Matematická analýza 1

2023/2024

2. Číselné postupnosti

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou získate nápomoc.
Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

1. Postupnosti reálnych čísel
2. Limita postupnosti
3. Výpočet limít
4. Riešené príklady

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$,

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

ak platí $D(f) = N$,

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{[1; f(1)], [2; f(2)], [3; f(3)], \ldots, [n; f(n)], \ldots\}$

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

ak platí $D(f) = N$,

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}.$

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$,

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}.$

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou,**

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}.$

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)]\,, n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}.$

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}.$

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f\colon N \to R$.

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame postupnosťou,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- Členy označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva reálna (postupnosť reálnych čísel),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f \colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f\colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}.$

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f\colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- **Explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n.

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}.$

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f\colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- **Explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n.
- **Rekurentne**, t. j. zadaním prvého člena a_1 (prvých niekoľkých členov) a zadaním a_n, $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f \colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- **Explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n.
- **Rekurentne**, t. j. zadaním prvého člena a_1 (prvých niekoľkých členov) a zadaním a_n, $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.

- Napríklad postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n - 1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ môžeme definovať

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f\colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- **Explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n.
- **Rekurentne**, t. j. zadaním prvého člena a_1 (prvých niekoľkých členov) a zadaním a_n, $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.

- Napríklad postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ môžeme definovať

  explicitne vzťahom $a_n = 2n - 1$, $n \in N$

Postupnosti reálnych čísel

Zobrazenie (funkcia) f nazývame **postupnosťou**,

ak platí $D(f) = N$, [Vzory sú prirodzené čísla, obrazy môžu byť z ľubovoľnej množiny.]

t. j. $f = \{[n; f(n)], n \in N\} = \{\underbrace{[1; f(1)]}_{a_1}, \underbrace{[2; f(2)]}_{a_2}, \underbrace{[3; f(3)]}_{a_3}, \ldots, \underbrace{[n; f(n)]}_{a_n}, \ldots\}$.

- **Členy** označujeme $a_n = [n; f(n)]$ a stručne píšeme $f = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **reálna** (postupnosť **reálnych čísel**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$ t. j. $f \colon N \to R$. [Členy a_n sú reálne čísla.]

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame (definujeme):

- **Explicitne**, t. j. všeobecným vyjadrením člena a_n ako funkcie premennej n.
- **Rekurentne**, t. j. zadaním prvého člena a_1 (prvých niekoľkých členov) a zadaním a_n, $n \in N$ pomocou predchádzajúcich členov.

- Napríklad postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ môžeme definovať

  explicitne vzťahom $a_n = 2n - 1$, $n \in N$ a rekurentne predpisom $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$, $n \in N$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **sa rovná** postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti **sa rovnajú**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **sa rovná** postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti **sa rovnajú**),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Ohraničená zhora, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- **Ohraničená zhora**, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.

- **Neohraničená zhora**, ak nie je ohraničená zhora.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Ohraničená zhora, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.
- Ohraničená zdola, ak existuje $m \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n$.

- Neohraničená zhora, ak nie je ohraničená zhora.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Ohraničená zhora, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.
- Ohraničená zdola, ak existuje $m \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n$.

- Neohraničená zhora, ak nie je ohraničená zhora.
- Neohraničená zdola, ak nie je ohraničená zdola.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Ohraničená zhora, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.
- Ohraničená zdola, ak existuje $m \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n$.
- Ohraničená, ak je ohraničená zdola a súčasne je ohraničená zhora.

- Neohraničená zhora, ak nie je ohraničená zhora.
- Neohraničená zdola, ak nie je ohraničená zdola.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (postupnosti sa rovnajú),

ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$, označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Postupnosti často definujeme od nejakého člena a_k, kde $k \in Z$. [Najčastejšie od člena a_0.]

  Postupnosť potom zapisujeme $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.

- Napríklad $\{n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\{n\}_{n=-1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n\}_{n=5}^{\infty} = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Ohraničená zhora, ak existuje $M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.
- Ohraničená zdola, ak existuje $m \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n$.
- Ohraničená, ak je ohraničená zdola a súčasne je ohraničená zhora.

- Neohraničená zhora, ak nie je ohraničená zhora.
- Neohraničená zdola, ak nie je ohraničená zdola.
- Neohraničená, ak nie je ohraničená zdola alebo nie je ohraničená zhora.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

$\}$ Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Monotónna.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

} Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

} Monotónna.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

} Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

} Monotónna.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

} Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

} Monotónna.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Monotónna.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Súčtom postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

nazývame postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Monotónna.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Súčtom, rozdielom postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

nazývame postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

Monotónna.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Súčtom, rozdielom, súčinom postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

nazývame postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

Postupnosti reálnych čísel

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:

- Rastúca, ak pre všetky $n\in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- Klesajúca, ak pre všetky $n\in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

} Rýdzo (ostro) monotónna.

- Neklesajúca, ak pre všetky $n\in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.
- Nerastúca, ak pre všetky $n\in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.
- Stacionárna (konštantná), ak pre všetky $n\in N$ platí $a_n = a_{n+1}$.

} Monotónna.

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel (indexov z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva podpostupnosť (vybraná postupnosť) z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Súčtom, rozdielom, súčinom, resp. podielom postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

nazývame postupnosti $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$,

resp. $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ v prípade, že pre všetky $n\in N$ platí $b_n\neq 0$.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}.$

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, [Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, [Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Hromadná hodnota $a \in R^*$ sa nazýva:

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, [Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Hromadná hodnota $a \in R^*$ sa nazýva:

- Vlastná, ak $a \in R$ (vlastná hromadná hodnota).

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, [Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Hromadná hodnota $a \in R^*$ sa nazýva:

- Vlastná, ak $a \in R$ (vlastná hromadná hodnota).
- Nevlastná, ak $a = -\infty$ alebo $a = \infty$ (nevlastná hromadná hodnota).

Limita postupnosti – Hromadná hodnota (HH)

- Limita a limitné procesy patria medzi základné pojmy v matematike.

Motivačný príklad.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n, \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

- Párne členy a_n sa zmenšujú a približujú k bodu 0 (hromadia v bode 0).
- Nepárne členy a_n sa neohraničene zväčšujú do ∞ (hromadia v bode ∞).

$a \in R^*$ sa nazýva hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, [Hromadná hodnota – HH]

ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $a_n \in O(a)$.

Hromadná hodnota $a \in R^*$ sa nazýva:

- Vlastná, ak $a \in R$ (vlastná hromadná hodnota).
- Nevlastná, ak $a = -\infty$ alebo $a = \infty$ (nevlastná hromadná hodnota).

- Množinu všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označujeme symbolom E.

Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

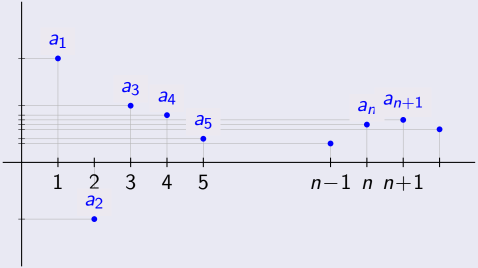
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.

Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

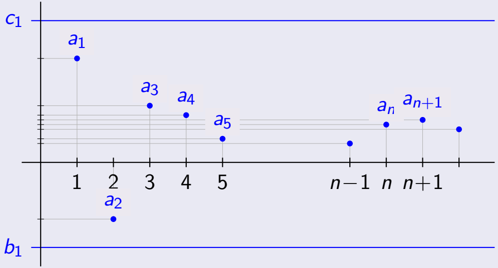


Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.



