PŘÍKLAD 32

(1) $y'' + y = 0$

má řešení $\underbrace{\boxed{y = \sin x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}},\ \text{resp. } \boxed{y = \cos x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}}_{\text{řešení na } \mathbb{R}}$

---

(2) $\boxed{y'' + y = 0}$ (A) $\Rightarrow$ položme $y = y_1,\ y' = y_2$

$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' + y_1 &= 0 \end{aligned}}$ (B)

potom platí:

$y = \sin x$ je řešení (A) na $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $(\sin x, \cos x)$ je řešení (B) na $\mathbb{R}^2$.

---

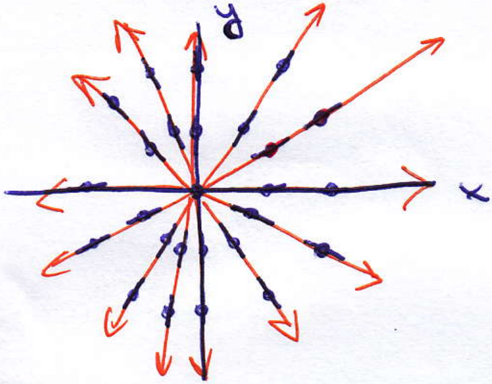
resp. $y = \cos x$ je řešení (A) na $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $(\cos x, -\sin x)$ je řešení (B) na $\mathbb{R}^2$.

PRÍKLAD 39 $y' = \frac{y}{x}, x \neq 0, x, y \in R$

$f(x,y) = \frac{y}{x}$ je spojité na $R - \{0\} \times R$.

Na hľadanie lineárnych elementov položme: $y' = c$, kde $c \in R$

$\Rightarrow y' = c = \frac{y}{x} \Rightarrow y = cx$ .. polpriamky vychádzajúce z počiatku $(0,0)$



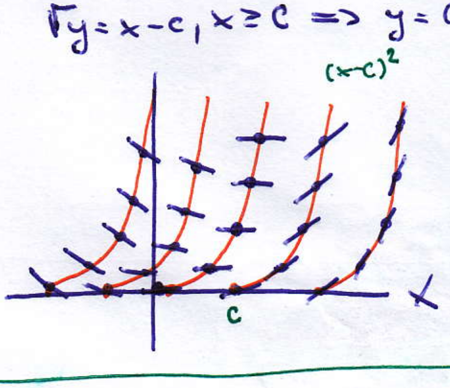
Smerové pole DR: $y' = \frac{y}{x}$

Krivky, v ktorých bodoch je daná DR daná tá istá hodnota $y' = c$ (t.j. rovnaké lineárne elementy) sa nazývajú IZOKLINY.

PRÍKLAD 40

$y' = x - \sqrt{y}, x \in R, y \geq 0$ $y' = c = x - \sqrt{y} \Rightarrow$

$\sqrt{y} = x - c, x \geq c \Rightarrow y = (x-c)^2$ ... t.j. izokliny sú časti parabol $y = (x-c)^2, x \geq c$ kde $c \in R$, ktoré sa dotýkajú osi x a ležia nad ňou.



PRÍKLAD 41 $y' = (ax+b)y, \quad y(0)=1$ | $a, b \in R$

y je spojité $\Rightarrow$ $\exists$ okolie $O(0)$ také, že $\forall x \in O(0): y(x) > 0$

separácia premenných (MSP) $\Rightarrow$ $\dfrac{y'}{y} = ax+b \Rightarrow$

$$\int_0^x \frac{y'(t)\,dt}{y(t)} = \int_0^x [at+b]\,dt \quad \begin{bmatrix} \text{SUBST:} \\ v = y(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \int_1^y \frac{dv}{v} = \int_0^x [at+b]\,dt$$

$$\Rightarrow \ln|y(x)| - \ln|y(0)| = \frac{ax^2}{2} + bx - 0 \Rightarrow \ln y(x) = \frac{ax^2}{2} + bx$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = e^{\frac{ax^2}{2} + bx}, \quad x \in O(0)}$$ je riešenie na $O(0)$ jediné

Dá sa ukázať, že je to jediné riešenie na celom R.

PRÍKLAD 42 $y' = y^2, \quad y(0) = 0$ |

Napriek $g(y_0) \neq 0$, ale aj tak použijeme metódu MSP separácie premenných s počiatočnou podmienkou $y(0) = y_0 \Rightarrow$

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y^2(t)}\,dt = \int_0^x dt \Rightarrow -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y(0)} = x - 0 \Rightarrow y(x) = \frac{y_0}{1 - xy_0}$$

Ak položíme $y_0 = 0 \Rightarrow$ $y(x) = 0$ je riešenie.

Ale! Na základe uvedeného postupu nemôžeme tvrdiť, že $y(x)=0$ je jediné riešenie uvedeného problému.
Iným spôsobom sa dá dokázať, že to je jediné riešenie daného problému.

57

PRÍKLAD 43 $\quad y' = \sqrt[3]{y^2},\ y(0) = 0$

opäť neplatí $g(y_0) \neq 0$, ďalej aplikujeme MSP pre $y(0) = y_0$

$$\Rightarrow \frac{y'}{\sqrt[3]{y^2}} = 1 \Rightarrow \int_0^x y^{-\frac{2}{3}}(t) \cdot y'(t)\,dt = \int_0^x dt \quad \left[\begin{array}{l}\text{subst.}\\ v = y(t)\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\int_{y_0}^{y} v^{-\frac{2}{3}}\,dv = \int_0^x dt \Rightarrow 3y^{\frac{1}{3}} - 3y_0^{\frac{1}{3}} = x - 0 \Rightarrow y(x) = \left(\frac{x}{3} + \sqrt[3]{y_0}\right)^3$$

$y_0 = 0 \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{x^3}{27},\ x \in R}$ je riešenie (dosadením ľahko overiteľné)

Toto riešenie ale NIEJE JEDINÉ, riešení je

$$y(x) = 0,\ x \in R, \text{ resp. } y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{(x-1)^3}{27}, & x \geq 1. \end{cases}$$

PRÍKLAD 44 $\quad y' = 1 + y^2,\ y(0) = 1$

MSP: $\frac{y'}{1+y^2} = 1 \Rightarrow \int_1^y \frac{dv}{1+v^2} = \int_0^x dt \Rightarrow \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} 1 = x$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} y = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{y(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right),\ x \in \left(-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4}\pi < x < \frac{\pi}{4}\right)$$

$y(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ je jediné riešenie na $\left(-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right)$. Nemôžeme ho však predĺžiť za hranice tohto intervalu.

Funkcia $y = \operatorname{tg} x$ je periodická s periódou π, t.j. môžeme nájsť riešenie na INOM INTERVALE, napr.:

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{5}{4}\pi\right),\ x \in \underbrace{\left(-\frac{7}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi\right)}$$

$\longrightarrow$!Ale! $0 \notin \left(-\frac{7}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi\right)$

t.j. neplatí $y(0) = 1$

PRÍKLAD 45 $\quad y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right) \quad | \; x \neq 0$

$u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux; \; y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = u(1 + \ln u)$

$\boxed{u'x = u \ln u}$ (A)

(I) $\boxed{u = 1, x \in R - \{0\}}$ je riešenie DR (A) $\Rightarrow$

$\boxed{y = x, x \neq 0}$ je riešenie pôvodnej DR

Skúška

$y' = [x]' = 1$

$\frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x}\left(1 + \ln \frac{x}{x}\right) = 1 + \ln 1 = 1$ $\Big\}$ t.j. „="

(59)

PRÍKLAD 45 - POKRAČOVANIE

(II) MSP $\quad \frac{u'}{u \ln u} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\int \frac{du}{u \ln u} = \begin{bmatrix} t = \ln u \\ dt = \frac{du}{u} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c_1 = \ln(\ln u) + c_1; \; \int \frac{dx}{x} = \ln x + c_2$

$\Rightarrow \ln(\ln u) = \ln x + c = \ln x + \ln k = \ln(kx), \; c \in R, \; c = \ln k, \; k > 0$

$\Rightarrow \ln u = kx \Rightarrow \boxed{u = e^{kx}} \; x \neq 0, k > 0$ je riešenie (A)

$\Rightarrow \boxed{y = x \cdot e^{kx}} \; x \neq 0, k > 0$ je riešenie pôvodnej DR

Ak položíme $k = 0 \Rightarrow y = x \cdot e^0 = x$, t.j. (I).

PRÍKLAD 46 $y' = (x+y)^2$ viď pr. 44

$$z = x+y \Rightarrow y = z-x,\ y' = z'-1 \Rightarrow z'-1 = z^2 \Leftrightarrow z' = 1+z^2 \Leftrightarrow \frac{z'}{1+z^2} = 1$$

MSP $\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx \Rightarrow \operatorname{arctg} z = x + c \Rightarrow \boxed{z = \operatorname{tg}(x+c),\ x+c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$

$$\Rightarrow \boxed{y = \operatorname{tg}(x+c) - x\ ;\ x \in (-\tfrac{\pi}{2} - c, \tfrac{\pi}{2} - c)}$$

Keďže $1+z^2 \geq 1$ t.j. $1+z^2 \neq 0$ pre $\forall z \in R \Rightarrow$ DR nemá ďalšie riešenie.

PRÍKLAD 47 $y' = \frac{(y+x)^2+2}{2y+2x-1},\ y(x_0) = y_0$ $2y+2x-1 \neq 0$

$$z = y+x \Rightarrow y = z-x,\ y' = z'-1 \Rightarrow z'-1 = \frac{z^2+2}{2z-1} \Leftrightarrow z' = \frac{z^2+2+2z-1}{2z-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{z'(2z-1)}{(z+1)^2} = 1$$

$$z_0 = z(x_0) = y(x_0) + x_0 = y_0 + x_0$$

MSP $\int_{z_0}^{z} \frac{2v-1}{(v+1)^2} dv = \int_{x_0}^{x} dt \Rightarrow \ln\left(\frac{z+1}{z_0+1}\right)^2 + \frac{3}{z+1} - \frac{3}{z_0+1} = x - x_0$

$$\int \frac{2v-1}{(v+1)^2} dv = \int \frac{2v+2-3}{v^2+2v+1} dv = \int \frac{2v+2}{v^2+2v+1} dv - 3\int \frac{dv}{(v+1)^2} =$$

$$= \ln(v^2+2v+1) - 3\frac{(v+1)^{-1}}{-1} = \ln(v+1)^2 + \frac{3}{v+1}$$

dostali sme transcedentnú rovnicu

$$\boxed{\ln(z+1)^2 - \ln(z_0+1)^2 + \frac{3}{z+1} - \frac{3}{z_0+1} = x - x_0}$$

t.j. $\ln(z+1)^2 + \frac{3}{z+1} = x - \underbrace{x_0 + \ln(z_0+1)^2 + \frac{3}{z_0+1}}_{\text{číslo}}$,

ktorú nedokážeme riešiť pomocou elementárnych fcií.

4.11.2011

PŘÍKLAD 48

$$y' = \frac{y-2x}{2y-3x} \qquad \det\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix} = -3+4 = 1 \neq 0$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x}-2}{2\frac{y}{x}-3} \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} \left.\begin{array}{l} y = ux \\ y' = u'x+u \end{array}\right\} u'x+u = \frac{u-2}{2u-3} \Rightarrow$$

$$u'x = \frac{u-2}{2u-3} - u = \frac{u-2-2u^2+3u}{2u-3} = \frac{-2u^2+4u-2}{2u-3} = -2\,\frac{u^2-2u+1}{2u-3}$$

$$\Rightarrow \frac{(2u-3)u'}{(u-1)^2} = \frac{-2}{x} \Rightarrow \int\frac{(2u-3)\,du}{(u-1)^2} = -2\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{2u-3}{(u-1)^2}du = \int\frac{2u-2}{u^2-2u+1}du - \int\frac{du}{(u-1)^2} = \ln|u^2-2u+1| - \frac{(u-1)^{-1}}{-1} =$$

$$= \ln(u-1)^2 + \frac{1}{u-1} = 2\ln|u-1| + \frac{1}{u-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{2\ln|u-1| + \frac{1}{u-1} = -2\ln|x| + C}, \; C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2\ln\left|\frac{y}{x}-1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x}-1} = -2\ln|x| + C$$

$$\Rightarrow 2\ln\left|\frac{y-x}{x}\right| + \frac{x}{y-x} = -2\ln|x| + C \qquad 2\ln|y-x| - 2\ln|x|$$

$$\Rightarrow \boxed{2\ln|y-x| + \frac{x}{y-x} = C}$$

dostali sme riešenie v implicitnom tvare.

