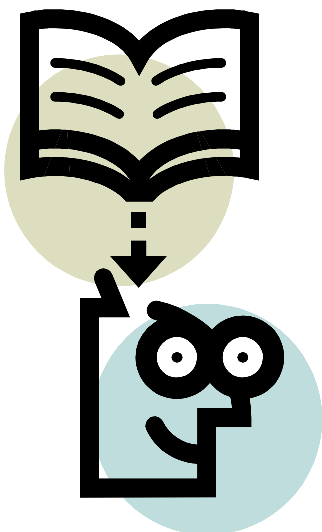
Zbierka úloh z algebry



Obsah

Algebra

Úvod

ALGEBRA - z arab. *al-džabr*, obnovenie spojenia: tento termín sa pôvodne používal v súvislosti so zrastaním zlomenej kosti, neskôr so sceľovaním čohokoľvek zlomeného, tiež so "sceľovaním" čísiel

Garantuje: doc. RNDr. Stanislav Palúch, CSc.
Zabezpečuje : RNDr. Ida Stankovianska, CSc.

Rozsah výučby: prednášky – cvičenia – laboratórne cvičenia
Týždenný: 2-2-0 *Za semester*: 26-26-0

Ukončenie predmetu a spôsob hodnotenia: priebežne – 40%
skúška (písomná) – 60%

Cieľ predmetu :
Vyložiť základné poznatky z lineárnej algebry na podklade algebraických štruktúr a lineárneho priestoru umožňujúcom budúce rozširovanie o ďalšie partie algebry.

Stručný sylabus:
Prednášky: 1.Algebraické štruktúry. 2.Lineárne priestory. 3.Polynómy. 4.Matice. 5.Gaussova eliminácia. 6.Jordanova eliminácia. 7.Determinanty. 8.Homogénne systémy lineárnych rovníc. 9.Nehomogénne systémy lineárnych rovníc. 10.Lineárne zobrazenia. Báza, dimenzia a súradnice v lineárnom priestore. 11.Matice lineárnych zobrazení. 12.Vlastné hodnoty a vlastné vektory matice.
Cvičenia: Všetky cvičenia sú výpočtové a témy zodpovedajú prednáškam.

Literatúra:
Demlová, Nagy: Algebra, SNTL, Praha 1982
Havel, Holenda: Lineárna algebra, SNTL Praha 1984
Mikola: Algebra, Žilina 1996 (skriptá)
Eliáš, Horváth, Kajan: Zbierka úloh z vyššej matematiky, Bratislava 1985

Algebraické štruktúry

1. Je operácia ♥ definovaná predpisom a ♥ b = a + 2b (a, b sú reálne čísla) komutatívna a asociatívna? Svoje tvrdenie odôvodnite.

2. Na množine celých čísel je definovaná operácia σ takto: Pre $\forall$ a,b$\in$Z: a σ b = $|a+b-2|$. Je σ binárnou operáciou na Z? Ak áno, je komutatívna a asociatívna?

3. Na množine K nepárnych prirodzených čísel sú definované operácie σ a $\bullet$ takto: Pre $\forall$ a,b$\in$K: a σ b = a+b+1 a a$\bullet$b =(a+1)(b+1)/2 - 1. Sú σ a $\bullet$ binárnou operáciou na K? Ak áno, sú komutatívne a asociatívne?

4. Na množine celých čísel je definovaná operácia $*$ takto: Pre $\forall$ a,b$\in$N: a $*$ b = $|a+b|$. Je $*$ binárnou operáciou na Z? Ak áno, je komutatívna a asociatívna?

5. Napíšte príklad relácie ρ, ktorá je reflexívna, nie je symetrická a je tranzitívna.

6. Na množine celých čísel sú definované operácie σ a $\bullet$ takto: Pre $\forall$ a,b$\in$Z: a σ b = a+b-1 a a$\bullet$b = a+b-ab. Je $\bullet$ distributívna na operáciu σ ?

7. Daná je usporiadaná trojica (M, $\bullet$, Δ). Aký vzťah musí platiť, aby Δ bola distributívna na $\bullet$?

8. Pre $\forall$x,y$\in$Z xρy <=> xy je párne číslo. Aké vlastnosti má relácia ρ ?

9. Na množine celých čísel je definovaná relácia . Aké má vlastnosti?
   a) $a\rho b \Leftrightarrow |a-b| \leq 1$
   b) $\boxed{a\rho b \Leftrightarrow |a-b| \leq 5}$
   c) $a\rho b \Leftrightarrow |i-j| \geq m$, kde m je celé číslo, pevne zvolené
   d) $a\rho b \Leftrightarrow |i-j| \leq m$, kde m je celé číslo, pevne zvolené

10. Na množine M = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } je definovaná relácia ρ daná množinou: {(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)}. Je relácia ρ reláciou ekvivalencie na M? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie?

11. Na množine celých kladných čísel je definovaná relácia ρ: aρb <=> a delí b. Aké vlastnosti má definovaná relácia? Je to ekvivalencia? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie?

12. Na množine všetkých celých čísel je definovaná relácia ρ predpisom: aρb <=> a,b majú rovnaké znamienko. Je ρ ekvivalencia? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie?

13. Na množine celých čísel definujeme reláciu $\boxed{\ }$ predpisom: $\boxed{a\rho b \Longleftrightarrow a+b \geq 20}$. Je definovaná relácia reláciou ekvivalencie?

14. Na množine všetkých klientov banky B je definovaná relácia $\boxed{\ }$: a$\boxed{\ }$b<=> klient a má rovnakú výšku konta (v tisícoch Sk) ako klient b. Je relácia ρ reláciou ekvivalencie? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie?

15. Na množine všetkých študentov ŽU, ktorí mali v školskom roku 2004/05 zapísaný predmet Algebra a získali zápočet, je definovaná relácia $\boxed{\ }$: a$\boxed{\ }$b <=>a,b dosiahli rovnaký výsledok zo skúšky. Je ρ ekvivalencia? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie.

