

Teória pravdepodobnosti

1. Pojem pravdepodobnosti

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

18. februára 2015

- 1 Základné pojmy
- 2 Pole udalostí
- 3 Axiomatická definícia pravdepodobnosti

Náhodný pokus

Náhodný pokus

Pod *náhodným pokusom* rozumieme taký pokus, ktorý je možné (aspoň teoreticky) ľubovoľne veľa krát opakovať, pričom výsledok konkrétneho pokusu je nepredpovedateľný.

Náhodný pokus

Náhodný pokus

Pod *náhodným pokusom* rozumieme taký pokus, ktorý je možné (aspoň teoreticky) ľubovoľne veľa krát opakovať, pričom výsledok konkrétneho pokusu je nepredpovedateľný.

- Pri každom opakovaní náhodného pokusu je výsledkom tzv. *elementárna udalosť*.

Náhodný pokus

Náhodný pokus

Pod *náhodným pokusom* rozumieme taký pokus, ktorý je možné (aspoň teoreticky) ľubovoľne veľa krát opakovať, pričom výsledok konkrétneho pokusu je nepredpovedateľný.

- Pri každom opakovaní náhodného pokusu je výsledkom tzv. *elementárna udalosť*.
- Množinu všetkých elementárnych udalostí označujeme Ω a nazývame *výberový priestor*.

Poznámky

- Výberový priestor resp. jeho prvky musia byť vyčerpávajúce v tom zmysle, že pri realizácii náhodného pokusu musí nutne nastať jeden z výsledkov obsiahnutých v Ω .
- Prvky výberového priestoru Ω musia byť navzájom nezlučiteľné, teda žiadne dva výsledky nemôžu nastať súčasne.
- O konkrétnom výsledku náhodného pokusu rozhoduje náhoda. Túto náhodnosť popisujeme pomocou pravdepodobnosti.

Náhodná udalosť

Definícia (Udalosť)

Pod *náhodnou udalosťou* rozumieme množinu elementárnych udalostí. Náhodná udalosť je teda ľubovoľná podmnožina výberového priestoru Ω .

Náhodná udalosť

Definícia (Udalosť)

Pod *náhodnou udalosťou* rozumieme množinu elementárnych udalostí. Náhodná udalosť je teda ľubovoľná podmnožina výberového priestoru Ω .

- Presne by sme mali rozlišovať medzi výsledkami ω náhodného pokusu a elementárnymi udalosťami $\{\omega\} \subset \Omega$.

Náhodná udalosť

Definícia (Udalosť)

Pod *náhodnou udalosťou* rozumieme množinu elementárnych udalostí. Náhodná udalosť je teda ľubovoľná podmnožina výberového priestoru Ω .

- Presne by sme mali rozlišovať medzi výsledkami ω náhodného pokusu a elementárnymi udalosťami $\{\omega\} \subset \Omega$.
- Náhodné udalosti označujeme veľkými písmenami latinskej abecedy, teda A, B, C atď.

Štatistická definícia pravdepodobnosti

- Definícia pravdepodobnosti je všeobecne motivovaná relatívnou frekvenciou výskytu sledovanej udalosti.

Štatistická definícia pravdepodobnosti

- Definícia pravdepodobnosti je všeobecne motivovaná relatívnou frekvenciou výskytu sledovanej udalosti.
- Predpokladajme, že vykonáme k náhodných pokusov a v tejto sérii budeme sledovať výskyt náhodnej udalosti A . Počet nastatí udalosti A označme k_A . (Zrejme je $k_A \leq k$.)

Štatistická definícia pravdepodobnosti

- Definícia pravdepodobnosti je všeobecne motivovaná relatívnou frekvenciou výskytu sledovanej udalosti.
- Predpokladajme, že vykonáme k náhodných pokusov a v tejto sérii budeme sledovať výskyt náhodnej udalosti A . Počet nastatí udalosti A označme k_A . (Zrejme je $k_A \leq k$.)