PRÍKLAD 49 $\boxed{y' = \dfrac{x-y-1}{x+y+3}}$ $\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0$

t.j. riešime: $\left.\begin{matrix} m-n-1=0 \\ m+n+3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2m+2=0 \\ 2n+4=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} m=-1 \\ n=-2 \end{matrix}$

substitúcia: $\boxed{\begin{matrix} x=u-1; & y=v-2 \\ u=x+1; & v=y+2 \end{matrix}} \Rightarrow v' = \dfrac{u-1-v+2-1}{u-1+v-2+3} = \dfrac{u-v}{u+v} = \dfrac{1-\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}} \Rightarrow$

substitúcia: $\boxed{z = \dfrac{v}{u} = \dfrac{y+2}{x+1}} \Rightarrow v = zu,\ v' = z'u + z \Rightarrow \boxed{z'u + z = \dfrac{1-z}{1+z}}$

$\Rightarrow z'u = \dfrac{1-z}{1+z} - z = \dfrac{1-2z-z^2}{1+z} \Rightarrow \boxed{-\dfrac{(1+z)z'}{z^2+2z-1} = \dfrac{1}{u}},\ u \neq 0,\ z^2+2z-1 \neq 0$

MSP $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{2z+2}{z^2+2z-1}\,dz = \int \dfrac{du}{u} \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\ln|z^2+2z-1| = \ln|u| + C,\ C\in\mathbb{R}$

označme $k>0$ tak, že $C = \ln k$ (t.j. $k = e^C$) $\Rightarrow$

$\ln|z^2+2z-1| = -2(\ln|u| + \ln k) = -2\ln|ku| = \ln\dfrac{1}{k^2u^2} \Rightarrow$

$|z^2+2z-1| = \dfrac{1}{k^2u^2} \Rightarrow |z^2+2z-1|u^2 = \dfrac{1}{k^2} \Rightarrow \boxed{(z^2+2z-1)u^2 = \pm\dfrac{1}{k^2} =: d}$

$d \in \mathbb{R},\ d \neq 0$

Riešenie pôvodnej DR potom spĺňa:

$\left(z = \dfrac{y+2}{x+1},\ \text{resp. } y = z(x+1) - 2\right)$

$\left[\left(\dfrac{y+2}{x+1}\right)^2 + 2\left(\dfrac{y+2}{x+1}\right) - 1\right](x+1)^2 = \boxed{(y+2)^2 + 2(y+2)(x+1) - (x+1)^2 = d}$

Ak $\boxed{d=0} \Rightarrow z^2 + 2z - 1 = 0$, t.j. $z = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow$

$\boxed{y = (-1\pm\sqrt{2})(x+1) - 2 = x(-1\pm\sqrt{2}) - 3 \pm \sqrt{2}}$, $x\in\mathbb{R}$ je riešenie pôvodnej DR

skúška (dosadenie): $y' = [x(-1\pm\sqrt{2}) - 3 \pm \sqrt{2}]' = \underline{-1\pm\sqrt{2}}$

$\dfrac{x-y-1}{x+y+3} = \dfrac{x - x(-1\pm\sqrt{2}) + 3 \mp \sqrt{2} - 1}{x + x(-1\pm\sqrt{2}) - 3 \pm \sqrt{2} + 3} = \dfrac{x(2\mp\sqrt{2}) + 2 \mp \sqrt{2}}{x(\pm\sqrt{2}) \pm \sqrt{2}} =$

$= \dfrac{(x+1)(2\mp\sqrt{2})}{\pm\sqrt{2}(x+1)} = \dfrac{2\mp\sqrt{2}}{\pm\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\pm\sqrt{2}}{\pm\sqrt{2}} = \dfrac{\pm\sqrt{2}\cdot 2 - 2}{2} = \underline{\pm\sqrt{2} - 1}$

PŘÍKLAD 50 $\boxed{y' = \frac{y^2}{x} + \frac{y}{2x} + 1}$ substituce $\boxed{y = z\sqrt{x},\ x \geq 0}$ (64)

$\Rightarrow z'\sqrt{x} + z\cancel{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{z^2 x}{x} + \cancel{\frac{z\sqrt{x}}{2x}} + 1 \Leftrightarrow \boxed{z'\sqrt{x} = z^2+1}$ separovatelné DR

MSP | $\int \frac{dz}{z^2+1} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \operatorname{arctg} z = 2\sqrt{x} + c = 2\sqrt{x} + 2k$, $c = 2k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z = \operatorname{tg}(2\sqrt{x}+2k)$, $2\sqrt{x} + 2k \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, t.j.: $\sqrt{x} \in \left(-\frac{\pi}{4} - k, \frac{\pi}{4} - k\right)$ $-\frac{\pi}{4} - k \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg}(2\sqrt{x} + 2k)}$ $x \in \left(\left(-\frac{\pi}{4}-k\right)^2, \left(\frac{\pi}{4}-k\right)^2\right)$, $k \leq -\frac{\pi}{4}$ je řešení DR

PRÍKLAD 51 $\quad y' + \frac{xy}{1+x^2} = 0,\ y(0) = y_0 \qquad \frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2}$

$y_0 \in R$

NSP $\quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \ln k = \ln \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow y = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad$ vypočítame k: $\quad y(0) = \frac{k}{\sqrt{1+0}} = k = y_0$

t.j. riešením DR je funkcia $\boxed{y(x) = \frac{y_0}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in R}$

Resp. PRIAMO

NSP $\quad \int_{y_0}^{y} \frac{dv}{v} = -\int_0^x \frac{t\,dt}{1+t^2} \Rightarrow \ln|y| - \ln|y_0| = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{2}\ln|1+0|$

$y_0 \neq 0$

$\ln\left|\frac{y}{y_0}\right| = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad$ vyhovuje iba $+y_0$

$\Rightarrow |y| = \frac{|y_0|}{\sqrt{1+x^2}}$, t.j. $y = \pm\frac{y_0}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad \left[y(0) = \pm\frac{y_0}{\sqrt{1+0}} = \pm y_0\right]$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{y_0}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in R}$ je riešením danej úlohy

Pre $y_0 = 0$ je riešením funkcia $\boxed{y(x) = 0,\ x \in R}$

PRÍKLAD 52 $x^{-1}y' = 3 - x^{-2}y,\ y(2)=3$ | $x \neq 0$

$\Rightarrow y' = 3x - \frac{y}{x}$ t.j. $\boxed{y' + \frac{y}{x} = 3x}$ (nehomogénne lineárne DR)

Homogénne DR $y' + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$

MSP $\int_3^y \frac{dv}{v} = -\int_2^x \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|y| - \ln 3 = -\ln|x| + \ln 2 \Rightarrow \ln|y| = \ln\frac{6}{|x|}$

$\Rightarrow |y| = \frac{6}{|x|}$ t.j. $\boxed{y = \pm\frac{6}{x},\ x \neq 0}$ $\boxed{y(x) = \frac{6}{x},\ x \in (0,\infty)}$

Keďže $y(2) = 3$, riešenie má tvar

Nehomogénne DR

LVK $y(x) = \frac{c(x)}{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2} \Rightarrow$ po dosadení:

$\frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x^2} = 3x \Rightarrow c'(x) = 3x^2 \Rightarrow c(x) = \int_2^x 3t^2\,dt + c_0 = x^3 - 8 + c_0$

$\Rightarrow y(x) = \frac{x^3 - 8 + c_0}{x},\ x \in (0,\infty)$

Keďže $y(2) = \frac{8 - 8 + c_0}{2} = \frac{c_0}{2} = 3 \Leftrightarrow c_0 = 6$

riešenie danej úlohy: $\boxed{y(x) = \frac{x^3 - 2}{x},\ x \in (0,\infty)}$

PRÍKLAD 52 – POKRAČOVANIE (68)

Iné riešenie DR môžeme písať: $y'x + y = 3x^2$, t.j.: $(yx)' = 3x^2$

$\Rightarrow \int (yx)'\,dx = \int 3x^2\,dx \Rightarrow yx = x^3 + c,\ c \in R \Rightarrow y = \frac{x^3 + c}{x},\ c \in R$

$y(2) = \frac{8 + c}{2} = 3 \Leftrightarrow c = -2 \Rightarrow$ Riešenie: $\boxed{y(x) = \frac{x^3 - 2}{x},\ x \in (0,\infty)}$

PRÍKLAD 53

$\boxed{y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{y}}$ t.j. $y' - \frac{y}{x} = y^{-1} \Longleftrightarrow 2y'y - \frac{2y^2}{x} = 2$

substitúcia: $\boxed{u = y^{1-(-1)} = y^2} \Rightarrow u' = 2yy' \Rightarrow \boxed{u' - \frac{2u}{x} = 2}$

(1) $\boxed{u' - \frac{2u}{x} = 0} \Rightarrow \frac{u'}{u} = \frac{2}{x} \Rightarrow$ MSP $\int \frac{du}{u} = 2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\ln|u| = 2\ln|x| + \ln k = \ln(kx^2)$, $c_1 = \ln k \in R$, $k > 0 \Rightarrow$

$|u| = kx^2 \Rightarrow u = \pm kx^2$ $[u = y^2] \Rightarrow \boxed{u = kx^2,\ x \neq 0,\ k > 0}$

(2) $\boxed{u' - \frac{2u}{x} = 2}$ LVK $u = c(x)\cdot x^2 \Rightarrow u' = c'(x)x^2 + 2x\,c(x) \Rightarrow$

$c'(x)x^2 + 2x\cdot c(x) - \frac{2c(x)\cdot x^2}{x} = 2 \Rightarrow c'(x) = \frac{2}{x^2} \Rightarrow$

$c(x) = \int \frac{2\,dx}{x^2} + c = -\frac{2}{x} + c \Rightarrow \boxed{u(x) = \left(-\frac{2}{x} + c\right)x^2 = cx^2 - 2x}$ $x \neq 0$

PRÍKLAD 53 – POKRAČOVANIE $u = y^2 \Rightarrow$

Riešenie má tvar: $\boxed{y(x) = \pm\sqrt{cx^2 - 2x}}$, $c \in R$, $x \neq 0$.

Jeho definičný obor: $\boxed{c=0}$: $-2x > 0 \Rightarrow \boxed{x \in (-\infty, 0)}$

$\boxed{c \neq 0}$: $cx^2 - 2x = cx\left(x - \frac{2}{c}\right) > 0 \Rightarrow x \neq 0,\ x \neq \frac{2}{c}$

$\boxed{c>0}$: $x\left(x - \frac{2}{c}\right) > 0 \Rightarrow \boxed{x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{c}, \infty\right)}$

$\boxed{c<0}$: $x\left(x - \frac{2}{c}\right) < 0 \Rightarrow \frac{2}{c} < 0$, $\boxed{x \in \left(\frac{2}{c}, 0\right)}$

PŘÍKLAD 54 $y=(y')^2(x+1)$, t.j.: $y=p^2(x+1)$ t.j. $f(x,p)=p^2(x+1)$ spojité na R^2

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{f_x-p}{f_p}=-\frac{p^2-p}{2p(x+1)}=-\frac{p-1}{2(x+1)} \Rightarrow \boxed{-2\frac{dp}{p-1}=\frac{dx}{x+1}} \quad (\text{MSP})$$

$$\Rightarrow -2\int\frac{dp}{p-1}=\int\frac{dx}{x+1} \Rightarrow -2\ln|p-1|=\ln|x+1|+\ln k,\ k>0$$

$$\Rightarrow \ln\frac{1}{(p-1)^2}=\ln k|x+1| \Rightarrow \frac{1}{(p-1)^2}=k|x+1| \Rightarrow (p-1)^2=\frac{1}{k|x+1|}$$

$$\Rightarrow p-1=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{|x+1|}} \left[\begin{array}{l}\text{označ } \pm\frac{1}{\sqrt{k}}=\alpha \\ k>0 \Rightarrow \alpha\in R,\ \alpha\neq 0\end{array}\right] \Rightarrow \boxed{p=\frac{\alpha}{\sqrt{|x+1|}}+1}$$

$$\Rightarrow y=p^2(x+1)=\left(\frac{\alpha+\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|x+1|}}\right)^2(x+1)=\frac{x+1}{|x+1|}\cdot\left(\alpha+\sqrt{|x+1|}\right)^2,\ \alpha\in R,\ \alpha\neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y=(\alpha+\sqrt{x+1})^2}\ x\in(-1,\infty),\ \text{resp.}\ \boxed{y=-(\alpha+\sqrt{-x-1})^2}\ x\in(-\infty,-1)$$

Riešením je tiež funkcia $\boxed{y=0}$ $x\in R$.

PRÍKLAD 55 $x = y' + \ln y'$, t.j. $x = p + \ln p$ t.j. $f(p) = p + \ln p$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p(1+\frac{1}{p})} = \frac{1}{p+1} \Rightarrow \boxed{(p+1)\,dp = dy} \ (\text{NSP}) \Rightarrow \frac{1}{2}p^2 + p + c = y,\ c \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Parametrický tvar riešenia pôvodej DR $x = y' + \ln y'$:

$$\boxed{x = p + \ln p,\ y = \frac{1}{2}p^2 + p + c,\ p > 0},\ c \in \mathbb{R}.$$

POZNÁMKA 17

V praxi sa príklady 54, 55 (a podobné) počítajú tak, že sa implicitné rovnice $F(x, y, p) = 0$ derivujú priamo podľa x, resp. y.

