, t.j. $f(-1) = -1$ je lokálne minimum,

$f''(\frac{1}{3}) = -4 < 0$, t.j. $f(\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$ je lokálne maximum.

f' je spojitá na \mathbb{R} , na $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$ nemení znamienko.

$x \in (-\infty; -1)$: $f'(-2) = -7$, $f'(x) < 0$, f klesá } $f(-1) = -1$ je lokálne min.

$x \in (-1; \frac{1}{3})$: $f'(0) = 1$, $f'(x) > 0$, f rastie

$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f'(1) = -4$, $f'(x) < 0$, f klesá } $f(\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$ je lokálne max.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ je konečná.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne maximum,

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ je ostré lokálne minimum.

$f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$ nemá lokálne, má globálne extrém.

$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3(x+1)(x-\frac{1}{3})$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -6x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$ (stacionárne body).

$f''(-1) = 4 > 0$, t.j. $f(-1) = -1$ je lokálne minimum,

$f''(\frac{1}{3}) = -4 < 0$, t.j. $f(\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$ je lokálne maximum.

f' je spojitá na \mathbb{R} , na $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$ nemení znamienko.

$x \in (-\infty; -1)$: $f'(-2) = -7$, $f'(x) < 0$, f klesá } $f(-1) = -1$ je lokálne min.

$x \in (-1; \frac{1}{3})$: $f'(0) = 1$, $f'(x) > 0$, f rastie }

$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f'(1) = -4$, $f'(x) < 0$, f klesá } $f(\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$ je lokálne max.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \left\{ \right.$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle,$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ & \text{pre} \end{cases}$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle,$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ \end{cases}$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ & \text{pre } \end{cases}$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -1):$$

$$x \in \langle -1; 1 \rangle:$$

$$x \in (1; \infty):$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -1): f'(x) = 4x < 0,$$

$$x \in \langle -1; 1 \rangle: f'(x) = 0,$$

$$x \in (1; \infty): f'(x) = 4x > 0,$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -1): f'(x) = 4x < 0, f \text{ klesá}$$

$$x \in \langle -1; 1 \rangle: f'(x) = 0, f = 2 \text{ (konšt.)}$$

$$x \in (1; \infty): f'(x) = 4x > 0, f \text{ rastie}$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -1): f'(x) = 4x < 0, f \text{ klesá}$$

$$x \in \langle -1; 1 \rangle: f'(x) = 0, f = 2 \text{ (konšt.)}$$

$$x \in (1; \infty): f'(x) = 4x > 0, f \text{ rastie}$$

pre každé $x \in \langle -1; 1 \rangle$
je
 $f(x)$ neostré lokálne minimum.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1): f'(x) = 4x < 0, f \text{ klesá} \\ x \in \langle -1; 1 \rangle: f'(x) = 0, f = 2 \text{ (konšt.)} \\ x \in (1; \infty): f'(x) = 4x > 0, f \text{ rastie} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pre každé } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ \text{je} \\ f(x) \text{ neostré lokálne minimum.} \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1): f'(x) = 4x < 0, f \text{ klesá} \\ x \in \langle -1; 1 \rangle: f'(x) = 0, f = 2 \text{ (konšt.)} \\ x \in (1; \infty): f'(x) = 4x > 0, f \text{ rastie} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pre každé } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ \text{je} \\ f(x) \text{ neostré lokálne minimum.} \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$,

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1): f'(x) = 4x < 0, f \text{ klesá} \\ x \in \langle -1; 1 \rangle: f'(x) = 0, f = 2 \text{ (konšt.)} \\ x \in (1; \infty): f'(x) = 4x > 0, f \text{ rastie} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pre každé } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ \text{je} \\ f(x) \text{ neostre lokálne minimum.} \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ je spojitá.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1): f'(x) = 4x < 0, f \text{ klesá} \\ x \in \langle -1; 1 \rangle: f'(x) = 0, f = 2 \text{ (konšt.)} \\ x \in (1; \infty): f'(x) = 4x > 0, f \text{ rastie} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pre každé } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ \text{je} \\ f(x) \text{ neostre lokálne minimum.} \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ je spojitá.

$$f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}\right) + 1 - \frac{3}{9}$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1): f'(x) = 4x < 0, f \text{ klesá} \\ x \in \langle -1; 1 \rangle: f'(x) = 0, f = 2 \text{ (konšt.)} \\ x \in (1; \infty): f'(x) = 4x > 0, f \text{ rastie} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pre každé } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ \text{je} \\ f(x) \text{ neostre lokálne minimum.} \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ je spojitá.

$$f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}\right) + 1 - \frac{3}{9} = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0 \text{ pre všetky } x \in \mathbb{R},$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1): f'(x) = 4x < 0, f \text{ klesá} \\ x \in \langle -1; 1 \rangle: f'(x) = 0, f = 2 \text{ (konšt.)} \\ x \in (1; \infty): f'(x) = 4x > 0, f \text{ rastie} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pre každé } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ \text{je} \\ f(x) \text{ neostré lokálne minimum.} \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ je spojitá.

$$f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}\right) + 1 - \frac{3}{9} = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0 \text{ pre všetky } x \in \mathbb{R},$$

t. j. f je rastúca na \mathbb{R} ,

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1): f'(x) = 4x < 0, f \text{ klesá} \\ x \in \langle -1; 1 \rangle: f'(x) = 0, f = 2 \text{ (konšt.)} \\ x \in (1; \infty): f'(x) = 4x > 0, f \text{ rastie} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pre každé } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ \text{je} \\ f(x) \text{ neostre lokálne minimum.} \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ je spojitá.

$$f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}\right) + 1 - \frac{3}{9} = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0 \text{ pre všetky } x \in \mathbb{R},$$

t. j. f je rastúca na \mathbb{R} , nemá stacionárne body,

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1| = |x^2 - 1| + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2 \text{ pre } x^2 \leq 1, \text{ t. j. } x \in \langle -1; 1 \rangle, \text{ resp. } |x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ pre } x^2 \geq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 + x^2 + 1 = 2 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ x^2 - 1 + x^2 + 1 = 2x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x^2 \leq 1, \\ 4x & \text{pre } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in (-\infty; -1): f'(x) = 4x < 0, f \text{ klesá} \\ x \in \langle -1; 1 \rangle: f'(x) = 0, f = 2 \text{ (konšt.)} \\ x \in (1; \infty): f'(x) = 4x > 0, f \text{ rastie} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pre každé } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ \text{je} \\ f(x) \text{ neostre lokálne minimum.} \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, x \in \mathbb{R}.$$

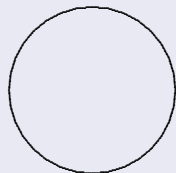
Funkcia f je spojitá na $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ je spojitá.

$$f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}\right) + 1 - \frac{3}{9} = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0 \text{ pre všetky } x \in \mathbb{R},$$

t. j. f je rastúca na \mathbb{R} , nemá stacionárne body, nemá extrém.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

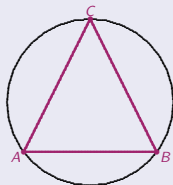
Do kružnice s polomerom $r > 0$



Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

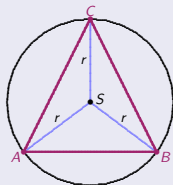


Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

Označme S stred kružnice,

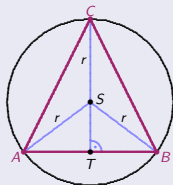


Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .

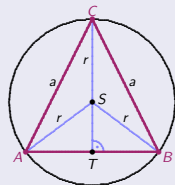
Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,



Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



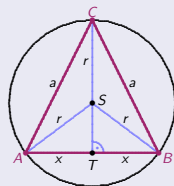
Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,

$$a = |AC| = |BC|,$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



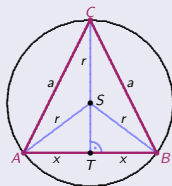
Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,

$$a = |AC| = |BC|, \quad x = |AT| = |TB|.$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,

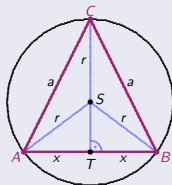
$$a = |AC| = |BC|, \quad x = |AT| = |TB|.$$

Platí $x \in (0; r)$,

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,

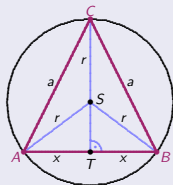
$$a = |AC| = |BC|, \quad x = |AT| = |TB|.$$

$$\text{Platí } x \in (0; r), \quad |TS| = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,

$$a = |AC| = |BC|, \quad x = |AT| = |TB|.$$

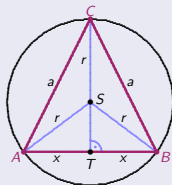
Platí $x \in (0; r)$, $|TS| = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Máme maximalizovať obsah $P = \frac{|TC| \cdot |AB|}{2}$,

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,

$$a = |AC| = |BC|, \quad x = |AT| = |TB|.$$

Platí $x \in (0; r)$, $|TS| = \sqrt{r^2 - x^2}$.

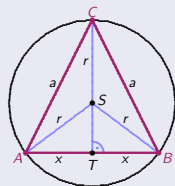
Máme maximalizovať obsah $P = \frac{|TC| \cdot |AB|}{2}$,

t. j. funkciu $P(x) = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$, $x \in (0; r)$.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



$$P'(x) = \frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,

$$a = |AC| = |BC|, \quad x = |AT| = |TB|.$$

Platí $x \in (0; r)$, $|TS| = \sqrt{r^2 - x^2}$.

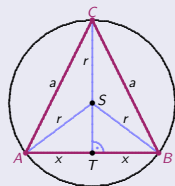
Máme maximalizovať obsah $P = \frac{|TC| \cdot |AB|}{2}$,

t. j. funkciu $P(x) = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$, $x \in (0; r)$.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,

$$a = |AC| = |BC|, \quad x = |AT| = |TB|.$$

Platí $x \in (0; r)$, $|TS| = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Máme maximalizovať obsah $P = \frac{|TC| \cdot |AB|}{2}$,

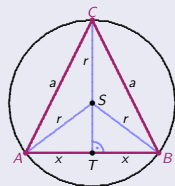
t. j. funkciu $P(x) = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$, $x \in (0; r)$.

$$P'(x) = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}r}{2}.$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,

$$a = |AC| = |BC|, \quad x = |AT| = |TB|.$$

Platí $x \in (0; r)$, $|TS| = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Máme maximalizovať obsah $P = \frac{|TC| \cdot |AB|}{2}$,

t. j. funkciu $P(x) = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$, $x \in (0; r)$.

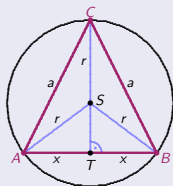
$$P'(x) = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}r}{2}.$$

$$P''(x) = -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0 \text{ pre všetky } x \in (0; r),$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,

$$a = |AC| = |BC|, \quad x = |AT| = |TB|.$$

Platí $x \in (0; r)$, $|TS| = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Máme maximalizovať obsah $P = \frac{|TC| \cdot |AB|}{2}$,

t. j. funkciu $P(x) = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$, $x \in (0; r)$.

$$P'(x) = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}r}{2}.$$

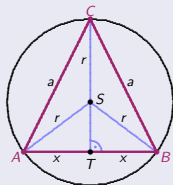
$$P''(x) = -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0 \text{ pre všetky } x \in (0; r),$$

$$\text{t. j. } P''\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right) < 0$$

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,

$$a = |AC| = |BC|, \quad x = |AT| = |TB|.$$

Platí $x \in (0; r)$, $|TS| = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Máme maximalizovať obsah $P = \frac{|TC| \cdot |AB|}{2}$,

t. j. funkciu $P(x) = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$, $x \in (0; r)$.

$$P'(x) = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}r}{2}.$$

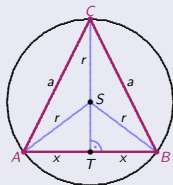
$$P''(x) = -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0 \text{ pre všetky } x \in (0; r),$$

t. j. $P''(\frac{\sqrt{3}r}{2}) < 0$ a $P(\frac{\sqrt{3}r}{2}) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$ bude maximálne.