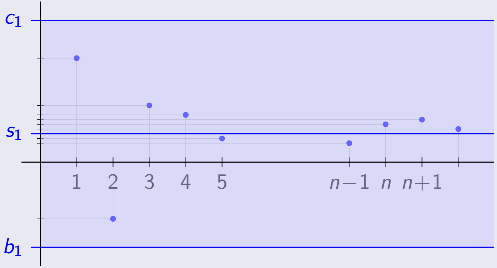
Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1 ; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_1 ; c_1 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_1 ; s_1 \rangle$, $\langle s_1 ; c_1 \rangle$, kde $s_1 = \frac{b_1 + c_1}{2}$.



Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

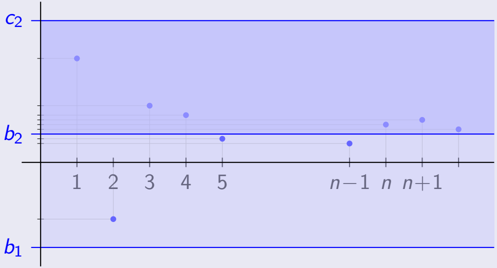
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_1; c_1 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_1; s_1 \rangle$, $\langle s_1; c_1 \rangle$, kde $s_1 = \frac{b_1+c_1}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_2; c_2 \rangle$.



Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

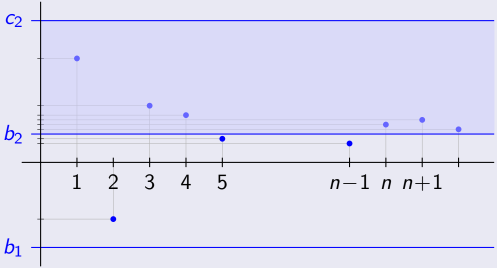
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_1; c_1 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_1; s_1 \rangle$, $\langle s_1; c_1 \rangle$, kde $s_1 = \frac{b_1 + c_1}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_2; c_2 \rangle$.

Platí $\langle b_2; c_2 \rangle \subset \langle b_1; c_1 \rangle$, $c_2 - b_2 = \frac{c_1 - b_1}{2} = \frac{d}{2} = \frac{d}{2^{2-1}}$.



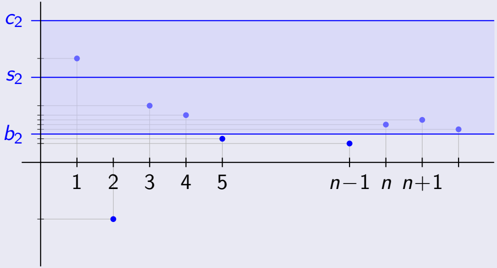
Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_2; c_2 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_2; s_2 \rangle$, $\langle s_2; c_2 \rangle$, kde $s_2 = \frac{b_2+c_2}{2}$.



Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

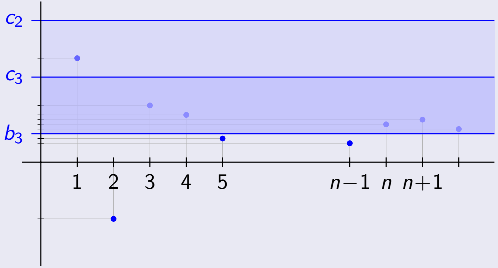
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_2; c_2 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_2; s_2 \rangle$, $\langle s_2; c_2 \rangle$, kde $s_2 = \frac{b_2+c_2}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_3; c_3 \rangle$.



Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

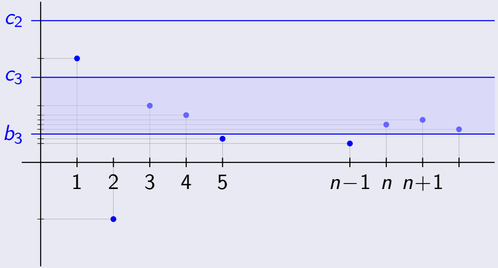
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_2; c_2 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_2; s_2 \rangle$, $\langle s_2; c_2 \rangle$, kde $s_2 = \frac{b_2 + c_2}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_3; c_3 \rangle$.

Platí $\langle b_3; c_3 \rangle \subset \langle b_2; c_2 \rangle$, $c_3 - b_3 = \frac{c_2 - b_2}{2} = \frac{d}{2^2} = \frac{d}{2^{3-1}}$.



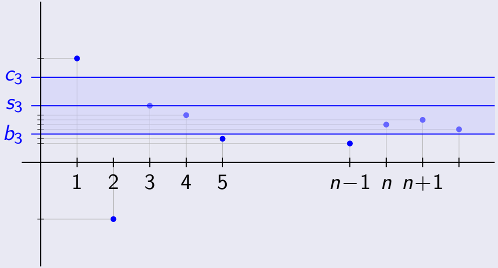
Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

  Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_3; c_3 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_3; s_3 \rangle$, $\langle s_3; c_3 \rangle$, kde $s_3 = \frac{b_3+c_3}{2}$.



Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

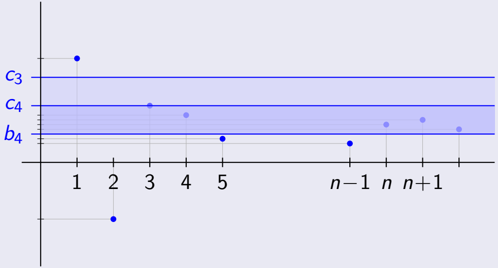
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_3; c_3 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_3; s_3 \rangle$, $\langle s_3; c_3 \rangle$, kde $s_3 = \frac{b_3+c_3}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_4; c_4 \rangle$.



Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu **hromadnú hodnotu** $a \in R^*$.

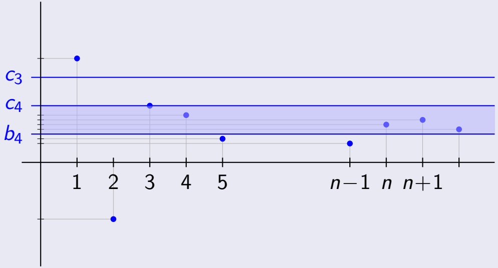
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_3; c_3 \rangle$ na rovnaké intervaly $\langle b_3; s_3 \rangle$, $\langle s_3; c_3 \rangle$, kde $s_3 = \frac{b_3+c_3}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_4; c_4 \rangle$.

Platí $\langle b_4; c_4 \rangle \subset \langle b_3; c_3 \rangle$, $c_4 - b_4 = \frac{c_3-b_3}{2} = \frac{d}{2^3} = \frac{d}{2^{4-1}}$.

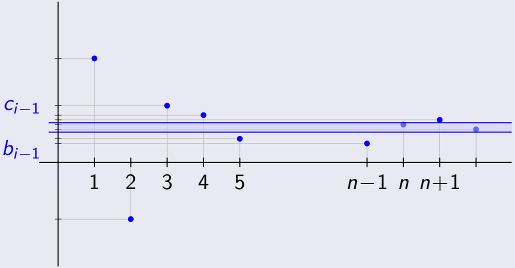


Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.
  Označme $d = c_1 - b_1$.

- Takto pokračujeme do nekonečna, v praxi po požadovanú presnosť.