PŘÍKLAD 54 $y = (y')^2(x+1) = p^2(x+1)$

$y = y(x)$, $y' = p$, tj. $y'(x) = p(x)$ … DERIVUJEME podle x … tj. $\boxed{p' = \frac{dp}{dx}}$

$\Rightarrow \boxed{p = y' = 2pp'(x+1) + p^2(1+0)} \Rightarrow p = 2pp'(x+1) + p^2 \xRightarrow{p \neq 0}$

$1 = 2p'(x+1) + p \Rightarrow \boxed{\frac{2p'}{1-p} = \frac{1}{x+1}}$ Podobně jako příklad 54. Další postup je identický

PŘÍKLAD 55 $x = y' + \ln y' = p + \ln p$

$\frac{dy}{dx} = y' = p \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ … DERIVUJEME PODLE y … tj. $\boxed{p = p(y) \quad p' = \frac{dp}{dy}}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = p' + \frac{1}{p} \cdot p'} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{p \cdot p' + p'}{p} \xRightarrow{p \neq 0} \boxed{1 = (p+1)p'}$

Podobně jako příklad 53, další postup identický!

PŘÍKLAD 56

$y = (y')^2 + 3 = p^2 + 3$, $y(0) = 4$

Derivujeme podle x $\Rightarrow p = y' = 2pp' \xRightarrow{p \neq 0} 1 = 2p'$

$\Rightarrow \int dx = 2\int dp + c \Rightarrow \boxed{x = 2p + c,\ c \in \mathbb{R}}$

Řešení v parametrickém tvaru je: $\boxed{x = 2p + c,\ y = p^2 + 3,\ p \in \mathbb{R}}$

$x = 2p + c \Rightarrow p = \frac{x-c}{2} \Rightarrow$ explicitní tvar: $\boxed{y = p^2 + 3 = \frac{(x-c)^2}{4} + 3,\ x \in \mathbb{R}}$

Ještě musíme určit hodnotu c:

$y(0) = 4 \Rightarrow$ parametrický tvar: $\left.\begin{array}{l} 0 = 2p + c \Rightarrow c = -2p \\ 4 = p^2 + 3 \Rightarrow p = \pm 1 \end{array}\right\}$ $\boxed{c = \pm 2}$

explicitní tvar: $4 = \frac{(0-c)^2}{4} + 3 \Rightarrow 1 = \frac{c^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Řešením jsou tedy funkce:

$x = 2p \pm 2,\ p \in \mathbb{R}$, $y = p^2 + 3$ (parametrický tvar), resp. $y = \frac{(x \pm 2)^2}{4} + 3,\ x \in \mathbb{R}$ (explicitní tvar)

PRÍKLAD 57 $\boxed{y = 2y'x + (y')^2 = 2px + p^2}$ derivujeme podľa x, $p' = \frac{dp}{dx}$

$p = y' = 2p'x + 2p + 2pp' \Rightarrow p'(2x+2p) = -p \Rightarrow \frac{dp}{dx} = p' = -\frac{p}{2x+2p} \Longrightarrow$

$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x+2p}{p} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = -2}$ lineárne nehomogénne DR

Homogénne | $\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 0 \Rightarrow$ MSP | $\frac{dx}{x} = -\frac{2dp}{p} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{dp}{p} + c_1, c_1 \in R$

$\Rightarrow \ln|x| = -2\ln|p| + \ln k$, $c_1 = \ln k, k > 0 \Rightarrow \ln|x| = \ln \frac{k}{p^2}$

$\Rightarrow x = \pm \frac{k}{p^2} \Rightarrow$ riešenie je $\boxed{x = \frac{c}{p^2}}$, $c \in R$ (máme $c = 0$).

Nehomogénne | $\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = -2 \Rightarrow$ LVK | $x = \frac{c(p)}{p^2} \Rightarrow \frac{c'(p)}{p^2} - 2\cancel{\frac{c(p)}{p^3}} + \cancel{\frac{2c(p)}{p^2 \cdot p}} = -2$

$\Rightarrow c'(p) = -2p^2 \Rightarrow c(p) = -\int 2p^2 dp = -\frac{2}{3}p^3 + \alpha$, $\alpha \in R \Rightarrow \boxed{x = \frac{\alpha}{p^2} - \frac{2}{3}p}$

T.j. parametrický tvar pôvodnej DR:

$\boxed{x = \frac{\alpha}{p^2} - \frac{2}{3}p \;;\; y = 2p\left(\frac{\alpha}{p^2} - \frac{2}{3}p\right) + p^2 = \frac{2\alpha}{p} - \frac{1}{3}p^2, \; p > 0}$

Ak $p = 0 \Rightarrow$ riešenie je $\boxed{y = 0, x \in R}$

Ak $\alpha = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}p$, $y = -\frac{1}{3}p^2 \Rightarrow p = -\frac{3}{2}x$, $y = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}x\right)^2 \Rightarrow$

Riešenie je $\boxed{y = -\frac{3}{4}x^2, x \in R}$

PRÍKLAD 58

$\boxed{y = xy' + a\sqrt{1 + (y')^2} = xp + a\sqrt{1+p^2}}$ $a \in R$ konštanta

I $\boxed{a = 0} \Rightarrow y = xy'$, t.j. $g(p) = 0$

$\Rightarrow$ (viď 4) riešenia sú $\boxed{y = cx + g(c) = cx, x \in R}$

Resp. výpočtom | MSP: $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \text{konšt.} \Longrightarrow$

$\ln|y| = \ln|x| + \ln k, k > 0 \Rightarrow \ln|y| = \ln k|x| \Rightarrow |y| = k|x|$

$\Rightarrow y = \pm kx, k > 0 \Rightarrow \boxed{y = cx, c \in R}$ (máme $c = 0$)

II $\boxed{a\neq 0}$ $y=xp+a\sqrt{1+p^2}$, t.j. $g(p)=a\sqrt{1+p^2}=a(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$

derivujeme podľa x, t.j. $p'=\frac{dp}{dx}$ $\Rightarrow$

$$p=y'=p+xp'+\frac{a}{2}(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2pp'=p+xp'+\frac{app'}{\sqrt{1+p^2}} \Rightarrow \boxed{0=xp'+\frac{app'}{\sqrt{1+p^2}}=p'\left(x+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\right)}$$

Ak $\boxed{p'=0}$ $\Rightarrow p=c,\ c\in R \Rightarrow$ $\boxed{y=cx+a\sqrt{1+c^2},\ x\in R}$, $c\in R$ je riešenie DR

Ak $\boxed{x+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}=0}$ $\Rightarrow$ Riešenie DR v parametrickom tvare je:

$$\boxed{x=-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},\ y=-\frac{ap^2}{\sqrt{1+p^2}}+a\sqrt{1+p^2}=\frac{-ap^2+a(1+p^2)}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}},\ p\in R}$$

Explicitný tvar riešenia: $x=-py$, t.j.: $p=-\frac{x}{y}$; $\forall p\in R:\ y=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\neq 0$

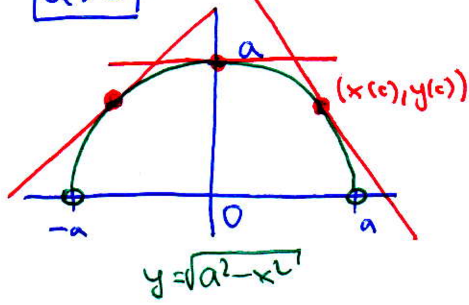
$$y=\frac{a}{\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}}=\frac{a}{\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}}=\frac{a\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow y^2=\frac{a y^2}{x^2+y^2},\ y\neq 0 \Rightarrow$$

$\boxed{x^2+y^2=a^2}$ $\Rightarrow$ Ak $\boxed{a>0}$: $\boxed{y=\sqrt{a^2-x^2},\ x\in(-a,a)}$ je riešenie

Ak $\boxed{a<0}$: $\boxed{y=-\sqrt{a^2-x^2},\ x\in(a,-a)}$ je riešenie

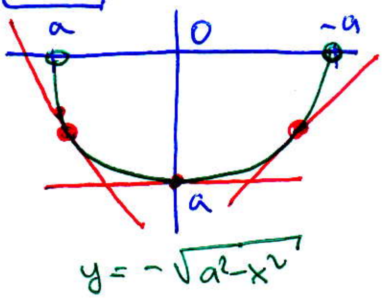
Graficky predstavujú priamky $y=cx+a\sqrt{1+c^2},\ x\in R$ dotyčnice ku grafom riešení $y=\sqrt{a^2-x^2},\ x\in(-a,a),\ a>0$, resp. $y=-\sqrt{a^2-x^2},\ x\in(a,-a),\ a<0$ v bode $(x(c),y(c))=\left(-\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}},\frac{a}{\sqrt{1+c^2}}\right)$

$\boxed{a>0}$



$y=\sqrt{a^2-x^2}$

$\boxed{a<0}$



$y=-\sqrt{a^2-x^2}$

PRÍKLAD 59 $\quad y'' - \dfrac{y'}{\sin x} = 0, \ x \in (0, \pi)$

Všeobecné riešenie má tvar: $y(x) = c_1 \cdot u_1(x) + c_2 \cdot u_2(x), \ x \in (0, \pi), \ c_{1,2} \in R$

Funkcie u_1, u_2 budeme hľadať ako riešenia s počiatočnými podmienkami v bode $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

(1) $y'' - \dfrac{y'}{\sin x} = 0, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

substitúcia $\boxed{y' = z} \Rightarrow \boxed{z' - \dfrac{z}{\sin x} = 0, \ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$

jednoznačnosť riešenia, veta 26 $\Rightarrow z = 0, \ x \in (0, \pi)$

$\Rightarrow y = \text{konšt.}, \ x \in (0, \pi)$, ale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow y = 1, \ x \in (0, \pi)$

t.j. prvé bázické riešenie: $\boxed{u_1(x) = 1, \ x \in (0, \pi)}$

(2) $y'' - \dfrac{y'}{\sin x} = 0, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

substitúcia $\boxed{y' = z} \Rightarrow \boxed{z' - \dfrac{z}{\sin x} = 0, \ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$

PRÍKLAD 09 – POKRAČOVANIE

MSP $z' = \frac{z}{\sin x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \boxed{\int_1^z \frac{dw}{w} = \int_{\pi/2}^{x} \frac{dt}{\sin t}}$

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \left[\begin{matrix} \text{subst: } v = \operatorname{tg}\frac{t}{2} \\ dt = \frac{2dv}{1+v^2},\ \sin t = \frac{2v}{1+v^2} \end{matrix}\right] = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|$$

$$\Rightarrow \ln|z| - \ln 1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right| \qquad \ln|1| = 0$$

$$\Rightarrow \ln|z| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| \Rightarrow z = \pm\operatorname{tg}\frac{x}{2};\ z\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 \Rightarrow \boxed{z = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x \in (0,\pi)}$$

$\boxed{y' = z}$ $\quad y = \int z(x)\,dx = \int \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx = -2\int \frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx =$

$$= -2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| - 2\ln k = -2\ln\left(k\cdot\cos\frac{x}{2}\right),\ x \in (0,\pi)$$

$$k > 0 \Rightarrow \ln k \in \mathbb{R},\ x \in (0,\pi) \Rightarrow \cos\frac{x}{2} \in (0,1)$$

$$\boxed{0 = y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)} = -2\ln\left(k\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right) = -2\ln\frac{k}{\sqrt{2}} \iff \ln\frac{k}{\sqrt{2}} = 0 \iff \frac{k}{\sqrt{2}} = 1$$

$\Rightarrow k = \sqrt{2} \Rightarrow$ druhé bázické riešenie $\boxed{u_2(x) = -2\ln\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right),\ x \in (0,\pi)}$

resp.