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,
 $a = |AC| = |BC|$, $x = |AT| = |TB|$.

Platí $x \in (0; r)$, $|TS| = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Máme maximalizovať obsah $P = \frac{|TC| \cdot |AB|}{2}$,

t. j. funkciu $P(x) = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$, $x \in (0; r)$.

$$P'(x) = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}r}{2}.$$

$$P''(x) = -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0 \text{ pre všetky } x \in (0; r),$$

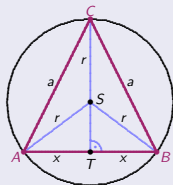
t. j. $P''(\frac{\sqrt{3}r}{2}) < 0$ a $P(\frac{\sqrt{3}r}{2}) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$ bude maximálne.

Strany trojuholníka sú $a = b = c = \sqrt{3}r$,

Vyšetrovanie vlastností funkcie pomocou f' a f''

Do kružnice s polomerom $r > 0$

vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P .



Označme S stred kružnice, T stred základne AB ,
 $a = |AC| = |BC|$, $x = |AT| = |TB|$.

Platí $x \in (0; r)$, $|TS| = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Máme maximalizovať obsah $P = \frac{|TC| \cdot |AB|}{2}$,

t. j. funkciu $P(x) = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$, $x \in (0; r)$.

$$P'(x) = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}r}{2}.$$

$$P''(x) = -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0 \text{ pre všetky } x \in (0; r),$$

t. j. $P''\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right) < 0$ a $P\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$ bude maximálne.

Strany trojuholníka sú $a = b = c = \sqrt{3}r$, t. j. trojuholník je rovnostranný.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

konvexná

$$\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

pre všetky $x \in I$,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

konkávna

$$\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$$

pre všetky $x \in I$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

výdzo konvexná \Leftrightarrow

$f''(x) > 0$ pre všetky $x \in I$,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

rýdzo konkávna \Leftrightarrow

$f''(x) < 0$ pre všetky $x \in I$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

konvexná [resp. rýdzo konvexná] $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ [resp. $f''(x) > 0$] pre všetky $x \in I$,

konkávna [resp. rýdzo konkávna] $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ [resp. $f''(x) < 0$] pre všetky $x \in I$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

konvexná [resp. rýdzo konvexná] $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ [resp. $f''(x) > 0$] pre všetky $x \in I$,

konkávna [resp. rýdzo konkávna] $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ [resp. $f''(x) < 0$] pre všetky $x \in I$.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f :

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

konvexná [resp. rýdzo konvexná] $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ [resp. $f''(x) > 0$] pre všetky $x \in I$,

konkávna [resp. rýdzo konkávna] $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ [resp. $f''(x) < 0$] pre všetky $x \in I$.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f :

- Overiť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(x_0) = 0$, resp. $f''(x_0) \neq 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

konvexná [resp. rýdzo konvexná] $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ [resp. $f''(x) > 0$] pre všetky $x \in I$,

konkávna [resp. rýdzo konkávna] $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ [resp. $f''(x) < 0$] pre všetky $x \in I$.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f :

- Overiť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(x_0) = 0$, resp. $f''(x_0) \neq 0$.
- Overiť všetky body $x_0 \in D(f)$, v ktorých $f''(x_0)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

konvexná [resp. rýdzo konvexná] $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ [resp. $f''(x) > 0$] pre všetky $x \in I$,

konkávna [resp. rýdzo konkávna] $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ [resp. $f''(x) < 0$] pre všetky $x \in I$.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f :

- Overiť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(x_0) = 0$, resp. $f''(x_0) \neq 0$.
- Overiť všetky body $x_0 \in D(f)$, v ktorých $f''(x_0)$ neexistuje.

f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale I ,



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

konvexná [resp. rýdzo konvexná] $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ [resp. $f''(x) > 0$] pre všetky $x \in I$,

konkávna [resp. rýdzo konkávna] $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ [resp. $f''(x) < 0$] pre všetky $x \in I$.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f :

- Overiť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(x_0) = 0$, resp. $f''(x_0) \neq 0$.
- Overiť všetky body $x_0 \in D(f)$, v ktorých $f''(x_0)$ neexistuje.

f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale I ,

potom môže pre nejaké $x \in I$ platiť $f''(x) = 0$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

konvexná [resp. rýdzo konvexná] $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ [resp. $f''(x) > 0$] pre všetky $x \in I$,

konkávna [resp. rýdzo konkávna] $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ [resp. $f''(x) < 0$] pre všetky $x \in I$.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f :

- Overiť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(x_0) = 0$, resp. $f''(x_0) \neq 0$.
- Overiť všetky body $x_0 \in D(f)$, v ktorých $f''(x_0)$ neexistuje.

f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale I ,

potom môže pre nejaké $x \in I$ platiť $f''(x) = 0$.

Môžu to byť iba jednotlivé izolované body,



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

f spojitá na I ,

$I \subset D(f)$ interval, pre všetky $x \in I$ existujú $f'(x)$ konečná a $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I :

konvexná [resp. rýdzo konvexná] $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ [resp. $f''(x) > 0$] pre všetky $x \in I$,

konkávna [resp. rýdzo konkávna] $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ [resp. $f''(x) < 0$] pre všetky $x \in I$.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie f :

- Overiť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(x_0) = 0$, resp. $f''(x_0) \neq 0$.
- Overiť všetky body $x_0 \in D(f)$, v ktorých $f''(x_0)$ neexistuje.

f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale I ,

potom môže pre nejaké $x \in I$ platiť $f''(x) = 0$.

Môžu to byť iba jednotlivé izolované body, ale nemôžu tvoriť interval!

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod** funkcie f (f má v bode x_0 inflexiu),

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu), ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu),
ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$
rýdzo konkávna pre $x < x_0$ a **súčasne rýdzo konvexná** pre $x > x_0$,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu),

ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

výdzo konvexná pre $x < x_0$ a **súčasne výdzo konkávna** pre $x > x_0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu),

ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

výdzo konkávna pre $x < x_0$ a súčasne **výdzo konvexná** pre $x > x_0$,

resp. **výdzo konvexná** pre $x < x_0$ a súčasne **výdzo konkávna** pre $x > x_0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu),

ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

rýdzo konkávna pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konvexná** pre $x > x_0$,

resp. **rýdzo konvexná** pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konkávna** pre $x > x_0$.

f má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexiu, existuje $f''(x_0)$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu),

ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

rýdzo konkávna pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konvexná** pre $x > x_0$,

resp. **rýdzo konvexná** pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konkávna** pre $x > x_0$.

f má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexiu, existuje $f''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu),

ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

rýdzo konkávna pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konvexná** pre $x > x_0$,

resp. **rýdzo konvexná** pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konkávna** pre $x > x_0$.

f má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexiu, existuje $f''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu),

ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

rýdzo konkávna pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konvexná** pre $x > x_0$,

resp. **rýdzo konvexná** pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konkávna** pre $x > x_0$.

f má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexiu, existuje $f''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ má v bode x_0 inflexiu.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu),

ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

rýdzo konkávna pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konvexná** pre $x > x_0$,

resp. **rýdzo konvexná** pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konkávna** pre $x > x_0$.

f má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexiu, existuje $f''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ má v bode x_0 inflexiu.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0)$ konečná, $O(x_0)$ okolie, $f''(x) \neq 0$ pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu),

ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

rýdzo konkávna pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konvexná** pre $x > x_0$,

resp. **rýdzo konvexná** pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konkávna** pre $x > x_0$.

f má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexiu, existuje $f''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ má v bode x_0 inflexiu.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0)$ konečná, $O(x_0)$ okolie, $f''(x) \neq 0$ pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$.

Pre všetky $x \in O(x_0)$ platí:

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu), ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

rýdzo konkávna pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konvexná** pre $x > x_0$,
 resp. **rýdzo konvexná** pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konkávna** pre $x > x_0$.

f má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexiu, existuje $f''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ má v bode x_0 inflexiu.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0)$ konečná, $O(x_0)$ okolie, $f''(x) \neq 0$ pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$.

Pre všetky $x \in O(x_0)$ platí:

$f''(x) > 0$ pre $x < x_0$, $f''(x) < 0$ pre $x_0 < x \Rightarrow f$ má v bode x_0 inflexiu.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu),

ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

rýdzo konkávna pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konvexná** pre $x > x_0$,

resp. **rýdzo konvexná** pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konkávna** pre $x > x_0$.

f má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexiu, existuje $f''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ má v bode x_0 inflexiu.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0)$ konečná, $O(x_0)$ okolie, $f''(x) \neq 0$ pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$.

Pre všetky $x \in O(x_0)$ platí:

$f''(x) < 0$ pre $x < x_0$, $f''(x) > 0$ pre $x_0 < x \Rightarrow f$ má v bode x_0 inflexiu.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu),

ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

rýdzo konkávna pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konvexná** pre $x > x_0$,

resp. **rýdzo konvexná** pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konkávna** pre $x > x_0$.

f má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexiu, existuje $f''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ má v bode x_0 inflexiu.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0)$ konečná, $O(x_0)$ okolie, $f''(x) \neq 0$ pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$.

Pre všetky $x \in O(x_0)$ platí:

$f''(x) > 0$ pre $x \neq x_0$, resp. $f''(x) < 0$ pre $x \neq x_0 \Rightarrow f$ nemá v bode x_0 inflexiu.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$x_0 \in D(f)$ sa nazýva **inflexný bod funkcie f** (f má v bode x_0 inflexiu), ak existuje okolie $O(x_0) \subset D(f)$ také, že funkcia f je v okolí $O(x_0)$

rýdzo konkávna pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konvexná** pre $x > x_0$,
 resp. **rýdzo konvexná** pre $x < x_0$ a súčasne **rýdzo konkávna** pre $x > x_0$.

f má v bode $x_0 \in D(f)$ inflexiu, existuje $f''(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = 0$.

$x_0 \in D(f)$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ má v bode x_0 inflexiu.

$x_0 \in D(f)$, $f'(x_0)$ konečná, $O(x_0)$ okolie, $f''(x) \neq 0$ pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$.

Pre všetky $x \in O(x_0)$ platí:

$f''(x) > 0$ pre $x < x_0$, $f''(x) < 0$ pre $x_0 < x \Rightarrow f$ má v bode x_0 inflexiu.

$f''(x) < 0$ pre $x < x_0$, $f''(x) > 0$ pre $x_0 < x \Rightarrow f$ má v bode x_0 inflexiu.

$f''(x) > 0$ pre $x \neq x_0$, resp. $f''(x) < 0$ pre $x \neq x_0 \Rightarrow f$ nemá v bode x_0 inflexiu.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \quad \text{pre všetky } x \in D(f),$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \quad \text{pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f''(x) = 0$ práve vtedy, ak $8x(x^2-3) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \quad \text{pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f''(x) = 0$ práve vtedy, ak $8x(x^2-3) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.

