

# Matemická analýza 2023/2024

## Písomka číslo 04 – Neurčitý a určitý integrál

V teste (a následne na skúške) sa môžu vyskytnúť taktiež príklady prepočítané na prednáške a na cvičeniach, prípadné domáce úlohy a príklady uverejnené v prezentáciách z prednášok. Príklady sú vzorové, to znamená, že v teste môžu byť v pozmenenom tvare.

### I. Neurčitý integrál. Primitívna funkcia. Základné vzorce a metódy na výpočet integrálov (metóda rozkladu, substitúcie, per partes).

[Odvolať sa (a považovať za vypočítané) môžete iba na integrály uvedené v Tabuľke základných integrálov.]

1. Vypočítajte:

$\int \frac{dx}{x^2+4x+5},$	$\int \frac{dx}{x^2+4x+3},$	$\int \frac{dx}{x^2+4x+3},$	$\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)(x+2)},$
$\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2},$	$\int \frac{dx}{(x^2+4x+3)^2},$	$\int \arcsin x dx,$	$\int x \arcsin x dx,$
$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)},$	$\int \frac{dx}{(1-x)x^2},$	$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x-1)},$	$\int \frac{dx}{x^3-x^2-3x+6},$
$\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+2x+3)^3},$	$\int \frac{x dx}{(1+x^2)^3},$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}},$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+4}},$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}},$	$\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}},$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}},$	$\int \sqrt{x^2+4x+5} dx,$
$\int \sqrt{x^2+4x+4} dx,$	$\int \sqrt{x^2+4x+3} dx,$	$\int \sqrt{5+4x-x^2} dx,$	$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-2x}},$
$\int \frac{\sqrt{1-2x} dx}{x-1},$	$\int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx,$	$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx,$	$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}},$
$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$	$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^3}},$	$\int \frac{dx}{\sqrt{3^x-2}},$	$\int \frac{dx}{4^x-3},$
$\int \frac{(x+2)^7}{(1-x)^6} dx,$	$\int  x-1 ^{33} dx,$	$\int  x-1 ^{34} dx,$	$\int  x-1 (x-1)^{32} dx,$
$\int  x-1 (x-1)^{31} dx,$	$\int e^{- x } dx,$	$\int \ln x dx,$	$\int x^2 \ln x dx,$
$\int \ln(x+1)^7 dx,$	$\int \operatorname{tg} 5x dx,$	$\int \sin^3 2x dx,$	$\int \cos^4 2x dx,$
$\int x^2 \sin 2x dx,$	$\int \sin 2x \cos 3x dx,$	$\int \cos 2x \cos 3x dx,$	$\int \sin^{99} 2x \cos 2x dx,$
$\int \frac{dx}{\sin 2x+1},$	$\int \frac{dx}{\cos 2x-1},$	$\int \frac{\sin 2x}{1-2 \cos 2x} dx,$	$\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{\cos 3x+2}}.$

### J. Vzťah určitého a neurčitého integrálu, jeho geometrický význam. Výpočet určitého integrálu.

- Kružnica s polomerom  $r > 0$  je zložená s dvoch funkcií  $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x \in \langle -r; r \rangle$ . Krivočiare lichobežníky určené týmito dvoma funkciami vytvoria kruh s polomerom  $r > 0$ . Odvoďte vzorec pre obsah tohto kruhu.
- Elipsa s poloosami  $a > 0$ ,  $b > 0$  je implicitne zadaná rovnicou  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $x \in \langle -a; a \rangle$ ,  $y \in \langle -b; b \rangle$  a tvoria ju dve funkcie. Nimi určené krivočiare lichobežníky vyplnia vnútro elipsy. Odvoďte vzorec pre obsah danej elipsy.
- Uvažujme v karteziánskom súradnicovom systéme trojuholník so súradnicami  $[-a; 0]$ ,  $[0; b]$ ,  $[c; 0]$ , kde  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ . Odvoďte vzorec pre obsah tohto trojuholníka.
- Ak je funkcia  $f \in R_{\langle -a; a \rangle}$  nepárna na  $\langle -a; a \rangle$ ,  $a > 0$ , potom platí  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ,  $-\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$ . Dokážte (použite substitúciu, nakreslite si ilustračný obrázok).
- Ak je funkcia  $f \in R_{\langle -a; a \rangle}$  párna na  $\langle -a; a \rangle$ ,  $a > 0$ , potom platí  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ . Dokážte (použite substitúciu, nakreslite si ilustračný obrázok).
- Ak je funkcia  $f \in R_{\langle 0; p \rangle}$  periodická s periodou  $p > 0$ , potom  $f \in R_{\langle a; a+p \rangle}$ ,  $\int_0^p f(x) dx = \int_a^{a+p} f(x) dx$  pre všetky  $a \in R$ . Dokážte (použite substitúciu, nakreslite si ilustračný obrázok).

8.  $\int_0^{2\pi} \sin 2x \cos 3x dx,$

10.  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 3x dx,$

12.  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x dx,$

9.  $\int_0^{2\pi} \sin 3x \cos 2x dx,$

11.  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin 3x dx,$

13.  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x dx.$