$\boxed{y' = z,\ y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0}$ $\quad y = \int_{\pi/2}^{x} \operatorname{tg}\frac{t}{2}\,dt = \left[-2\ln\left|\cos\frac{t}{2}\right|\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} =$

$$= -2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + 2\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| = -2\ln\cos\frac{x}{2} + 2\ln\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= -2\ln\cos\frac{x}{2} - 2\ln\sqrt{2} = \boxed{-2\ln\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right)}\ x \in (0,\pi)$$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie pôvodnej DR: $y'' - \frac{y'}{\sin x} = 0,\ x \in (0,\pi)$

má tvar: $y(x) = c_1 \cdot 1 + \overline{c}_2 \cdot \left(-2\ln\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right)\right) =$

$c_1, \overline{c}_2 \in \mathbb{R}$ $\qquad = c_1 - 2\overline{c}_2 \ln\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right),\ x \in (0,\pi)$

t.j.: $\boxed{y(x) = c_1 + c_2 \ln\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right),\ x \in (0,\pi)}$

PŘÍKLAD 60 $y''' + (1-x)y'' - (1-x)y' - y = 0$

$y = e^x$ je řešení tejto DR $\Rightarrow$ $\boxed{y(x) = e^x \cdot \int z(x)\,dx}$ sníží řád DR

$$y'(x) = e^x \int z(x)\,dx + e^x \cdot z(x)$$

$$y''(x) = e^x \int z(x)\,dx + 2e^x \cdot z(x) + e^x \cdot z'(x)$$

$$y'''(x) = e^x \int z(x)\,dx + 3e^x \cdot z(x) + 3e^x \cdot z'(x) + e^x \cdot z''(x)$$

Dosadíme do pôvodnej DR $\Rightarrow$ $y''' + (1-x)y'' - (1-x)y' - y =$

$$= \left(e^x \int z(x)\,dx + 3e^x z + 3e^x z' + e^x z''\right) + (1-x)\left(e^x \int z(x)\,dx + 2e^x z + e^x z'\right) -$$

$$- (1-x)\left(e^x \int z(x)\,dx + e^x z\right) - e^x \int z(x)\,dx =$$

$$= e^x z'' + \left(3e^x + (1-x)e^x\right)z' + \left(3e^x + 2(1-x)e^x - (1-x)e^x\right)z =$$

$$= e^x z'' + (4-x)e^x z' + (4-x)e^x z = \left(z'' + (4-x)z' + (4-x)z\right)e^x = 0$$

$\Rightarrow$ Dostali sme DR 2. rádu:

$$z'' + (4-x)z' + (4-x)z = 0$$

PRÍKLAD 61 $y' + a_1 y = 0$ t.j.: $n = 1 \Rightarrow y' = -a_1 y$

MSD $\frac{dy}{y} = -a_1 dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -a_1 \int dx \Rightarrow \ln|y| = -a_1 x + \ln k,\ k > 0$

$\Rightarrow \ln \frac{|y|}{k} = -a_1 x \Rightarrow \frac{|y|}{k} = e^{-a_1 x} \Rightarrow y = \pm k e^{-a_1 x}$, označme $c = \pm k \in R - \{0\}$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie $\boxed{y = c e^{-a_1 x},\ x \in R}$ $c \in R$ (naviac $c = 0 \Rightarrow y = 0$)

PRÍKLAD 62 $\boxed{y''+5y'+6y=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=0}$

CHR: $\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda+3)=0 \Rightarrow \lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie $\boxed{y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x},\ x\in R}$ $c_1,c_2\in R$

Ešte musíme vypočítať c_1, c_2, aby boli splnené počiatočné podmienky: $\boxed{y'(x)=-2c_1e^{-2x}-3c_2e^{-3x},\ x\in R}$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=c_1\cdot e^0+c_2\cdot e^0=c_1+c_2=-1\\ y'(0)&=-2c_1\cdot e^0-3c_2\cdot e^0=-2c_1-3c_2=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1&=-3\\ c_2&=2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Riešenie danej úlohy: $\boxed{y(x)=-3e^{-2x}+2e^{3x},\ x\in R}$

PRÍKLAD 63

1) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

dvojnásobné korene

CHR.: $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1;\ \lambda_{3,4} = -1$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie: $\boxed{y(x) = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x},\ x \in R}$ $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$.

---

2) $y^{(4)} - y = 0$

CHR.: $\lambda^4 - 1 = (\lambda^2+1)(\lambda^2-1) = (\lambda+i)(\lambda-i)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i$; $\boxed{e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x}$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie $\boxed{y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x,\ x \in R}$ $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$

---

3) $y'' + 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

CHR.: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ $\boxed{e^{(-1\pm 2i)x} = e^{-x}(\cos 2x \pm i \sin 2x)}$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie $\boxed{y(x) = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x} \sin x,\ x \in R}$ $c_1, c_2 \in R$

$$y'(x) = -c_1 e^{-x}\cos 2x - 2c_1 e^{x} \sin 2x - c_2 e^{-x} \sin x + c_2 e^{-x} \cos x,\ x \in R$$

Dosadíme do počiatočných podmienok $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 \cdot e^0 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot e^0 \cdot \sin 0 = c_1 = 1 \\ y'(0) &= -c_1 \cdot e^0 \cdot \cos 0 - 2c_1 e^0 \sin 0 - c_2 e^0 \sin 0 + c_2 e^0 \cos 0 = \\ &= -c_1 + 2c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

T.j. riešenie danej úlohy má tvar:

$$\boxed{y(x) = e^{-x}\cos 2x + \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x,\ x \in R}$$

PRÍKLAD 64 $y'' + 4y = xe^x$

Homogénne DR $y'' + 4y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie: $\boxed{y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x,\ x \in R}$ $c_{1,2} \in R$

Nehomogénne DR $y'' + 4y = xe^x$ (t.j. $m=1$, $\beta=1$ .. nie je koreň CHR)

partikulárne riešenie budeme hľadať v tvare:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{y_p(x) = x^0(b_0x + b_1)e^x = (b_0x + b_1)e^x} \Rightarrow \\ y_p'(x) = b_0 \cdot e^x + (b_0x + b_1)e^x = (b_0x + b_0 + b_1)e^x \\ y_p''(x) = b_0 \cdot e^x + (b_0x + b_0 + b_1)e^x = (b_0x + 2b_0 + b_1)e^x \end{array}\right\} \text{dosadíme do DR}$$

$\Rightarrow (b_0x + 2b_0 + b_1)e^x + 4(b_0x + b_1)e^x = xe^x \quad / \cdot e^{-x}$

$\Rightarrow 5b_0x + 2b_0 + 5b_1 = x$, t.j. sústava $\boxed{\begin{array}{l} x^0: \ 5b_0 = 1 \\ x^1: \ 2b_0 + 5b_1 = 0 \end{array}}$

$\Rightarrow b_0 = \frac{1}{5}$, $b_1 = -\frac{2}{25} \Rightarrow \boxed{y_p(x) = \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^x,\ x \in R}$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie DR $y'' + 4y = x \cdot e^x$ má tvar:

$\boxed{y(x) = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x + \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^x,\ x \in R}$ $c_1, c_2 \in R$

PRÍKLAD 65 $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$

Homogénne DR $y'' - 2y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie: $\boxed{y_h(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x,\ x \in R}$ $c_1, c_2 \in R$

Nehomogénne DR $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$

$4e^x \sin x = \mathrm{Im}\left[4e^x(\cos x + i \cdot \sin x)\right] = \mathrm{Im}\left[4e^{(1+i)x}\right] \Rightarrow$

zoberieme si $\boxed{\text{IMAGINÁRNU ČASŤ}}$ partikulárneho riešenia DR

$y'' - 2y' + 2y = 4e^{(1+i)x}$ ($m=0$, $k=1$).

PRÍKLAD 65 – POKRAČOVANIE

Partikulárne riešenie budeme hľadať v tvare:

$$\boxed{y_p(x) = x^1 b_0 e^{(1+i)x} = b_0 x\, e^{(1+i)x} = b_0 x e^x(\cos x + i \sin x)} \Rightarrow$$

$$y_p'(x) = b_0 e^{(1+i)x} + b_0(1+i)x e^{(1+i)x} = (b_0 + b_0 x + b_0 i x)\, e^{(1+i)x}$$

$$y_p''(x) = (b_0 + b_0 i) e^{(1+i)x} + (b_0 + b_0(1+i)x)(1+i)\, e^{(1+i)x} =$$

$$= (2b_0 + 2b_0 i + b_0\underbrace{(1+i)^2}_{2i} x)\, e^{(1+i)x} = (2b_0 + 2b_0 i + 2b_0 i x) e^{(1+i)x}$$

Dosadíme do DR $\quad y'' - 2y' + 2y = 4e^{(1+i)x}$

$$\Rightarrow (2b_0 + 2b_0 i + 2b_0 i x) e^{(1+i)x} - 2(b_0 + b_0 x + b_0 i x) e^{(1+i)x} + 2b_0 x e^{(1+i)x} = 4e^{(1+i)x}$$

$$\Rightarrow 2b_0 i e^{(1+i)x} = 4e^{(1+i)x} \Rightarrow \boxed{2b_0 i = 4} \Rightarrow \boxed{b_0 = -2i}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = -2ix e^{(1+i)x} = -2ix e^x(\cos x + i \sin x) = 2xe^x \sin x \underbrace{- 2x e^x \cos x}_{Im}, \; x \in R}$$

$\Rightarrow$ partikulárne riešenie DR $\; y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$:

$$\boxed{y_s(x) = Im(y_p(x)) = -2xe^x \cos x, \; x \in R}$$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie DR $\; y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$ je tvaru:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x - 2x e^x \cos x, \; x \in R} \quad c_1, c_2 \in R.$$

PRÍKLAD 66 $\quad y^{(4)} - y = x^2 + 5\cos x$

Homogénne DR / všeobecné riešenie (príklad 63 (2)): $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$

$$\boxed{y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x, \; x \in R} \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in R$$

DR $\; y^{(4)} - y = x^2$ $\quad \alpha = 0$ nie je koreň CHR $\Rightarrow k = 0$, $m = 2$

partikulárne riešenie hľadáme v tvare:

$$\boxed{y_1(x) = x^0(b_0 x^2 + b_1 x + b_2) e^0 = b_0 x^2 + b_1 x + b_2} \Rightarrow$$

$$y_1'(x) = 2b_0 x + b_1 \Rightarrow y_1''(x) = 2b_0 \Rightarrow y_1'''(x) = 0$$

$$\Rightarrow y_1^{(4)}(x) = 0$$

PRÍKLAD 66 – POKRAČOVANIE   dosadíme $\Rightarrow$

$0-(b_0x^2+b_1x+b_2)=x^2 \Rightarrow \boxed{b_0=-1,\ b_1=b_2=0} \Rightarrow \boxed{y_1(x)=-x^2,\ x\in R}$

$\boxed{\text{DR } y^{(4)}-y=5\cos x}$ $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, t.j. riešime DR

$\boxed{y^{(4)}-y=5e^{ix}}$ i je jednoduchý koreň CHR $\Rightarrow k=1$

partikulárne riešenie hľadáme v tvare:

$\boxed{y_p(x)=x^1\cdot b_0e^{ix}=b_0xe^{ix}=b_0x(\cos x+i\sin x)} \Rightarrow$

$y_p'(x)=b_0e^{ix}+b_0xie^{ix}$

$y_p''(x)=b_0ie^{ix}+b_0ie^{ix}+b_0xi^2e^{ix}=2b_0ie^{ix}-b_0xe^{ix}$

$y_p'''(x)=2b_0i^2e^{ix}-b_0e^{ix}-b_0xie^{ix}=-3b_0e^{ix}-b_0xie^{ix}$

$y_p^{(4)}(x)=-3b_0ie^{ix}-b_0ie^{ix}-b_0xi^2e^{ix}=-4b_0ie^{ix}+b_0xe^{ix}$

Dosadíme $\Rightarrow$ $-4b_0ie^{ix}+b_0xe^{ix}-b_0xe^{ix}=5e^{ix} \Rightarrow \boxed{-4b_0i=5}\ /\cdot\frac{i}{5}$

$\Rightarrow \boxed{b_0=\frac{5}{4}i} \Rightarrow \boxed{y_p(x)=\frac{5}{4}ixe^{ix}=\frac{5}{4}ix(\cos x+i\sin x)=-\frac{5}{4}x\sin x+\frac{5}{4}ix\cos x}$ $x\in R$

$\Rightarrow$ riešenie (partikulárne) DR $y^{(4)}-y=5\cos x$

$\boxed{y_2(x)=\mathrm{Re}[y_p(x)]=\mathrm{Re}\left[-\frac{5}{4}x\sin x+\frac{5}{4}ix\cos x\right]=-\frac{5}{4}x\sin x,\ x\in R}$

Ak to zhrnieme (princíp superpozície – veta 30) všeobecné riešenie pôvodnej DR: $y^{(4)}-y=x^2+5\cos x$

má tvar:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x)&=y_h(x)+y_1(x)+y_2(x)=\\ &=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x-x^2-\frac{5}{4}x\sin x,\ x\in R\end{aligned}}$$

$c_1,c_2,c_3,c_4\in R$

PRÍKLAD 67 $y'' + 3y' - 10y = 5,\ y(0)=1,\ y'(0)=-4$

Homogénne DR $y'' + 3y' - 10y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda+5)(\lambda-2) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -5 \Rightarrow$ všeobecné riešenie $\boxed{y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x},\ x \in R}$ $c_1, c_2 \in R$

Nehomogénne DR $y'' + 3y' - 10y = 5$ ($m=0$, $\alpha=0$ nie je koreň CHR $\Rightarrow k=0$)

partikulárne riešenie budeme hľadať v tvare:

$\boxed{y_p(x) = x^0 \cdot b_0 \cdot e^0 = b_0} \Rightarrow y_p'(x) = y_p''(x) = 0$, dosadíme $\Rightarrow$

$0 + 0 - 10b_0 = 5 \Rightarrow \boxed{b_0 = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y_p(x) = -\frac{1}{2},\ x \in R}$

všeobecné riešenie DR: $\boxed{y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x} - \frac{1}{2},\ x \in R}$ $c_1, c_2 \in R$.