Funkcia f'' je spojitá na $D(f)$,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \quad \text{pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f''(x) = 0$ práve vtedy, ak $8x(x^2-3) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.

Funkcia f'' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^3 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,
 $f'(-\sqrt{3})=0$, $f'(0)=0$, $f'(\sqrt{3})=0$,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \quad \text{pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f''(x) = 0$ práve vtedy, ak $8x(x^2-3) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.

Funkcia f'' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^3 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-\sqrt{3})=0, \quad f'(0)=0, \quad f'(\sqrt{3})=0,$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \quad \text{pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f''(x) = 0$ práve vtedy, ak $8x(x^2-3) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.

Funkcia f'' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^3 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-\sqrt{3})=0, \quad f'(0)=0, \quad f'(\sqrt{3})=0,$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f'(-2) = \frac{-16 \cdot (4-3)}{(1+4)^3} < 0$	$f'(-1) = \frac{-8 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} > 0$	$f'(1) = \frac{8 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} < 0$	$f'(2) = \frac{16 \cdot (4-3)}{(1+4)^3} > 0$

[Na zistenie znamienka funkcie f'' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \quad \text{pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f''(x) = 0$ práve vtedy, ak $8x(x^2-3) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.

Funkcia f'' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^3 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-\sqrt{3})=0, \quad f'(0)=0, \quad f'(\sqrt{3})=0,$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f'(-2) = \frac{-16 \cdot (4-3)}{(1+4)^3} < 0$	$f'(-1) = \frac{-8 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} > 0$	$f'(1) = \frac{8 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} < 0$	$f'(2) = \frac{16 \cdot (4-3)}{(1+4)^3} > 0$
$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$

[Na zistenie znamienka funkcie f'' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \quad \text{pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f''(x) = 0$ práve vtedy, ak $8x(x^2-3) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.

Funkcia f'' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^3 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-\sqrt{3})=0, \quad f'(0)=0, \quad f'(\sqrt{3})=0,$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f'(-2) = \frac{-16 \cdot (4-3)}{(1+4)^3} < 0$	$f'(-1) = \frac{-8 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} > 0$	$f'(1) = \frac{8 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} < 0$	$f'(2) = \frac{16 \cdot (4-3)}{(1+4)^3} > 0$
$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
\cap f rýdzo konkávna \cap	\cup f rýdzo konvexná \cup	\cap f rýdzo konkávna \cap	\cup f rýdzo konvexná \cup

[Na zistenie znamienka funkcie f'' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia f je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \quad \text{pre všetky } x \in D(f),$$

pričom $f''(x) = 0$ práve vtedy, ak $8x(x^2-3) = 0$, t. j. $x=0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.

Funkcia f'' je spojitá na $D(f)$, $(1+x^2)^3 > 0$ pre všetky $x \in D(f)$,

$$f'(-\sqrt{3})=0, \quad f'(0)=0, \quad f'(\sqrt{3})=0,$$

t. j. f' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f'(-2) = \frac{-16 \cdot (4-3)}{(1+4)^3} < 0$	$f'(-1) = \frac{-8 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} > 0$	$f'(1) = \frac{8 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} < 0$	$f'(2) = \frac{16 \cdot (4-3)}{(1+4)^3} > 0$
$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
\cap f rýdzo konkávna \cap	\cup f rýdzo konvexná \cup	\cap f rýdzo konkávna \cap	\cup f rýdzo konvexná \cup
$-\sqrt{3}$ je inflexný bod	0 je inflexný bod	$\sqrt{3}$ je inflexný bod	

[Na zistenie znamienka funkcie f'' na danom intervale I postačí overiť hodnotu $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode $x \in I$.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$,



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x), \quad f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t.j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t.j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$$x \in (-\infty; \frac{1}{3}):$$

$$x \in (\frac{1}{3}; \infty):$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t.j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$$x \in (-\infty; \frac{1}{3}): f''(0) = -2,$$

$$x \in (\frac{1}{3}; \infty): f''(1) = 4,$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t.j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna

$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t.j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t.j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t.j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = x^2$ pre $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t.j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = x^2$ pre $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, resp. $f(x) = x$ pre $x \in (0; 1)$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t. j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = x^2$ pre $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, resp. $f(x) = x$ pre $x \in (0; 1)$ je spojitá na \mathbb{R} .

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t.j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = x^2$ pre $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, resp. $f(x) = x$ pre $x \in (0; 1)$ je spojitá na \mathbb{R} .

Body $x=0$, $x=1$ sú určené koreňmi rovnice $x = x^2$,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t. j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = x^2$ pre $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, resp. $f(x) = x$ pre $x \in (0; 1)$ je spojitá na \mathbb{R} .

Body $x = 0$, $x = 1$ sú určené koreňmi rovnice $x = x^2$, t. j. $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t. j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = x^2$ pre $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, resp. $f(x) = x$ pre $x \in (0; 1)$ je spojitá na \mathbb{R} .

Body $x = 0$, $x = 1$ sú určené koreňmi rovnice $x = x^2$, t. j. $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0) \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty) \end{cases}$$

$$f'(0), f'(1)$$

neexistujú,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t. j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = x^2$ pre $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, resp. $f(x) = x$ pre $x \in (0; 1)$ je spojitá na \mathbb{R} .

Body $x = 0$, $x = 1$ sú určené koreňmi rovnice $x = x^2$, t. j. $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \\ 1, & f''(x) = \begin{cases} 2 > 0 & \text{pre } x \in (-\infty; 0) \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 > 0 & \text{pre } x \in (1; \infty) \end{cases} \\ 2x, & \end{cases}$$

$f'(0)$, $f'(1)$, $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t. j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

$$f(x) = \max\{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = x^2$ pre $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, resp. $f(x) = x$ pre $x \in (0; 1)$ je spojitá na \mathbb{R} .

Body $x = 0$, $x = 1$ sú určené koreňmi rovnice $x = x^2$, t. j. $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, \\ 1, \\ 2x, \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 2 > 0 & \text{pre } x \in (-\infty; 0) \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 > 0 & \text{pre } x \in (1; \infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ je rýdzo konvexná,} \\ \\ f \text{ je rýdzo konvexná.} \end{array}$$

$f'(0)$, $f'(1)$, $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t. j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = x^2$ pre $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, resp. $f(x) = x$ pre $x \in (0; 1)$ je spojitá na \mathbb{R} .

Body $x = 0$, $x = 1$ sú určené koreňmi rovnice $x = x^2$, t. j. $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, \\ 1, \\ 2x, \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 2 > 0 & \text{pre } x \in (-\infty; 0) \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 > 0 & \text{pre } x \in (1; \infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ je rýdzo konvexná,} \\ f \text{ je konvexná aj konkávna,} \\ f \text{ je rýdzo konvexná.} \end{array}$$

$f'(0)$, $f'(1)$, $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $f''(x) = 6x - 2$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, t. j. f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$: $f''(0) = -2$, $f''(x) < 0$, f je rýdzo konkávna } $\frac{1}{3}$ je
 $x \in (\frac{1}{3}; \infty)$: $f''(1) = 4$, $f''(x) > 0$, f je rýdzo konvexná } inflexný bod.

$$f(x) = \max \{x, x^2\}, x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) = x^2$ pre $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, resp. $f(x) = x$ pre $x \in (0; 1)$ je spojitá na \mathbb{R} .

Body $x = 0$, $x = 1$ sú určené koreňmi rovnice $x = x^2$, t. j. $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, \\ 1, \\ 2x, \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 2 > 0 & \text{pre } x \in (-\infty; 0) \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 > 0 & \text{pre } x \in (1; \infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ je rýdzo konvexná,} \\ f \text{ je konvexná aj konkávna,} \\ f \text{ je rýdzo konvexná.} \end{array}$$

$f'(0)$, $f'(1)$, $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú, f je konvexná na celom $D(f) = \mathbb{R}$.

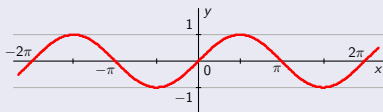
Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

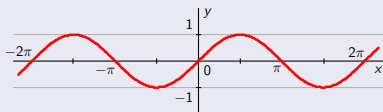


Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \cos x,$$

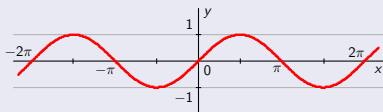


Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x,$$

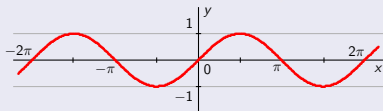


Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.



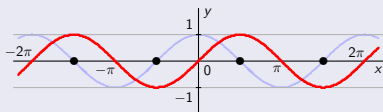
Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

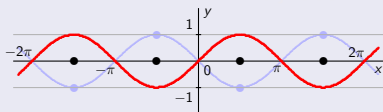
$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -(-1)^k \neq 0 \text{ pre } k \in \mathbb{Z},$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

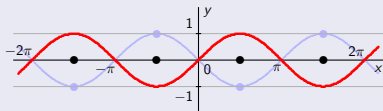
$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t. j. extrém:



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

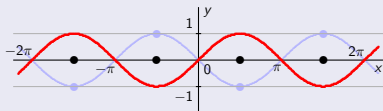
$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t. j. extrém:

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1 < 0,$$

$$-\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 > 0,$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

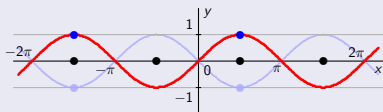
$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$-\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

$-\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0$,



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

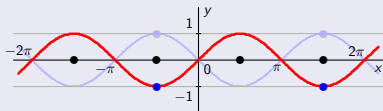
$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t. j. extrém:

$-\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0$, t. j. $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

$-\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0$, t. j. $\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

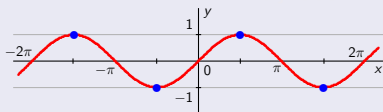
$$f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$-\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

$-\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0$, t.j. $\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.

V bodoch $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sú aj globálne extrémny.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

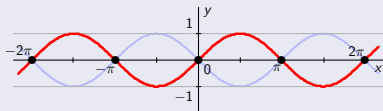
$f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$-\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

$-\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0$, t.j. $\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.

V bodoch $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sú aj globálne extrémny.

$$f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

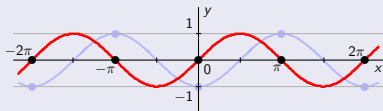
$-\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

$-\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0$, t.j. $\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.

V bodoch $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sú aj globálne extrémny.

$$f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f'''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$,



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$-\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

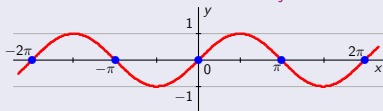
$-\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0$, t.j. $\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.

V bodoch $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sú aj globálne extrémny.

$$f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f'''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$,

t.j. bod $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je inflexný.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$-\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

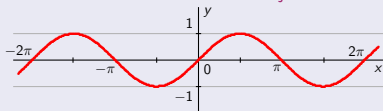
$-\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0$, t.j. $\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.

V bodoch $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sú aj globálne extrémny.

$$f''(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f'''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$,

t.j. bod $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ je inflexný.



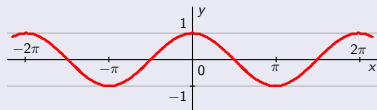
Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

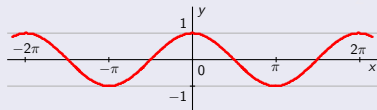


Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\sin x,$$

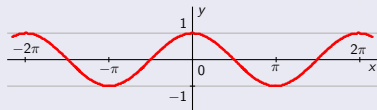


Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x,$$

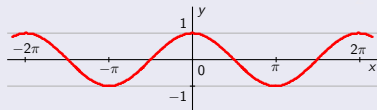


Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.