16. Z je množina celých čísel. Na Z je definovaná relácia ρ takto: pre $\forall x,y \in Z$ $x \rho y$ <=> $|x|=|y|$. Je ρ reláciou ekvivalencie ? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie?

17. definujme binárnu operáciu. Nájdite neutrálny prvok operácie !

18. Nájdite neutrálny prvok binárnych operácií

    a) Δ, pre $\forall$ a, b$\in$Q−{0}; aΔb=$\boxed{\ }$

    b) , pre $\forall$ a, b$\in$Q; a b = 2a + 3b

19. Nájdite neutrálny a symetrizačný prvok binárnych operácií

    a) $\circ$, pre $\forall$ a, b$\in$Z; $a \circ b = a - b$

    b) , pre $\forall$ a, b$\in$ Z_+; a b= a+b−4

20. Na množine Q je definovaná operácia ς takto: aς b = ab+a+b. Akú algebraickú štruktúru tvorí (Q,ς) ?

21. Na množine všetkých reálnych čísel definujeme reláciu $\boxed{\ }$: $\boxed{a \circ b = \frac{1}{2}(a+1)(b+1) - 1.}$ Akú algebraickú štruktúru tvorí (R,$\boxed{\ }$) ?

22. Nech M={1, 2, 3, 4, 5, 6} a nech pre všetky a, b$\in$M je definovaná binárna operácia predpisom: a b=NSD(a,b), kde NSD(a,b) je najväčší spoločný deliteľ čísel a, b. Zostrojte tabuľku operácie a určte druh algebraickej štruktúry (M,).

23. M = { 1, -1, i, -i }, kde $\boxed{i = \sqrt{-1}}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí (M, ·), kde · je obyčajné násobenie?

24. Akú algebraickú štruktúru tvorí (K, ∗), kde K je množina všetkých nepárnych prirodzených čísel a pre ľubovoľné a, b$\in$ K; a∗b=a+b+1?

25. Na množine R^+ reálnych kladných čísel je definovaná operácia ∗ takto: Pre $\forall$a,b$\in R^+$ a∗b= $\sqrt{ab}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí (R, ∗)?

26. Nech M je konečná podmnožina reálnych čísel, nech pre ľubovoľné a,b$\in$ M je definovaná nasledovná operácia: a b = min{a,b}. Akú algebraickú štruktúru predstavuje (M,) ?

27. Nech M je neprázdna konečná číselná množina. Na množine M definujme operáciu predpisom: a b = max { a,b }. Akú algebraickú štruktúru tvorí (M,) ?

28. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(N \times N_0, \circ)$, keď $(a,b)\circ(c,d) = (ac, ad + b)$?

29. $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z\}$. Akú algebraickú štruktúru predstavujú $(A,+)$, $(A,\cdot)$, kde + je sčítanie a • je násobenie?

30. Na $R \times R - \{0,0\}$ je definovaná operácia $*$ takto: Pre $\forall(a,b), (c,d) \in R \times R - \{0,0\}$; $(a,b)*(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$. Aká algebraická štruktúra je $(R \times R, *)$?

31. Nech X je ľubovoľná neprázdna množina. Pre ľubovoľné $A, B \subseteq X$ definujeme operáciu : A B = $A \cap B$. Akú algebraickú štruktúru tvorí (X,) ?

32. Na množine $Q-\{1\}$ definujme operáciu : $a \circ b = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)+1$. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(Q-\{1\},)$?

33. Nech A= $\{a + ib \mid a, b \in Z\}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí (A,x), keď je obyčajné násobenie?

34. Nech A= $\{a + ib \mid a \in R, b \in R_0^+\}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(A,\div)$, keď ÷ je obyčajné delenie?

35. Nech R je množina reálnych čísel. Určte, akú algebraickú štruktúru predstavuje (R,), (R,) a (R,), keď a b = a+b–10 a a b=|a–b|.

36. Nech M = { (a,b) | a,b∈ Z }. Pre ∀ (a,b), (c,d) ∈ M definujeme operácie Δ a o : (a,b)Δ(c,d) = (a+c+2, b+d-1) a (a,b)o(c,d) = (a-d, b+c). Akú algebraickú štruktúru tvorí (M,Δ), (M,o), (M,Δ,o) ?

37. Nech Q je množina racionálnych čísel. Pre $\forall a, b \in Q$ definujme dve operácie: $b = a + b - 2$ a $a \circ b = ab + a + b$. Akú algebraickú štruktúru tvorí , ?

38. Na množine reálnych čísel sú definované operácie σ a • takto: pre ∀ a,b∈ R: a σ b = a+b+1 a a•b =(a+1)(b+1)/2 - 1. Aká algebraická štruktúra je (R, σ , •)?

39. Na množine K nepárnych prirodzených čísel sú definované operácie σ a • takto: pre ∀ a,b∈ K: a σ b = a+b+1 a a•b =(a+1)(b+1)/2 - 1. Aká algebraická štruktúra je (K, σ , •)?

40. Nech A={a + i b | a,b∈ Q }, kde i je imaginárna jednotka. Akú algebraickú štruktúru tvorí (A, +, ·), kde + a . je sčítanie a násobenie komplexných čísel?

41. Akú algebraickú štruktúru tvorí (A, ∗, ○), kde A je množina všetkých celých čísel a pre ľubovoľné a,b∈ A : a∗b=a+b, a○b= (a+1)(b+1)?

42. Nech M = {(a, b); a, b ∈ R}. Akú algebraickú štruktúru tvorí (M,), kde (a, b) ⊕ (c, d) = (a +c, b + d) a (a, b) (c, d) = (ad + bc, bd — ac)?

43. Nech M = {(a,b) | a,b∈ Z }. Na množine M definujeme dve operácie Δ a o predpisom: (a,b)Δ(c,d) = (a+c, b+d) a (a,b)o(c,d) = (ac, bc+d). Akú algebraickú štruktúru tvorí (M,Δ,o) ?

44. Daná je množina reálnych čísel R a definované sú operácie Δ a □ predpisom: Pre $\forall a,b \in R$ $a\Delta b=a+b+3$ a

a □ b=| 2a-3b |. Aké algebraické štruktúry predstavujú (R,Δ) a (R, □)?

