

Teória pravdepodobnosti

6. Systém náhodných premenných

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód a operačnej analýzy
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

2. marca 2015

- 1 Pojem systému náhodných premenných
- 2 Združená distribučná funkcia a hustota
- 3 Marginálne rozdelenia

Systém náhodných premenných

Motivácia

Doteraz sme výsledok pokusu charakterizovali jednou náhodnou premennou.

Takýto prístup je často nepostačujúci a výsledok pokusu je potrebné charakterizovať dvomi alebo viacerými náhodnými premennými.

Napríklad hádzanie dvomi kockami. Môžeme sledovať náhodnú premennú predstavujúcu súčet padnutých bodov, ale tiež dvojicu náhodných premenných, z ktorých každá popisuje počet padnutých bodov na jednej z kociek.

Systém náhodných premenných

Definícia

Definícia

Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a nech $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú náhodné premenné definované na tomto pravdepodobnostnom priestore. Potom n -tícu $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nazývame *systémom n náhodných premenných* (tiež *n -rozmerným náhodným vektorom* alebo *n -rozmernou náhodnou premennou*).

Systém náhodných premenných

Distribučná funkcia

Definícia

Distribučnou funkciou F systému n náhodných premenných $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ nazývame reálnu funkciu $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovanú rovnosťou

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \quad (1)$$

Systém náhodných premenných

Distribučná funkcia

Definícia

Distribučnou funkciou F systému n náhodných premenných $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ nazývame reálnu funkciu $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovanú rovnosťou

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \quad (1)$$

Zápis (1) znamená, že hodnota distribučnej funkcie v bode $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sa rovná pravdepodobnosti že náhodná premenná X_1 nadobudne hodnotu menšiu ako x_1 a súčasne náhodná premenná X_2 nadobudne hodnotu menšiu ako x_2 atď. až náhodná premenná X_n nadobudne hodnotu menšiu ako x_n .

Systém náhodných premenných

Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

Systém náhodných premenných

Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

- 1 je nezáporná,

Systém náhodných premenných

Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

- 1 je nezáporná,
- 2 je neklesajúca v každom svojom argumente,

Systém náhodných premenných

Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

- 1 je nezáporná,
- 2 je neklesajúca v každom svojom argumente,
- 3 je zľava spojitá vzhľadom na každý svoj argument,

Systém náhodných premenných

Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

- ① je nezáporná,
- ② je neklesajúca v každom svojom argumente,
- ③ je zľava spojitá vzhľadom na každý svoj argument,
- ④

$$F(\infty, \infty, \dots, \infty) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow \infty}} F(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

Systém náhodných premenných

Distribučná funkcia

Poznámka

Združená distribučná funkcia F systému náhodných premenných X má analogické vlastnosti ako distribučná funkcia jednej náhodnej premennej. Menovite:

- ① je nezáporná,
- ② je neklesajúca v každom svojom argumente,
- ③ je zľava spojitá vzhľadom na každý svoj argument,
- ④

$$F(-\infty, -\infty, \dots, -\infty) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -\infty \\ x_2 \rightarrow -\infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow -\infty}} F(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Systém náhodných premenných

Združená pravdepodobnostná funkcia

Definícia (Združená pravdepodobnostná funkcia)

Nech $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je systém n diskrétnych náhodných premenných. **Združenú pravdepodobnostnú funkciu** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ systému $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ definujeme vzťahom

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n), \quad (2)$$

pre všetky prípustné hodnoty x_i každej z náhodných premenných X_i a pre všetky $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Združená pravdepodobnostná funkcia

Príklad

Zadanie

Uvažujme trojnásobný hod mincou. Nech náhodná premenná X označuje počet hláv, padnutých v prvých dvoch pokusoch a náhodná premenná Y počet hláv padnutých v druhých dvoch pokusoch. Určíme združenú pravdepodobnostnú funkciu dvojice náhodných premenných (X, Y) .

Združená pravdepodobnostná funkcia

Príklad

Ak by sme skúmali každú z náhodných premenných X a Y osobitne, zistili by sme, že obe majú binomické rozdelenie $\text{Bin}(2, 0.5)$.

Individuálne rozdelenia nám však dávajú iba čiastkovú informáciu o správaní týchto náhodných premenných.