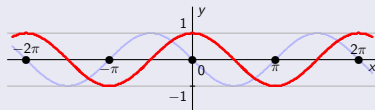
Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

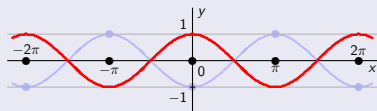
$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0 \text{ pre } k \in \mathbb{Z},$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

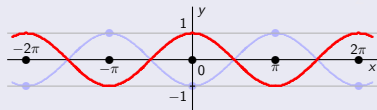
$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

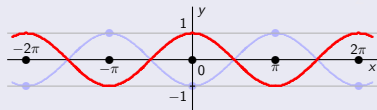
$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$$-\cos(0+2k\pi) = -1 < 0,$$

$$-\cos(\pi+2k\pi) = 1 > 0,$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

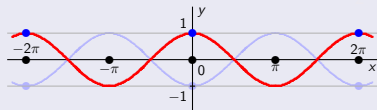
$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$-\cos(0+2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\cos(0+2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

$-\cos(\pi+2k\pi) = 1 > 0$,



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

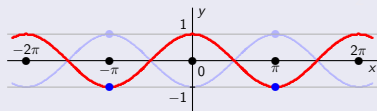
$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$-\cos(0+2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\cos(0+2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

$-\cos(\pi+2k\pi) = 1 > 0$, t.j. $\cos(\pi+2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

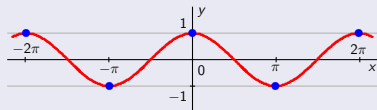
$$f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$-\cos(0+2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\cos(0+2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

$-\cos(\pi+2k\pi) = 1 > 0$, t.j. $\cos(\pi+2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.

V bodoch $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sú aj globálne extrémny.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

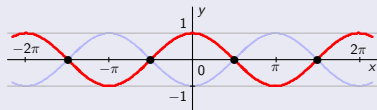
$f''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$-\cos(0+2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\cos(0+2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

$-\cos(\pi+2k\pi) = 1 > 0$, t.j. $\cos(\pi+2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.

V bodoch $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sú aj globálne extrémny.

$$f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

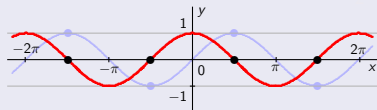
$-\cos(0+2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\cos(0+2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

$-\cos(\pi+2k\pi) = 1 > 0$, t.j. $\cos(\pi+2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.

V bodoch $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sú aj globálne extrémny.

$$f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f'''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$,



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$-\cos(0+2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\cos(0+2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

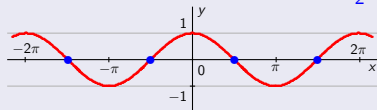
$-\cos(\pi+2k\pi) = 1 > 0$, t.j. $\cos(\pi+2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.

V bodoch $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sú aj globálne extrémny.

$$f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f'''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$,

t.j. bod $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ je inflexný.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie

$$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcia $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá na celom $D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x$ sú spojité na $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(k\pi) = -\cos(k\pi) = -(-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$, t.j. extrém:

$-\cos(0+2k\pi) = -1 < 0$, t.j. $\cos(0+2k\pi) = 1$ je lokálne maximum,

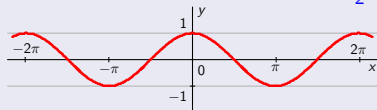
$-\cos(\pi+2k\pi) = 1 > 0$, t.j. $\cos(\pi+2k\pi) = -1$ je lokálne minimum.

V bodoch $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sú aj globálne extrémny.

$$f''(x) = -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$f'''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k \neq 0$ pre $k \in \mathbb{Z}$,

t.j. bod $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ je inflexný.



Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ [hodnota } f'(x_0) \text{ nás nezaujima]} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ [hodnota } f'(x_0) \text{ nás nezaujima]} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.

\Rightarrow V bode x_0 nie je lokálny extrém,

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ [hodnota } f'(x_0) \text{ nás nezaujima]} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow x_0$ je inflexný bod.

Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$


$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.

\Rightarrow V bode x_0 nie je lokálny extrém, f je v bode x_0 rýdzo monotónna: 



$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ [hodnota } f'(x_0) \text{ nás nezaujima]} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow x_0$ je inflexný bod. 



Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.

\Rightarrow V bode x_0 nie je lokálny extrém, f je v bode x_0 rýdzo monotónna:
rastúca pre $f^{(n)}(x_0) > 0$,



$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad [\text{hodnota } f'(x_0) \text{ nás nezaujima}] \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow x_0$ je inflexný bod.



Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.

\Rightarrow V bode x_0 **nie je lokálny extrém**, f je v bode x_0 **rýdzo monotónna**:
 rastúca pre $f^{(n)}(x_0) > 0$, resp. klesajúca pre $f^{(n)}(x_0) < 0$.



$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad [\text{hodnota } f'(x_0) \text{ nás nezaujima}] \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow x_0$ je **inflexný bod**.



Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

n je párne, t. j. $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ [hodnota } f'(x_0) \text{ nás nezaujima]} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

n je párne, t. j. $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

n je párne, t. j. $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

\Rightarrow V bode x_0 je ostrý lokálny extrém:

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ [hodnota } f'(x_0) \text{ nás nezaujímá]} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

n je párne, t. j. $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. \Rightarrow f je v bode x_0

Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

n je párne, t. j. $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

\Rightarrow V bode x_0 je **ostrý lokálny extrém**:
 minimum pre $f^{(n)}(x_0) > 0$,

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad [\text{hodnota } f'(x_0) \text{ nás nezaujima}] \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

n je párne, t. j. $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. \Rightarrow f je v bode x_0
 rýdzo **konvexná** pre $f^{(n)}(x_0) > 0$,

Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

n je párne, t. j. $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

\Rightarrow V bode x_0 je **ostrý lokálny extrém**:

minimum pre $f^{(n)}(x_0) > 0$, resp. maximum pre $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad [\text{hodnota } f'(x_0) \text{ nás nezaujima}] \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

n je párne, t. j. $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. \Rightarrow f je v bode x_0

rýdzo konvexná pre $f^{(n)}(x_0) > 0$, resp. **rýdzo konkávna** pre $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Vyšetřovanie vlastností funkcie pomocou $f^{(n)}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$.

\Rightarrow V bode x_0 nie je lokálny extrém, f je v bode x_0 rýdzo monotónna:
 rastúca pre $f^{(n)}(x_0) > 0$, resp. klesajúca pre $f^{(n)}(x_0) < 0$.

n je párne, t. j. $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

\Rightarrow V bode x_0 je ostrý lokálny extrém:
 minimum pre $f^{(n)}(x_0) > 0$, resp. maximum pre $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$$f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad [\text{hodnota } f'(x_0) \text{ nás nezaujímá}] \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

n je nepárne, t. j. $n = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow x_0$ je inflexný bod.

n je párne, t. j. $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow f$ je v bode x_0
 rýdzo konvexná pre $f^{(n)}(x_0) > 0$, resp. rýdzo konkávna pre $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:



Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- v bodoch nespojitosti (hlavne neodstrániteľnej 2. druhu),



Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- v bodoch nespojitosti (hlavne neodstrániteľnej 2. druhu),
- v bodoch $\pm\infty$.



Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrovaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- v bodoch nespojitosti (hlavne neodstrániteľnej 2. druhu),
- v bodoch $\pm\infty$.

$f, g: P(a) \rightarrow R$, $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, $P(a) = O(a) - \{a\}$ je prstencové okolie.

Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- v bodoch nespojitosti (hlavne neodstrániteľnej 2. druhu),
- v bodoch $\pm\infty$.

$f, g: P(a) \rightarrow R$, $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, $P(a) = O(a) - \{a\}$ je prstencové okolie.

Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a ,



Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- v bodoch nespojitosti (hlavne neodstrániteľnej 2. druhu),
- v bodoch $\pm\infty$.

$f, g: P(a) \rightarrow R$, $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, $P(a) = O(a) - \{a\}$ je prstencové okolie.

Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a ,^o ozn. $f \sim g, x \rightarrow a$



Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- v bodoch nespojitosti (hlavne neodstrániteľnej 2. druhu),
- v bodoch $\pm\infty$.

$f, g: P(a) \rightarrow R$, $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, $P(a) = O(a) - \{a\}$ je prstencové okolie.

Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a , ozn. $f \sim g, x \rightarrow a$

práve vtedy, ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.



Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- v bodoch nespojitosti (hlavne neodstrániteľnej 2. druhu),
- v bodoch $\pm\infty$.

$f, g: P(a) \rightarrow R$, $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, $P(a) = O(a) - \{a\}$ je prstencové okolie.

Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a , ozn. $f \sim g, x \rightarrow a$

práve vtedy, ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

V zmysle predchádzajúcej definície sa funkcie

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 0$ v bodoch $\pm\infty$ asymptoticky nerovnajú,



Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- v bodoch nespojitosti (hlavne neodstrániteľnej 2. druhu),
- v bodoch $\pm\infty$.

$f, g: P(a) \rightarrow R$, $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, $P(a) = O(a) - \{a\}$ je prstencové okolie.

Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a , ozn. $f \sim g, x \rightarrow a$

práve vtedy, ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

V zmysle predchádzajúcej definície sa funkcie

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 0$ v bodoch $\pm\infty$ asymptoticky nerovnajú,

pretože $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje, resp. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- v bodoch nespojitosti (hlavne neodstrániteľnej 2. druhu),
- v bodoch $\pm\infty$.

$f, g: P(a) \rightarrow R$, $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, $P(a) = O(a) - \{a\}$ je prstencové okolie.

Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a , ozn. $f \sim g, x \rightarrow a$

práve vtedy, ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

V zmysle predchádzajúcej definície sa funkcie

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 0$ v bodoch $\pm\infty$ asymptoticky nerovnajú,

pretože $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje, resp. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Funkcia $g(x) = 0, x \in R$ predstavuje priamku

Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- v bodoch nespojitosti (hlavne neodstrániteľnej 2. druhu),
- v bodoch $\pm\infty$.

$f, g: P(a) \rightarrow R$, $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, $P(a) = O(a) - \{a\}$ je prstencové okolie.

Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a , ozn. $f \sim g, x \rightarrow a$

práve vtedy, ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

V zmysle predchádzajúcej definície sa funkcie

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 0$ v bodoch $\pm\infty$ asymptoticky nerovnajú,

pretože $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje, resp. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Funkcia $g(x) = 0, x \in R$ predstavuje priamku

a má zmysel ju asymptoticky porovnávať v bodoch $\pm\infty$ s inými funkciami,

Asymptotické vlastnosti funkcií

Pri vyšetrowaní priebehu funkcie je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

- v bodoch nespojitosti (hlavne neodstrániteľnej 2. druhu),
- v bodoch $\pm\infty$.

$f, g: P(a) \rightarrow R$, $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, $P(a) = O(a) - \{a\}$ je prstencové okolie.

Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a , ozn. $f \sim g, x \rightarrow a$

práve vtedy, ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

V zmysle predchádzajúcej definície sa funkcie

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 0$ v bodoch $\pm\infty$ asymptoticky nerovnajú,

pretože $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje, resp. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Funkcia $g(x) = 0, x \in R$ predstavuje priamku

a má zmysel ju asymptoticky porovnávať v bodoch $\pm\infty$ s inými funkciami, predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu.