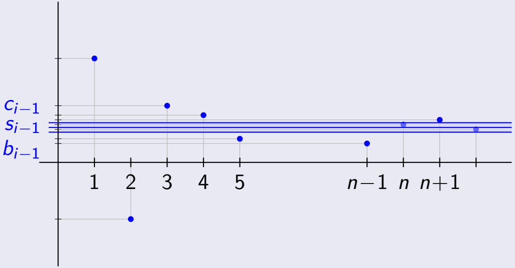
Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.



Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

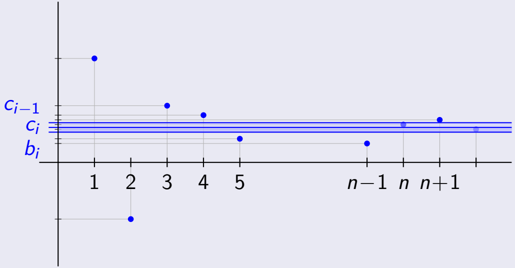
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.



Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

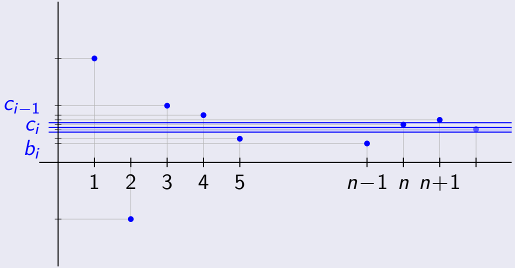
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

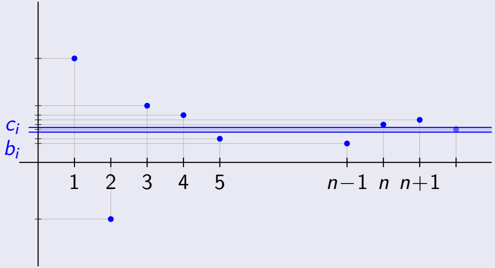
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$,

Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

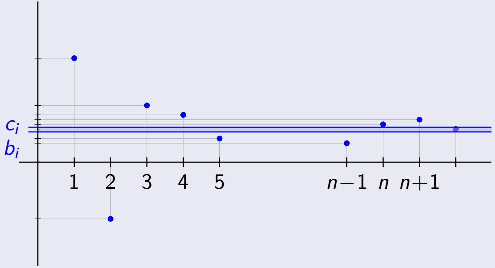
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a=-\infty$ alebo $a=\infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$,

v ktorom leží nekonečne veľa a_n

Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

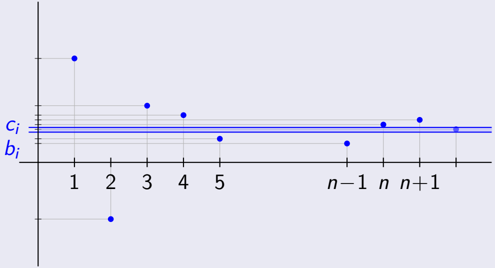
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

  V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

  Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$,

  v ktorom leží nekonečne veľa a_n

  tak, že $|a_n - a| \le c_i - b_i = \frac{d}{2^{i-1}} < \varepsilon$.

Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

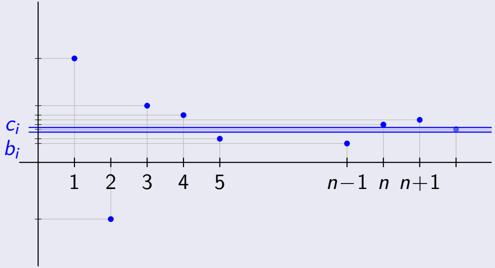
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a=-\infty$ alebo $a=\infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1\rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1}\rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1}\rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1}\rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i\rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i\rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1}\rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i\rangle$,

v ktorom leží nekonečne veľa a_n

tak, že $|a_n - a| \le c_i - b_i = \frac{d}{2^{i-1}} < \varepsilon$.

[Cantorov princíp vložených intervalov.]

Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

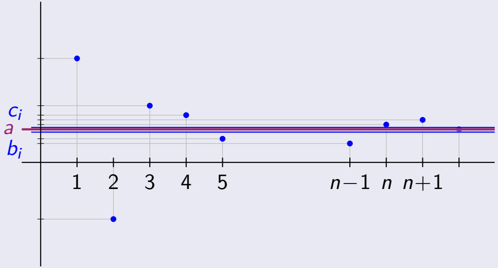
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a = -\infty$ alebo $a = \infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$,

v ktorom leží nekonečne veľa a_n

tak, že $|a_n - a| \le c_i - b_i = \frac{d}{2^{i-1}} < \varepsilon$.

[Cantorov princíp vložených intervalov.]

$\Rightarrow$ • Existuje jediný bod $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \langle b_i; c_i \rangle$,

Limita postupnosti – Existencia HH postupnosti

Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu $a \in R^*$.

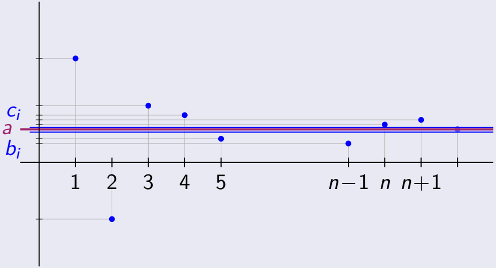
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená. $\Rightarrow$ $a=-\infty$ alebo $a=\infty$.
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. $\Rightarrow$ Existujú $b_1, c_1 \in R$ tak, že $a_n \in \langle b_1; c_1 \rangle$ pre všetky $n \in N$.

Označme $d = c_1 - b_1$.

- Rozdeľme $\langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$ na intervaly $\langle b_{i-1}; s_{i-1} \rangle$, $\langle s_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, kde $s_{i-1} = \frac{b_{i-1}+c_{i-1}}{2}$.

V aspoň jednom z intervalov leží nekonečne veľa a_n, označme ho $\langle b_i; c_i \rangle$.

Platí $\langle b_i; c_i \rangle \subset \langle b_{i-1}; c_{i-1} \rangle$, $c_i - b_i = \frac{c_{i-1}-b_{i-1}}{2} = \frac{d}{2^{i-1}}$.



- T. j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\langle b_i; c_i \rangle$,

v ktorom leží nekonečne veľa a_n

tak, že $|a_n - a| \leq c_i - b_i = \frac{d}{2^{i-1}} < \varepsilon$.

[Cantorov princíp vložených intervalov.]

$\Rightarrow$ • Existuje jediný bod $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \langle b_i; c_i \rangle$,

ktorý je hľadanou HH postupnosti.