Ak je totiž napr. $X = 2$, tak nutne musí byť hodnota Y aspoň 1.

Združené správanie oboch náhodných premenných teda nie je možné plne charakterizovať individuálnymi rozdeleniami.

Združená pravdepodobnostná funkcia

Príklad

Výberový priestor Ω tohto náhodného pokusu má tvar

$$\Omega = \{(h, h, h), (h, h, z), (h, z, h), (z, h, h), (h, z, z), (z, h, z), (z, z, h), (z, z, z)\}$$

Všetky udalosti z výberového priestoru majú rovnakú pravdepodobnosť $\frac{1}{8}$.

Ak nastane udalosť (h, h, h) , tak platí $X = 2$ a $Y = 2$, ak však nastane udalosť (h, h, z) , tak je $X = 2$ ale $Y = 1$.

Všetky kombinácie hodnôt náhodných premenných X a Y sú

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$$

Združená pravdepodobnostná funkcia

Príklad

Združenú pravdepodobnostnú funkciu môžeme prehľadne zapísať vo forme tabuľky

		y_1	y_2	y_3
		0	1	2
x_1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
x_2	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
x_3	2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Systém náhodných premenných

Združená hustota

Definícia (Združená funkcia hustoty)

Nech $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je systém n spojitých náhodných premenných. Ak existuje nezáporná integrovateľná funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definovaná na $\mathbb{R}^n$ taká, že pre každé X spĺňajúce $a_i < X_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$ platí

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a_1 < X_1 < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n) &= \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \end{aligned} \quad (3)$$

tak funkciu f nazývame *združená hustota pravdepodobnosti* systému $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Systém náhodných premenných

Združená hustota

Poznámka

K tomu, aby funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bola združenou hustotou pravdepodobnosti systému náhodných premenných $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ je nutné a stačí, aby boli splnené podmienky:

Systém náhodných premenných

Združená hustota

Poznámka

K tomu, aby funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bola združenou hustotou pravdepodobnosti systému náhodných premenných $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ je nutné a stačí, aby boli splnené podmienky:

- 1 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ pre každé $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

Systém náhodných premenných

Združená hustota

Poznámka

K tomu, aby funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bola združenou hustotou pravdepodobnosti systému náhodných premenných $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ je nutné a stačí, aby boli splnené podmienky:

- 1 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ pre každé $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
- 2 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$.

Systém náhodných premenných

Združená hustota

Poznámka

Nech $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je systém n spojitých náhodných premenných a nech funkcia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je jeho združenou hustotou pravdepodobnosti. Pre združenú distribučnú funkciu F systému X potom platí

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \quad (4)$$

resp.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (5)$$

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach

Poznámka

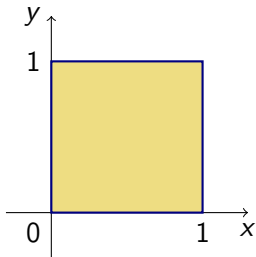
Nech $D \subset \mathbb{R}^n$ je n -rozmerná oblasť, ktorej n -rozmerný objem (miera množiny D) je rovný V . O náhodnom vektore $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ potom povieme, že má **rovnomerné rozdelenie** na D , ak jeho rozdelenie je popísané združenou funkciou hustoty

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{V} & (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (6)$$

Ukážeme si niektoré špecifické prípady takéhoto rozdelenia.

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



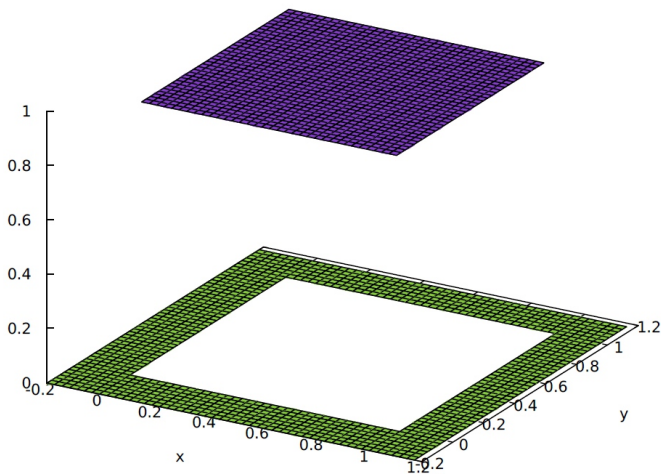
Rovnomerné rozdelenie na jednotkovom štvorci

Nech $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
Potom náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na D , ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (6)$$

Príklad

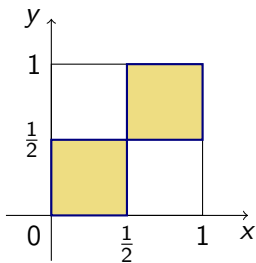
Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Funkcia hustoty pre rovnomerné rozdelenie na jednotkovom štvorci.