45. Nech R je množina všetkých reálnych čísel. Pre $\forall$ $a,b \in R$ definujme dve operácie: $\boxed{a * b = a + b + 1}$ a $\boxed{a \circ b = |a| + |b| + 2}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí $\boxed{(R,*,\circ)}$?

46. Nech na množine M= { 0, 1 } sú definované operácie **+** a $\cdot$ tabuľkou:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	1	1

Dokážte, že (M, +) a (M-{0}, $\cdot$) sú komutatívne grupy. Je (M, +, $\cdot$) pole? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

47. Nech X= { } je daná množina. Pre $A\subset X$, $B\subset X$ definujeme binárnu operáciu Δ: $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$. Ak $M=\{P|P\subset X\}$, akú algebraickú štruktúru tvorí (M,Δ) ?

48. Daná je množina M všetkých diagonálnych matíc stupňa dva nad poľom reálnych čísel. Akú algebraickú štruktúru tvorí (M, □), keď □ je násobenie matíc?

49. Daná je množina M všetkých diagonálnych matíc stupňa dva nad poľom reálnych čísel s výnimkou nuly. Akú algebraickú štruktúru tvorí (M, □), keď □ je násobenie matíc?

50. Daná je množina $\boxed{M=\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\in Z \ )}$. Určte, akú algebraickú štruktúru predstavuje (M, $\circ_M$), kde $\circ_M$ predstavuje násobenie matíc.

51. Aká algebraická štruktúra je (Z_3, +, x)? Svoju odpoveď zdôvodnite.

52. Aká algebraická štruktúra je (Z_4, +, x)? Svoju odpoveď zdôvodnite.

53. Nech R je množina reálnych čísel. Určte, akú algebraickú štruktúru predstavuje (R,□), (R,□) a (R, □□), keď a□b = a+b–10 a a□b=|a–b|.

54. Nech A = {$a_1 + a_2\sqrt{2}$;a_1, $a_2 \in$ Z}. Akú algebraickú štruktúru predstavuje (A, □□), kde □ je sčitovanie dvojčlenov a □ je násobenie dvojčlenov?

55. Na množine usporiadaných dvojíc tvaru $(a,b\sqrt{2})$, (kde a, b $\in$Z) sú definované binárne operácie
$(a_1,b_1\sqrt{2})\oplus(a_2,b_2\sqrt{2})=(a_1+a_2,(b_1+b_2)\sqrt{2})$ a
$(a_1,b_1\sqrt{2})\otimes(a_2,b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2,(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2})$. O akú algebraickú štruktúru ide?

56. Nech M={A | $A\subset X$ }je množina všetkých podmnožín nejakej neprázdnej množiny X. Akú algebraickú štruktúru predstavujú (M, $\cap$), (M, $\cup$), (M, $\cup$, $\wedge$), kde $\cup$ je zjednotenie a $\wedge$ je prienik množín?

57. Nech M={ f(x) | f(x)=f(-x); $x\in R$ } je množina spojitých párnych funkcií definovaných na R. Akú algebraickú štruktúru tvorí (M, □, □), kde □ je operácia sčítania funkcií a □ je operácia násobenia funkcií?

58. Akú algebraickú štruktúru predstavuje (RxR, , Δ), kde (x_1, y_1) (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) a $(x_1, y_1)\Delta(x_2,y_2)$ = $(-x_1y_2-x_2y_1, x_1x_2-y_1y_2)$?

59. Akú algebraickú štruktúru predstavuje $(R-\{0\}\times R,\circ)$, kde R je množina reálnych čísel a $(a,b)\circ(c,d)=(ac,bc+d)$?

60. Akú algebraickú štruktúru tvorí (P, +, ○), kde P je množina všetkých polynómov s celočíselnými koeficientami, + je operácia sčítania polynómov a ○ je operácia násobenia polynómov.

61. Nech $M=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| \; x,y\in Z\right\}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M,\oplus,\otimes)$, kde $\oplus$ je sčitovanie a $\otimes$ násobenie matíc?

62. Nech $M=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & -x \end{pmatrix}, kde \quad x,y\in R\right\}$. Akú algebraickú štruktúru predstavuje $(M,\oplus,\otimes)$, kde $\oplus$ a $\otimes$ je sčítanie a násobenie matíc?

63. Nech M je množina všetkých diagonálnych matíc typu 3x3 nad poľom reálnych čísel. Akú algebraickú štruktúru tvorí M spolu s operáciami sčítania a násobenia matíc?

64. Nech $P_{<2k>}$ je množina polynómov párneho stupňa. Akú algebraickú štruktúru predstavuje ($P_{<2k>}$, $\otimes_p$), ($P_{<2k>}$, $\oplus_P$) a ($P_{<2k>}$, $\oplus_P$, $\otimes_P$), keď $\oplus_P$ je bežné sčítanie a $\otimes_P$ bežné násobenie polynómov?

Späť na obsah

Polynómy

1. Pre aké reálne *a* je 1 koreňom polynómu $p(x) = 2x^3 - ax^2 + 2x - 1$?

2. Aká musí byť hodnota parametra *a*, aby [illegible] bola koreňom polynómu $p(x) = 2x^3 + ax^2 + 4x - 4$?

3. Pre polynóm $p(x) = x^3 - 6x + q$ určte q a jeho korene tak, aby mal jeden koreň dvojnásobný.

4. Určte násobnosť koreňa c= -2 polynómu $p(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$ a určte zvyšné jeho korene.

5. Určte koeficient *a* tak, aby číslo –1 bolo trojnásobným koreňom polynómu $p(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$.

6. Určte *a* tak, aby polynóm $p(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ mal koreň $c = -1$ aspoň dvojnásobný.