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých **hromadných hodnôt** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých **hromadných hodnôt** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých **hromadných hodnôt** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R \\ \pm\infty \\ \nexists \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R & \text{vlastná limita} \\ \pm\infty & \\ \nexists & \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R & \text{vlastná limita} \\ \pm\infty & \text{nevlastná limita} \\ \nexists & \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R \text{ vlastná limita} & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje k číslu } a \\ \pm\infty \text{ nevlastná limita} & \\ \nexists & \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a\in R \quad \text{vlastná limita} & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje k číslu } a \\ \pm\infty \quad \text{nevlastná limita} & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ diverguje do } \pm\infty \\ \nexists & \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a\in R & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje k číslu } a \\ \text{vlastná limita} & \\ \pm\infty & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ diverguje do } \pm\infty \\ \text{nevlastná limita} & \\ \nexists & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ osciluje} \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a \in R \ \text{vlastná limita} & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konverguje k číslu } a, \quad \text{označenie } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \\ \pm\infty \ \text{nevlastná limita} & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ diverguje do } \pm\infty, \quad \text{označenie } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty \\ \nexists & \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ osciluje} \end{cases}$$

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých **hromadných hodnôt** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

$a \in R$ vlastná limita	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje
$\pm\infty$ nevlastná limita	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $\pm\infty$; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$	
$\nexists$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje	

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

- $a \in R$ — vlastná limita: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$ } $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje
- $\pm\infty$ — nevlastná limita: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $\pm\infty$; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$
- $\nexists$ — $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje

(nevlastná limita a osciluje) } $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje

Limita postupnosti – Konvergencia a divergencia

E je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- $\sup E$ nazývame horná limita (limes superior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.
- $\inf E$ nazývame dolná limita (limes inferior) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

- $\inf E = \sup E$ nazývame limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [T. j. existuje jediná HH postupnosti.]

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

$a \in R$ vlastná limita	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$
$\pm\infty$ nevlastná limita	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do $\pm\infty$; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \pm\infty$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje; označenie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow$
$\nexists$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje	

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je **hromadná hodnota (HH)** postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

- Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1,1\}$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

- Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1,1\}$.

Podpostupnosti sú napr. • $\{-1,-1,1,1,1,1,\ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

• Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1, 1\}$.

Podpostupnosti sú napr. • $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

- Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1, 1\}$.

Podpostupnosti sú napr. • $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

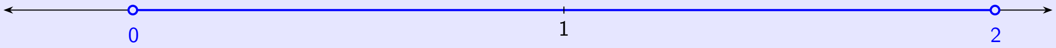
- Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1, 1\}$.

Podpostupnosti sú napr. • $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

- Body 0 a 2 sú hromadné body intervalu $(0; 2)$.



Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

• Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1, 1\}$.

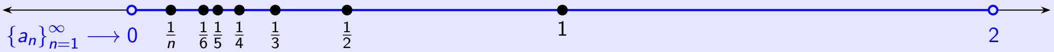
Podpostupnosti sú napr. • $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

• Body 0 a 2 sú hromadné body intervalu $(0; 2)$.

Platí • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$, pričom $a_n = \frac{1}{n} \neq 0$ pre všetky $n \in N$,



Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

• Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1,1\}$.

Podpostupnosti sú napr. • $\{-1,-1,1,1,1,1,\ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

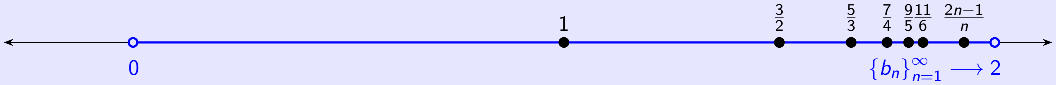
$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

• Body 0 a 2 sú hromadné body intervalu $(0;2)$.

Platí • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$, pričom $a_n = \frac{1}{n} \neq 0$ pre všetky $n \in N$,

• $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2 - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to 2$, pričom $b_n = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n} \neq 2$ pre všetky $n \in N$.



Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$a \in R^*$ je hromadná hodnota (HH) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

• Postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve hromadné hodnoty ± 1, t. j. $E = \{-1, 1\}$.

Podpostupnosti sú napr. • $\{-1, -1, 1, 1, 1, 1, \ldots\} \longrightarrow 1$, • $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$.

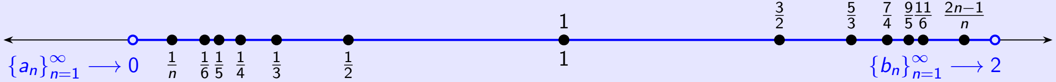
$a \in R^*$ je hromadný bod (HB) množiny $A \subset R$.

$\Leftrightarrow$ • Existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \neq a$ taká, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

• Body 0 a 2 sú hromadné body intervalu $(0; 2)$.

Platí • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to 0$, pričom $a_n = \frac{1}{n} \neq 0$ pre všetky $n \in N$,

• $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2 - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to 2$, pričom $b_n = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n} \neq 2$ pre všetky $n \in N$.



Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$ • Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$

- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

[Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

  [Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

  [Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

- Prakticky to znamená, že podmienky platia $\begin{cases} \text{až od nejakého } n_0 \in N, \\ \end{cases}$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

  [Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

- Prakticky to znamená, že podmienky platia $\Big\{$ až od nejakého $n_0 \in N$, t. j. pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

  [Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

- Prakticky to znamená, že podmienky platia
  - až od nejakého $n_0 \in N$, t. j. pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$.
  - pre všetky $n \in N$ okrem konečného počtu členov.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$
- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

  [Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

- Prakticky to znamená, že podmienky platia $\begin{cases} \text{až od nejakého } n_0 \in N, \text{ t. j. pre všetky } n \in N,\ n \geq n_0. \\ \text{pre všetky } n \in N \text{ okrem konečného počtu členov.} \end{cases}$

- Vo všeobecnosti budeme tvrdenia pre postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ formulovať pre všetky členy a_n.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postuposti.

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.

$\Rightarrow$

- Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majú rovnaké hromadné hodnoty.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

- Zmena konečného počtu členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  neovplyvní jej hromadné hodnoty, t. j. ani jej konvergenciu, resp. divergenciu.

  [Vynechanie členov, pridanie členov, zmena hodnoty členov, zmena poradia členov ap.]

- Prakticky to znamená, že podmienky platia $\begin{cases} \text{až od nejakého } n_0 \in N, \text{ t. j. pre všetky } n \in N,\ n \geq n_0. \\ \text{pre všetky } n \in N \text{ okrem konečného počtu členov.} \end{cases}$

- Vo všeobecnosti budeme tvrdenia pre postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ formulovať pre všetky členy a_n.

  [V predchádzajúcom zmysle tvrdenia pre postupnosti ostanú v platnosti, aj keď vynecháme konečný počet ich členov.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a\in R^*.$

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a.$

• Špeciálne platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

- $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N$.

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim_{n\to\infty} a_{l_n}$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N$.

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n}$.

$\Rightarrow$ • Neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N$.

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim_{n\to\infty} a_{l_n}$.

$\Rightarrow$ • Neexistuje $\lim_{n\to\infty} a_n$. [Postupnosť osciluje.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N$.

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n}$.

$\Rightarrow$ • Neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [Postupnosť osciluje.]

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje,

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N$.

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n}$.

$\Rightarrow$ • Neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. [Postupnosť osciluje.]

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje, pretože $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Leftrightarrow$ • Pre každú podpostupnosť (vybranú postupnosť) $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$

Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \in R^*.$

$\Rightarrow$ • Pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a.$

• Špeciálne platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$

• $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0.$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+k} = 0$ pre každé $k \in N.$

Existujú podpostupnosti (vybrané postupnosti) také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n}.$

$\Rightarrow$ • Neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.$ [Postupnosť osciluje.]

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje, pretože $\{-1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -1$ a $\{1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1.$

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená,

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$,

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,\ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora neohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow +\infty$.

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola neohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora
• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola

} ohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R$.

Limita postupnosti – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$, t. j. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$.

$\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

Opačné tvrdenie neplatí:

• $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ je ohraničená, ale nekonverguje. [Postupnosť osciluje.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.

$\Rightarrow$ • Existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in R$. [Dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, t. j. existuje $a \in R^*$ také, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$. [Postupnosť má limitu.]