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Rovnomerné rozdelenie na časti jednotkového štvorca

Nech D je zjednotením ľavej dolnej a pravej hornej štvrtiny jednotkového štvorca, teda

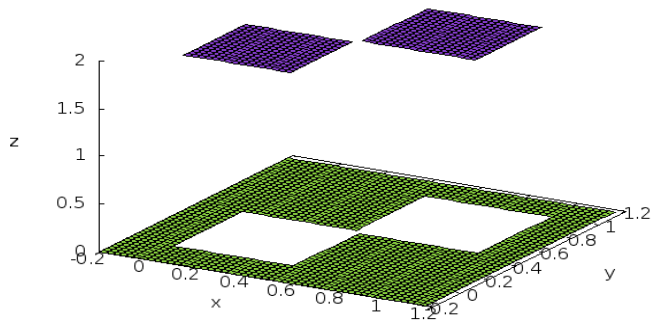
$$D = \{(x, y); 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\} \cup \{(x, y); \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}.$$

Zrejme plošný obsah D je $\frac{1}{2}$, preto náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na D , ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & (x, y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (6)$$

Príklad

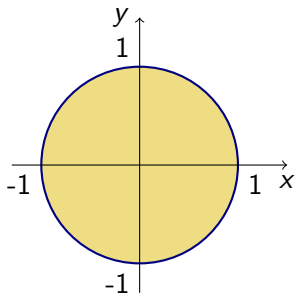
Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Funkcia hustoty rovnomerného rozdelenia.

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



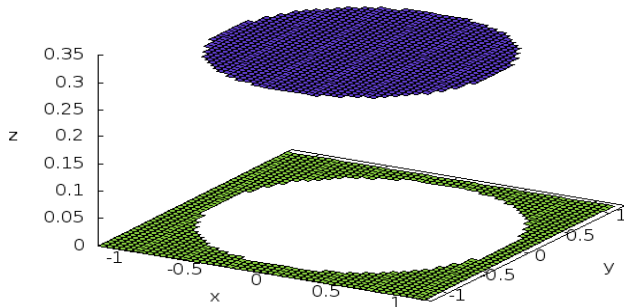
Rovnomerné rozdelenie na jednotkovom kruhu

Nech D je jednotkový kruh, teda $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$. Zrejme plošný obsah D je π , preto náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na D , ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (6)$$

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Funkcia hustoty rovnomerného rozdelenia na jednotkovom kruhu.

Systém náhodných premenných

Marginálne distribučné funkcie

Nech $F(x_1, \dots, x_n)$ je združená distribučná funkcia systému náhodných premenných. Distribučnú funkciu F_i náhodnej premennej X_i z tohto systému potom určíme ako:

$$F_i(x_i) = \mathbb{P}(X_i < x_i) = \mathbb{P}(X_1 < \infty, \dots, X_i < x_i, \dots, X_n < \infty)$$

Definícia (Marginálna distribučná funkcia)

Distribučnú funkciu

$$F_i(x_i) = F(\infty, \dots, x_i, \dots, \infty) \quad (6)$$

nazývame *marginálna distribučná funkcia* náhodnej premennej X_i .

Systém náhodných premenných

Marginálne funkcie hustoty

Nech $F(x_1, \dots, x_n)$ je združená distribučná funkcia systému náhodných premenných. Hustotu f_i náhodnej premennej X_i z tohto systému potom určíme ako:

$$f_i(x_i) = F'_i(x_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x_i).$$

Definícia (Marginálna hustota)

Funkciu

$$f_i(x_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x_i) \tag{7}$$

nazývame *marginálna hustota* náhodnej premennej X_i .