Asymptotické vlastnosti funkcií

Priamka $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva **vertikálna asymptota**,
resp. **asymptota bez smernice** (grafu) funkcie f ,

Asymptotické vlastnosti funkcií

Priamka $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva **vertikálna asymptota**,
resp. **asymptota bez smernice** (grafu) funkcie f ,

ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

Asymptotické vlastnosti funkcií

Priamka $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva **vertikálna asymptota**,
resp. **asymptota bez smernice** (grafu) funkcie f ,
ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ (kde $k, q \in \mathbb{R}$) sa nazýva
asymptota so smernicou (grafu) funkcie f ,

Asymptotické vlastnosti funkcií

Priamka $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva **vertikálna asymptota**,
resp. **asymptota bez smernice** (grafu) funkcie f ,

ak aspoň jedna z limít $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ (kde $k, q \in \mathbb{R}$) sa nazýva
asymptota so smernicou (grafu) funkcie f ,

ak platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$, resp. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.



Asymptotické vlastnosti funkcií

Priamka $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva **vertikálna asymptota**,
resp. **asymptota bez smernice** (grafu) funkcie f ,

ak aspoň jedna z limít $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ (kde $k, q \in \mathbb{R}$) sa nazýva
asymptota so smernicou (grafu) funkcie f ,

ak platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$, resp. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

Priamka $y = kx + q$ je asymptotou aj vtedy, ak graf funkcie f okolo nej osciluje.



Asymptotické vlastnosti funkcií

Priamka $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva **vertikálna asymptota**,
resp. **asymptota bez smernice** (grafu) funkcie f ,

ak aspoň jedna z limít $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ (kde $k, q \in \mathbb{R}$) sa nazýva
asymptota so smernicou (grafu) funkcie f ,

ak platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$, resp. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

Priamka $y = kx + q$ je asymptotou aj vtedy, ak graf funkcie f okolo nej osciluje.
Číslo k predstavuje smernicu priamky,



Asymptotické vlastnosti funkcií

Priamka $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva **vertikálna asymptota**,
 resp. **asymptota bez smernice** (grafu) funkcie f ,

ak aspoň jedna z limít $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ (kde $k, q \in \mathbb{R}$) sa nazýva
asymptota so smernicou (grafu) funkcie f ,

ak platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$, resp. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

Priamka $y = kx + q$ je asymptotou aj vtedy, ak graf funkcie f okolo nej osciluje.

Číslo k predstavuje smernicu priamky, pre $k = 0$ sa priamka $y = kx + q$,

t. j. $y = q$ nazýva **horizontálna (vodorovná) asymptota** funkcie f .

Asymptotické vlastnosti funkcií

Priamka $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva **vertikálna asymptota**,
 resp. **asymptota bez smernice** (grafu) funkcie f ,

ak aspoň jedna z limít $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ (kde $k, q \in \mathbb{R}$) sa nazýva
asymptota so smernicou (grafu) funkcie f ,

ak platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$, resp. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

Priamka $y = kx + q$ je asymptotou aj vtedy, ak graf funkcie f okolo nej osciluje.

Číslo k predstavuje smernicu priamky, pre $k = 0$ sa priamka $y = kx + q$,

t. j. $y = q$ nazýva **horizontálna** (vodorovná) **asymptota** funkcie f .

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptotou so smernicou funkcie f

Asymptotické vlastnosti funkcií

Priamka $x = a$, $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva **vertikálna asymptota**,
 resp. **asymptota bez smernice** (grafu) funkcie f ,

ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ (kde $k, q \in \mathbb{R}$) sa nazýva
asymptota so smernicou (grafu) funkcie f ,

ak platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$, resp. $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

Priamka $y = kx + q$ je asymptotou aj vtedy, ak graf funkcie f okolo nej osciluje.

Číslo k predstavuje smernicu priamky, pre $k = 0$ sa priamka $y = kx + q$,

t. j. $y = q$ nazýva **horizontálna** (vodorovná) **asymptota** funkcie f .

Priamka $y = kx + q$, $x \in \mathbb{R}$ je asymptotou so smernicou funkcie f

\Leftrightarrow existujú konečné limity $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$.

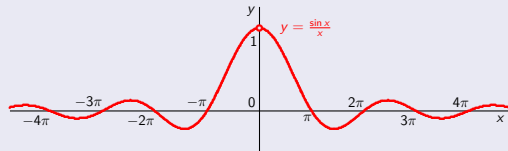
Asymptotické vlastnosti funkcí

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

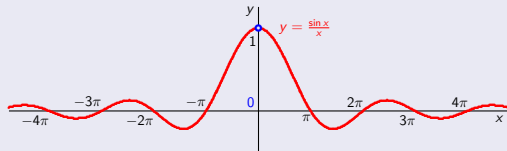


Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



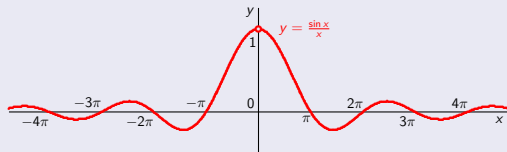
Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$.

Iné body nespojitosti f nemá,



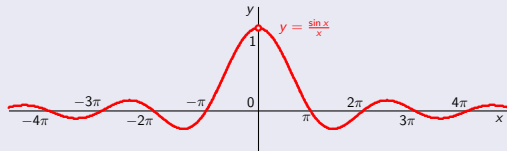
Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Iné body nespojitosti f nemá, t. j. neexistujú nevlastné jednostranné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$



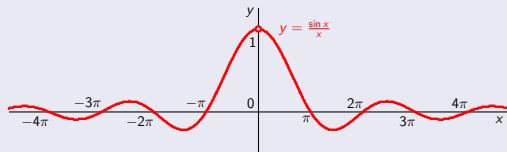
Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Iné body nespojitosti f nemá, t. j. neexistujú nevlastné jednostranné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).



Asymptotické vlastnosti funkcií

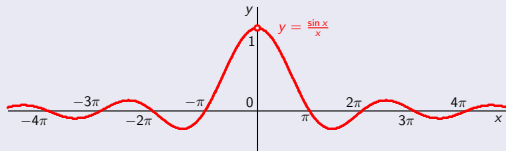
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$.

Iné body nespojitosti f nemá, t. j. neexistujú nevlastné jednostranné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2}$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

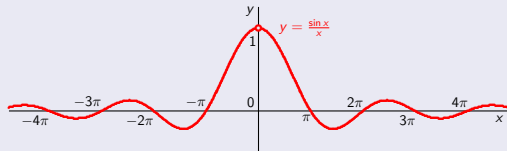
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$.

Iné body nespojitosti f nemá, t. j. neexistujú nevlastné jednostranné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \sin x \text{ je ohraničená} \end{array} \middle| -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \right] = 0$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

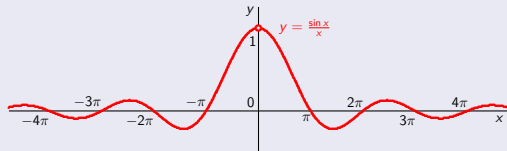
Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$.

Iné body nespojitosti f nemá, t. j. neexistujú nevlastné jednostranné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \sin x \text{ je ohraničená} \end{array} \middle| -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \right] = 0,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

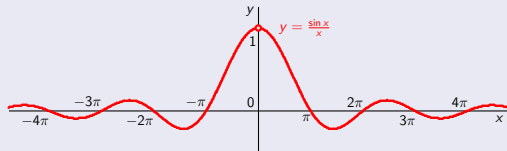
Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$.

Iné body nespojitosti f nemá, t. j. neexistujú nevlastné jednostranné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \sin x \text{ je ohraničená} \end{array} \middle| -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \right] = 0,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

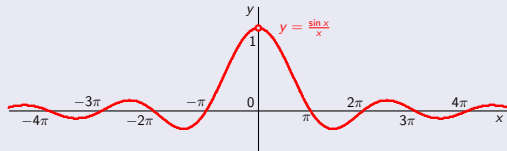
Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$.

Iné body nespojitosti f nemá, t. j. neexistujú nevlastné jednostranné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \sin x \text{ je ohraničená} \end{array} \middle| -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \right] = 0,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \sin x \text{ je ohraničená} \end{array} \middle| -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \right] = 0$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

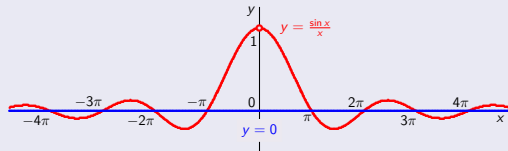
Bod $x_0 = 0$ je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$.

Iné body nespojitosti f nemá, t. j. neexistujú nevlastné jednostranné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \sin x \text{ je ohraničená} \end{array} \middle| -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \right] = 0,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \sin x \text{ je ohraničená} \end{array} \middle| -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \right] = 0.$$

Priamka $y = kx + q = 0 \cdot x + 0$,



Asymptotické vlastnosti funkcií

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ pre $x \rightarrow \pm\infty$ osciluje okolo asymptoty $y = 0$.

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

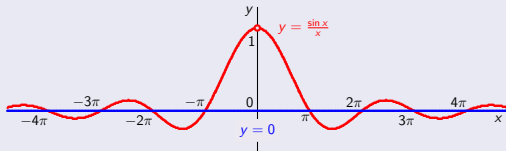
Bod $x_0 = 0$ je odstrániteľný bod nespojitosti, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 1$.

Iné body nespojitosti f nemá, t. j. neexistujú nevlastné jednostranné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \sin x \text{ je ohraničená} \end{array} \middle| -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \right] = 0,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \sin x \text{ je ohraničená} \end{array} \middle| -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \right] = 0.$$

Priamka $y = kx + q = 0 \cdot x + 0$, t. j. $y = 0$ je asymptota so smernicou funkcie f .



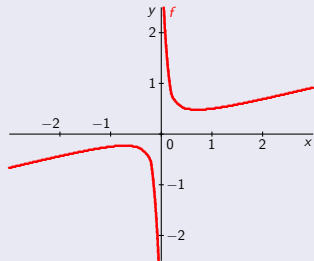
Asymptotické vlastnosti funkcí

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

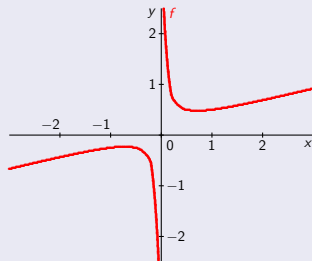


Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je neodstrániteľný bod nespojitosti II. druhu,



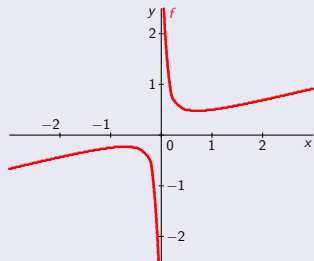
Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je neodstrániteľný bod nespojitosti II. druhu,

pretože $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \infty$.



Asymptotické vlastnosti funkcií

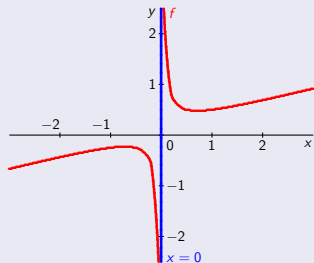
$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je neodstrániteľný bod nespojitosti II. druhu,

pretože $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \infty$.

Priamka $x = 0$ je **asymptotou bez smernice**.



Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

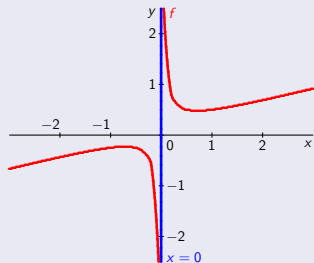
Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je neodstrániteľný bod nespojitosti II. druhu,

pretože $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \infty$.

Priamka $x=0$ je **asymptotou bez smernice**.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2}$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

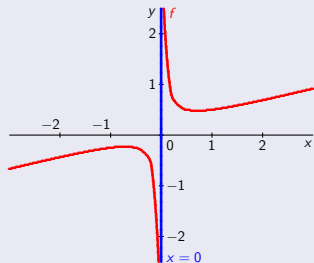
Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je neodstrániteľný bod nespojitosti II. druhu,

pretože $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \infty$.

Priamka $x=0$ je **asymptotou bez smernice**.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

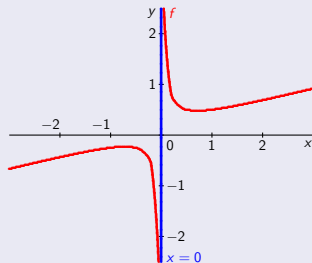
Bod $x_0 = 0$ je neodstrániteľný bod nespojitosti II. druhu,

pretože $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \infty$.

Priamka $x=0$ je **asymptotou bez smernice**.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

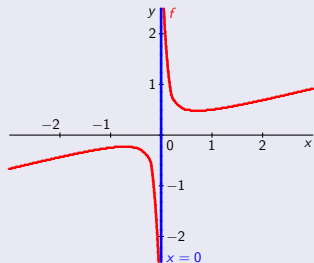
Bod $x_0 = 0$ je neodstrániteľný bod nespojitosti II. druhu,

pretože $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \infty$.

Priamka $x=0$ je **asymptotou bez smernice**.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} - \frac{x}{4} \right] = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ má asymptoty $x=0$ a $y = \frac{2x+1}{8}$, $x \in \mathbb{R}$.

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Bod $x_0 = 0$ je neodstrániteľný bod nespojitosti II. druhu,

pretože $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \infty$.

Priamka $x=0$ je asymptotou bez smernice.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2}$$

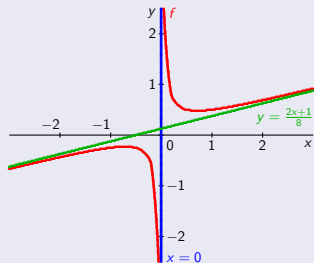
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] = \frac{1}{4},$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} - \frac{x}{4} \right] = \frac{1}{8}.$$

Priamka $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2x+1}{8}$, $x \in \mathbb{R}$

je asymptotou so smernicou.



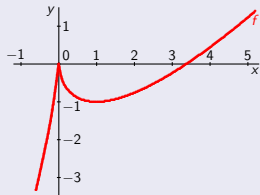
Asymptotické vlastnosti funkcí

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

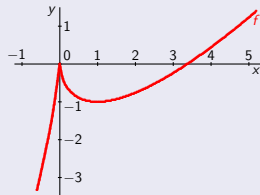


Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia f nemá body nespojitosti,

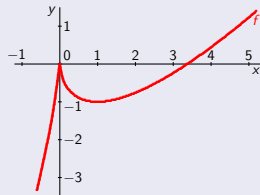


Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia f nemá body nespojitosti, t. j. neexistujú jednostranné nevlastné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$

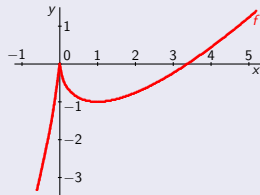


Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia f nemá body nespojitosti, t. j. neexistujú jednostranné nevlastné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).



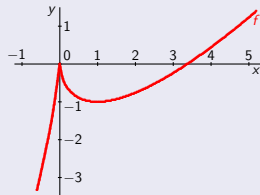
Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia f nemá body nespojitosti, t. j. neexistujú jednostranné nevlastné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right]$$



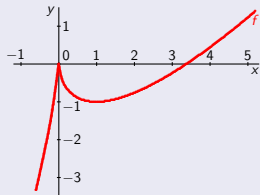
Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia f nemá body nespojitosti, t. j. neexistujú jednostranné nevlastné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{|x|^2}}{\operatorname{sgn} x \cdot |x|} \right]$$



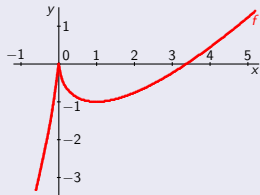
Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia f nemá body nespojitosti, t. j. neexistujú jednostranné nevlastné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f **nemá asymptoty bez smernice** (vertikálne).

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{|x|^2}}{\operatorname{sgn} x \cdot |x|} \cdot \frac{\sqrt[3]{|x|}}{\sqrt[3]{|x|}} \right]$$



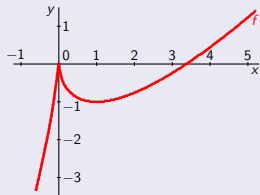
Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia f nemá body nespojitosti, t. j. neexistujú jednostranné nevlastné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{|x|^2}}{\operatorname{sgn} x \cdot |x|} \cdot \frac{\sqrt[3]{|x|}}{\sqrt[3]{|x|}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3 \cdot |x|}{\operatorname{sgn} x \cdot |x| \cdot \sqrt[3]{|x|}} \right] \end{aligned}$$



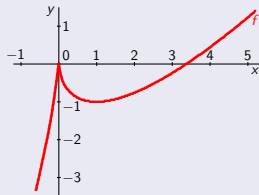
Asymptotické vlastnosti funkcií

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia f nemá body nespojitosti, t. j. neexistujú jednostranné nevlastné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{|x|^2}}{\operatorname{sgn} x \cdot |x|} \cdot \frac{\sqrt[3]{|x|}}{\sqrt[3]{|x|}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3 \cdot |x|}{\operatorname{sgn} x \cdot |x| \cdot \sqrt[3]{|x|}} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3}{\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt[3]{|x|}} \right] = 2 - \frac{3}{\pm\infty} = 2, \end{aligned}$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

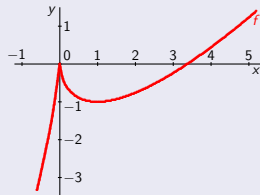
$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia f nemá body nespojitosti, t. j. neexistujú jednostranné nevlastné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f **ne** má asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{|x|^2}}{\operatorname{sgn} x \cdot |x|} \cdot \frac{\sqrt[3]{|x|}}{\sqrt[3]{|x|}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3 \cdot |x|}{\operatorname{sgn} x \cdot |x| \cdot \sqrt[3]{|x|}} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3}{\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt[3]{|x|}} \right] = 2 - \frac{3}{\pm\infty} = 2, \end{aligned}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x]$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

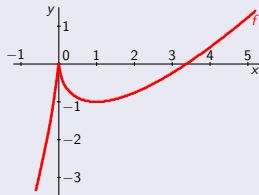
$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia f nemá body nespojitosti, t. j. neexistujú jednostranné nevlastné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f **ne** má asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{|x|^2}}{\operatorname{sgn} x \cdot |x|} \cdot \frac{\sqrt[3]{|x|}}{\sqrt[3]{|x|}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3 \cdot |x|}{\operatorname{sgn} x \cdot |x| \cdot \sqrt[3]{|x|}} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3}{\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt[3]{|x|}} \right] = 2 - \frac{3}{\pm\infty} = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x] \\ &= -3 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^2} = \pm\infty \notin \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Asymptotické vlastnosti funkcií

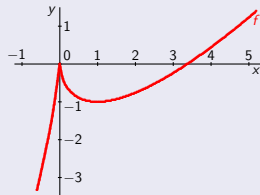
$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ nemá žiadne asymptoty.

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

Funkcia f nemá body nespojitosti, t. j. neexistujú jednostranné nevlastné limity v bodoch $a \in \mathbb{R}$ a funkcia f nemá asymptoty bez smernice (vertikálne).

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{|x|^2}}{\operatorname{sgn} x \cdot |x|} \cdot \frac{\sqrt[3]{|x|}}{\sqrt[3]{|x|}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3 \cdot |x|}{\operatorname{sgn} x \cdot |x| \cdot \sqrt[3]{|x|}} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{3}{\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt[3]{|x|}} \right] = 2 - \frac{3}{\pm\infty} = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x] \\ &= -3 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^2} = \pm\infty \notin \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Asymptoty so smernicou neexistujú.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$,

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch

Vyšetrenie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body,

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- f' ,

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- f' , stacionárne body,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- f' , stacionárne body, lokálne a globálne extrémny,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- f' , stacionárne body, lokálne a globálne extrémym,
intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- f' , stacionárne body, lokálne a globálne extrémym,
intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
- f'' ,

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- f' , stacionárne body, lokálne a globálne extrémny,
intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
- f'' , inflexné body,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- f' , stacionárne body, lokálne a globálne extrémny,
intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
- f'' , inflexné body, intervaly, na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- f' , stacionárne body, lokálne a globálne extrémny,
intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
- f'' , inflexné body, intervaly, na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
- Asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou.


Vyšetrovanie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- f' , stacionárne body, lokálne a globálne extrémny,
intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
- f'' , inflexné body, intervaly, na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
- Asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou.
- Obor hodnôt $H(f)$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie f znamená určiť:

- Definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti a nespojitosti.
- Párnosť, nepárnosť, periodickosť, *resp.* iné špeciálne vlastnosti.
- Jednostranné limity v bodoch nespojitosti,
v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
- Nulové body, intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
- f' , stacionárne body, lokálne a globálne extrémny,
intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
- f'' , inflexné body, intervaly, na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
- Asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou.
- Obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie. 

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R},$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}, f'(-1) = f'(1) = 0,$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}, f'(-1) = f'(1) = 0,$$

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}, f'(-1) = f'(1) = 0,$$

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty \rangle$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}, f'(-1) = f'(1) = 0,$$

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty \rangle$,

$f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}, f'(-1) = f'(1) = 0,$$

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty \rangle$,

$f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0$.

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(-1) = f'(1) = 0$,

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty)$,

$f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in \mathbb{R}$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}, f'(-1) = f'(1) = 0,$$

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty)$,

$f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

$$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, x \in \mathbb{R}, f''(-\sqrt{3}) = f''(0) = f''(\sqrt{3}) = 0,$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}, f'(-1) = f'(1) = 0,$$

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty)$,

$f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

$$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, x \in \mathbb{R}, f''(-\sqrt{3}) = f''(0) = f''(\sqrt{3}) = 0, f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4},$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}, f'(-1) = f'(1) = 0,$$

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty \rangle$,

$f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

$$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, x \in \mathbb{R}, f''(-\sqrt{3}) = f''(0) = f''(\sqrt{3}) = 0, f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4},$$

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -\sqrt{3})$ a na $\langle 0; \sqrt{3} \rangle$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0$.

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(-1) = f'(1) = 0$,

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty \rangle$,
 $f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(-\sqrt{3}) = f''(0) = f''(\sqrt{3}) = 0$, $f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -\sqrt{3})$ a na $\langle 0; \sqrt{3} \rangle$, f je rýdzo konvexná
na $\langle -\sqrt{3}; 0 \rangle$ a na $\langle \sqrt{3}; \infty \rangle$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0$.