Štatistická definícia pravdepodobnosti

Udalosti A priradíme relatívnu početnosť

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k_A}{k}.$$

Pre $k \rightarrow \infty$ dostávame *štatistickú definíciu* pravdepodobnosti

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k_A}{k}.$$

Klasická definícia pravdepodobnosti

Každú konečnú náhodnú udalosť A môžeme charakterizovať vymenovaním elementárnych udalostí, ktoré obsahuje. Presnejšie

Klasická definícia pravdepodobnosti

Každú konečnú náhodnú udalosť A môžeme charakterizovať vymenovaním elementárnych udalostí, ktoré obsahuje. Presnejšie

Nastatie udalosti

Povieme, že pri realizácii náhodného pokusu *nastala udalosť A* , ak pre elementárnu udalosť ω , ktorá je výsledkom pokusu platí $\omega \in A$. V takom prípade tiež povieme, že výsledok pokusu *je priaznivý nastatiu udalosti A* a počet takýchto priaznivých výsledkov označíme $\#A$.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Nech výberový priestor Ω je konečný a obsahuje $\#\Omega$ prvkov.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Nech výberový priestor Ω je konečný a obsahuje $\#\Omega$ prvkov.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Udalosti A priradíme *klasickú pravdepodobnosť*, ktorá je definovaná vzťahom

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Klasický prístup k pravdepodobnosti zlyháva v prípade, že výberový priestor Ω je nekonečný.

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Klasický prístup k pravdepodobnosti zlyháva v prípade, že výberový priestor Ω je nekonečný.

Počet prvkov prestáva byť mierou „veľkosti“ množiny, je potrebné ho nahradiť.

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Klasický prístup k pravdepodobnosti zlyháva v prípade, že výberový priestor Ω je nekonečný.

Počet prvkov prestáva byť mierou „veľkosti“ množiny, je potrebné ho nahradiť.

Budeme sa zaoberať situáciou, kedy je A nejaká podmnožina n -rozmerného euklidovského priestoru E_n a zároveň je podmnožinou nejakého výberového priestoru $\Omega \subset E_n$.

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Klasický prístup k pravdepodobnosti zlyháva v prípade, že výberový priestor Ω je nekonečný.

Počet prvkov prestáva byť mierou „veľkosti“ množiny, je potrebné ho nahradiť.

Budeme sa zaoberať situáciou, kedy je A nejaká podmnožina n -rozmerného euklidovského priestoru E_n a zároveň je podmnožinou nejakého výberového priestoru $\Omega \subset E_n$.

Potom pravdepodobnosť definujeme ako pomer „veľkostí“ A a Ω . Túto veľkosť určíme pomocou miery množiny.

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Nech Ω je výberový priestor, $\Omega \subset E_n$, taký, že jeho miera $\mu(\Omega)$ je konečná a nech $A \subset \Omega$ je náhodná udalosť. Potom *geometrickou definíciou pravdepodobnosti* náhodnej udalosti A rozumieme priradenie

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Geometrická definícia pravdepodobnosti Príklad

Poznámka

Typickým prípadom použitia geometrickej definície pravdepodobnosti sú tzv. úlohy o stretnutí.

Príklad

Dve osoby sa dohodnú, že sa na určitom mieste stretnú v rozpätí jednej hodiny. Každý z nich po príchode na miesto počká 15 minút a ak druhá osoba počas týchto 15-tich minút nedorazí, tak odíde. Aká je pravdepodobnosť, že sa skutočne na dohodnutom mieste stretnú?

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Riešenie príkladu

- Okamih príchodu každej osoby na miesto môžeme považovať za číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Riešenie príkladu

- Okamih príchodu každej osoby na miesto môžeme považovať za číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
- Všetky možné situácie príchodov môžeme považovať za usporiadané dvojice (x, y) , kde x je čas príchodu prvej osoby a y je čas príchodu druhej osoby.

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu

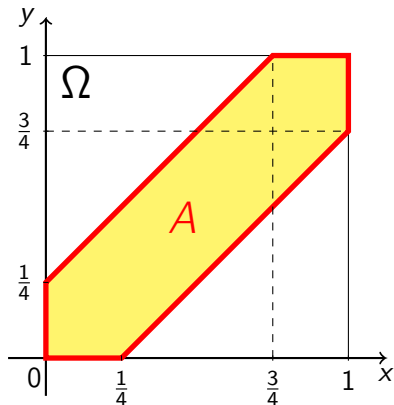
- Okamih príchodu každej osoby na miesto môžeme považovať za číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
- Všetky možné situácie príchodov môžeme považovať za usporiadané dvojice (x, y) , kde x je čas príchodu prvej osoby a y je čas príchodu druhej osoby.
- Pretože je dohodnuté, že dorazia v rozpätí jednej hodiny, môžeme predpokladať $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ a všetky body reprezentujúce tieto príchody tak vyplnia jednotkový štvorec na obrázku 1.