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora neohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow +\infty$.

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora ohraničená, resp. nerastúca a zdola ohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \in R$.

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola neohraničená $\Rightarrow$ • $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$,

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí: • $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí: • $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$,

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty.$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty.$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$,

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí: • $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$. • $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí: • $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$. • $\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty.$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Platí $$-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Platí $0 = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
- $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Platí $0 = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$, resp. $a_n < b_n$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (pokiaľ limity existujú).

[Pre ostrú nerovnosť v predpoklade sa tvrdenie nemení.]

Pre $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí: • $0 < \frac{1}{n}$ pre všetky $n \in N$. • $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Pre $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ platí: • $n < n^2$ pre všetky $n \in N$, $n > 1$. • $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty.$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Veta o zovretí]

- Pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
- Existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pre $n \in N$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Platí $0 = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

  - $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a.$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,b\in R^*$, $a<b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $a_n<b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c\in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a,b\in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c\cdot a_n) = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a,b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a,b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,b\in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c\in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a,b\in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c\cdot a_n) = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

  $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

  - $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right| = |a|$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,b\in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c\in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a,b\in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c\cdot a_n) = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty - \infty$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,b \in R^*,\ a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N,\ n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b,\ a,b \in R^*.$ $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože rozdiel $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

- $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a,b\in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c\in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a,b\in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c\cdot a_n) = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

- $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

- $= \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

- $= \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty+\infty}$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

  $\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

  - $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

- $= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty+\infty} = 0.$

Výpočet limít – Základné pravidlá

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, kde $a, b \in R^*$, $a < b$.

$\Rightarrow$ • Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti. [Základné pravidlá pre výpočet limít.]

- $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^*$. $\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty - \infty = ?$.

[Postup nemôžeme použiť, pretože rozdiel $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

- $= \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty+\infty} = 0$.

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0.$
- $q > 0.$
- $q < 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$
- $q > 0.$
- $q < 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^q = \lim_{n\to\infty} n^0 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$
- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N$.
- $q < 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora.

- $q < 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q\in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q < 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q\in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n\in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q < 0. \Rightarrow -q > 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q < 0. \Rightarrow -q > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q < 0. \Rightarrow -q > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \left\{ \right.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \left\{ \right.$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q\in R$.

- $q=0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q>0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n\in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q<0. \Rightarrow -q>0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ & \\ & \end{cases}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q>0, \text{ t. j. } -q<0, \\ & \\ & \end{cases}$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q < 0. \Rightarrow -q > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \end{cases}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q > 0, \text{ t. j. } -q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \text{ t. j. } -q = 0, \end{cases}$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q < 0. \Rightarrow -q > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q > 0, \text{ t. j. } -q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \text{ t. j. } -q = 0, \\ \infty & \text{pre } q < 0, \text{ t. j. } -q > 0. \end{cases}$

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

- $q = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$
- $q > 0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n \in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$
- $q < 0. \Rightarrow -q > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q > 0, \text{ t. j. } -q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \text{ t. j. } -q = 0, \\ \infty & \text{pre } q < 0, \text{ t. j. } -q > 0. \end{cases}$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť. Potom platí:

Výpočet limít – Príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} n^q$, kde $q\in R$.

- $q=0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

- $q>0. \Rightarrow n^q < (n+1)^q$ pre všetky $n\in N$.

  Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a neohraničená zhora. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $q<0. \Rightarrow -q>0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \\ \infty & \text{pre } q>0. \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q>0, \text{ t. j. } -q<0, \\ 1 & \text{pre } q=0, \text{ t. j. } -q=0, \\ \infty & \text{pre } q<0, \text{ t. j. } -q>0. \end{cases}$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť. Potom platí:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \Leftrightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1; \infty)$.
- $a = 1$.
- $a \in (-1; 1)$.
- $a = -1$.
- $a \in (-\infty; -1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n \in N$.
- $a = 1$.
- $a \in (-1;1)$.
- $a = -1$.
- $a \in (-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1;\infty)$. $\Rightarrow$ $a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$.
- $a \in (-1;1)$.
- $a = -1$.
- $a \in (-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty \text{ pre } a \in (1;\infty), \\ \\ \\ \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\begin{cases} \longrightarrow \infty \text{ pre } a \in (1;\infty), \\ \\ \\ \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a\in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a\in(1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n\in N$.
- $a\in(-1;1)$.
- $a = -1$.
- $a\in(-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty \text{ pre } a\in(1;\infty), \\ \\ \\ \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\begin{cases} \longrightarrow \infty \text{ pre } a\in(1;\infty), \\ \\ \\ \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a \in (-1;1)$.
- $a = -1$.
- $a \in (-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a = 1, \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a\in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a\in(1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a\in(-1;1)$. $\Rightarrow |a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n\in N$.
- $a = -1$.
- $a\in(-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a = 1, \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a\in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a\in(1;\infty)$. $\Rightarrow$ $a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$. $\Rightarrow$ $a^n = 1$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a\in(-1;1)$. $\Rightarrow$ $|a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- $a = -1$.
- $a\in(-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a = 1, \\ \longrightarrow 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a\in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a\in(1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a=1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a\in(-1;1)$. $\Rightarrow |a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- $a=-1$. $\Rightarrow a^{2k} = 1,\ a^{2k+1} = -1$ pre všetky $k\in N$.
- $a\in(-\infty;-1)$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a=1, \\ \longrightarrow 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a \in (-1;1)$. $\Rightarrow |a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- $a = -1$. $\Rightarrow a^{2k} = 1,\ a^{2k+1} = -1$ pre všetky $k \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ neexistuje.

  [Hromadné hodnoty $E = \{-1,1\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]
- $a \in (-\infty;-1)$.

- $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (-1;1), \\ \nexists & \text{pre } a = -1. \end{cases}$$ t. j. postupnosť $$\{a^n\}_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a = 1, \\ \longrightarrow 0 & \text{pre } a \in (-1;1), \\ \text{osciluje} & \text{pre } a = -1. \end{cases}$$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a \in (1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a = 1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a \in (-1;1)$. $\Rightarrow |a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- $a = -1$. $\Rightarrow a^{2k} = 1,\ a^{2k+1} = -1$ pre všetky $k \in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ neexistuje.

  [Hromadné hodnoty $E = \{-1{,}1\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]
- $a \in (-\infty;-1)$. $\Rightarrow a^{2k} \to \infty,\ a^{2k+1} \to -\infty$ pre všetky $k \in N$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (-1;1), \\ \nexists & \text{pre } a = -1. \end{cases}$ t. j. postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \longrightarrow \infty & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a = 1, \\ \longrightarrow 0 & \text{pre } a \in (-1;1), \\ \text{osciluje} & \text{pre } a = -1. \end{cases}$

Výpočet limít – Geometrická postupnosť

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a\in R$. [Limita geometrickej postupnosti]

- $a\in(1;\infty)$. $\Rightarrow a^n < a^{n+1}$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.
- $a=1$. $\Rightarrow a^n = 1$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$.
- $a\in(-1;1)$. $\Rightarrow |a^n| > |a^{n+1}|$ pre všetky $n\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- $a=-1$. $\Rightarrow a^{2k}=1,\ a^{2k+1}=-1$ pre všetky $k\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ neexistuje.