Počiatočné podmienky

$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x} - \frac{1}{2} \Rightarrow$ $y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 1$

$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 5c_2 e^{-5x} \Rightarrow$ $y'(0) = 2c_1 - 5c_2 = -4$

$\Rightarrow \boxed{c_2 = 1,\ c_1 = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ riešenie danej úlohy $\boxed{y(x) = \frac{e^{2x}}{2} + e^{-5x} - \frac{1}{2},\ x \in R}$

PRÍKLAD 68 $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0,\ x>0$

substitúcia $x = e^t,\ t = \ln x\ ;\ y(x) = y(e^t) = z(t) = z(\ln x)$

dosadíme do DR $\Longrightarrow$

$$(z''' - 3z'' + 2z') + 2(z'' - z') - z' + z = \boxed{z''' - z'' - z' + z = 0}$$

CHR $\delta^3 - \delta^2 - \delta + 1 = \delta^2(\delta-1) - (\delta-1) = (\delta^2-1)(\delta-1) = (\delta-1)^2(\delta+1) = 0 \Rightarrow \boxed{\delta_{1,2} = 1,\ \delta_3 = -1}$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie: $\boxed{z(t) = c_1e^{+t} + c_2te^{t} + c_3e^{-t},\ t\in R}$ $c_{1,2,3}\in R$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie pôvodnej DR: $c_1,c_2,c_3\in R$

$$\boxed{y(x) = c_1e^{\ln x} + c_2\ln x . e^{\ln x} + c_3e^{-\ln x} = c_1x + c_2x\ln x + \frac{c_3}{x},\ x>0}$$

PRÍKLAD 68 – POKRAČOVANIE

(95)

INÉ RIEŠENIE riešenie hľadáme v tvare: $\boxed{y(x) = e^{\delta t} = x^{\delta},\ x>0}$

Dosadíme do DR $\Rightarrow$ $\delta(\delta-1)(\delta-2) + 2\delta(\delta-1) - \delta + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta^3 - 3\delta^2 + 2\delta + 2\delta^2 - 2\delta - \delta + 1 = \boxed{\delta^3 - \delta^2 - \delta + 1 = 0} \Rightarrow \delta_{1,2} = 1,\ \delta_3 = -1$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie:

$$\boxed{y(x) = c_1e^{t} + c_2te^{t} + c_3e^{-t} = c_1x + c_2x\ln x + \frac{c_3}{x},\ x>0}$$ $c_1,c_2,c_3\in R$

PRÍKLAD 69 $x^2y''+3xy'+y=0,\ x>0$

$x=e^t,\ t=\ln x,\ y(x)=y(e^t)=z(t)=z(\ln x) \Rightarrow \boxed{y(x)=z(t)}$

(viď)

$y'(x)=[z(\ln x)]'=\frac{z'(\ln x)}{x}=\frac{z'(t)}{x} \Rightarrow \boxed{x\cdot y'(x)=z'(t)}$

$y''(x)=\frac{z''(t)}{x^2}-\frac{z'(t)}{x^2}=\frac{z''(t)-z'(t)}{x^2} \Rightarrow \boxed{x^2y''(x)=z''(t)-z'(t)}$

dosadíme do pôvodnej DR: $\boxed{z''-z'+3z'+z=z''+2z'+z=0}$

$\Rightarrow$ CHR: $\delta^2+2\delta+1=0 \Rightarrow \delta_{1,2}=-1$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie DR $z''+2z'+z=0$:

$\boxed{z(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t},\ t\in R}$ $c_1,c_2\in R$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie pôvodnej DR:

$$\boxed{y(x)=c_1e^{-\ln x}+c_2\ln x\cdot e^{-\ln x}=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2\ln x}{x},\ x>0;\ c_1,c_2\in R}$$

INÉ RIEŠENIE

Riešenie hľadáme v tvare $\boxed{y(x)=e^{\delta t}=x^\delta,\ x>0}$ $\boxed{e^t=x}$ $\boxed{t=\ln x}$

$\Rightarrow y'(x)=\delta x^{\delta-1},\ y''(x)=\delta(\delta-1)x^{\delta-2}$ (viď). Dosadíme do DR:

$$x^2\delta(\delta-1)x^{\delta-2}+3x\delta x^{\delta-1}+x^\delta=x^\delta(\delta^2-\delta+3\delta+1)=x^\delta(\delta^2+2\delta+1)=0$$

$\Rightarrow$ CHR: $\delta^2+2\delta+1=0 \Rightarrow \delta_{1,2}=-1$

Ostatný postup je rovnaký ako pri predchádzajúcom riešení:

všeobecné riešenie

$$\boxed{y(x)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}=c_1e^{-\ln x}+c_2\ln x\cdot e^{-\ln x}=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2\ln x}{x},\ x>0}\quad c_1,c_2\in R$$

PRÍKLAD 70 $(2x+1)^2y''+3(2x+1)y'+y=0\,,\ x>-\frac{1}{2}$ viď príklad 69

$\varphi'(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}$

označme $t=2x+1\,,\ y(x)=\varphi(t)=\varphi(2x+1)\Rightarrow$

$y'(x)=\frac{dy(x)}{dx}\longrightarrow y'(x)=\varphi'(2x+1)=\varphi'(t).(2x+1)'=2\varphi'(t)$

$y''(x)=2\varphi''(t).2=4\varphi''(t)\,,\ t=2x+1>0$

Dosadíme $\boxed{t^2.4\varphi''+3t.2\varphi'+\varphi=4t^2\varphi''+6t\varphi'+\varphi=0}$ (Eulerova DR)

Substitúcia $t=e^u\,,\ u=\ln t\,,\ t>0\,,\ u\in R\,,\ \varphi(t)=\varphi(e^u)=z(u)=z(\ln t)$

dosadíme (*) t.j.: $\boxed{\varphi(t)=z(u)\,,\ t\varphi'(t)=z'(u)\,,\ t^2\varphi''(u)=z''(u)-z'(u)}$

$\Rightarrow 4(z''-z')+6z'+z=4z''+2z'+z=0 \Rightarrow$ CHR: $4\delta^2+2\delta+1=0\Rightarrow$

$\delta_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2.4}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{8}=\frac{-2\pm2\sqrt{-3}}{8}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie

$\left.\begin{array}{l} u=\ln t=\ln(2x+1) \\ e^{-\frac{1}{4}u}=(e^u)^{-\frac{1}{4}}=\left(e^{\ln(2x+1)}\right)^{-\frac{1}{4}}=(2x+1)^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2x+1}}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\boxed{z(u)=c_1e^{-\frac{1}{4}u}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}u+c_2e^{-\frac{1}{4}u}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}u\,,\ u\in R}$ $c_1,c_2\in R$

$\Rightarrow \boxed{y(x)=\frac{c_1}{\sqrt[4]{2x+1}}\cos\frac{\sqrt{3}\ln(2x+1)}{4}+\frac{c_2}{\sqrt[4]{2x+1}}\sin\frac{\sqrt{3}\ln(2x+1)}{4}\,,\ x>-\frac{1}{2}}$ $c_1,c_2\in R$

INÉ RIEŠENIE

Riešenie hľadáme v tvare: $\boxed{y(x)=e^{\delta u}=(2x+1)^{\delta}\,,\ x>-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow y'(x)=2\delta(2x+1)^{\delta-1}\,,\ y''(x)=4\delta(\delta-1)(2x+1)^{\delta-2}\Rightarrow$ dosadíme (viď (**))

$4\delta(\delta-1)(2x+1)^{\delta}+3.2\delta(2x+1)^{\delta}+(2x+1)^{\delta}=(4\delta^2-4\delta+6\delta+1)(2x+1)^{\delta}=0$

$\Rightarrow$ rovnaká CHR: $4\delta^2+2\delta+1=0\Rightarrow \delta_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{4}$

Ďalší postup je rovnaký $\Rightarrow$ všeobecné riešenie:

$$\boxed{y(x)=c_1e^{-\frac{u}{4}}\cos\frac{\sqrt{3}u}{4}+c_2e^{-\frac{u}{4}}\sin\frac{\sqrt{3}u}{4}=}$$

$$\boxed{=\frac{c_1}{\sqrt[4]{2x+1}}\cos\frac{\sqrt{3}\ln(2x+1)}{4}+\frac{c_2}{\sqrt[4]{2x+1}}\sin\frac{\sqrt{3}\ln(2x+1)}{4}\,,\ x>-\frac{1}{2}}$$ $c_1,c_2\in R$

PŘÍKLAD 71 $\boxed{x^2y''' - 2y' = 0,\ x>0} \Rightarrow x^3y''' - 2xy' = 0$

Řešení hledáme v tvaru $\boxed{y(x) = x^\delta,\ x>0}$ $\boxed{e^t = x \mid t = \ln x}$

$\Rightarrow y'(x) = \delta x^{\delta-1} \Rightarrow y''(x) = \delta(\delta-1)x^{\delta-2} \Rightarrow y'''(x) = \delta(\delta-1)(\delta-2)x^{\delta-3}$

Dosadíme do DR: $x^3\delta(\delta-1)(\delta-2)x^{\delta-3} - 2x\delta x^{\delta-1} = x^\delta(\delta^3 - 3\delta^2 + 2\delta - 2\delta) = 0$

$\Rightarrow$ CHR: $\delta^3 - 3\delta^2 = \delta^2(\delta-3) = 0 \Rightarrow \delta_{1,2} = 0,\ \delta_3 = 3$

$\Rightarrow$ všeobecné řešení: $e^{\delta t} = x^\delta \Rightarrow$

$\boxed{y(x) = c_1 \cdot e^0 + c_2 t e^0 + c_3 e^{3t} = c_1 + c_2 \cdot \ln x + c_3 \cdot x^3,\ x>0}$, $c_1, c_2, c_3 \in R$

PŘÍKLAD 72 $\boxed{x^2y'' - xy' + y = x \cdot \ln x,\ x>0}$

Substituce: $t = \ln x;\ x = e^t;\ y(x) = y(e^t) = z(t) = z(\ln x) \Rightarrow$

$y'(x) = z'(t) \cdot t' = \frac{z'(t)}{x} \Rightarrow y''(x) = \frac{z''(t) \cdot t'}{x} - \frac{z'(t)}{x^2} = \frac{z''(t) - z'(t)}{x^2}$

Dosadíme do DR: $z'' - z' - z' + z = t \cdot e^t \Rightarrow \boxed{z'' - 2z' + z = te^t}$

Homogenní DR: CHR: $\delta^2 - 2\delta + 1 = (\delta-1)^2 = 0 \Rightarrow \delta_{1,2} = 1$

$\Rightarrow$ všeobecné řešení: $\boxed{z_h(t) = c_1e^t + c_2te^t,\ t \in R}$, $c_1, c_2 \in R$

$\Rightarrow \boxed{y_h(x) = c_1x + c_2x \cdot \ln x,\ x>0}$

Nehomogenní DR: partikulární řešení: $z_p(t) = t^2(at+b)e^t = (at^3 + bt^2)e^t$

$\Rightarrow z_p'(t) = (3at^2 + 2bt)e^t + (at^3 + bt^2)e^t$

$z_p''(t) = (6at + 2b)e^t + 2(3at^2 + 2bt)e^t + (at^3 + bt^2)e^t$

dosadíme do $\boxed{z'' - 2z' + z = te^t}$

$\Rightarrow e^t\left[(6at+2b) + 2(3at^2+2bt) + (at^3+bt^2) - 2(3at^2+2bt) - 2(at^3+bt^2) + (at^3+bt^2)\right] =$

$= \boxed{e^t(6at + 2b) = te^t} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2b = 0 \\ 6a = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = \frac{1}{6} \\ b = 0 \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{z_p(t) = \frac{t^3e^t}{6},\ t \in R}$

$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = \frac{\ln^3 x \cdot x}{6},\ x>0} \Rightarrow$ všeobecné řešení původní DR:

$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1x + c_2x\ln x + \frac{x\ln^3 x}{6},\ x>0}$ $c_1, c_2 \in R$

PRÍKLAD 73 $\boxed{(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x, \quad x-2>0}$