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu

- Okamih príchodu každej osoby na miesto môžeme považovať za číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
- Všetky možné situácie príchodov môžeme považovať za usporiadané dvojice (x, y) , kde x je čas príchodu prvej osoby a y je čas príchodu druhej osoby.
- Pretože je dohodnuté, že dorazia v rozpätí jednej hodiny, môžeme predpokladať $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ a všetky body reprezentujúce tieto príchody tak vyplnia jednotkový štvorec na obrázku 1.
- K tomu a by sa obe osoby stretli, nesmie byť rozdiel medzi ich príchodmi väčší ako 15 minút, tj, $\frac{1}{4}$ hodiny. Túto podmienku môžeme zapísať v tvare nerovnosti

$$|x - y| \leq \frac{1}{4}.$$

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu



Obr.: K úlohe o stretnutí

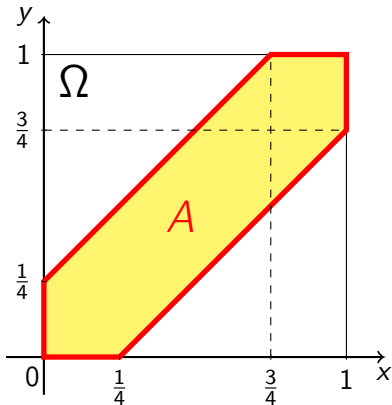
Po odstránení absolútnej hodnoty musíme vyriešiť dvojicu nerovníc

$$\begin{aligned} x - y &\leq \frac{1}{4} \\ y &\geq x - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} y - x &\leq \frac{1}{4} \\ y &\leq x + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

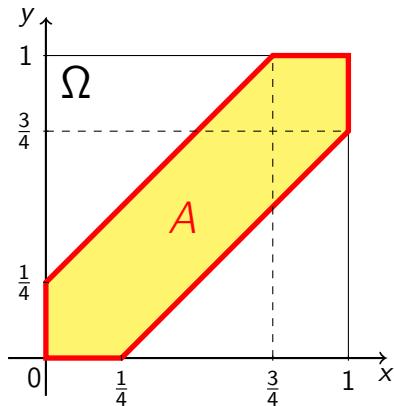
Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu



Tak vidíme, že množina A , zodpovedajúca náhodnej udalosti, že sa obe osoby na danom mieste stretnú, je prienikom dvoch polrovín, tak ako je to na obrázku 1 farebne vyznačené.

Obr.: K úlohe o stretnutí

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu

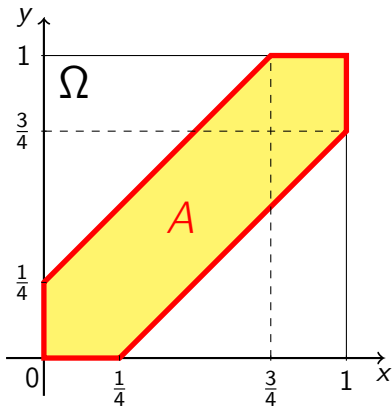


Obr.: K úlohe o stretnutí

Ľahko určíme, že pre plochu množiny Ω platí $\mu(\Omega) = 1$. Plochu množiny A určíme odčítaním plochy dvoch zhodných rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov s odvesnou dĺžky $\frac{3}{4}$. Teda

$$\mu(A) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}.$$

Geometrická definícia pravdepodobnosti Riešenie príkladu



Pre hľadajú pravdepodobnosť, že sa obe osoby stretnú teda platí

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{7}{16} = 0,4375.$$

Obr.: K úlohe o stretnutí

Náhodné udalosti

- Zo zavedenia náhodnej udalosti je zrejmé, že s udalosťami budeme pracovať ako so špecifickými prípadmi množín.

Náhodné udalosti

- Zo zavedenia náhodnej udalosti je zrejmé, že s udalosťami budeme pracovať ako so špecifickými prípadmi množín.
- Prázdnu množinu $\emptyset$ budeme označovať termínom *nemožná udalosť*.