Systém náhodných premenných

Marginálne funkcie hustoty

Ak je známa združená funkcia hustoty $f(x_1, \dots, x_n)$, tak marginálnu hustotu f_i náhodnej premennej X_i môžeme určiť ako:

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

Systém náhodných premenných

Marginálne funkcie hustoty

Ak je známa združená funkcia hustoty $f(x_1, \dots, x_n)$, tak marginálnu hustotu f_i náhodnej premennej X_i môžeme určiť ako:

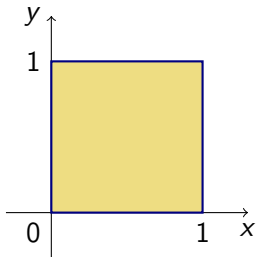
$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

Pojem marginálnej hustoty je možné rozšíriť z jednej na viac náhodných premenných zo systému $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Ak $1 \leq k < n$, tak *marginálnou združenou hustotou* systému $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ rozumieme funkciu

$$f_{1,2,\dots,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n.$$

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Rovnomerné rozdelenie na jednotkovom štvorci

Nech $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
Potom náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na D , ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (8)$$

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach

Pre marginálne hustoty potom platí

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 dy = 1,$$

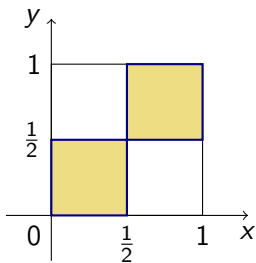
a podobne

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 dx = 1.$$

Marginálne náhodné premenné majú teda rovnomerné rozdelenie na $\langle 0; 1 \rangle$.

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Rovnomerné rozdelenie na časti jednotkového štvorca

Nech D je zjednotením ľavej dolnej a pravej hornej štvrtiny jednotkového štvorca, teda

$$D = \{(x, y); 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2}, 0 \leq y \leq \tfrac{1}{2}\} \cup \{(x, y); \tfrac{1}{2} \leq x \leq 1, \tfrac{1}{2} \leq y \leq 1\}.$$

Zrejme plošný obsah D je $\frac{1}{2}$, preto náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na D , ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & (x, y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (8)$$

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach

Pre marginálne hustoty potom platí

$$f_1(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} 2 dy = 1, & x \in \langle 0; \frac{1}{2} \rangle \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 2 dy = 1, & x \in \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

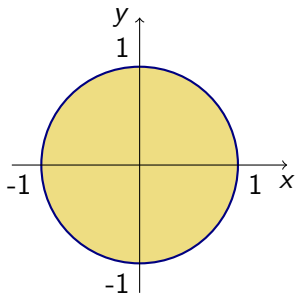
a podobne

$$f_2(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2 dx = 1, & y \in \langle 0; \frac{1}{2} \rangle \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 2 dx = 1, & y \in \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Marginálne náhodné premenné majú teda opäť rovnomerné rozdelenie na $\langle 0; 1 \rangle$, a to aj napriek tomu, že pôvodná združená funkcia hustoty je veľmi odlišná a dokonca nespojitá na D .

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach



Rovnomerné rozdelenie na jednotkovom kruhu

Nech D je jednotkový kruh, teda $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$. Zrejme plošný obsah D je π , preto náhodný vektor (X, Y) má rovnomerné rozdelenie na D , ak jeho združená funkcia hustoty je:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (8)$$

Príklad

Rovnomerné rozdelenie v rozličných oblastiach

Pre určenie marginálnej hustoty si musíme uvedomiť, že pre $x \in (-1; 1)$ je $f(x, y) \neq 0$ práve vtedy, ak platí $-\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}$. Pre takéto x potom dostávame

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}.$$

Preto

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} & x \in (-1; 1) \\ 0 & \text{inak,} \end{cases}$$

a zo symetrie

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} & y \in (-1; 1) \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Príklad

Nerovnomerná združená hustota s rovnomernými marginálnymi hustotami

Zadanie

Nech náhodný vektor (X, Y) má združenú funkciu hustoty

$$f(x, y) = c - 2(c - 1)(x + y - 2xy), \quad x, y \in \langle 0; 1 \rangle, \quad 0 < c < 2.$$