Označme $t=x-2$, $y(x)=\varphi(t)=\varphi(x-2) \Longrightarrow$

$$\boxed{y'(x)=\frac{dy(x)}{dx}} \rightarrow y'(x)=\varphi'(t)\cdot(x-2)'=\varphi'(t) \leftarrow \boxed{\varphi'(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}}$$

$$y''(x)=\varphi''(t)\cdot(x-2)'=\varphi''(t), \quad t>0$$

Dosadíme $t^2\varphi''-3t\varphi'+4\varphi=t+2$

Substitúcia $t=e^u$, $u=\ln t$, $t>0, u\in R$, $\varphi(t)=\varphi(e^u)=z(u)=z(\ln t)$

$$\Rightarrow \varphi'(t)=\frac{z'(u)}{t} \Rightarrow \varphi''(t)=\frac{z''(u)}{t^2}-\frac{z'(u)}{t^2}=\frac{z''(u)-z'(u)}{t^2}$$

$$\Rightarrow t^2\frac{z''-z'}{t^2}-3t\frac{z'}{t}+4z=z''-z'-3z'+4z=\boxed{z''-4z'+4z=e^u+2}$$

Homogénne DR $\boxed{z''-4z'+4z=0} \Rightarrow$ CHR: $\sigma^2-4\sigma+4=(\sigma-2)^2=0$

$\Rightarrow \sigma_{1,2}=2 \Rightarrow$ všeobecné riešenie $\boxed{z_h(u)=C_1e^{2u}+C_1ue^{2u}, u\in R}$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^u=t=x-2, \ u=\ln t=\ln(x-2) \\ e^{2u}=(e^u)^2=t^2=(x-2)^2 \end{array}} \Rightarrow \boxed{y_h(x)=c_1(x-2)^2+c_2(x-2)^2\ln(x-2)}$$

$x>2, c_1,c_2\in R$

1. Nehomogénne DR $\boxed{z''-4z'+4z=e^u} \Rightarrow z_1(u)=x^0\cdot b_0e^u=b_0e^u$

$\Rightarrow z_1'(u)=z_1''(u)=b_0\cdot e^u \Rightarrow$ dosadíme: $b_0e^u-4b_0e^u+4b_0e^u=b_0e^u=e^u \Rightarrow b_0=1$

$\Rightarrow z_1(u)=e^u \Rightarrow \boxed{y_1(x)=x-2, \ x>2}$

2. Nehomogénne DR $\boxed{z''-4z'+4z=2} \Rightarrow z_2(u)=x^0\cdot b_0e^0=b_0$

$\Rightarrow z_2'(u)=z_2''(u)=0 \Rightarrow$ dosadíme: $0-4\cdot0+4\cdot b_0=4b_0=2 \Rightarrow b_0=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z_2(u)=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y_2(x)=\frac{1}{2}, \ x>2}$

Ak to zhrnieme

Všeobecné riešenie pôvodnej DR: $\boxed{\begin{array}{l} y_1(x)+y_2(x)= \\ =x-2+\frac{1}{2}=x-\frac{3}{2} \end{array}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x)=y_h(x)+y_1(x)+y_2(x)= \\ =c_1(x-2)^2+c_2(x-2)^2\ln(x-2)+x-\frac{3}{2}, \ x>2 \end{array}} \quad c_1,c_2\in R$$

PRÍKLAD 73 viď príklad 37(2)

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= -y_2, & y_1(0) &= -1 \\ y_2' &= y_1, & y_2(0) &= 2 \end{aligned}}$$

Položme $\boxed{y = y_1}$ $\Rightarrow$

$$y'' = y_1'' = (-y_2)' = -y_2' = -y_1 = -y$$

$\Rightarrow$ dostaneme lineárnu DR 2. rádu $\boxed{y'' + y = 0}$

CHR: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = \pm i} \Rightarrow e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x \Rightarrow$

všeobecné riešenie DR $y'' + y = 0$: $\boxed{y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x, \ x \in R}$ $c_1, c_2 \in R$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie pôvodného systému:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(x) &= y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x \\ y_2(x) &= -y_1'(x) = c_1 \cdot \sin x - c_2 \cdot \cos x, \ x \in R \end{aligned}} \quad c_1, c_2 \in R$$

Počiatočné podmienky:

$$\left.\begin{aligned} y_1(0) &= c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot \sin 0 = c_1 = -1 \\ y_2(0) &= c_1 \cdot \sin 0 - c_2 \cdot \cos 0 = -c_2 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= -1 \\ c_2 &= -2 \end{aligned} \Rightarrow$$

Riešenie našej úlohy:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(x) &= -\cos x - 2\sin x \\ y_2(x) &= -\sin x + 2\cos x, \ x \in R \end{aligned}}$$

PRÍKLAD 75

$$y_1' = y_1 - 2y_2 - y_3$$
$$y_2' = -y_1 + y_2 + y_3 \quad \text{t.j.} \quad y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} y$$
$$y_3' = y_1 - y_3$$

charakteristický polynóm:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -\lambda^2 \\ -1 & 1-\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -\lambda^2 \\ 1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda + \lambda^2(1-\lambda) = 2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 =$$
$$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda+1) = 0$$

$\Rightarrow$ vlastné čísla sú $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.

$\boxed{\lambda_1 = 0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \Theta_3$ t.j.: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ vlastný vektor $b^1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, t.j. napr.: $\boxed{b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\boxed{\lambda_2 = -1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b^2 = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, t.j.: $\boxed{b^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

$\boxed{\lambda_3 = 2} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b^3 = t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, t.j. $\boxed{b^3 = \begin{pmatrix} +3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Všeobecné riešenie má potom tvar:

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot e^{0x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 e^{2x}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 3e^{2x} \\ -2e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + 3c_3 e^{2x} \\ c_2 e^{-x} - 2c_3 e^{2x} \\ c_1 - 2c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x \in R, \quad c_1, c_2, c_3 \in R$$

Resp.:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(x) &= c_1 + 3c_3 e^{2x} \\ y_2(x) &= c_2 e^{-x} - 2c_3 e^{2x} \\ y_3(x) &= c_1 - 2c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}, \quad x \in R, \quad c_1, c_2, c_3 \in R \end{aligned}}$$

PRÍKLAD 76

$$y_1' = -4y_1 - y_2 \,,\quad y_1(0) = 1$$
$$y_2' = y_1 - 2y_2 \,,\quad y_2(0) = 0$$

Charakteristický polynóm:

$$\begin{vmatrix} -4-\delta & -1 \\ 1 & -2-\delta \end{vmatrix} = (4+\delta)(2+\delta)+1 = \delta^2+6\delta+8+1 = (\delta+3)^2 = 0$$

$\boxed{\delta = -3}$ 2-násobné vlastné číslo $\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b^1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, t.j.: $\boxed{b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

↳ pre $t=1$

Ďalší zovšeobecnený vlastný vektor je riešením systému:

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} b^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

t.j. $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow b^2 = \begin{pmatrix} t \\ -1-t \end{pmatrix}, t \in R$

t.j. napr.: $\boxed{b^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$ $\Rightarrow$ bázické riešenia sú: $e^{-3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a

$$e^{-3x}\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = e^{-3x}\begin{pmatrix} x \\ -x-1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3x}\begin{pmatrix} x \\ -x-1 \end{pmatrix} = e^{-3x}\begin{pmatrix} c_1 + c_2 x \\ -c_1 - c_2 - c_2 x \end{pmatrix}}, \quad x \in R, \; c_1, c_2 \in R$$

PRÍKLAD 76 - POKRAČOVANIE

(106)

Ešte určíme c_1, c_2, aby boli splnené počiatočné podmienky:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(0) = e^0(c_1 + c_2 \cdot 0) = c_1 = 1 \\ y_2(0) = e^0(-c_1 - c_2 - c_2 \cdot 0) = -c_1 - c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 1, \; c_2 = -1$$

$\Rightarrow$ Riešenie danej úlohy:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(x) = (1-x)e^{-3x} \\ y_2(x) = x \cdot e^{-3x}, \quad x \in R \end{array}}$$

PRÍKLAD 77

$y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3,\ y_2' = 2y_1 - y_2 - 2y_3,\ y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3$

Charakteristický polynóm:

$$\begin{vmatrix} 2-\delta & -1 & -1 \\ 2 & -1-\delta & -2 \\ -1 & 1 & 2-\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\delta & (2-\delta)^2-1 \\ 0 & 1-\delta & 2-2\delta \\ -1 & 1 & 2-\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\delta & 3-4\delta+\delta^2 \\ 1-\delta & 2-2\delta \end{vmatrix} = -(1-\delta)\begin{vmatrix} 1 & 3-4\delta+\delta^2 \\ 1 & 2-2\delta \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\delta)(2-2\delta-3+4\delta-\delta^2) = (1-\delta)(\delta^2-2\delta+1) = (1-\delta)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\delta_{1,2,3} = 1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = \begin{pmatrix} u+v \\ u \\ v \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u, v \in R$$

t.j. máme 2 lineárne nezávislé vektory, napr.: $\boxed{b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ pre $u=1,\ v=0$, $\boxed{b^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ pre $u=0,\ v=1$.

Potrebujeme ešte jeden vlastný vektor b^3 – zovšeobecnený reťazec začneme všeobecne od vektora $b = \begin{pmatrix} u+v \\ u \\ v \end{pmatrix},\ u, v \in R \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & u+v \\ 2 & -2 & -2 & u \\ -1 & 1 & 1 & v \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & u+v \\ 0 & 0 & 0 & -u-2v \\ 0 & 0 & 0 & u+2v \end{array}\right)$$

→ Aby bola sústava riešiteľná, musí platiť: $\boxed{u + 2v = 0}$ t.j. $\boxed{u = -2v}$

To znamená, že zovšeobecnený reťazec môže začať iba od vektora:

$b = \begin{pmatrix} -v \\ -2v \\ v \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v \in R$. Zoberme napr.: $v = 1\ (u = -2)$, t.j. $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

Dostaneme sústavu: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow b^3 = \begin{pmatrix} t+k-1 \\ t \\ k \end{pmatrix},\ t, k \in R$, t.j. napr. $\boxed{b^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ pre $t=0,\ k=0$

Bázické funkcie: $\boxed{e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ e^x\left(x\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$

namiesto jednej z nich môžeme voliť $e^x\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Všeobecné riešenie je:

$$y(x) = e^x\left[c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 x\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= e^x\begin{pmatrix} c_1 + c_2 - c_3 - c_3 x \\ c_1 - 2c_3 x \\ c_2 + c_3 x \end{pmatrix},\ x \in R,\ c_1, c_2, c_3 \in R$$

t.j.:

$y_1(x) = (c_1 + c_2 - c_3 - c_3 x)e^x$

$y_2(x) = (c_1 - 2c_3 x)e^x$

$y_3(x) = (c_2 + c_3 x)e^x,\ x \in R,\ c_1, c_2, c_3 \in R$

PRÍKLAD 78

$y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3,\ y_2' = -y_1,\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3$

Charakteristický polynóm:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & (2-\lambda)(1+\lambda)-2 \\ 0 & 1-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ 1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & \lambda-\lambda^2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(1+\lambda-\lambda+\lambda^2) = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = \pm i,\ \lambda_3 = 1}$$

$\boxed{\lambda_1 = i} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-i & 1 & -2 \\ -1 & -i & 0 \\ 1 & 1 & -1-i \end{pmatrix} /\cdot(2+i) \sim \begin{pmatrix} 5 & 2+i & -4-2i \\ 0 & 1-i & -1-i \\ 1 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & i-3 & 1+3i \\ 0 & 1-i & -1-i \\ 1 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(i+3) \\ /\cdot(1+i) \\ \end{matrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -10 & i-3+3+9i \\ 0 & 2 & -1-i-i+1 \\ 1 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -10 & 10i \\ 0 & 2 & -2i \\ 1 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow b^1 = \begin{pmatrix} u \\ ui \\ u \end{pmatrix},\ u \in R$, t.j. napr.: $\boxed{b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}}$ pre $u = 1$.