Náhodné udalosti

- Zo zavedenia náhodnej udalosti je zrejmé, že s udalosťami budeme pracovať ako so špecifickými prípadmi množín.
- Prázdnu množinu $\emptyset$ budeme označovať termínom *nemožná udalosť*.
- Samotný výberový priestor Ω budeme nazývať *istá udalosť*.

Náhodné udalosti

- Zo zavedenia náhodnej udalosti je zrejmé, že s udalosťami budeme pracovať ako so špecifickými prípadmi množín.
- Prázdnu množinu $\emptyset$ budeme označovať termínom *nemožná udalosť*.
- Samotný výberový priestor Ω budeme nazývať *istá udalosť*.
- Ďalej sa budeme zaoberať požiadavkami, ktoré budeme kláť na podmnožiny výberového priestoru Ω ktoré sú potrebné k tomu, aby sme každej udalosti vedeli priradiť jej pravdepodobnosť.

Dôsledok náhodnej udalosti

Definícia (Dôsledok náhodnej udalosti)

Nech Ω je výberový priestor, $A, B \subset \Omega$ náhodné udalosti. Povieme, že *udalosť B je dôsledkom udalosti A* , ak z nastatia náhodnej udalosti A vyplýva nastatie náhodnej udalosti B , čo je možné symbolicky zapísať ako $A \subset B$.

Dôsledok náhodnej udalosti

Definícia (Dôsledok náhodnej udalosti)

Nech Ω je výberový priestor, $A, B \subset \Omega$ náhodné udalosti. Povieme, že *udalosť B je dôsledkom udalosti A* , ak z nastatia náhodnej udalosti A vyplýva nastatie náhodnej udalosti B , čo je možné symbolicky zapísať ako $A \subset B$.

Poznámka

Táto definícia znamená, že každá elementárna udalosť priaznivá nastatiu udalosti A je priaznivá aj nastatiu náhodnej udalosti B .

Dôsledok náhodnej udalosti

Definícia (Dôsledok náhodnej udalosti)

Nech Ω je výberový priestor, $A, B \subset \Omega$ náhodné udalosti. Povieme, že *udalosť B je dôsledkom udalosti A* , ak z nastatia náhodnej udalosti A vyplýva nastatie náhodnej udalosti B , čo je možné symbolicky zapísať ako $A \subset B$.

Poznámka

Pre zavedenú reláciu platia jednoduché pravidlá:

- a) Pre každú udalosť A je $A \subset A$.
- b) Ak pre trojicu udalostí A, B, C platí $A \subset B$, $B \subset C$, tak $A \subset C$.
- c) Pre každé A je $\emptyset \subset A$.
- d) Pre každé A je $A \subset \Omega$

Vzťahy medzi náhodnými udalosťami

Definícia (Rovnosť náhodných udalostí)

Hovoríme, že *udalosti A a B sú si rovné*, ak platí $A \subset B$ a súčasne aj $B \subset A$.

Definícia (Doplnková udalosť)

Udalosť A^c nazývame *doplnkovou udalosťou k udalosti A*, ak A^c nastane práve vtedy, ak nenastane udalosť A.

Vzťahy medzi náhodnými udalosťami

Definícia (Rovnosť náhodných udalostí)

Hovoríme, že *udalosti A a B sú si rovné*, ak platí $A \subset B$ a súčasne aj $B \subset A$.

Definícia (Doplnková udalosť)

Udalosť A^c nazývame *doplnkovou udalosťou k udalosti A*, ak A^c nastane práve vtedy, ak nenastane udalosť A .

Poznámka

Pre doplnkové udalosti platí:

- a) Pre každú udalosť A platí $(A^c)^c = A$.
- b) $\Omega^c = \emptyset$.
- c) $\emptyset^c = \Omega$.

Operácie s náhodnými udalosťami

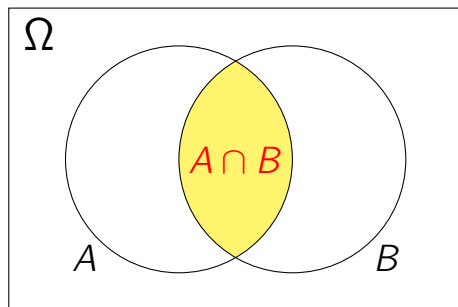
Definícia (Súčin náhodných udalostí)

Nech A a B sú náhodné udalosti. *Súčinom (prienikom) náhodných udalostí A a B* nazývame náhodnú udalosť $C = A \cap B$, ktorá nastane vtedy, ak nastane udalosť A a súčasne nastane aj udalosť B .