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(-1) = f'(1) = 0$,

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty \rangle$,
 $f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(-\sqrt{3}) = f''(0) = f''(\sqrt{3}) = 0$, $f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -\sqrt{3})$ a na $\langle 0; \sqrt{3} \rangle$, f je rýdzo konvexná
na $\langle -\sqrt{3}; 0 \rangle$ a na $\langle \sqrt{3}; \infty \rangle$, inflexné body sú $\pm\sqrt{3}$, 0.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0$.

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(-1) = f'(1) = 0$,

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty \rangle$,
 $f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(-\sqrt{3}) = f''(0) = f''(\sqrt{3}) = 0$, $f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -\sqrt{3})$ a na $\langle 0; \sqrt{3} \rangle$, f je rýdzo konvexná
na $\langle -\sqrt{3}; 0 \rangle$ a na $\langle \sqrt{3}; \infty \rangle$, inflexné body sú $\pm\sqrt{3}$, 0.

Asymptota so smernicou je $y = 0$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}, f'(-1) = f'(1) = 0,$$

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty \rangle$,

$f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

$$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, x \in \mathbb{R}, f''(-\sqrt{3}) = f''(0) = f''(\sqrt{3}) = 0, f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4},$$

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -\sqrt{3})$ a na $\langle 0; \sqrt{3} \rangle$, f je rýdzo konvexná

na $\langle -\sqrt{3}; 0 \rangle$ a na $\langle \sqrt{3}; \infty \rangle$, inflexné body sú $\pm\sqrt{3}$, 0.

Asymptota so smernicou je $y = 0$, asymptoty bez smernice neexistujú.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0$.

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(-1) = f'(1) = 0$,

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty \rangle$,
 $f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(-\sqrt{3}) = f''(0) = f''(\sqrt{3}) = 0$, $f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -\sqrt{3})$ a na $\langle 0; \sqrt{3} \rangle$, f je rýdzo konvexná
na $\langle -\sqrt{3}; 0 \rangle$ a na $\langle \sqrt{3}; \infty \rangle$, inflexné body sú $\pm\sqrt{3}$, 0.

Asymptota so smernicou je $y = 0$, asymptoty bez smernice neexistujú.

Obor hodnôt $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0$.

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(-1) = f'(1) = 0$,

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty \rangle$,
 $f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in \mathbb{R}$, $f''(-\sqrt{3}) = f''(0) = f''(\sqrt{3}) = 0$, $f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -\sqrt{3})$ a na $\langle 0; \sqrt{3} \rangle$, f je rýdzo konvexná
na $\langle -\sqrt{3}; 0 \rangle$ a na $\langle \sqrt{3}; \infty \rangle$, inflexné body sú $\pm\sqrt{3}$, 0.

Asymptota so smernicou je $y = 0$, asymptoty bez smernice neexistujú.

Obor hodnôt $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

Tabuľka vybraných hodnôt funkcie,

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá pre všetky $x \in \mathbb{R}$, f nemá body nespojitosti.

f nie je periodická, f nie je párna, f je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

Hodnota $f(0) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0)$, f je kladná na $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R}, f'(-1) = f'(1) = 0,$$

f je rastúca na $\langle -1; 1 \rangle$, f je klesajúca na $(-\infty; -1)$ a na $\langle 1; \infty \rangle$,

$f(-1) = -2$ je lokálne aj globálne min, $f(1) = 2$ je lokálne aj globálne max.

$$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, x \in \mathbb{R}, f''(-\sqrt{3}) = f''(0) = f''(\sqrt{3}) = 0, f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4},$$

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -\sqrt{3})$ a na $\langle 0; \sqrt{3} \rangle$, f je rýdzo konvexná na $\langle -\sqrt{3}; 0 \rangle$ a na $\langle \sqrt{3}; \infty \rangle$, inflexné body sú $\pm\sqrt{3}$, 0.

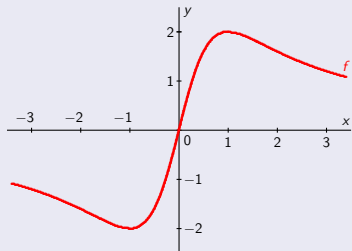
Asymptota so smernicou je $y=0$, asymptoty bez smernice neexistujú.

Obor hodnôt $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

Tabuľka vybraných hodnôt funkcie, graf funkcie.

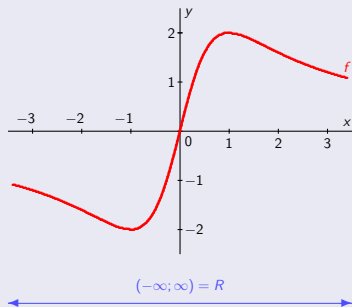
Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.



Vyšetrenie priebehu funkcie

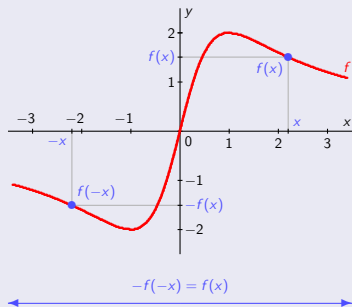
Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.



$D(f) = R$, f je spojitá pre všetky $x \in R$

Vyšetrenie priebehu funkcie

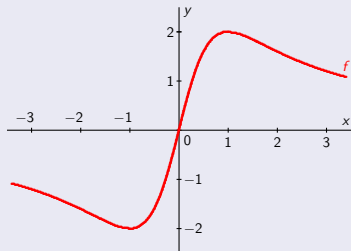
Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.



nie je periodická, nie je párna, je nepárna

Vyšetrenie priebehu funkcie

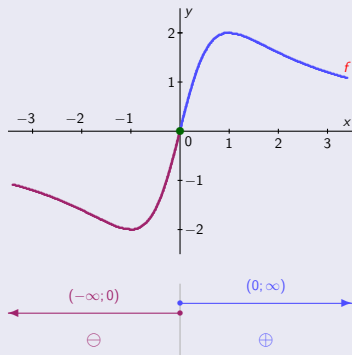
Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

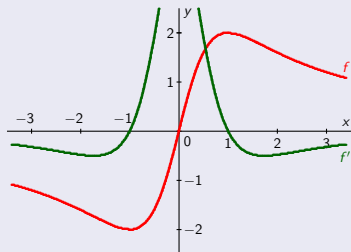
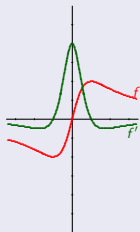
Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.



záporná na $(-\infty; 0)$, $f(0) = 0$, kladná na $(0; \infty)$

Vyšetrenie priebehu funkcie

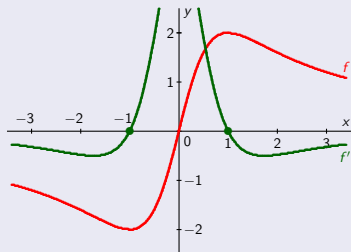
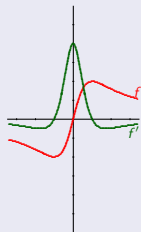
Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.



$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, x \in \mathbb{R},$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

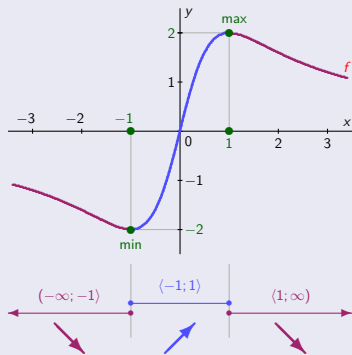
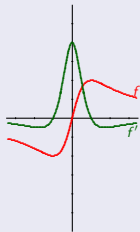
Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.



$$f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f'(-1) = 0, \quad f'(1) = 0$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

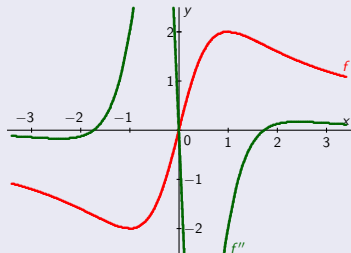
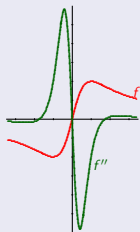


klesá na $(-\infty; -1)$, rastie na $\langle -1; 1 \rangle$, klesá na $\langle 1; \infty$

$f(-1) = -2$ lokálne a globálne min, $f(1) = 2$ lokálne a globálne max

Vyšetrenie priebehu funkcie

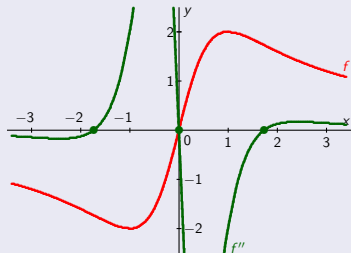
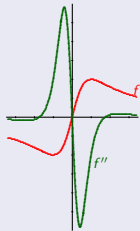
Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.



$$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, x \in \mathbb{R},$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

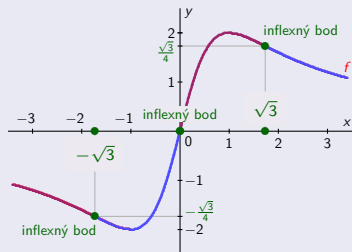
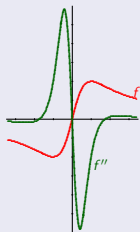
Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.



$$f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f''(-\sqrt{3}) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f''(\sqrt{3}) = 0$$

Výšetrenie priebehu funkcie

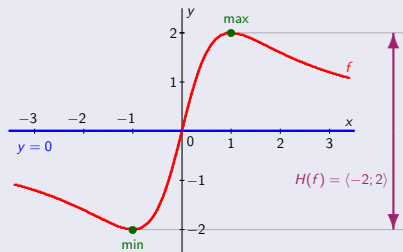
Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.



rýdzo konkávna na $(-\infty; -\sqrt{3})$ a na $(0; \sqrt{3})$, rýdzo konvexná na $(-\sqrt{3}; 0)$ a na $(\sqrt{3}; \infty)$
 inflexné body $-\sqrt{3}$, 0 , $\sqrt{3}$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

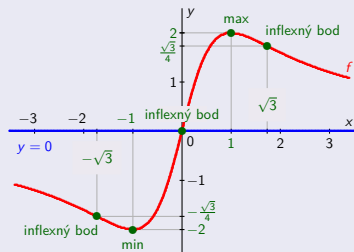


asymptota so smernicou $y = 0$, asymptota bez smernice neexistuje, $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
0 ... nulový bod					
- záporná $f(x) = \frac{4x}{1+x^2} < 0$			+ kladná $f(x) = \frac{4x}{1+x^2} > 0$		
-1 ... lokálne min			1 ... lokálne max		
↘ klesá $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} < 0$	↗ rastie $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} > 0$	↘ klesá $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} < 0$			
$-\sqrt{3} \dots$ inflexný bod		0 ... inflexný bod		$\sqrt{3} \dots$ inflexný bod	
∩ konkávna $f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} < 0$	∪ konvexná $f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} > 0$	∩ konkávna $f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} < 0$	∪ konvexná $f''(x) = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} > 0$		



graf funkcie $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty,$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

$$\text{Priebeh funkcie } f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

$$\text{Priebeh funkcie } f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}.$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\},$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad f'(4) = 0,$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

$$f''(x) = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\},$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

$$f''(x) = \frac{16(x-6)}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad f''(6) = 0,$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $\langle 4; \infty$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f''(6) = 0$, f je rýdzo konvexná na $\langle 6; \infty$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f''(6) = 0$, f je rýdzo konvexná na $(6; \infty)$,
 f je rýdzo konkávna na $(-\infty; 0)$ a na $(0; 6)$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f''(6) = 0$, f je rýdzo konvexná na $(6; \infty)$,
 f je rýdzo konkávna na $(-\infty; 0)$ a na $(0; 6)$, inflexný bod je 6,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f''(6) = 0$, f je rýdzo konvexná na $(6; \infty)$,
 f je rýdzo konkávna na $(-\infty; 0)$ a na $(0; 6)$, inflexný bod je 6, $f(6) = \frac{8}{9}$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f''(6) = 0$, f je rýdzo konvexná na $(6; \infty)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; 0)$ a na $(0; 6)$, inflexný bod je 6, $f(6) = \frac{8}{9}$.

