

Matematická analýza 2023/2024

Písomka číslo 03 – Derivácia funkcie a jej aplikácie

V teste (a následne na skúške) sa môžu vyskytnúť taktiež príklady prepočítané na prednáške a na cvičeniach, prípadné domáce úlohy a príklady uverejnené v prezentáciách z prednášok. Príklady sú vzorové, to znamená, že v teste môžu byť v pozmenenom tvare.

F. Derivácia funkcie reálnej premennej v bode a na množine. Pravidlá pre výpočet derivácií. Derivácia zloženej a inverznej funkcie.

(Naspamäť!) **Dôležité derivácie.** (Naspamäť!)

- $[c]' = 0$ pre $x \in R, c \in R$. • $[x]' = 1$ pre $x \in R$. • $[x^n]' = nx^{n-1}$ pre $x \in R, n \in N$. • $[x^a]' = ax^{a-1}$ pre $x > 0, a \in R$. • $[e^x]' = e^x$ pre $x \in R$.
- $[a^x]' = a^x \ln a$ pre $x \in R, a > 0$. • $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ pre $x > 0$. • $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$ pre $x > 0, a > 0, a \neq 1$. • $[\ln |x|]' = \frac{1}{x}$ pre $x \neq 0$.
- $[\log_a |x|]' = \frac{1}{x \ln a}$ pre $x \neq 0, a > 0, a \neq 1$. • $[\sin x]' = \cos x$ pre $x \in R$. • $[\cos x]' = -\sin x$ pre $x \in R$. • $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$.
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pre $x \neq k\pi, k \in Z$. • $[\operatorname{arcsin} x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$. • $[\operatorname{arccos} x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pre $x \in (-1; 1)$. • $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$ pre $x \in R$.
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$ pre $x \in R$. • $[\operatorname{sinh} x]' = \cosh x$ pre $x \in R$. • $[\cosh x]' = \sinh x$ pre $x \in R$. • $[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ pre $x \in R$.
- $[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pre $x \neq 0$. • $[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ pre $x \in R$. • $[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pre $x > 1$. • $[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pre $x \in R - (-1; 1)$.
- $[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$ pre $x \in (-1; 1)$. • $(cf)' = cf'$. • $(f \pm g)' = f' \pm g'$. • $(fg)' = f'g + fg'$. • $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. • $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$. • $[g(f)]' = g'f'$.

- | | |
|---|--|
| <p>1. $f'(x) = \left[\sqrt[3]{10x^3 \sqrt[3]{14x^3 \sqrt[3]{2x}}} \right]'$</p> <p>2. $f'(x) = [\arccos \cos(-5x^{-2} - 3)]'$</p> <p>3. $f'(x) = [x^{-3 \sin(-2x)}]'$</p> <p>4. $f'(x) = [\operatorname{cotg}^{-4}(-5x)]' = [(\operatorname{cotg}(-5x))^{-4}]'$</p> <p>5. $f'(x) = [x^{-5x-2}]'$</p> <p>6. $f'(x) = [e^{-3x-2}]'$</p> <p>7. $f'(x) = [8^{-3x-6}]'$</p> <p>8. $f'(x) = [(7x-3)^2]'$</p> <p>9. $f'(x) = [\arcsin \frac{1}{x^6-5}]'$</p> <p>10. $f'(x) = [\operatorname{arccotg} \frac{1}{x^6+5}]'$</p> <p>11. $f'(x) = [-2x-5 + -3x+4]'$</p> <p>12. $f'(x) = [\sin(\sin(\sin(\sin(-4x))))]'$</p> | <p>13. $f'(x) = [\ln(\ln(\ln(\ln(-3x))))]'$</p> <p>14. $f'(x) = [x^{-3 \sinh(-2x)}]'$</p> <p>15. $f'(x) = [\sinh^{-3} 2x]' = [(\sinh 2x)^{-3}]'$</p> <p>16. $f'(x) = \left[\sqrt[3]{2x + 5 \sqrt[3]{2x + 8 \sqrt[3]{2x}}} \right]'$</p> <p>17. $f'(x) = [\ln \operatorname{tg} 6x ^3]'$</p> <p>18. $f'(x) = \left[\frac{-6 \sin(-2x) - 4}{-7 \cos(-2x) - 3} \right]'$</p> <p>19. $f'(x) = \left[\frac{-6 \operatorname{cotgh}(-2x) + 5}{4 \operatorname{tgh}(-2x) + 7} \right]'$</p> <p>20. $f'(x) = [(2x^3 - 5x^2 - 2x + 3)(5x^4 - 5x^3 + 7x + 6)]'$</p> <p>21. $f'(x) = [(4x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 3x + 2)e^{2x}]'$</p> <p>22. $f'(x) = [\ln(5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 9x + 8)]'$</p> <p>23. $f'(x) = [(4 \sin 2x - 7 \cos 2x) \cdot (5x^4 + 6x^2 + 5x + 4)]'$</p> <p>24. $f'(x) = [\arcsin \cos(2x^2 - 5)]'$</p> |
|---|--|