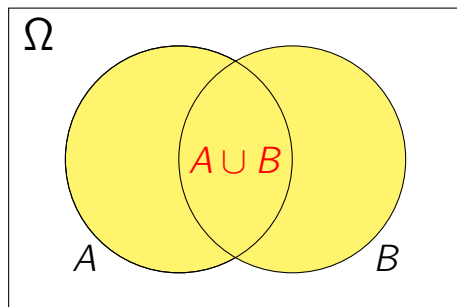
Definícia (Súčet náhodných udalostí)

Nech A a B sú náhodné udalosti. *Súčtom (zjednotením) náhodných udalostí A a B* nazývame náhodnú udalosť $C = A \cup B$, ktorá nastane vtedy, ak nastane aspoň jedna z udalostí A alebo B .

Operácie s náhodnými udalosťami, ilustrácia



Obr.: Grafická ilustrácia súčiny udalostí.



Obr.: Grafická ilustrácia súčtu udalostí.

Operácie s náhodnými udalosťami, vlastnosti

Veta

Pre operácie s udalosťami platia tieto pravidlá: Pre každé tri udalosti $A, B, C \subset \Omega$ platí

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) $A \cap A = A,$ | h) $A \cap B = B \cap A,$ |
| b) $A \cap A^c = \emptyset,$ | i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$ |
| c) $A \cap \Omega = A,$ | j) $C \subset A \wedge C \subset B \Rightarrow C \subset (A \cap B),$ |
| d) $A \cap \emptyset = \emptyset,$ | k) $A \cup \emptyset = A,$ |
| e) $A \cup A = A,$ | l) $A \cup B = B \cup A,$ |
| f) $A \cup A^c = \Omega,$ | m) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$ |
| g) $A \cup \Omega = \Omega,$ | n) $A \subset C \wedge B \subset C \Rightarrow (A \cap B) \subset C.$ |

Operácie s náhodnými udalosťami, vlastnosti

Poznámka

Pre každé dve udalosti $A, B \subset \Omega$ platí

a) $A \subset A \cup B,$

c) $A \cap B \subset A,$

b) $B \subset A \cup B,$

d) $A \cap B \subset B,$

Poznámka

Pre každé dve udalosti $A, B \subset \Omega$ platia de Morganove pravidlá:

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$

b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

Operácie s náhodnými udalosťami, vlastnosti

Poznámka

Definíciu súčtu a súčinu náhodných udalostí je možné prirodzeným spôsobom rozšíriť z dvoch na ľubovoľný počet náhodných udalostí. Ak I je nejaká množina indexov a $\{A_i\}_{i \in I}$ množina náhodných udalostí, tak súčtom resp. súčinom týchto náhodných udalostí rozumieme náhodnú udalosť A spočívajúcu v tom, že nastane aspoň jedna z náhodných udalostí A_i , a píšeme $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ resp. že nastane každá z náhodných A_i čo zapisujeme $A = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Operácie s náhodnými udalosťami

Definícia (Rozdiel udalostí)

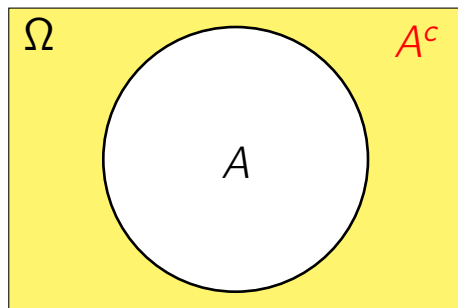
Nech $A, B \subset \Omega$ sú náhodné udalosti. O náhodnej udalosti C hovoríme, že je *rozdielom náhodných udalostí* A a B a zapisujeme $C = A - B$, ak náhodná udalosť C nastane práve vtedy, keď nastane náhodná udalosť A , avšak nenastane náhodná udalosť B .

Poznámka

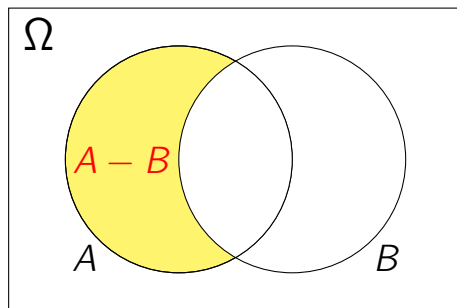
Z definície je zrejmé, že pre rozdiel dvoch náhodných udalostí platí

$$A - B = A \cap B^c.$$

Operácie s náhodnými udalosťami, ilustrácia



Obr.: Grafická ilustrácia doplnkovej udalosti.