  [Hromadné hodnoty $E=\{-1,1\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]
- $a\in(-\infty;-1)$. $\Rightarrow a^{2k}\to\infty,\ a^{2k+1}\to-\infty$ pre všetky $k\in N$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ neexistuje.

  [Hromadné hodnoty $E=\{-\infty,\infty\}$, postupnosť $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje.]

- $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ 1 & \text{pre } a=1, \\ 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \\ \nexists & \text{pre } a\in(-\infty;-1\rangle. \end{cases}$$ t. j. postupnosť $$\{a^n\}_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \longrightarrow\infty & \text{pre } a\in(1;\infty), \\ \longrightarrow 1 & \text{pre } a=1, \\ \longrightarrow 0 & \text{pre } a\in(-1;1), \\ \text{osciluje} & \text{pre } a\in(-\infty;-1\rangle. \end{cases}$$

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

• $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

• $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Pre všetky nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Pre všetky nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

- $\{1\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Pre všetky nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$,

- $\{1\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

- $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Pre všetky nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, ale:

- $\{1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$,
- $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$,
- $\{\frac{1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$.

[Postupnosti konvergujú.]

- $\{n\}_{n=1}^{\infty}$
- $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$

Výpočet limít – Vlastnosti postupností

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (pokiaľ limity existujú).

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n \geq 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

• $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálna postupnosť taká, že $a_n > 0$ pre všetky $n \in N$. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a \in R^*$.

• $a < 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

• $a > 1$. $\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

[Pre $a = 1$ vo všeobecnosti nevieme rozhodnúť o limite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.]

Pre všetky nasledujúce postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, ale:

• $\{1\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1$, • $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$, • $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$. [Postupnosti konvergujú.]

• $\{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty$, • $\{n^2\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty$. [Postupnosti divergujú.]

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0.$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$.

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0.$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}},$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ existuje.

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ existuje.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$

Výpočet limít – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$ pre $a \in R$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) = 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}.$

Označme $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$
- $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ existuje.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \Rightarrow$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$.

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0$.
- $a \neq 0$.

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\dfrac{a^n}{n!}\right| = \dfrac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a|}{n+1} = \dfrac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \dfrac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\dfrac{|a|}{k} < 1.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{a^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí
    $0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!}$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

    $0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n}$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

    $0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N,\ n > k$ platí

    $$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

    $$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!} \cdot 0 = 0.$$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

$$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!} \cdot 0 = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

$$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} |a_n| \le \lim_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!} \cdot 0 = 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$
- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$
   - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

$$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_n| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!} \cdot 0 = 0. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ pre $a \in R$.

Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{a^n}{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$

- $a \neq 0. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} > 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

  - $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

  - Zvoľme $k \in N$ tak, aby $|a| < k$, t. j. $\frac{|a|}{k} < 1. \Rightarrow$ Pre všetky $n \in N$, $n > k$ platí

    $$0 < |a_n| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n.$$

    $$\Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!} \cdot \left(\frac{|a|}{k}\right)^n = \frac{k^k}{k!} \cdot 0 = 0. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$.

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R$, $a > 0$, $a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}}$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n}$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}.$

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}.$

Označme $a_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a > \mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a < \mathrm{e} \end{array}\right]$$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a > \mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a < \mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$$

- $$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > \mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a < \mathrm{e}. \end{cases}$$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \dfrac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \dfrac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \dfrac{a}{\mathrm{e}}.$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a<\mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a > \mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a < \mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$$

- $$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > \mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a < \mathrm{e}. \end{cases}$$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ q > 0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n \in N$.

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R$, $a > 0$, $a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a > \mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a < \mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$$

- $$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > \mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a < \mathrm{e}. \end{cases}$$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a \in R$, $a > 0$, $q > 0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = a\bigg(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\bigg)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

  $$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a}{\mathrm{e}}>1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}}<1 \text{ pre } a<\mathrm{e}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

- $$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}. \end{cases}$$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \Big\{\frac{n^q}{a^n}\Big\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1$.

- $a\neq 1$.

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

  $$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a<\mathrm{e} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

- $$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}. \end{cases}$$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Označme $a_n = \dfrac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \Big\{\dfrac{n^q}{a^n}\Big\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$

- $a\neq 1.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}$. $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a > \mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a < \mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > \mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a < \mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ q > 0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 1$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$.
- $a \neq 1$. $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^q}{a^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}$.

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}}>1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}}<1 \text{ pre } a<\mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty.$
- $a\neq 1. \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^q}{a^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a} = \frac{1^q}{a} = \frac{1}{a}.$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ a \neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n \in N$. Pre všetky $n \in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}$. $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a > \mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a < \mathrm{e} \end{array}\right] \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a > \mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a < \mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a \in R,\ a > 0,\ q > 0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n \in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a = 1$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$.
- $a \neq 1$. $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^q}{a^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a} = \frac{1^q}{a} = \frac{1}{a}$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} > 1 \text{ pre } a < 1 \\ \frac{1}{a} < 1 \text{ pre } a > 1 \end{array}\right]$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n=\dfrac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}}=\frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{an^n}{(n+1)^n}=a\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n=a\bigg(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\bigg)^n=\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{a}{\mathrm{e}}.\ \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{a}{\mathrm{e}}>1 \text{ pre } a>\mathrm{e}\\ \frac{a}{\mathrm{e}}<1 \text{ pre } a<\mathrm{e}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

- $$\lim_{n\to\infty} a_n=\begin{cases}\infty & \text{pre } a>\mathrm{e},\\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}.\end{cases}$$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Označme $a_n=\dfrac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\Big\{\dfrac{n^q}{a^n}\Big\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1.\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} n^q=\infty.$

- $a\neq 1.\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\dfrac{n^q}{a^n}}=\dfrac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}.\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}=\dfrac{1^q}{a}=\dfrac{1}{a}.$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{a}>1 \text{ pre } a<1\\ \frac{1}{a}<1 \text{ pre } a>1\end{bmatrix}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=\begin{cases}\infty & \text{pre } a<1,\\ 0 & \text{pre } a>1.\end{cases}$$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R$, $a>0$, $a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}$. $\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \text{ pre } a>\mathrm{e} \\ \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \text{ pre } a<\mathrm{e} \end{bmatrix} \Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a>\mathrm{e}, \\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}. \end{cases}$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R$, $a>0$, $q>0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$.

- $a\neq 1$. $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^q}{a^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a} = \frac{1^q}{a} = \frac{1}{a}$.

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{a} > 1 \text{ pre } a<1 \\ \frac{1}{a} < 1 \text{ pre } a>1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{pre } a<1, \\ 0 & \text{pre } a>1. \end{cases}$

Riešené príklady

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ a\neq \mathrm{e}$.

Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Pre všetky $n\in N$ platí:

- $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{a^n n!}{n^n}} = \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{an^n}{(n+1)^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{a}{\mathrm{e}}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{a}{\mathrm{e}}>1 \text{ pre } a>\mathrm{e}\\ \frac{a}{\mathrm{e}}<1 \text{ pre } a<\mathrm{e}\end{array}\right] \Rightarrow \bullet\ \lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases}\infty & \text{pre } a>\mathrm{e},\\ 0 & \text{pre } a<\mathrm{e}.\end{cases}$$

Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$ pre $a\in R,\ a>0,\ q>0$.

Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$ pre $n\in N$. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^q}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

- $a=1$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$.

