

## Písomka číslo 05 – Funkcie viacerých reálnych premenných

V teste (a následne na skúške) sa môžu vyskytnúť taktiež príklady prepočítané na prednáške a na cvičeniach, prípadné domáce úlohy a príklady uverejnené v prezentáciách z prednášok. Príklady sú vzorové, to znamená, že v teste môžu byť v pozmenenom tvare.

### K. Základné pojmy. Limita a spojitost' týchto funkcií.

1. Zostrojte a nakreslite v  $R^2$  definičný obor  $D(f)$  funkcie  $z = f(x, y)$ :

$$z = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{9-y^2}, \quad z = \frac{1}{\ln(x^2+y^2-4)} + \frac{1}{\arcsin(\frac{1}{y^2+x+1})}, \quad z = \ln(x^2+y^2-4) + \arcsin(y^2+x+1),$$

$$z = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{9-y^2}, \quad z = \arcsin \frac{x}{x+y} + \arccos \frac{y}{x+y}, \quad z = \sqrt{x^2+y^2-4} + \arcsin(y^2+x+1),$$

2. Zostrojte a v rovine  $R^2$  nakreslite vrstevnice  $H_c$  (t. j. rezy grafu funkcie  $f(x, y)$  rovnobežné s rovinou  $xy$ , ktorých hodnota  $f(x, y) = c$  pre body  $c=0, c=1, c=2, c=4$ , ak:

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1}, \quad f(x, y) = \sqrt{25 - |x| - |y|}.$$

3.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{(xy)^2},$

9.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$  \*\*\*

15.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)},$

4.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy},$

10.  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$  \*\*\*

16.  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)},$

5.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y+1}-1},$  \*

11.  $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$

17.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{\sin(x^2+y^2)},$  \*\*

6.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1},$

12.  $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3},$

18.  $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{\sin(x^2+y^2)},$

7.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1},$  \*\*

13.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2-y^2},$

19.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{\sin(x^2+y^2)},$

8.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x+y+1}-1},$  \*

14.  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 y^2}{x^2-y^2},$

20.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x - y}.$

### L. Derivácia a diferenciál funkcie viacerých premenných. Parciálne derivácie podľa jednotlivých premenných. Derivácia zloženej funkcie a parciálne derivácie vyšších rádov.

21. Nech  $f(X) = f(x, y) = \sin(x^2 + xy - y^2) : R^2 \rightarrow R, H = [1; 3], A = [2; -1]$ . Vypočítajte:

$$f(A), f'(X), f'(A), f'_H(A), df(X, A), f''(X), f''(A), d^2f(X, A).$$

22. Nech  $f(X) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 : R^3 \rightarrow R, H = [1; 2; 3], A = [3; 2; 1]$ . Vypočítajte:

$$f(A), f'(X), f'(A), f'_H(A), df(X, A), f''(X), f''(A), d^2f(X, A).$$

### M. Nutná a postačujúca podmienka existencie extrém. Sylvesterovo kritérium.

23. Nájdite extrém funkcie  $f(x, y) = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2 : R^2 \rightarrow R$ .

24. Nájdite extrém funkcie  $f(x, y) = x + y + 4 \sin x \cos x : R^2 \rightarrow R$ .

25. Nájdite extrém funkcie  $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{x^2 - y^2 - z^2} : R^3 \rightarrow R$ .

26. Nájdite viazané extrém funkcie  $f(x, y, z) = xy - x + y - 1 : R^3 \rightarrow R$ , ak  $x + y = 1$ .

27. Nájdite viazané extrém funkcie  $f(x, y) = x^3 + y^3 : R^2 \rightarrow R$ , ak  $x + y = 4$ .

28. Nájdite viazané extrém funkcie  $f(x, y, z) = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z : R^3 \rightarrow R$ , ak  $x + y + z = -\pi$ .

29. Nájdite viazané extrém funkcie  $f(x, y, z) = xyz : R^3 \rightarrow R$ , ak  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .

30. Do daného trojuholníka v rovine vpíšte obdĺžnik s maximálnym obsahom.

31. Zo všetkých valcových nádob s daným povrchom nájdite takú, ktorá má maximálny objem.

\* Skúste rozšíriť zlomkom  $\frac{x+y}{x+y}$ . \*\* Skúste rozšíriť zlomkom  $\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$ . \*\*\* Skúste substitúciu  $u = \min\{x, y\} \rightarrow 0, v = \max\{x, y\} \rightarrow 0$ .