7. Určte *a* tak, aby polynóm $p(x) = x^5 - ax^4 + ax^3 + 2x^2 - 8x + 8$ mal koreň $c = 2$ aspoň dvojnásobný.

8. Nájdite také *a*, aby sa jeden z koreňov polynómu $p(x) = x^3 - 7x + a$ rovnal dvojnásobku druhého.

9. Určte číslo *a* tak, aby číslo c= -1 bolo koreňom polynómu $p(x) = 2x^6 - ax^4 - x^3 + ax^2 + 3a$.

10. Pre akú hodnotu *a* polynómu $p(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ je c= –1 jeho
    a) jednoduchým koreňom
    b) dvojnásobným koreňom

11. Nájdite také *a*, aby súčet dvoch koreňov polynómu $p(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + a$ sa rovnal 1.

12. Súčet dvoch koreňov polynómu $p(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ sa rovná 1. Určte λ.

13. Určte koeficienty b, c polynómu $p(x) = x^3 + 3x^2 + bx + c$, ak viete, že súčet štvorcov koreňov sa rovná 1 a jeden jeho koreň je rovný -1.

14. Polynóm $p(x) = 5x^4 - 23x^3 + 35x^2 - 7x - 10$ má jeden koreň $x_1 = 2 + i$. Nájdite ostatné jeho korene.

15. Polynóm $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 6x + 5$ má jednoduchý koreň $x_1 = 2 + i$. Nájdite zvyšné jeho korene nad poľom komplexných čísel.

16. Určte korene polynómu $p(x) = 2x^5 - 7x^4 + 7x^3 + 9x - 5$, ak poznáte jeden jeho koreň $x_1 = 2 - i$.

17. Nájdite všetky korene polynómu $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 16x - 15$, ak viete, že $x_1 = 1 - 2i$.

18. Polynóm $\boxed{p(x) = x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 7x + 6}$ má jednoduché korene *i* a *2*. Nad poľom komplexných čísel nájdite zvyšné jeho korene.

19. Nájdite všetky korene a určte aj ich násobnosti, keď $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ a jeden jeho koreň je $\boxed{x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

20. Nájdite všetky racionálne korene polynómu a určte ich násobnosti

a) $p(x) = 2x^5 + 9x^4 + 13x^3 + 7x^2 - 4$

b) $p(x) = 24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$

c) $p(x) = 10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$

d) $p(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$

e) $p(x) = 2x^5 + 9x^4 + 13x^3 + 7x^2 - 4$.

21. Nad poľom komplexných čísel nájdite korene polynómu

a) $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$

b) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$

22. Vyjadrite polynómy v mocninách daných lineárnych výrazov

a) $p(x) = x^4 + 3x^2 - x + 12$: x +1

b) $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$: x – 2

c) $p(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + (7 + 18i)$: $(x-(-1+2i))^k$.

23. Určte násobnosť koreňa c v daných polynómoch a určte zvyšné korene nad daným poľom.

a) c=-2, $p(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, R

b) c= –1, $\boxed{p(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 11x + 5}$, R

c) c=1, $\boxed{p(x) = 2x^6 - 9x^5 + 21x^4 - 34x^3 + 36x^2 - 21x + 5}$, C

24. Nájdite korene polynómu $\boxed{p(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}}$ ak viete, že tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. (Návod: využite rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov.)

25. Tvoria racionálne korene polynómu $p_4(x) = 16x^4 - 40x^2 + 9$ aritmetickú postupnosť s nejakou diferenciou? Ak áno, s akou?

26. Určte *a,b,c* tak, aby boli zároveň koreňmi polynómu $\boxed{p(x) = x^3 - ax^2 + bx + c}$.

27. Nájdite také reálne číslo *a*, aby sa jeden z koreňov polynómu $p(x) = x^3 - 7x + a$ rovnal dvojnásobku druhého.

28. Nájdite normovaný polynóm s reálnymi koeficientami najnižšieho možného stupňa podľa daných podmienok:

a) 2 je dvojnásobný koreň, 3 je jednoduchý koreň a absolútny člen sa rovná 48
b) -i je dvojnásobný koreň, -1 jednoduchý koreň
c) -i je dvojnásobný koreň, -1-i jednoduchý koreň
d) jeden jeho koreň je 3+3i a absolútny člen sa rovná 54
e) jednoduché korene (-3) a 3-i a dvojnásobný koreň 2i
f) 1 + i je jeho dvojnásobný koreň a jeho absolútny člen sa rovná 1

29. Nájdite normovaný polynóm s celočíselnými koeficientami najnižšieho stupňa tak, aby mal dvojnásobný koreň $x_{1,2}=\boxed{\sqrt{5}}$ a absolútny člen sa rovnal 100. Aké budú zostávajúce jeho korene?

30. Nájdite polynóm najnižšieho stupňa nad poľom komplexných čísel, ktorý bude mať i ako dvojnásobný a (–3+i) ako jednoduchý koreň. Tú istú úlohu riešte nad poľom reálnych čísel.

31. Nájdite polynóm najnižšieho stupňa nad poľom komplexných čísel, ktorý bude mať 2 ako dvojnásobný koreň, 1 a 3 ako jednoduché korene a absolútny člen bude 48.

32. Aké podmienky musia spĺňať komplexné čísla p, q, m, n, aby polynóm f(x) bol deliteľný polynómom g(x)?

a) $f(x)=x^3+nx-3 \quad g(x)=x^2+mx+2$

b) $f(x)=x^3+px+2 \quad g(x)=x^2+mx-1$

c) $f(x)=x^3+px+q \quad g(x)=x^2+mx-1$

33. Nad poľom reálnych čísel rozložte polynómy na súčin ireducibilných polynómov.

a) $p(x)=7x^5+7x^4+35x^3+35x^2+28x+28$

b) $p(x)=x^5-4x^4-6x^3+16x^2+29x+12$

34. Nad poľom reálnych čísel napíšte polynóm p(x) ako súčin ireducibilných polynómov, keď jeden jeho koreň je 1 a $\boxed{p(x)=2x^6-3x^5-4x^4+6x^3+6x^2-11x+4}$.

35. Rozložte polynóm $p(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$ na súčin ireducibilných polynómov, ak jeden z nich je $q(x)=x-i$.

36. Polynóm $\boxed{p(x)=2x^6+13x^5+38x^4+62x^3+58x^2+29x+6}$ napíšte ako súčin ireducibilných polynómov nad poľom komplexných čísel, keď viete, že jeden jeho koreň je –1.

