

# Teória pravdepodobnosti

## 10. Zákony veľkých čísel

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód  
Fakulta Riadenia a Informatiky  
Žilinská Univerzita v Žiline

6. apríla 2014

- 1 Zákony velkých čísel
- 2 Centrálna limitná veta

# Zákony veľkých čísel

## Motivácia

Opakujeme určitý pokus a z pozorovaných hodnôt sa pokúšame rekonštruovať rozdelenie prípadne jeho charakteristiky.

Očakávame, že pri dodržaní podmienok sa s rastúcim počtom opakovaní budú empirické rozdelenie početností a empirické charakteristiky približovať k teoretickému rozdeleniu.

Túto myšlienku presnejšie upravujú *zákony veľkých čísel*.

Ako prvú však treba presne špecifikovať podstatu približovania.

# Zákony veľkých čísel

## Konvergenca podľa pravdepodobnosti

### Definícia (Konvergenca podľa pravdepodobnosti)

Hovoríme, že postupnosť náhodných premenných  $X_1, \dots, X_n$  *konverguje podľa pravdepodobnosti* ku konštante  $c$ , čo zapisujeme  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ , ak pre každé  $\varepsilon > 0$  platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - c| < \varepsilon) = 1, \quad (1)$$

resp.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0. \quad (2)$$

# Zákony veľkých čísel

## Slabý zákon veľkých čísel

### Veta (Čebyšev)

Nech náhodné premenné  $X_1, \dots, X_n$  sú po dvoch nezávislé, majú stredné hodnoty  $\mathbb{E}(X_i) < \infty$  a rozptyly  $\mathbb{D}(X_i) \leq c$ ,  $i = 1, \dots, n$ , kde  $c$  je konečné kladné číslo. Potom pre ľubovoľné reálne  $\varepsilon > 0$  platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \right| < \varepsilon \right) = 1. \quad (3)$$

# Zákony veľkých čísel

## Slabý zákon veľkých čísel

Vzhľadom na platnosť Čebyševovej nerovnosti je možné túto pravdepodobnosť odhadnúť ako:

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{D}(X_i)}{n^2 \varepsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{n \varepsilon^2}. \quad (4)$$

Limitným prechodom pre  $n \rightarrow \infty$  potom dostaneme tvrdenie vety.

# Zákony veľkých čísel

## Slabý zákon veľkých čísel

Alternatívne možno slabý zákon veľkých čísel formulovať takto:

### Veta (Slabý zákon veľkých čísel)

Nech náhodné premenné  $X_1, \dots, X_n$  sú po dvoch nezávislé, identicky rozdelené náhodné premenné,  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ ,  $\mathbb{D}(X_i) < \infty$ . Potom pre ľubovoľné reálne  $\varepsilon > 0$  platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0, \quad (5)$$

t.j.  $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$ .

# Slabý zákon veľkých čísel

## Príklad

### Zadanie

Určme pravdepodobnosť toho, že aritmetický priemer z 1 000 nezávislých meraní udáva skutočnú hodnotu meranej veličiny  $\mu$  s presnosťou 0,01, ak rozptyl jednotlivých výsledkov meraní nepresahuje 0,2.

# Slabý zákon veľkých čísel

## Riešenie

Výsledky jednotlivých meraní reprezentujeme náhodnými premennými  $X_1, \dots, X_{1000}$ , pričom zrejme  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  a  $\mathbb{D}(X_i) < 0,2$  pre  $i = 1, \dots, 1000$ .

Podľa (4) pre  $c = 0,2$  dostávame

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i}{1000} - \mu\right| < 0,01\right) \geq 1 - \frac{0,2}{1000 \cdot 0,01^2} \approx 0,98.$$

Teda aritmetický priemer 1000 meraní sa od skutočnej hodnoty neodchýli o viac ako 0,01 s pravdepodobnosťou aspoň 0,98.

# Zákony veľkých čísel

## Slabý zákon veľkých čísel

### Veta (Bernoulli)

Nech náhodná premenná  $X_n$  predstavuje počet výskytov udalosti  $A$  s pravdepodobnosťou nastatia  $\mathbb{P}(A) = p$  v sérii  $n$  nezávislých pokusov. Potom pre ľubovoľné  $\varepsilon > 0$  a náhodnú premennú  $\frac{X_n}{n}$  platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{X_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1, \quad (6)$$

resp.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{X_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) = 0. \quad (7)$$

# Slabý zákon veľkých čísel

## Bernoulliho zákon veľkých čísel

S využitím Čebyševovej nerovnosti môžeme opäť odhadnúť pravdepodobnosť, že relatívna početnosť nastatia udalosti  $A$  v sérii  $n$  pokusov sa bude od teoretickej pravdepodobnosti odlišovať o viac ako  $\varepsilon$ .