Asymptota so smernicou je $y = 0$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f''(6) = 0$, f je rýdzo konvexná na $(6; \infty)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; 0)$ a na $(0; 6)$, inflexný bod je 6, $f(6) = \frac{8}{9}$.

Asymptota so smernicou je $y = 0$, asymptota bez smernice je $x = 0$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $\langle 4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f''(6) = 0$, f je rýdzo konvexná na $\langle 6; \infty)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; 0)$ a na $(0; 6)$, inflexný bod je 6, $f(6) = \frac{8}{9}$.

Asymptota so smernicou je $y = 0$, asymptota bez smernice je $x = 0$.

Obor hodnôt $H(f) = (-\infty; 1)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f''(6) = 0$, f je rýdzo konvexná na $(6; \infty)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; 0)$ a na $(0; 6)$, inflexný bod je 6, $f(6) = \frac{8}{9}$.

Asymptota so smernicou je $y = 0$, asymptota bez smernice je $x = 0$.

Obor hodnôt $H(f) = (-\infty; 1)$.

Tabuľka vybraných hodnôt funkcie,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod 0 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x-16}{x^2} = \frac{0-16}{0^+} = \frac{-16}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Hodnota $f(2) = 0$, f je záporná na $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$, f je kladná na $(2; \infty)$.

$f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(4) = 0$, f je klesajúca na $(-\infty; 0)$ a na $(4; \infty)$,
 f je rastúca na $(0; 4)$, $f(4) = 1$ je lokálne aj globálne max.

$f''(x) = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f''(6) = 0$, f je rýdzo konvexná na $(6; \infty)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; 0)$ a na $(0; 6)$, inflexný bod je 6, $f(6) = \frac{8}{9}$.

Asymptota so smernicou je $y = 0$, asymptota bez smernice je $x = 0$.

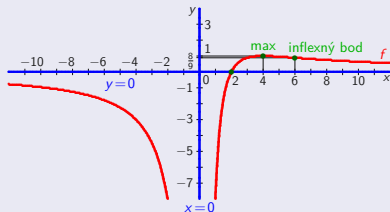
Obor hodnôt $H(f) = (-\infty; 1)$.

Tabuľka vybraných hodnôt funkcie, graf funkcie.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
0 ... bod nespojitosti		2 ... nulový bod		
-	-	-	+	+
$f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2} < 0$	$f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2} < 0$		$f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2} > 0$	
4 ... lokálne max				
↘	↗	↗	↘	↘
klesá	rastie		klesá	
$f'(x) = \frac{8(x-1)}{x^2} < 0$	$f'(x) = \frac{8(x-1)}{x^2} > 0$		$f'(x) = \frac{8(x-1)}{x^2} < 0$	
6 ... inflexný bod				
∩	∩	∩	∪	∪
konkávna		konkávna	konvexná	
$f''(x) < 0$		$f''(x) = \frac{8(x-3)}{x^3} < 0$	$f''(x) > 0$	



graf funkcie $f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \leq 1$, $x \neq -2$, t. j. pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1]$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \leq 1, x \neq -2, \text{ t. j. pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1),$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \geq 1, \text{ t. j. pre } x \in \langle 1; \infty \rangle.$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \leq 1, x \neq -2, \text{ t. j. pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1],$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \geq 1, \text{ t. j. pre } x \in \langle 1; \infty \rangle.$$

f nie je periodická,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \leq 1$, $x \neq -2$, t. j. pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1]$,

$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \geq 1$, t. j. pre $x \in \langle 1; \infty \rangle$.

f nie je periodická, f nie je párna,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \leq 1$, $x \neq -2$, t. j. pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1]$,

$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \geq 1$, t. j. pre $x \in \langle 1; \infty \rangle$.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \leq 1, x \neq -2, \text{ t. j. pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1],$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \geq 1, \text{ t. j. pre } x \in \langle 1; \infty \rangle.$$

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -\infty,$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \leq 1$, $x \neq -2$, t. j. pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1]$,

$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \geq 1$, t. j. pre $x \in \langle 1; \infty \rangle$.

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = \infty.$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \leq 1, x \neq -2, \text{ t. j. pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1],$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \geq 1, \text{ t. j. pre } x \in \langle 1; \infty \rangle.$$

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -1,$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \leq 1, x \neq -2, \text{ t. j. pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1],$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \geq 1, \text{ t. j. pre } x \in \langle 1; \infty \rangle.$$

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{3}{x+2} \right] = 1.$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \leq 1, x \neq -2, \text{ t. j. pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1],$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \geq 1, \text{ t. j. pre } x \in \langle 1; \infty \rangle.$$

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{3}{x+2} \right] = 1.$$

Hodnota $f(1) = 0$, hodnota $f(-2)$ neexistuje,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \leq 1, x \neq -2, \text{ t. j. pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1),$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \geq 1, \text{ t. j. pre } x \in \langle 1; \infty \rangle.$$

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{3}{x+2} \right] = 1.$$

Hodnota $f(1) = 0$, hodnota $f(-2)$ neexistuje,

f je záporná na $(-\infty; -2)$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$.

Bod -2 je bodom neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu.

$$f(x) = \frac{1-x}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \leq 1, x \neq -2, \text{ t. j. pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1),$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \geq 1, \text{ t. j. pre } x \in \langle 1; \infty \rangle.$$

f nie je periodická, f nie je párna, f nie je nepárna.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3}{x+2} - 1 \right] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{3}{x+2} \right] = 1.$$

Hodnota $f(1) = 0$, hodnota $f(-2)$ neexistuje,

f je záporná na $(-\infty; -2)$, f je kladná na $(-2; 1)$ a na $(1; \infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1), \quad f(x) = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \in (1; \infty).$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} \quad \text{pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1),$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum,

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1), \quad f(x) = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \in (1; \infty).$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0 \text{ pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1), \quad f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ pre } x \in (1; \infty).$$

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \quad \text{pre } x \in (-\infty; -2),$$

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1), \quad f(x) = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \in (1; \infty).$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0 \text{ pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1), \quad f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ pre } x \in (1; \infty).$$

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x \in (-\infty; -2), \quad f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x \in (-2; 1),$$

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1), \quad f(x) = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \in (1; \infty).$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0 \text{ pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1), \quad f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ pre } x \in (1; \infty).$$

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x \in (-\infty; -2), \quad f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x \in (-2; 1),$$

$$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3} \text{ pre } x \in (1; \infty).$$

Výšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1 \text{ pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1), \quad f(x) = 1 - \frac{3}{x+2} \text{ pre } x \in (1; \infty).$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0 \text{ pre } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1), \quad f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \text{ pre } x \in (1; \infty).$$

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x \in (-\infty; -2), \quad f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} \text{ pre } x \in (-2; 1),$$

$$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3} \text{ pre } x \in (1; \infty).$$

$f''(1)$ neexistuje,

Výšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x \in (-\infty; -2)$, $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x \in (-2; 1)$,

$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f''(1)$ neexistuje, f'' nemá nulové body,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x \in (-\infty; -2)$, $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ pre $x \in (-2; 1)$,

$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f''(1)$ neexistuje, f'' nemá nulové body, f je rýdzo konvexná na $(-2; 1)$,

Výšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2)$, $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ pre $x \in (-2; 1)$,

$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f''(1)$ neexistuje, f'' nemá nulové body, f je rýdzo konvexná na $(-2; 1)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -2)$ a na $(1; \infty)$,

Výšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2)$, $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ pre $x \in (-2; 1)$,

$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f''(1)$ neexistuje, f'' nemá nulové body, f je rýdzo konvexná na $(-2; 1)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -2)$ a na $(1; \infty)$, bod 1 je inflexný.

Výšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2)$, $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ pre $x \in (-2; 1)$,

$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f''(1)$ neexistuje, f'' nemá nulové body, f je rýdzo konvexná na $(-2; 1)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -2)$ a na $(1; \infty)$, bod 1 je inflexný.

Asymptoty so smernicou sú $y = -1$, $y = 1$,

Výšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2)$, $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ pre $x \in (-2; 1)$,

$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f''(1)$ neexistuje, f'' nemá nulové body, f je rýdzo konvexná na $(-2; 1)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -2)$ a na $(1; \infty)$, bod 1 je inflexný.

Asymptoty so smernicou sú $y = -1$, $y = 1$, asymptota bez smernice je $x = -2$.

Výšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2)$, $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ pre $x \in (-2; 1)$,

$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f''(1)$ neexistuje, f'' nemá nulové body, f je rýdzo konvexná na $(-2; 1)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -2)$ a na $(1; \infty)$, bod 1 je inflexný.

Asymptoty so smernicou sú $y = -1$, $y = 1$, asymptota bez smernice je $x = -2$.

Obor hodnôt $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2)$, $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ pre $x \in (-2; 1)$,

$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f''(1)$ neexistuje, f'' nemá nulové body, f je rýdzo konvexná na $(-2; 1)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -2)$ a na $(1; \infty)$, bod 1 je inflexný.

Asymptoty so smernicou sú $y = -1$, $y = 1$, asymptota bez smernice je $x = -2$.

Obor hodnôt $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.

Tabuľka vybraných hodnôt,

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$, $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f'(1)$ neexistuje, f' nemá nulové body,

f je klesajúca na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 1)$, f je rastúca na $(1; \infty)$,

$f(1) = 0$ je lokálne minimum, globálne extrémny neexistujú.

$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (-\infty; -2)$, $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ pre $x \in (-2; 1)$,

$f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3} < 0$ pre $x \in (1; \infty)$.

$f''(1)$ neexistuje, f'' nemá nulové body, f je rýdzo konvexná na $(-2; 1)$,

f je rýdzo konkávna na $(-\infty; -2)$ a na $(1; \infty)$, bod 1 je inflexný.

Asymptoty so smernicou sú $y = -1$, $y = 1$, asymptota bez smernice je $x = -2$.

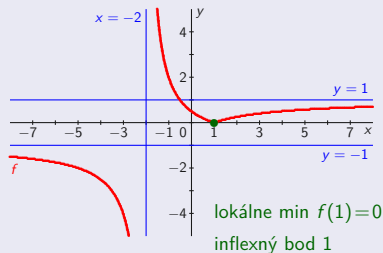
Obor hodnôt $H(f) = (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$.

Tabuľka vybraných hodnôt, graf funkcie.

Vyšetrenie priebehu funkcie

Priebeh funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$.

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 ... bod nespojitosti		1 ... nulový bod
- záporná $f(x) = \frac{ x-1 }{x+2} < 0$	+ kladná $f(x) = \frac{ x-1 }{x+2} > 0$	- záporná $f(x) = \frac{ x-1 }{x+2} < 0$
1 ... lokálne min		
↘ klesá $f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$	↘ klesá $f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$	↗ rastie $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$
1 ... inflexný bod		
∩ konkávná $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$	∪ konvexná $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$	∩ konkávná $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$



graf funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$

Koniec 9. časti

Ďakujem za pozornosť.