37. Polynóm $\boxed{p(x)=3x^4+3x^3-18x^2-42x-36}$ napíšte ako súčin ireducibilných polynómov nad poľom komplexných čísel, ak $\boxed{x_1=-1-i}$ je jeho jednoduchý koreň.

38. Rozložte na súčin ireducibilných polynómov nad poľom komplexných čísel polynóm

a) $\boxed{p(x)=6x^4+35x^3+13x^2-56x+20}$

b) $\boxed{p(x)=6x^5+24x^4-456x^3+24x^2-462x}$

c) $p(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

39. Určte reducibilitu polynómu $p(x) = x^2 - 2$ nad poľom C, R, Q.

40. Pomocou Hornerovej schémy vydeľte polynómy p(x) polynómami q(x)

a) $p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ $\qquad q(x) = x - 1$

b) $p(x) = 3x^4 + (1-3i)x^3 - 2ix^2 + ix - i$ $\qquad q(x) = x - i$

41. Napíšte Taylorov rozvoj polynómu $p(x)=x^5$ okolo bodu $x_0=1$.

42. Pomocou Hornerovej schémy nájdite neznámy polynóm, ktorého Taylorov rozvoj má tvar $p_5(x) = 5(x+1)^5 - 5(x+1)^3 + 5(x+1)$.

43. Rozložte funkcie na parciálne (elementárne) zlomky

a) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^4 - x^3 - x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x+1)(x^2+1)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2+7}{(x^2+2x+1)(x^2+3)}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{(x^2+1)(x+1)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2+1)}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{(x^2 - x - 2)(x^2+1)}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 4}{(x-2)(x^2+2)^2}$

h) $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x + 1)}$

i) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-2)^2(2x^2 + x + 1)}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)(x-2)(x^2+2)}$

k) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{(x+1)(x-2)(x^2+2)}$

l) $f(x) = \dfrac{x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 6x + 3}{x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2}$

m) $f(x) = \dfrac{4x^5 - 8x^4 + 5x^3 - x^2 + x + 1}{(2x^2 - x)^2}$

n) $g(x) = \dfrac{2x^3 - 2x^2 + 4x - 2}{x^4 - 4}$

Späť na obsah

Matice a determinanty

1. Nájdite všetky matice, ktoré sú komutatívne s maticou $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, t.j. pre ktoré platí AB=BA.

2. Nájdite všetky matice, ktoré sú komutatívne s maticou $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, t.j. pre ktoré platí AB=BA.

3. Nájdite všetky matice A typu 3x3 nad poľom racionálnych čísel, ktoré komutujú (t.j. AD=DA) s maticou D, ktorá je diagonálna a na diagonále má hodnoty 1, 2, 3.

4. Vyjadrite matice ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice

   a) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

   b) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 4 & 3 & 7\\ 6 & 5 & 0\end{pmatrix}$

   c) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

5. Aké je znamienko permutácie (5,1,3,2,4) a prečo?

6. Aké znamienko - a prečo – v determinante šiesteho stupňa má súčin:

   a) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$

   b) $a_{41}a_{13}a_{32}a_{54}a_{26}a_{65}$

   c) $a_{45}a_{16}a_{33}a_{54}a_{21}a_{62}$

   d) $a_{23}a_{44}a_{66}a_{35}a_{12}a_{51}$.

7. Na množine prvkov napíšte takú permutáciu, ktorá bude mať 5 inverzií. Inverzie naznačte!

   a) (1, 2, 3, 4, 5)

   b) (1, 2, 3, 4, 5, 6)

8. Koľko inverzií je v permutácii $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n\\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1\end{pmatrix}$?

9. Akú paritu (párny/nepárny) má permutácia indexov v súčine $a_{12}a_{24}a_{45}a_{36}a_{61}a_{53}$? Prečo?

10. Z definície vypočítajte determinant $A=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}$.

11. Vypočítajte determinant matice:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&1&-4&3\\3&-4&-1&2\\4&3&-2&1\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}2&1&1&1&1\\1&3&1&1&1\\1&1&4&1&1\\1&1&1&5&1\\1&1&1&1&6\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&1&-4\\1&1&1&-4&1\\1&1&-4&1&1\\1&-4&1&1&1\end{pmatrix}.$

12. Pre akú reálnu hodnotu parametra a je determinant matice $A=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\3&a&3&1\\2&3&1&a\\4&2&1&1\end{pmatrix}$ rovný nule?

13. Určte t tak, aby matica $B=\begin{pmatrix}7&2-t\\3+t&-2\end{pmatrix}$ bola regulárna.

14. Pre akú hodnotu a sú matice singulárne?

a) $A=\begin{pmatrix}a&1&1&2\\1&2&2&1\\2&2&1&1\\1&1&2&a\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}1&a&-1&1\\0&2&1&1\\a&3&1&0\\1&1&-1&0\end{pmatrix}.$

15. Pre akú hodnotu parametra a sú matice regulárne?

a) $A=\begin{pmatrix}a&1&0&a\\1&a&a&0\\0&a&a&1\\a&0&1&a\end{pmatrix}.$

16. Pre aké celé číslo x má matica $A=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&4\\2&3&1&9-x^2\end{pmatrix}$ nenulový determinant?

17. Nech matica A je stupňa 5 a $|A|=3$. V matici A vynásobíme tretí stĺpec číslom 3. Zmení sa hodnota determinantu matice A? Ak áno, tak ako?

18. Vypočítajte determinant matice

a) $A=\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{pmatrix}$

b) $\boxed{A=\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{pmatrix}}$.

19. Laplaceovým rozvojom vypočítajte determinant matice

a) $A=\begin{pmatrix} -8 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 11 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

20. Vypočítajte determinant matice Laplaceovým rozvojom až do 3 stupňa matice

a) $\boxed{A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}}$

b) $\boxed{A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$.