G. Derivácie vyšších rádov, aplikácie derivácií (Lagrangeova veta, L'Hospitalovo pravidlo, Taylorov vzorec...).

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 53. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 8x}$ | 56. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{5}}$ | 59. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 4x}{\ln \cos 5x}$ H | 62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sin 6x}$ |
| 54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{4^x - 1}$ | 57. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 7x}{\ln 3x}$ | 60. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x}{x^4 - x}$ | 63. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\arcsin 2x}$ |
| 55. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5^3}{x^6 - 5^6}$ | 58. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 2x}$ | 61. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^6 - 1}$ | 64. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{4}{x}$ |

65. Vypočítajte $f^{(101)}(x)$ funkcie f :

$$y = \sin 3x, \quad y = \frac{-1}{2x+1}, \quad y = \sin^2 x, \quad y = \frac{x+1}{x-1}, \quad y = xe^x, \quad y = x \ln x, \quad y = x^{n-1} \ln x.$$

66. Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ pre funkciu $f(x)$:

$$y = e^{(x^3)}, x \in R, \quad y = \sin(x^3), x \in R, \quad y = \cos(x^3), x \in R, \quad y = \ln(1+x^2)^3, x \in R.$$

H. Vyšetovanie priebehu funkcie pomocou diferenciálneho počtu.

$D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti * párnosť, nepárnosť, periodickosť ap. * jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v bodoch $\pm \infty$ a na hraniciach $D(f)$ * nulové body, kladnosť, zápornosť * $f'(x)$, monotónnosť, stacionárne body, lokálne a globálne extrém * $f''(x)$, konvexnosť, konkávnosť, inflexné body * asymptoty bez smernice, asymptoty so smernicou * graf funkcie.]

67. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x), x \in D(f)$:

$y = \frac{2x-1}{3x-2},$	$y = \frac{ 2x-1 }{3x-2},$	$y = \frac{2x-1}{ 3x-2 },$	$y = \frac{2x^2-1}{3x^2-2},$
$y = \arcsin \frac{2x-1}{3x-2},$	$y = \arccos \frac{2x-1}{3x-2},$	$y = \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{3x-2},$	$y = \operatorname{arccotg} \frac{2x-1}{3x-2},$
$y = \operatorname{arctg} \frac{2x^2-1}{3x^2-2},$	$y = \operatorname{arccotg} \frac{2x^2-1}{3x^2-2},$	$y = \arcsin \sin(2x),$	$y = \sin \arcsin(2x),$
$y = \arcsin \cos(2x),$	$y = \sin \arccos(2x),$	$y = \operatorname{arctg} \operatorname{tg}(2x),$	$y = \operatorname{cotg} \operatorname{arccotg}(2x).$