Platí

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{X_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

# Centrálna limitná veta

Podstatou všetkých formulácií centrálnej limitnej vety je tvrdenie, že súčet veľkého počtu nezávislých náhodných premenných s konečnou strednou hodnotou a rozptylom má asymptoticky normálne rozdelenie.

Tento výsledok sa využíva v praxi. Ak skúmané náhodné veličiny v jednotlivých pokusoch nemajú normálne rozdelenie, tak s ich súčtom sa pri dostatočne veľkom počte pracuje ako s normálne rozdelenou náhodnou premennou.

# Centrálna limitná veta

## Veta (Lundenberg-Levy)

Nech  $X_1, \dots, X_n$  je postupnosť nezávislých náhodných premenných, ktoré majú identický zákon rozdelenia s konečnou strednou hodnotou  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  a konečným rozptylom  $\mathbb{D}(X_i) = \sigma^2$  pre  $i = 1, \dots, n$ . Náhodnú premennú  $Y$  definujeme ako súčet  $Y = X_1 + \dots + X_n$ . Potom normovaná náhodná premenná

$$U = \frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(Y)}},$$

má asymptoticky štandardizované normálne rozdelenie pravdepodobnosti  $N(0, 1)$ , t.j. platí vzťah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(U < u) = \Phi(u), \quad -\infty < u < \infty.$$

# Centrálna limitná veta

## Moivre–Laplace

Špeciálnym prípadom je nasledujúca

### Veta (Moivre–Laplaceova integrálna veta)

Nech  $X_1, \dots, X_n$  je postupnosť nezávislých náhodných premenných,  $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ . Potom pre ľubovoľné  $x$  platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < x \right) = \Phi(x).$$

má asymptoticky štandardizované normálne rozdelenie pravdepodobnosti  $N(0, 1)$ , t.j. platí vzťah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(U < u) = \Phi(u), \quad -\infty < u < \infty.$$

# Centrálna limitná veta

## Moivre–Laplace

Moivre–Laplaceova integrálna veta umožňuje pre veľké hodnoty opakovaní  $n$  aproximovať binomické rozdelenie normálnym.

Na vyjadrenie pravdepodobnosti, že náhodná premenná s rozdelením  $\text{Bin}(n, p)$  nadobudne hodnoty z intervalu  $\langle a; b \rangle$  tak použijeme aproximáciu

$$\mathbb{P}(a \leq x \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Pre presnejšiu aproximáciu môžeme použiť vzťah

$$\mathbb{P}(a \leq x \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

# Moivre–Laplaceova integrálna veta

## Príklad

### Zadanie

Poistovňa poistuje 1 000 ľudí rovnakého veku. Pravdepodobnosť úmrtia v priebehu roka je pre každého z nich 0,005. Chceme overiť ziskovosť poisťovne v prípade, že poistné je stanovené na 20 € s poistnou sumou 6 667 €.

# Moivre–Laplaceova integrálna veta

## Riešenie

V našom prípade máme  $\mathbb{E}(X) = 1\,000 \cdot 0,005 = 5$  a  
 $\mathbb{D}(X) = 1\,000 \cdot 0,005 \cdot 0,995 = 4,95$  a  $\sigma = 2,23$ .

Poistovňa nebude zisková (vzhľadom na tento druh poistenia) ak jej zisk bude menší, nanajvýš rovný poistnej náhrade. Odtiaľ  $20\,000 \leq X \cdot 6\,667$ , teda ak  $X \geq 3$ .

Po úpravách podľa Moivre–Laplaceovej integrálnej vety dostávame

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X - 5}{2,23} < \frac{3 - 5}{2,23}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}(U < -0.8967) \approx 1 - \Phi(-0.9) = 0,816.\end{aligned}$$

# Centrálna limitná veta

## Moivre–Laplace

Problém výpočtu  $\mathbb{P}(X = k)$ , kde  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  pri veľkých hodnotách  $n$  rieši nasledujúca veta.

### Veta (Lokálna veta Moivre–Laplaceova)

Nech náhodná premenná  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . Potom pre  $0 \leq k \leq n$  spĺňa pravdepodobnosť  $\mathbb{P}(X = k)$  limitný vzťah pre  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right)^2}}} \right] = 1.$$

# Centrálna limitná veta

## Moivre–Laplace

Lokálna veta Moivre–Laplaceova umožňuje určiť približnú hodnotu pravdepodobnostnej funkcie binomického rozdelenia v tvare

$$\mathbb{P}(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

kde  $\varphi$  je hustota štandardizovaného normálneho rozdelenia.