21. Nad **Z**$_5$ vypočítajte determinant matice $\boxed{A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$.

22. Nad **Z**$_7$ Laplaceovým rozvojom vypočítajte determinant matice

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

23. Nad **Z**$_7$ vypočítajte Laplaceovým rozvojom až po determinant 3.stupňa determinant matice

a) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

24. Riešte rovnicu

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 20$ b) $\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} = 5$.

25. Vypočítajte det $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^3$, ak viete, že det **A** = 3, det **B** = 2.

26. Pomocou determinantu zistite, či sú lineárne závislé alebo nezávislé vektory $\boldsymbol{a_1}$=(3, 2, –1, 2), $\boldsymbol{a_2}$=(2, 1, 2, –1), $\boldsymbol{a_3}$=(4, 3, –2, 4), $\boldsymbol{a_4}$=(5, 4, 3, 5).

27. Aká sú hodnosti matíc v závislosti od rôznych hodnôt *x*?

a) $A=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & y \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 3 & x & 10 & 1 \\ 2 & -1 & x & 3 \\ 5 & 10 & 30 & -5 \end{pmatrix}$.

28. V závislosti od rôznych reálnych hodnôt parametrov *a* a *b* určte hodnosť matice

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & a \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ b & a & -1 & 0 \\ a+b & a+b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & a & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

29. Úpravou na redukovaný trojuholníkový tvar nájdite hodnosť matice $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

30. Pre akú reálnu hodnotu *a* bude h(A)=2 ? $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

31. Nad poľom $\mathbf{Z}_5$ je daná matica $\boxed{A=\begin{pmatrix} a & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$. Určte dim V_A.

32. Pre akú hodnotu parametra *a* sa hodnosť matice $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & a \\ 1 & a & a & 0 \\ 0 & a & a & 1 \\ a & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ rovná jej stupňu?

33. Riešte sústavu lineárnych rovníc

a) $\boxed{\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-2x_4&=6\\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4&=8\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4&=4\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4&=-8 \end{aligned}}$

b) $\begin{aligned} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4&=0\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4&=0\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4&=0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 6x_1-9x_2+7x_3+10x_4&=3\\ 2x_1-3x_2-3x_3-4x_4&=1\\ 2x_1-3x_2+13x_3+18x_4&=1 \end{aligned}$.

34. Úpravou na redukovaný trojuholníkový tvar matice riešte sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5&=1\\ 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=5\\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5&=4\\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5&=0 \end{aligned}.$$

35. GEM riešte sústavu rovníc :

a) $\begin{aligned} 2x_1-5x_2+3x_3+x_4&=5\\ 3x_1-7x_2+3x_3-x_4&=-1\\ 5x_1-9x_2+6x_3+2x_4&=7\\ 4x_1-6x_2+3x_3-x_4&=8 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4&=0\\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4&=0\\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4&=0\\ x_1+2x_2+4x_3-7x_4&=0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-3x_4&=0\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4&=0\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4&=0\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4&=0 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4&=2\\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4&=5\\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4&=3 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x_1-5x_2+3x_3+x_4&=5\\ 3x_1-7x_2+3x_3-x_4&=-1\\ 5x_1-9x_2+6x_3+2x_4&=7\\ 4x_1-6x_2+3x_3-x_4&=8 \end{aligned}$

f) $\boxed{\begin{aligned} x_1+4x_2+5x_3+2x_4&=0\\ x_1+7x_2+5x_3+2x_4&=0\\ 2x_1+9x_2+8x_3+3x_4&=0\\ 3x_1+7x_2+7x_3+2x_4&=0\\ 5x_1+4x_2+9x_3+2x_4&=0 \end{aligned}}$

g) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 5x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 7 \\ -x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 9x_4 &= 5 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned} \quad .$$

36. JEM riešte sústavu lineárnych rovníc:

a) $$\boxed{\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}}$$

b) $$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}}$$

c) $$\begin{aligned} 6x_1 - 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 18x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d) $$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}}$$

e) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12 \\ 2x_2 + 4x_3 + 4x_x + 12x_5 &= 46 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 7x_1 - 4x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 + 3x_4 &= -1 \\ -x_1 - 3x_2 - 10x_3 + 8x_4 &= 1 \end{aligned} \quad .$$

37. Metódou GEM nad poľom $\mathbf{Z}_5$ riešte sústavu

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_3+3x_4&=1\\ 3x_2+2x_3+2x_4&=4\\ 4x_1+x_2+3x_3+2x_4&=3\\ 2x_1+4x_2+2x_3+2x_4&=3\\ 4x_1+3x_2+4x_3+4x_4&=1 \end{aligned} \quad .$$

38. Metódou JEM nad poľom $\mathbf{Z}_5$ riešte sústavu

a) $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+3x_4&=3\\ 4x_1+2x_2+x_3+x_4&=2\\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=4 \end{aligned}$$

b) $$\boxed{\begin{aligned} 2x_1+x_2+4x_3+x_4&=1\\ 3x_1+3x_2+2x_3+2x_4&=2\\ x_2+4x_3+2x_4&=2\\ 2x_1+4x_2+x_3+2x_4&=2 \end{aligned}}$$

c) $$\boxed{\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4&=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4&=1\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4&=0 \end{aligned}}$$

d) $$\boxed{\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3+4x_4&=2\\ x_1+2x_2+x_3+x_4&=3\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4&=1\\ 3x_1+x_2+4x_3+x_4&=2 \end{aligned}}$$

e) $$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5&=4\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4+3x_5&=2\\ 4x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5&=1\\ 3x_1+4x_2+2x_3+3x_4+3x_5&=1 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=2\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4+2x_5&=3\\ x_2+2x_3+2x_4+x_5&=3\\ 4x_2+3x_3+3x_4+4x_5&=2\\ 4x_1+2x_2+3x_3+3x_4+2x_5&=0 \end{aligned} \quad .$$

39. GEM nájdite riešenie sústavy nad poľom $\mathbf{Z}_7$

a) $$\boxed{\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3+x_4&=0\\ 3x_1+3x_3&=0\\ x_1+x_2+4x_3+x_4&=0\\ x_1+x_2+x_3+5x_4&=0 \end{aligned}}$$

b) $$\boxed{\begin{aligned} 3x_1+x_2+5x_3+x_4+6x_5&=1\\ 2x_1+6x_2+4x_4+5x_5&=2\\ x_1+3x_2+5x_3+5x_4&=3\\ 3x_1+5x_2+2x_4+x_5&=5 \end{aligned}} \; .$$