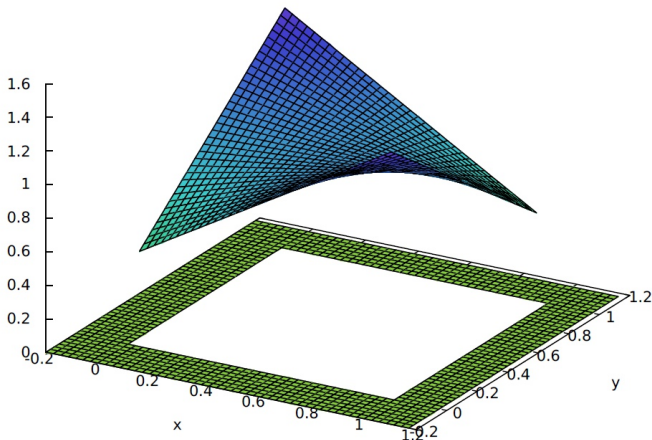
O tejto funkcii sa môžeme presvedčiť, že je na jednotkovom štvorci nezáporná (postupným posúdením všetkých alternatív $c < 1$, $c = 1$ a $c > 1$). Tiež paltí

$$c - 2(c - 1) \int_0^1 \int_0^1 (x + y - 2xy) \, dx \, dy = 1.$$

Určme marginálne hustoty.

Príklad

Nerovnomerná združená hustota s rovnomernými marginálnymi hustotami



Funkcia hustoty pre $c = 0.5$.

Príklad

Nerovnomerná združená hustota s rovnomernými marginálnymi hustotami

Pre marginálnu hustotu X platí

$$f_1(x) = c - 2(c-1) \int_0^1 (x+y-2xy) dy = c - 2(c-1) \left[x + \frac{1}{2} - x \right] = 1.$$

Pre marginálnu hustotu Y platí

$$f_2(y) = c - 2(c-1) \int_0^1 (x+y-2xy) dx = c - 2(c-1) \left[y + \frac{1}{2} - y \right] = 1.$$

Systém náhodných premenných

Združená hustota a pravdepodobnosť

Podobne ako v jednorozmernom prípade platí

Veta

Nech D je regulárna oblasť v n -rozmernom priestore $\mathbb{R}^n$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ náhodný vektor so združenou funkciou hustoty $f(x_1, \dots, x_n)$. Potom pre pravdepodobnosť, že náhodný vektor X nadobudne hodnotu z oblasti D platí

$$\mathbb{P}(X \in D) = \int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Systém náhodných premenných

Príklad

Zadanie

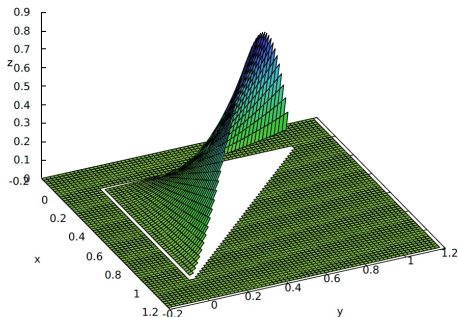
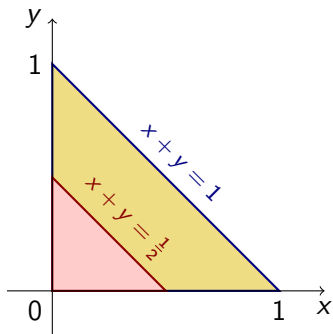
Nech (X, Y) je náhodný vektor so združenou funkciou hustoty

$$f(x, y) = 6xy^2, \quad x, y \geq 0, \quad x + y \leq 1.$$

Určme pravdepodobnosť $\mathbb{P}(X + Y < \frac{1}{2})$.

Systém náhodných premenných

Príklad



Funkcia hustoty.

Systém náhodných premenných

Príklad

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X + Y < \frac{1}{2}\right) &= \int_{\substack{x,y \geq 0, \\ x+y < \frac{1}{2}}} 6xy^2 \, dx \, dy \\ &= 6 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}-y} xy^2 \, dx \, dy \\ &= 6 \int_0^{\frac{1}{2}} y^2 \frac{\left(\frac{1}{2} - y\right)^2}{2} \, dy \\ &= 3 \int_0^{\frac{1}{2}} y^2 \left(\frac{1}{2} - y\right)^2 \, dy \\ &= 3 \cdot \frac{1}{960} = \frac{1}{320}.\end{aligned}$$