$\Rightarrow$ Bázické funkcie:

$$e^{ix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos x + i\sin x)\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + i\sin x \\ -\sin x + i\cos x \\ \cos x + i\sin x \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\lambda_3 = 1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b^3 = \begin{pmatrix} u \\ -u \\ 0 \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u \in R,$

t.j. napr.: $\boxed{b^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ pre $u = 1$ $\Rightarrow$ Bázické funkcie $\boxed{e^x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Všeobecné riešenie:

$$\vec{y}(x) = c_1\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 e^x \\ -c_1\sin x + c_2\cos x - c_3 e^x \\ c_1\cos x + c_2\sin x \end{pmatrix},\ x \in R,\ c_1, c_2, c_3 \in R$$

t.j. $y_1(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 e^x$

$y_2(x) = -c_1\sin x + c_2\cos x - c_3 e^x$

$y_3(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$, $x \in R$, $c_1, c_2, c_3 \in R$

PRÍKLAD 79

$$y_1' = y_1 + y_2\,, \quad y_1(0) = -1$$
$$y_2' = -5y_1 - y_2\,, \quad y_2(0) = 2$$

Charakteristický polynóm:

$$\begin{vmatrix} 1-\delta & 1 \\ -5 & -1-\delta \end{vmatrix} = -(1-\delta)(1+\delta)+5 = \delta^2+4 = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\delta_{1,2} = \pm 2i}$$

$$\boxed{\delta_1 = 2i} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-2i & 1 \\ -5 & -1-2i \end{pmatrix} /\cdot(-1+2i) \sim \begin{pmatrix} 1-2i & 1 \\ 5-10i & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-2i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b^1 = \begin{pmatrix} u \\ (-1+2i)u \end{pmatrix}, u \in \mathbb{C}, \text{ t.j. napr. } \boxed{b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \end{pmatrix}} \Rightarrow \text{bázické riešenie}$$

$$e^{2ix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \end{pmatrix} = (\cos 2x + i\sin 2x)\begin{pmatrix} 1 \\ -1+2i \end{pmatrix} = (\cos 2x + i \sin 2x)\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2x \\ -\cos 2x - 2\sin 2x \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin 2x \\ -\sin 2x + 2\cos 2x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie: $\boxed{y(x) = c_1\begin{pmatrix} \cos 2x \\ -\cos 2x - 2\sin 2x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin 2x \\ 2\cos 2x - \sin 2x \end{pmatrix}}$

$x \in R,\ c_1, c_2 \in R$

Keďže pre štandartnú fundamentálnu maticu $V(x)$ platí $V(0)=E$, jej stĺpce tvoria riešenia, ktoré spĺňajú poradie počiatočné podmienky: $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c_1 = 1 \\ -c_1 + 2c_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 1.\text{ stĺpec: } \boxed{\begin{pmatrix} \cos 2x \\ -\cos 2x - 2\sin 2x \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin 2x \\ 2\cos 2x - \sin 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \\ -\frac{5}{2}\sin 2x \end{pmatrix}}$$

PRÍKLAD 79 – POKRAČOVANIE

$$\boxed{y(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} \Rightarrow c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}c_1=0\\-c_1+2c_2=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}c_1=0\\c_2=\frac{1}{2}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{2. stĺpec: } \boxed{0\begin{pmatrix}\cos 2x\\-\cos 2x-2\sin 2x\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sin 2x\\2\cos 2x-\sin 2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sin 2x\\\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ štandardná fundamentálna matica:

$$V(x)=\begin{pmatrix}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x & \frac{1}{2}\sin 2x\\ -\frac{5}{2}\sin 2x & \cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ riešenie počiatočnej úlohy:

$$\boxed{y(x)=V(x)\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\\2\cos 2x+\frac{3}{2}\sin 2x\end{pmatrix}},\ x\in R$$

t. j.: $y_1(x)=-\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x$

$y_2(x)=2\cos 2x+\frac{3}{2}\sin 2x,\ x\in R$

Keď sa vypočítali priamo konštanty c_1, c_2 zo všeobecného riešenia, dostali sme riešenie oveľa rýchlejšie. Ale v prípade, keď hľadáme riešenie pre $\boxed{\text{RÔZNE POČIATOČNÉ PODMIENKY}}$, je postup pomocou matice $V(x)$ výhodnejší. – Riešenie je potom iba výsledkom násobenia matice a vektora.

Overíme riešenie pomocou výpočtu c_1, c_2:

$$\boxed{y(0)=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}} \Rightarrow c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}c_1=-1\\-c_1+2c_2=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}c_1=-1\\c_2=\frac{1}{2}\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ riešenie počiatočnej úlohy:

$$\boxed{\begin{aligned}y(x)&=-\begin{pmatrix}\cos 2x\\-\cos 2x-2\sin 2x\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sin 2x\\2\cos 2x-\sin 2x\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}-\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\\2\cos 2x+\frac{3}{2}\sin 2x\end{pmatrix},\ x\in R\end{aligned}}$$

PŘÍKLAD 80

$y'_1 = 2y_1 - y_2 - y_3,\ y'_2 = 2y_1 - y_2 - 2y_3,\ y'_3 = -y_1 + y_2 + 2y_3$ | viď příklad 77

$\boxed{\sigma_{1,2,3} = 1}$

$P_1 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2 = A - \sigma_1 E = A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$P_3 = (A - \sigma_1 E) \cdot P_2 = (A - E) \cdot P_2 = P_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{q'_1 = q_1,\ q_1(0) = 1} \Rightarrow$ (příklad 61) $\left.\begin{array}{l} q_1(x) = ce^x,\ x \in R,\ c \in R \\ q_1(0) = c \cdot e^0 = c = 1 \end{array}\right\}$ $q_1(x) = e^x,\ x \in R$

$\boxed{q'_2 = q_2 + e^x,\ q_2(0) = 0}$ Homogénne: $q'_2 = q_2 \Rightarrow q_2(x) = c \cdot e^x,\ x \in R,\ c \in R$

Nehomogénne: LVK $\Rightarrow q_2(x) = c(x) \cdot e^x,\ x \in R$. Dosadíme:

$\Rightarrow c'(x) \cdot e^x + c(x) e^x = c(x) \cdot e^x + e^x$

$c'(x) e^x = e^x$

$c'(x) = 1$

$c(x) = x + k,\ k \in R$

↳ konštanta

$\Rightarrow q_2(x) = (x + k) e^x,\ x \in R$

$\underbrace{q_2(0) = (0 + k) \cdot e^0 = k = 0}$

$q_2(x) = x \cdot e^x,\ x \in R$

PRÍKLAD 80 – POKRAČOVANIE

$\boxed{q_3' = q_3 + xe^x, \; q_3(0)=0}$ Homogénne: $q_3' = q_3 \Rightarrow q_3(x) = ce^x, \; x\in R, c \in R$

Nehomogénne: LVK $\Rightarrow$ $q_3(x) = c(x)e^x, \; x \in R$. Dosadíme:

$\Rightarrow c'(x)e^x + c(x)e^x = c(x)e^x + xe^x$

$c'(x)e^x = xe^x$

$c'(x) = x$

$c(x) = \frac{x^2}{2} + k, \; k \in R$ $\Rightarrow q_3(x) = \left(\frac{x^2}{2}+k\right)e^x, \; x \in R$

$$\underbrace{q_3(0) = (0+k)e^0 = k = 0}$$

$q_3(x) = \frac{x^2}{2}e^x, \; x \in R$

$$V(x) = q_1(x).P_1 + q_2(x)P_2 + q_3(x)P_3 =$$

$$= e^x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + xe^x\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\-1&1&1\end{pmatrix} + \frac{x^2}{2}e^x\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = e^x\begin{pmatrix}1+x&-x&-x\\2x&1-2x&-2x\\-x&x&1+x\end{pmatrix}$$

INÉ RIEŠENIE

Riešený príklad 77

Všeobecné riešenie: $y(x) = e^x\begin{pmatrix}c_1+c_2-c_3-c_3x\\c_1-2c_3x\\c_2+c_3x\end{pmatrix}, \; x\in R, \; c_1,c_2,c_3 \in R$

$\boxed{y(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix}c_1+c_2-c_3\\c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}c_1=0\\c_2=0\\c_3=-1\end{matrix} \Rightarrow$ 1. stĺpec: $\boxed{e^x\begin{pmatrix}1+x\\2x\\-x\end{pmatrix}}$

$\boxed{y(0) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix}c_1+c_2-c_3\\c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}c_1=1\\c_2=0\\c_3=1\end{matrix} \Rightarrow$ 2. stĺpec: $\boxed{e^x\begin{pmatrix}-x\\1-2x\\x\end{pmatrix}}$

$\boxed{y(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix}c_1+c_2-c_3\\c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}c_1=0\\c_2=1\\c_3=1\end{matrix} \Rightarrow$ 3. stĺpec: $\boxed{e^x\begin{pmatrix}-x\\-2x\\1+x\end{pmatrix}}$

$$\Rightarrow V(x) = e^x\begin{pmatrix}1+x&-x&-x\\2x&1-2x&-2x\\-x&x&1+x\end{pmatrix}$$

V 2.12.2010

PRÍKLAD 81

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= y_2 + \cos x, & y_1(0) &= 1 \\ y_2' &= -y_1 + 2, & y_2(0) &= 2 \end{aligned}}$$

t.j. $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \cos x \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

charakteristický polynóm: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = \pm i}$

$\boxed{\lambda_1 = i} \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \overset{/(-i)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = \begin{pmatrix} \mu i \\ \mu \end{pmatrix}, \mu \in R$, t.j. napr. $\boxed{b = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow$

bázické riešenie $e^{ix}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos x + i \sin x)\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie homogénneho systému $\boxed{y_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}}$ $x \in R$, $c_1, c_2 \in R$

$\boxed{\text{LVK}}$ $y_p(x) = c_1(x) \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$

Dosadíme:

$$c_1'(x) \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2'(x) \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_1(x) \cancel{\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}} + c_2(x) \cancel{\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}} =$$

$$= c_1(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x \\ 2 \end{pmatrix} = c_1(x) \cancel{\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}} + c_2(x) \cancel{\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} \cos x \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow c_1'(x) \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2'(x) \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ 2 \end{pmatrix}$, t.j. $\boxed{\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ 2 \end{pmatrix}}$

$V(x) = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \Rightarrow V(x) \cdot c'(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow c'(x) = V^{-1}(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ 2 \end{pmatrix}$

Najdeme $V^{-1}(x)$: $\boxed{\text{PŘÍKLAD 81 – POKRAČOVÁNÍ}}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \sin x & -\cos x & 1 & 0 \\ \cos x & \sin x & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \sin^2 x & -\sin x\cos x & \sin x & 0 \\ \cos^2 x & \sin x\cos x & 0 & \cos x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \sin x & -\cos x & 1 & 0 \\ \cos x & \sin x & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \sin x\cos x & -\cos^2 x & \cos x & 0 \\ \sin x\cos x & \sin^2 x & 0 & \sin x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \sin x & -\cos x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\cos x & \sin x \end{array}\right)$$

$$\boxed{V^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow c'(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos x + \sin x\cos x \\ 2\sin x - \cos^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x \\ 2\sin x - \frac{1+\cos 2x}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} 2\cos t + \frac{1}{2}\sin 2t \\ 2\sin t - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2} \end{pmatrix} dt = \left[\begin{pmatrix} 2\sin t - \frac{1}{4}\cos 2t \\ -2\cos t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t \end{pmatrix}\right]_0^x = \begin{pmatrix} 2\sin x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4} \\ -2\cos x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sin x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4} \\ -2\cos x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + 2 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow y(x) = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + y_p(x) = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sin x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4} + c_1 \\ -2\cos x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + 2 + c_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + c_1 \\ -2 - 0 - 0 + 2 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{array} \Rightarrow \boxed{y(x) = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sin x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{9}{4} \\ -2\cos x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + 1 \end{pmatrix}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Resp. Cramerovo pravidlo

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \cos x & -\cos x \\ 2 & \sin x \end{vmatrix} = \sin x\cos x + 2\cos x$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & 2 \end{vmatrix} = 2\sin x - \cos^2 x$$

$$c'(x) = \begin{pmatrix} 2\cos x + \sin x \cdot \cos x \\ 2\sin x - \cos^2 x \end{pmatrix}$$

Ďalší postup je analogický!