Obr.: Grafická ilustrácia rozdielu udalostí.

Zlučiteľnosť náhodných udalostí

Definícia (Nezlučiteľné udalosti)

Nech A a B sú náhodné udalosti. Hovoríme, že náhodné udalosti A a B sú **nezlučiteľné** alebo **disjunktné**, ak je ich súčinom nemožná udalosť, teda ak

$$A \cap B = \emptyset.$$

Podobne množinu náhodných udalostí $\{A_i\}_{i \in I}$ nazveme nezlučiteľnými alebo disjunktnými, ak platí

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset.$$

Zlučiteľnosť náhodných udalostí

Definícia (Nezlučiteľné udalosti)

Nech A a B sú náhodné udalosti. Hovoríme, že náhodné udalosti A a B sú *nezlučiteľné* alebo *disjunktné*, ak je ich súčinom nemožná udalosť, teda ak

$$A \cap B = \emptyset.$$

Množinu udalostí $\{A_i\}_{i \in I}$ nazveme *po dvoch nezlučiteľné* alebo *po dvoch disjunktné*, ak pre každú dvojicu indexov $i, j \in I, i \neq j$ platí

$$A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Pole udalostí

Definícia (Pole udalostí)

Nech je daný neprázdny výberový priestor Ω a systém jeho podmnožín $\mathcal{F}$. Tento systém podmnožín nazývame *pole udalostí* alebo tiež *σ -algebra*, ak sú splnené tieto podmienky:

- 1 $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$.

Pole udalostí

Definícia (Pole udalostí)

Nech je daný neprázdny výberový priestor Ω a systém jeho podmnožín $\mathcal{F}$. Tento systém podmnožín nazývame *pole udalostí* alebo tiež *σ -algebra*, ak sú splnené tieto podmienky:

- 1 $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$.
- 2 Pre každé $A \in \mathcal{F}$ platí $A^c \in \mathcal{F}$.

Pole udalostí

Definícia (Pole udalostí)

Nech je daný neprázdny výberový priestor Ω a systém jeho podmnožín $\mathcal{F}$. Tento systém podmnožín nazývame *pole udalostí* alebo tiež *σ -algebra*, ak sú splnené tieto podmienky:

- 1 $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$.
- 2 Pre každé $A \in \mathcal{F}$ platí $A^c \in \mathcal{F}$.
- 3 Ak je $A_i \in \mathcal{F}$ pre každé $i = 1, 2, 3, \dots$, tak platí $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Pole udalostí, príklad

Tento príklad nám ilustruje, ako nám môže zvolená σ -algebra reprezentovať stupeň našich poznatkov o výsledkoch náhodného pokusu.

Príklad

Uvažujme náhodný pokus, ktorý predstavuje súčasný hod mincou a hracou kockou. Zodpovedajúci výberový priestor je

$$\begin{aligned}\Omega &= \{h, z\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= \{(h, 1), (h, 2), \dots, (h, 6), (z, 1), (z, 2), \dots, (z, 6)\}\end{aligned}$$

kde h a z označujú padnutie hlavy alebo znaku na minci.

Pole udalostí, príklad

Ak je známy výsledok hodu mincou, tak túto čiastkovú informáciu môžeme využiť na zavedenie nasledujúcej σ -algebry

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{z\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Pole udalostí, príklad

Ak je naopak známy výsledok hodu kockou, tak túto čiastkovú informáciu môžeme využiť na zavedenie inej σ -algebry

$$\mathcal{H}\{\emptyset, \Omega, \{h, z\} \times \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}), \},$$

kde symbol $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}), \}$ označuje systém všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Táto σ -algebra potom obsahuje napríklad takéto udalosti:

$\{h, z\} \times \{1, 3, 5\}$ ktorá popisuje situáciu, kedy na kocke padlo nepárne číslo,

$\{h, z\} \times \{3, 6\}$ ktorá popisuje situáciu, kedy na kocke padlo číslo deliteľné tromi.