- $a\neq 1$. $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^q}{a^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a}. \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^q}{a} = \frac{1^q}{a} = \frac{1}{a}.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{a}>1 \text{ pre } a<1\\ \frac{1}{a}<1 \text{ pre } a>1\end{array}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases}\infty & \text{pre } a<1,\\ 0 & \text{pre } a>1.\end{cases} \Rightarrow \bullet\ \lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases}\infty & \text{pre } a\leq 1,\\ 0 & \text{pre } a>1.\end{cases}$$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in N$.

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity.

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N$.

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$).

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N$.

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$).
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N$.

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3$,

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N$.

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3,\quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$).

[Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N$. (Indukčný predpoklad.)

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N$. (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ pre $k+1$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N$. (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ pre $k+1$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$). [Pre $n \in N$ platí $a_n > 0$, $a_n - 3 < 0$.]

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1 + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N$. (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3$ pre $k + 1$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$). [Pre $n \in N$ platí $a_n > 0$, $a_n - 3 < 0$.]

Pre všetky $n \in N$ platí $a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - (a_n + 6)$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in N$.

Označme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6$. Potom platí:

- $a^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6$, t. j. $a^2 = a + 6$.
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0$, t. j. $a = 3$ alebo $a = -2$.

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3$, $\quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3$.

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N$. (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ pre $k+1$.

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$). [Pre $n \in N$ platí $a_n > 0$, $a_n - 3 < 0$.]

Pre všetky $n \in N$ platí $a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - (a_n + 6) = a_n^2 - a_n - 6$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1 + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N.$ (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3$ pre $k + 1.$

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$). [Pre $n \in N$ platí $a_n > 0,\ a_n - 3 < 0$.]

Pre všetky $n \in N$ platí
$$a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - (a_n + 6) = a_n^2 - a_n - 6 = (a_n + 2)(a_n - 3) < 0.$$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$). [Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N.$ (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ pre $k+1.$

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$). [Pre $n \in N$ platí $a_n > 0,\ a_n - 3 < 0$.]

Pre všetky $n \in N$ platí $a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - (a_n + 6) = a_n^2 - a_n - 6$

$$= (a_n + 2)(a_n - 3) < 0. \Rightarrow a_n^2 < a_{n+1}^2.$$

Riešené príklady

Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},\ n \in N.$

Označme $\lim_{n\to\infty} a_n = a.$ Pre všetky $n \in N$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + 6.$ Potom platí:

- $a^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6,$ t. j. $a^2 = a + 6.$
- a je koreňom rovnice $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2) = 0,$ t. j. $a = 3$ alebo $a = -2.$

[Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje, pretože všetky a_n sú kladné, t. j. $a_n > 0$.]

$\Rightarrow$ • $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ (pokiaľ existuje).

[Musíme ukázať existenciu limity. – Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená a rastúca.]

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená ($a_n < 3$ pre $n \in N$).

[Dôkaz matematickou indukciou.]

Krok 1. $a_1 = 1 < 3, \quad a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{1+6} < \sqrt{3+6} = 3.$

Krok 2. $a_k < 3$ pre $k \in N.$ (Indukčný predpoklad.) $\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ pre $k+1.$

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca ($a_n < a_{n+1}$ pre $n \in N$).

[Pre $n \in N$ platí $a_n > 0,\ a_n - 3 < 0$.]

Pre všetky $n \in N$ platí $a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - (a_n + 6) = a_n^2 - a_n - 6$

$$= (a_n + 2)(a_n - 3) < 0. \Rightarrow a_n^2 < a_{n+1}^2. \Rightarrow a_n < a_{n+1}.$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$0{,}2\overline{3} = 0{,}23333\ldots$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$0{,}2\overline{3} = 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$0{,}2\overline{3} = 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots$$
$$= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \dots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned} 0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\ &= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\ &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2;\, 0{,}23;\, 0{,}233;\, \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned} 0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\ &= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\ &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c} \text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \dots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c} \text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}
\end{aligned}$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$0{,}2\overline{3} = 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots$$
$$= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right]$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10\cdot 9}$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30}
\end{aligned}
$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3} = \frac{7}{30}$.

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c} \text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$0{,}2\overline{3} = 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots$$
$$= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right]$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.$$

Iné riešenie.

- $a = \quad 0{,}2\overline{3} = \quad 0{,}2333\ldots$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}
$$

Iné riešenie.

- $a = 0{,}2\overline{3} = 0{,}2333\ldots$
- $10a = 2{,}\overline{3} = 2{,}3333\ldots$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2;\, 0{,}23;\, 0{,}233;\, \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c} \text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q} \end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}
$$

Iné riešenie.

- $a = 0{,}2\overline{3} = 0{,}2333\ldots$
- $10a = 2{,}\overline{3} = 2{,}3333\ldots$
- $100a = 23{,}\overline{3} = 23{,}3333\ldots$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2;\, 0{,}23;\, 0{,}233;\, \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}
$$

Iné riešenie.

$$
\left.\begin{array}{rcl}
a = & 0{,}2\overline{3} = & 0{,}2333\ldots \\
10a = & 2{,}\overline{3} = & 2{,}3333\ldots \\
100a = & 23{,}\overline{3} = & 23{,}3333\ldots
\end{array}\right\} \Rightarrow 100a - 10a = 23{,}3333\cdots - 2{,}3333\cdots
$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$
\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10\cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}
$$

Iné riešenie.

$$
\left.\begin{aligned}
a &= 0{,}2\overline{3} = 0{,}2333\ldots \\
10a &= 2{,}\overline{3} = 2{,}3333\ldots \\
100a &= 23{,}\overline{3} = 23{,}3333\ldots
\end{aligned}\right\} \Rightarrow 100a - 10a = 23{,}3333\cdots - 2{,}3333\cdots = 23 - 2 = 21.
$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3}$

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$\begin{aligned}
0{,}2\overline{3} &= 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\
&= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right] \\
&= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10 \cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}$$

Iné riešenie.

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet\quad a = 0{,}2\overline{3} = 0{,}2333\ldots \\
\bullet\quad 10a = 2{,}\overline{3} = 2{,}3333\ldots \\
\bullet\quad 100a = 23{,}\overline{3} = 23{,}3333\ldots
\end{array}\right\} \Rightarrow 100a - 10a = 23{,}3333\cdots - 2{,}3333\cdots = 23 - 2 = 21.$$

$$\Rightarrow 21 = 100a - 10a = 90a.$$

Riešené príklady

Určte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0{,}2; 0{,}23; 0{,}233; \ldots\}$,

t. j. vyjadrite ako zlomok periodické číslo $0{,}2\overline{3} = \frac{7}{30}$.