40. JEM riešte nad poľom ($\mathbf{Z}_7$, +, .) systém lineárnych rovníc:

a) $$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5&=0\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5&=0\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4+2x_5&=0\\ 2x_1+5x_2+x_3+2x_4+2x_5&=0 \end{aligned}$$

b) $$\boxed{\begin{aligned} x_1+4x_2+6x_3+4x_4+x_5&=0\\ x_1+x_2+4x_3+6x_4+4x_5&=0\\ 4x_1+x_2+x_3+4x_4+6x_5&=0\\ 6x_1+4x_2+x_3+x_4+4x_5&=0\\ 4x_1+6x_2+4x_3+x_4+x_5&=0 \end{aligned}} \; .$$

41. Nad $\mathbf{Z}_7$ metódou GEM riešte sústavu:
$$\begin{aligned}3x_1+5x_2+x_3+2x_4+4x_5&=0\\2x_1+x_2+3x_3+5x_4+2x_5&=0\\x_1+4x_2+x_3+3x_5&=0\\2x_1+5x_2+6x_3+x_4+3x_5&=0\end{aligned}.$$

42. Nad $\mathbf{Z}_5$ metódou JEM riešte sústavu:
Nad $\mathbf{Z}_7$ metódou GEM riešte sústavu:
$$\begin{aligned}3x_1+x_3+2x_4+4x_5&=0\\2x_1+x_2+3x_3+2x_5&=0\\x_1+4x_2+x_3+3x_5&=0\\2x_1+x_3+x_4+3x_5&=0\end{aligned}.$$

43. Pre aké p má sústava $\begin{aligned}px_1-x_2+3x_3&=2\\-x_1+x_2-x_3&=0\\x_1+px_2+x_3&=4\end{aligned}$ nekonečne veľa riešení?

44. Určte $a\in R$ tak, aby sústavy nemali riešenie:

a) $\begin{aligned}4x_1-x_2+x_3&=-4\\x_1+2x_2-x_3&=4\\-x_1-x_2+ax_3&=8\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}ax_1+2x_2+x_3&=10\\2x_1+x_2+x_3&=7\\x_1+x_2+2x_3&=7\\3x_1+x_2+ax_3&=13\end{aligned}$

c) $\begin{aligned}ax_1+3x_2+2x_3&=5\\x_1+7x_2+3x_3&=13\\3x_1+x_2+ax_3&=3\end{aligned}.$

45. Ako súvisí riešiteľnosť sústavy $\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3&=3\\2x_1-x_2+x_3&=-1\\x_1+7x_2+2x_3&=a\end{aligned}$ od hodnoty parametra a?

46. Koľko riešení má sústava lineárnych rovníc $\boxed{\begin{aligned}ax_1+x_2+x_3&=1\\x_1+ax_2+x_3&=1\\x_1+x_2+ax_3&=1\end{aligned}}$ v závislosti od parametra a?

47. Pre aké reálne a je nulita matice $\boxed{A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-1&0&4\\5&a&-14\end{pmatrix}}$ rovná 1?

48. Matica sústavy homogénneho systému 4 lineárnych rovníc o 4 neznámych má nulitu 2. Koľko parametrov bude obsahovať riešenie?

49. Pre aké reálne hodnoty parametrov a,b má systém $3x+ay=0 \wedge bx-y=0$ netriviálne riešenie?

50. Nájdite inverznú maticu k matici

a) $\boxed{A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}}$

b) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{10}\end{pmatrix}$

c) $\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & -8 & -5\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}}$

d) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

51. Pomocou jednotkovej matice nájdite inverznú maticu k matici $\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}}$.

52. Úpravou na jednotkovú maticu nájdite inverznú maticu k matici $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (ak existuje). Prvky matice sú z množiny zvyškových tried modulo 5.

53. Využitím inverznej matice vypočítajte rovnicu $\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 9 & 7\\ 1 & 11 & 7\\ 7 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

54. Nech $\mathbf{X}=(x_{ij})$. Riešte maticovú rovnicu $\mathbf{XA=B}$, pre dané

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

b) $\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}}$ $\quad \boxed{B=\begin{pmatrix}0 & 6 & -6\\ 4 & 6 & 6\\ 0 & 6 & -6\end{pmatrix}}$

c) $\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}$ $\quad \boxed{B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}}$

d) $\boxed{A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}}$ $\quad \boxed{B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & a\end{pmatrix}}$.

55. Riešte maticovú rovnicu **AX=BA** s neznámou maticou **X** (pomocou inverznej matice):

a) $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$.

56. Využitím inverznej matice riešte rovnicu **XA+2B=C**, kde **X** je neznáma matica

a) $A=\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4&2\\5&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\2&1&-2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&-4&7\\4&2&3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&1\\4&2&3\end{pmatrix}$.

57. Pomocou adjungovanej matice nájdite inverznú maticu k matici:

a) $A=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\3&1&1&1\\4&3&2&1\\5&4&3&2\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\1&1&3&4\\2&-1&2&3\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\3&2&0&0\\1&1&3&4\\2&-1&2&3\end{pmatrix}$.

58. Nad poľom $\mathbf{Z}_5$ nájdite inverznú maticu k matici $A=\begin{pmatrix}0&1&2&4\\1&0&3&3\\3&2&0&0\\4&3&0&0\end{pmatrix}$.

59. Pre akú hodnotu parametra *a* existuje inverzná matica k matici $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&1&-2\\1&1&1&a\\-1&-2&a&-2\end{pmatrix}$?

60. Pre akú hodnotu parametra neexistuje inverzná matica k matici **A**? Nájdite inverznú maticu, ak a=1.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ a & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

61. Pre akú hodnotu parametra *a* neexistuje k matici $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ a & 3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ inverzná matica?