Axiomatická definícia pravdepodobnosti

Definícia

Majme výberový priestor Ω a systém jeho podmnožín $\mathcal{F}$, ktorý je σ -algebrou. Potom *pravdepodobnosťou* rozumieme ľubovoľné zobrazenie $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré má tieto vlastnosti:

- (1) Pre každé $A \in \mathcal{F}$ platí $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
- (2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- (3) Nech $A_1, A_2, A_3, \dots$ sú po dvoch nezlučiteľné udalosti, $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, 3, \dots$. Potom

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Trojicu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ potom nazývame (*Kolmogorovov*) *pravdepodobnostný priestor*.

Axiomatická definícia pravdepodobnosti

Vlastnosti

Veta

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Potom platí:

- a) $\mathbb{P}(\emptyset)=0$.
- b) Ak A a B sú náhodné udalosti také, že $B \subseteq A$, tak $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.
- c) Pre každú náhodnú udalosť A platí $\mathbb{P}(A) \leq 1$.
- d) Nech $A_i, i = 1, 2, \dots$ sú náhodné udalosti. Potom platí $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Dôkaz:

Pre každú náhodnú udalosť A platí $A \cup A^c = \Omega$. Pretože je $A \cap A^c = \emptyset$, môžeme podľa vlastnosti (3) z definície písať

$$\mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

a podľa vlastnosti (2) z definície tak máme

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Ak si teraz uvedomíme, že $\emptyset^c = \Omega$, tak dostávame

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0,$$

čo je tvrdenie a) vety.

Dôkaz:

Teraz overíme platnosť tvrdenia b). Ak je $A \supseteq B$, tak platí $A = B + C$, kde označujeme $C = A \cap B^c$ a platí teda $B \cap C = \emptyset$. Podľa vlastnosti (3) z definície preto platí

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

Tu podľa vlastnosti (1) z definície platí $\mathbb{P}(C) \geq 0$, odkiaľ ihneď vyplýva tvrdenie b) vety.

Veta o pravdepodobnosti doplnkovej udalosti

Pri dokazovaní predchádzajúcej vety sme odvodili vzťah $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Jeho úpravou okamžite obdržíme tvrdenie nasledujúcej vety:

Veta (O pravdepodobnosti doplnkovej udalosti)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Potom pre každú náhodnú udalosť A platí

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A). \quad (1)$$

Veta o pravdepodobnosti doplnkovej udalosti

Pri dokazovaní predchádzajúcej vety sme odvodili vzťah $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Jeho úpravou okamžite obdržíme tvrdenie nasledujúcej vety:

Veta (O pravdepodobnosti doplnkovej udalosti)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Potom pre každú náhodnú udalosť A platí

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A). \quad (1)$$

Poznámka

Veta o pravdepodobnosti doplnkovej udalosti sa s výhodou využíva pri výpočte „pravdepodobnosti aspoň raz“, teda pravdepodobnosti že sledovaná udalosť nastane v sérii pokusov aspoň jeden krát.

Pravdepodobnosť súčtu zlučiteľných udalostí

Veta (O súčte pravdepodobností)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor a nech A a B sú ľubovoľné náhodné udalosti. Potom platí

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \quad (2)$$

Dôkaz:

Pre súčet náhodných udalostí môžeme písať $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$ a zrejme platí $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$. Ide už teda o súčet nezlučiteľných udalostí a preto

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B).$$

Ďalej platí $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ a zrejme je opäť $(A \cap B) \cap (A^c \cap B) = \emptyset$. Ide tak o súčet nezlučiteľných udalostí a preto

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B).$$

Odčítaním oboch rovníc dostávame

$$\mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

z čoho už vyplýva tvrdenie vety.

Princíp exklúzie a inklúzie

Predchádzajúcu vetu je možné indukciou rozšíriť na súčet ľubovoľného počtu náhodných udalostí.

Veta (Princíp exklúzie a inklúzie)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor a nech A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sú náhodné udalosti. Potom platí

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right). \quad (3)$$

Príklad

Príklad

Hádzeme dvoma hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť že aspoň na jednej z nich padne šesťka?

Riešenie

Výberový priestor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ a má 36 prvkov. Označme ako A náhodnú udalosť, že na prvej kocke padla šesťka a ako B náhodnú udalosť, že na druhej kocke padla šesťka. Zrejme

$$A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = \{(6, 6)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Podľa (2) tak dostaneme

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$