PRÍKLAD 82

Riešime systém z príkladu 81:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= y_2 + \cos x, & y_1(0) &= 1 \\ y_2' &= -y_1 + 2, & y_2(0) &= 2 \end{aligned}}$$

charakteristický polynóm: $\boxed{\lambda^2 + 1 = 0} \implies \boxed{\lambda_{1,2} = \pm i}$

Partikulárne riešenie $\boxed{y_p = y_a + y_b}$ .. princíp superpozície

$$\boxed{y_a = e^{0x}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}}$$ partikulárne riešenie systému $$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{a_1} &= A \implies y_{a_1}' = 0 \\ y_{a_2} &= B \implies y_{a_2}' = 0 \end{aligned}}$$

Dosadíme: $\left.\boxed{\begin{aligned} 0 &= B \\ 0 &= -A + 2 \end{aligned}}\right\} \implies \begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 0 \end{aligned} \implies \boxed{y_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \implies y_b$ .. bude reálna časť partikulárneho riešenia

systému $\boxed{\begin{aligned} y_1' &= y_2 + e^{ix} \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}}$ $\left.\begin{aligned} &\lambda = i \text{ je vlastné číslo} \\ &\text{t.j. } k = 1 \end{aligned}\right\} \implies \boxed{y_b = e^{ix}\begin{pmatrix} A + Bx \\ C + Dx \end{pmatrix}}$

PRÍKLAD 82 – POKRAČOVANIE

$$\Rightarrow \begin{rcases} y_{c1} = (A+Bx)e^{ix} \Rightarrow y'_{c1} = Be^{ix} + i(A+Bx)e^{ix} \\ y_{c2} = (C+Dx)e^{ix} \Rightarrow y'_{c2} = De^{ix} + i(C+Dx)e^{ix} \end{rcases} \text{ Dosadíme:}$$

$$\begin{rcases} (B+iA+iBx)e^{ix} = (C+Dx+1)e^{ix} \\ (D+iC+iDx)e^{ix} = (-A-Bx)e^{ix} \end{rcases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{4 ROVNICE} \\ \text{4 NEZNÁME} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x^0: & B+iA=C+1 \\ x^1: & \boxed{iB=D} \\ x^0: & D+iC=-A \\ x^1: & iD=-B \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \begin{matrix} \boxed{D=iB} \\ B+iA=C+1 \\ iB+iC=-A \\ i^2B=-B \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \begin{matrix} D=iB \\ iA=C-B+1 \\ A=-iB-iC \\ -B=-B \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \begin{matrix} D=iB \\ \boxed{\begin{matrix} iA=C-B+1 \\ iA=B+C \end{matrix}} \\ 0=0 \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}$$

$$\begin{matrix} D=iB \\ \boxed{B+C=C-B+1} \\ iA=B+C \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \begin{matrix} D=iB \\ \boxed{2B=1} \\ iA=B+C \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \; B=\frac{1}{2};\ D=\frac{i}{2};\ A=0;\ C=-\frac{1}{2}$$

A resp. C môžeme voliť ľubovoľne

$$\Rightarrow y_c = e^{ix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{2}+\frac{ix}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\cos x + i\sin x)\begin{pmatrix} x \\ -1+ix \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boxed{x\cos x} + ix\sin x \\ \boxed{-\cos x} + ix\cos x - i\sin x \boxed{-x\sin x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_b = \mathrm{Re}\, y_c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x\cos x \\ -\cos x - x\sin x \end{pmatrix}} \Rightarrow \boxed{y_p = y_a + y_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x\cos x + 2 \\ -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}x\sin x \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ (Príklad 81) všeobecné riešenie:

$$\boxed{y(x) = c_1\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x\cos x + 2 \\ -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}x\sin x \end{pmatrix}} \quad \begin{matrix} c_1, c_2 \in R \\ x \in R \end{matrix}$$

$$y(0) = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{rcases} -c_2+2=1 \\ c_1-\frac{1}{2}=2 \end{rcases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} c_1=\frac{5}{2} \\ c_2=1 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sin x - \cos x + \frac{1}{2}x\cos x + 2 \\ 2\cos x + \sin x - \frac{1}{2}x\sin x \end{pmatrix}} \quad x \in R$$

INÝ SPÔSOB RIEŠENIA y_b

Ak využijeme $y_b = \mathrm{Re}\left\{\underbrace{(\cos x + i\sin x)}_{e^{ix}}\begin{pmatrix} A+Bx \\ C+Dx \end{pmatrix}\right\}$,

potom môžeme priamo odhadnúť riešenie y_b v reálnom tvare:

$$\boxed{y_b = \begin{pmatrix} A+Bx \\ \alpha+\beta x \end{pmatrix}\cos x + \begin{pmatrix} C+Dx \\ \gamma+\delta x \end{pmatrix}\sin x}$$

$A, B, C, D, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$

PRÍKLAD 82 – POKRAČOVANIE

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_{b1} = (A+Bx)\cos x + (C+Dx)\sin x \\ y_{b2} = (\alpha+\beta x)\cos x + (\gamma+\delta x)\sin x \end{array}\right\} \text{Dosadíme:}$$

$$B\cos x - (A+Bx)\sin x + D\sin x + (C+Dx)\cos x = (\alpha+\beta x)\cos x + (\gamma+\delta x)\sin x + \cos x$$

$$\beta\cos x - (\alpha+\beta x)\sin x + \delta\sin x + (\gamma+\delta x)\cos x = -(A+Bx)\cos x - (C+Dx)\sin x$$

(8 ROVNÍC – 8 NEZNÁMYCH)

$$\begin{array}{ll} x^0\cdot\cos x: & B+C=\alpha+1 \\ x^0\cdot\sin x: & -A+D=\gamma \\ x\cdot\cos x: & \boxed{D=\beta} \\ x\cdot\sin x: & \boxed{-B=\delta} \\ x^0\cdot\cos x: & \beta+\gamma=-A \\ x^0\cdot\sin x: & -\alpha+\delta=-C \\ x\cdot\cos x: & \boxed{\delta=-B} \\ x\cdot\sin x: & \boxed{-\beta=-D} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \boxed{\beta=D} \\ \boxed{\delta=-B} \\ B+C=\alpha+1 \\ D-A=\gamma \\ D+\gamma=-A \\ -\alpha-B=-C \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \boxed{\beta=D} \\ \boxed{\delta=-B} \\ \boxed{B+C=\alpha+1} \\ \boxed{B-C=-\alpha} \\ \boxed{D-A=\gamma} \\ \boxed{D+A=-\gamma} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \beta=D \\ \delta=-B \\ \boxed{2B=1} \\ B-C=-\alpha \\ \boxed{2D=0} \\ D+A=-\gamma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \beta=0 \\ \delta=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-C=-\alpha \\ D=0 \\ A=-\gamma \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C=\frac{1}{2} \\ \alpha=0 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} A=0 \\ \gamma=0 \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ resp. } \alpha \\ A \text{ resp. } \gamma \end{array}\right\} \text{môžeme voliť ľubovoľne}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_b = \begin{pmatrix} 0+\frac{1}{2}x \\ 0+0x \end{pmatrix}\cos x + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+0x \\ 0-\frac{1}{2}x \end{pmatrix}\sin x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\sin x \\ -\frac{1}{2}x\sin x \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p = y_a + y_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\sin x + 2 \\ -\frac{1}{2}x\sin x \end{pmatrix}} \Rightarrow \text{všeobecné riešenie:}$$

$$\boxed{y(x) = c_1\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\sin x + 2 \\ -\frac{1}{2}x\sin x \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{l} c_1, c_2 \in R \\ x \in R \end{array}$$

$$y(0) = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -c_2+2=1 \\ c_1=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1=2 \\ c_2=1 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x)} = 2\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\sin x + 2 \\ -\frac{1}{2}x\sin x \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sin x - \cos x + \frac{1}{2}x\cos x + 2 \\ 2\cos x + \sin x - \frac{1}{2}x\sin x \end{pmatrix}}$$

T.j. hľadané riešenie.

PŘÍKLAD 83

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 - 2y_3 - 1 \\ y_2' &= -y_1 + x \\ y_3' &= y_1 + y_2 - y_3 \end{aligned} \qquad f(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Všeobecné riešenie homogénneho systému (príklad 78):

$$\boxed{y_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \\ 0 \end{pmatrix}} \quad c_1, c_2, c_3 \in R, \; x \in R$$

Partikulárne riešenie nehomogénneho systému (LVK):

$$\boxed{y_p(x) = C_1(x) \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + C_2(x) \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + C_3(x) \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \\ 0 \end{pmatrix}}$$

pričom $C_i(x) = \int_0^x \frac{W_i(t)}{W(t)}\, dt, \; i = 1, 2, 3.$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & e^x \\ -\sin x & \cos x & -e^x \\ \cos x & \sin x & 0 \end{vmatrix} = 0 - e^x \sin^2 x - e^x \sin x \cos x - e^x \cos^2 x + e^x \sin x \cos x - 0 =$$
$$= -e^x(\sin^2 x + \cos^2 x) = -e^x$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} -1 & \sin x & e^x \\ x & \cos x & -e^x \\ 0 & \sin x & 0 \end{vmatrix} = -\sin x \begin{vmatrix} -1 & e^x \\ x & -e^x \end{vmatrix} = -\sin x (e^x - x e^x) = (x-1)e^x \sin x$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \int_0^x \frac{(t-1)e^t \sin t}{-e^t}\, dt = \int_0^x (1-t)\sin t\, dt = \boxed{1 - \sin x + (x-1)\cos x}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & -1 & e^x \\ -\sin x & x & -e^x \\ \cos x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cos x \begin{vmatrix} -1 & e^x \\ x & -e^x \end{vmatrix} = \cos x (e^x - x e^x) = (1-x)e^x \cos x$$

$$\Rightarrow C_2(x) = \int_0^x \frac{(1-t)e^t \cos t}{-e^t}\, dt = \int_0^x (t-1)\cos t\, dt = \boxed{-1 + \cos x + (x-1)\sin x}$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & -1 \\ -\sin x & \cos x & x \\ \cos x & \sin x & 0 \end{vmatrix} = 0 + \sin^2 x + x \sin x \cos x + \cos^2 x - x \sin x \cos x - 0 =$$
$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow C_3(x) = \int_0^x \frac{1}{-e^t}\, dt = -\int_0^x e^{-t}\, dt = \boxed{1 - e^{-x}}$$

Všeobecné riešenie:

$$\boxed{y(x) = [c_1 + C_1(x)] \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + [c_2 + C_2(x)] \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + [c_3 + C_3(x)] \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \\ 0 \end{pmatrix}} \quad c_1, c_2, c_3 \in R, \; x \in R$$

PŘÍKLAD 84 $y'' + y = \operatorname{tg} x, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(viď příklad 74) CHR: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = \pm i}$ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$\Rightarrow$ všeobecné riešenie homogénnej DR $y'' + y = 0$:

$\boxed{y_h(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x}$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $c_1, c_2 \in R$

LVK: $\boxed{y_p(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x}$, kde $\boxed{c_i(x) = \int_0^x \frac{W_i(t)}{W(t)}\, dt}$, $i = 1, 2$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \cdot \operatorname{tg} x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$c_1(x) = \int_0^x \left(\cos t - \frac{1}{\cos t}\right) dt = \left[\sin t + \ln\left|\frac{\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}}\right|\right] =$$

$$= \sin x + \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}\right| - \sin 0 - \ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right| = \sin x + \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}\right|$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \begin{bmatrix} u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}, \; dt = \frac{2\,du}{1+u^2} \\ \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{2\,du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = -2\int \frac{du}{u^2 - 1} = -2 \cdot \frac{1}{2} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| =$$

$$= -\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2} - 1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2} + 1}\right| = -\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2} - 1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2} + 1} \cdot \frac{\cos\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\right| = -\ln\left|\frac{\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}}\right|$$

$$c_2(x) = \int_0^x \sin t\, dt = \left[-\cos t\right]_0^x = -\cos x + \cos 0 = 1 - \cos x$$

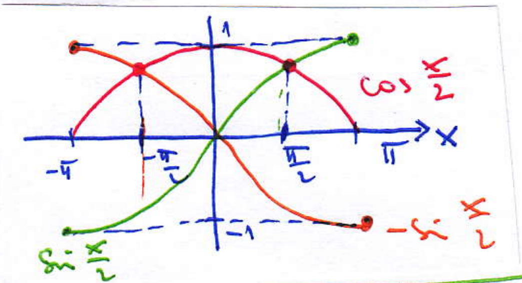
$\Rightarrow$ všeobecné riešenie nehomogénnej DR $y'' + y = \operatorname{tg} x$:

$$y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x + \left(\sin x + \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}\right|\right)\cos x + (1 - \cos x)\sin x =$$

$$= c_1 \cdot \cos x + \underbrace{(1 + c_2)}_{= c_3 \in R \text{ (ľubovoľné)}} \sin x + \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}\right| \cdot \cos x$$

PRÍKLAD 84 - POKRAČOVANIE

$$\forall x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right): \left.\begin{aligned} \cos\tfrac{x}{2} &> \sin\tfrac{x}{2} \\ \cos\tfrac{x}{2} &> -\sin\tfrac{x}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos\tfrac{x}{2} - \sin\tfrac{x}{2} &> 0 \\ \cos\tfrac{x}{2} + \sin\tfrac{x}{2} &> 0 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_3 \sin x + \cos x \cdot \ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}\right|} \quad \begin{aligned} &c_1, c_3 \in R \\ &x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\left[\ln\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}\right]' = \frac{1}{\dfrac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}} \cdot \left[\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}\right]' =$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) - \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - \cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos x} = -\frac{1}{\cos x}$$

$$\boxed{y'(x) = -c_1 \sin x + c_3 \cos x - \sin x \cdot \ln\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}} - 1}$$

Počiatočné podmienky:

$$y(0) = c_1 \cdot 1 + c_3 \cdot 0 + 1 \cdot \ln\frac{1-0}{1+0} = \boxed{c_1 = 1}$$

$$\boxed{c_1 = 1 \,.\; c_3 = 1} \Leftarrow \quad y'(0) = -c_1 \cdot 0 + c_3 \cdot 1 - 0 \cdot \ln\frac{1-0}{1+0} - 1 = \boxed{c_3 - 1 = 0}$$

Riešenie má tvar:

$$\boxed{y(x) = \cos x + \sin x + \cos x \cdot \ln\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}} \quad x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$