- Periodické číslo môžeme vyjadriť ako súčet nekonečného geometrického radu:

$$0{,}2\overline{3} = 0{,}23333\ldots = 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots$$
$$= 0{,}2 + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Geometrický rad s kvocientom } q \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}\end{array}\right]$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10\cdot 9} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.$$

Iné riešenie.

$$\left.\begin{array}{rll} a = & 0{,}2\overline{3} = & 0{,}2333\ldots \\ 10a = & 2{,}\overline{3} = & 2{,}3333\ldots \\ 100a = & 23{,}\overline{3} = & 23{,}3333\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow 100a - 10a = 23{,}3333\cdots - 2{,}3333\cdots = 23 - 2 = 21.$$

$$\Rightarrow 21 = 100a - 10a = 90a. \Rightarrow a = \frac{21}{90} = \frac{3\cdot 7}{3\cdot 30} = \frac{7}{30}.$$

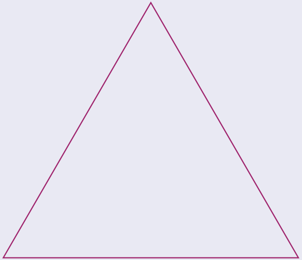
Riešené príklady

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

Riešené príklady

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

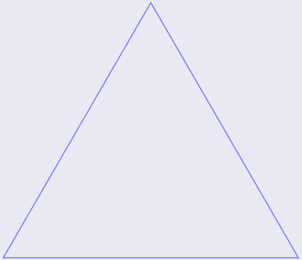
- Každú úsečku



Riešené príklady

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

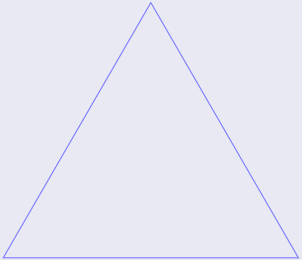
- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.



Riešené príklady

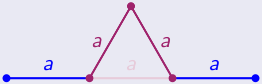
Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek

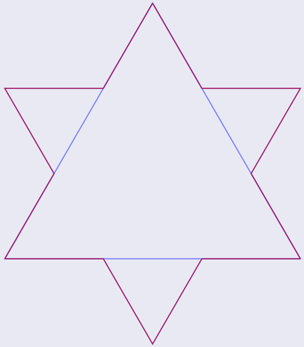


Riešené príklady

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

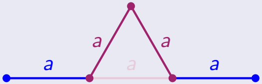


- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.



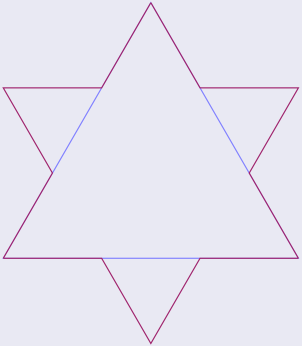
Riešené príklady

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



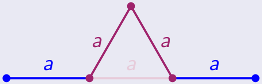
- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.



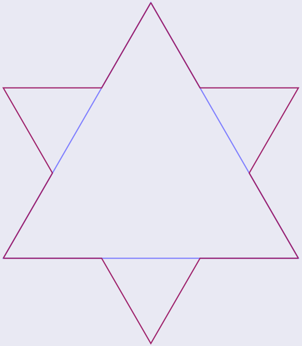
Riešené príklady

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



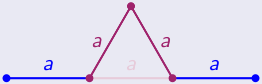
- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.



Riešené príklady

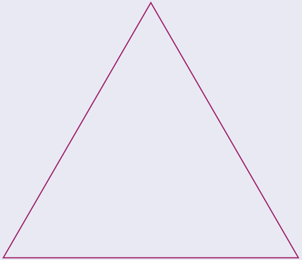
Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

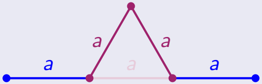
- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.



Riešené príklady

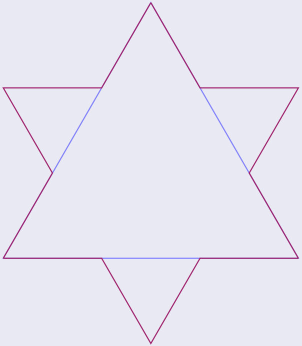
Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

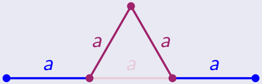
- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.
- Po prvom kroku bude obvod vločky $d = \frac{4}{3} d_t$.



Riešené príklady

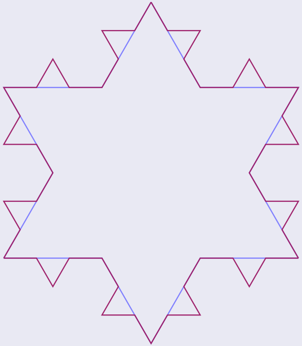
Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

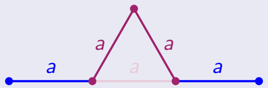
- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.
- Po prvom kroku bude obvod vločky $d = \frac{4}{3} d_t$.
- Po n-tom kroku bude obvod vločky $d = (\frac{4}{3})^n d_t$.



Riešené príklady

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

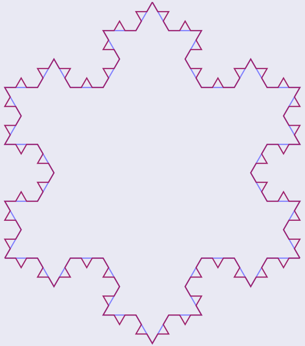


- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.

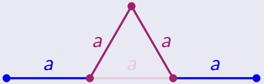
- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.
- Po prvom kroku bude obvod vločky $d = \frac{4}{3} d_t$.
- Po n-tom kroku bude obvod vločky $d = \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t$.
- Pre $n \to \infty$ môžeme vyjadriť obvod vločky v tvare

$$d = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{4}{3}\right)^n d_t = \infty \cdot d_t = \infty.$$



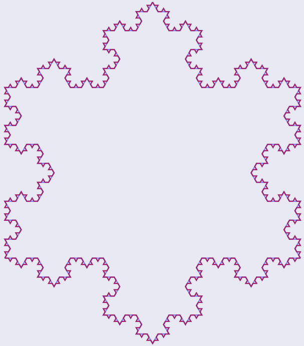
Riešené príklady

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.



- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.



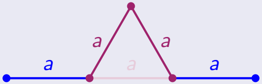
- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.
- Po prvom kroku bude obvod vločky $d = \frac{4}{3} d_t$.
- Po n-tom kroku bude obvod vločky $d = \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t$.
- Pre $n \to \infty$ môžeme vyjadriť obvod vločky v tvare

$$d = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t = \infty \cdot d_t = \infty.$$

[Postupnosť $\{(\frac{4}{3})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s kvocientom $\frac{4}{3} > 1$, t. j. platí $\lim_{n\to\infty} (\frac{4}{3})^n = \infty$.]

Riešené príklady

Vypočítajte dĺžku d obvodu Kochovej vločky.

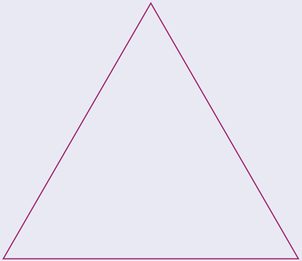


- Každú úsečku rozdelíme na tri rovnaké úsečky.
- Stredná z úsečiek sa zdvojnásobí na dve strany rovnostranného trojuholníka.

- Pôvodná úsečka sa zväčší o tretinu, t. j. bude $\frac{4}{3}$-krát dlhšia.
- Obvod vločky d sa po každom konštrukčnom kroku zväčší $\frac{4}{3}$-krát.

- Označme obvod počiatočného trojuholníka d_t.
- Po prvom kroku bude obvod vločky $d = \frac{4}{3} d_t$.
- Po n-tom kroku bude obvod vločky $d = \left(\frac{4}{3}\right)^n d_t$.
- Pre $n \to \infty$ môžeme vyjadriť obvod vločky v tvare

$$d = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{4}{3}\right)^n d_t = \infty \cdot d_t = \infty.$$



[Postupnosť $\{(\frac{4}{3})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s kvocientom $\frac{4}{3} > 1$, t. j. platí $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{4}{3})^n = \infty$.]

Koniec 2. časti

Ďakujem za pozornosť.