62. Napíšte charakteristický polynóm k matici $A=\begin{pmatrix}2 & a & 11 & 2\\ 1 & 0 & 4 & -1\\ 11 & 4 & 56 & 5\\ 2 & -1 & 5 & -6\end{pmatrix}$.

63. Nájdite vlastné čísla matice:

a) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}-7 & 2 & -1 & 0\\ -23 & 3 & -8 & 1\\ 10 & -2 & 3 & 0\\ -24 & 4 & -7 & 1\end{pmatrix}$.

64. Matica $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ má vlastnú hodnotu λ=1. Nájdite k nej prislúchajúci vlastný vektor.

65. Matica má vlastnú hodnotu λ. Nájdite k nej vlastný vektor

a) $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, λ=2

b) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, λ=2

c) $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ -3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$, λ=5.

66. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice

a) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

f) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

h) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

j) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

k) $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 4 & 11 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

l) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

m) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

n) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

o) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

p) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

67. Pre akú hodnotu a má matica trojnásobnú vlastnú hodnotu?

a) $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Späť na obsah

Vektory a vektorové priestory

1. Pomocou determinantu zistite, či sú lineárne závislé alebo nezávislé vektory
   $\boldsymbol{a_1}$=(3, 2, –1, 2), $\boldsymbol{a_2}$=(2, 1, 2, –1), $\boldsymbol{a_3}$=(4, 3, –2, 4), $\boldsymbol{a_4}$=(5, 4, 3, 5)

2. Pre aké reálne čísla x, y sú vektory (–2, x, 3), (4, –8, y) lineárne nezávislé?

3. Vypíšte všetky vektory, ktoré vytvárajú podpriestor [(1,2), (2,1)] vektorového priestoru $V_2(Z_3)$.

4. Vypíšte všetky prvky podpriestoru vektorového priestoru $V_3(Z_3)$ generovaného vektormi (1, 2, 1), (2, 1, 2).

5. Zistite, či daná podmnožina tvorí vektorový podpriestor priestoru $V_2(R)$:
   a) $A=\{(x,y)|\ x=y+1,\ x,y\in R\}$
   b) $B=\{(x,y)|\ y=k,\ x,y,k\in R\}$
   c) $C=\{(x,y)\ |\ y>0,\ x,y\in R\}$
   d) $D=\{(x,y)\ |\ x=-y,\ x,y\in R\}$

6. Zistite, či vektor a = (-1, -4, 7) je z podpriestoru $V_3(R)$ generovaného vektormi (1,-2,3), (-2,1,-1), (0,-3,5), (-2,-5,9), (-1.-1,2).

7. Zistite, či vo vektorovom priestore $V_3(Z_7)$ sú lineárne závislé alebo nezávislé vektory (1,3,4), (2,1,3), (3,1,4). Z_7 je množina zvyškových tried modulo 7.

8. Zistite, či vo vektorovom priestore $P_3(R)$ sú lineárne závislé alebo lineárne nezávislé.
   a) $1+x,\ x+x^2,\ x^2+x^3,\ x^3+1$
   b) $1+x,\ 1-x,\ x^3+2x^2,\ x^3-2x^2$

9. Zistite, či sú vektory lineárne závislé alebo lineárne nezávislé.
   a) (-1,-1,1,1), (1,-1,1,-1), (-1,1,1,-1), (1,1,1,1)
   b) (1,0,-2,3), (-1,3,0,0), (2,0,1,1), (1,6,-1,4)

10. Nech $(R^3, \oplus_p, \otimes_\alpha)$ je lineárny priestor nad (R, +, .).

a) Sú prvky $b_1 = (1, 1, -1)$; $b_2 = (1, -1, 1)$; $b_3 = (-1, 1, 1)$ lineárne nezávislé?
b) Určte súradnice prvku $x = (1, -3, 4)$ v báze $\beta = \{b1, b2, b3\}$.

11. Nájdite $a \in R$ tak, aby vektory $\alpha_1=(0,a,0,1)$, $\alpha_2=(-1,2,3,1)$, $\alpha_3=(0,0,1,0)$, $\alpha_4=(-2,1,4,5)$ boli lineárne závislé.

12. Sú dané polynómy $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $q(x) = -x^2 + 5x + 1$, $r(x) = x^2 + 9x + 11$ vo vektorovom priestore $P_2(x)$ lineárne závislé? Ak áno, vyjadrite jeden z nich ako lineárnu kombináciu ostatných.

13. Môžu prvky $b_1 = (2, 0, 1)$, $b_2 = (0, -1, 3)$ a $b_3 = (1, 3, 1)$ tvoriť bázu lineárneho priestoru usporiadaných trojíc reálnych čísel nad telesom R? Ak áno, určte súradnice prvku $x = (-4, -4, 3)$ pri tejto báze.

14. Môžu vektory $\mathbf{v_1}=(1,2,6,3)$, $\mathbf{v_2}=(2,6,0,4)$, $\mathbf{v_3}=(3,1,2,2)$, $\mathbf{v_4}=(5,3,5,6)$ tvoriť bázu vektorového priestoru usporiadaných štvoríc nad poľom $(Z_7, \oplus, \otimes)$?

15. Patrí vektor (4,4,4,4) do vektorového podpriestoru [(4,3,2,1), (1,2,3,4), (1,1,1,0)] priestoru $V_4(Z_5)$?

16. Nájdite bázu vektorového priestoru všetkých riešení systému lineárnych rovníc:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$
$$4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

17. Zistite, či $\{1 + x, 1 - x, x^3 + 2x^2, x^3 - 2x^2\}$ je bázou vektorového priestoru $P_3(R)$. Ak áno, aké súradnice má v tejto báze polynóm $p(x)= x^2+x+1$?

18. Môžu polynómy $p(x)=1$, $q(x)=3-x$, $s(x)=(3-x)^2$, $t(x)=(3-x)^3$ tvoriť bázu vektorového priestoru polynómov najviac 3. stupňa? Ak áno, určte súradnice polynómov $r(x)=3x^3+3$ a $u(x)=x^3-1$ v tejto báze.

19. Nájdite bázu a dimenziu vektorového podpriestoru [(1,1,0), (1,2,0), (3,1,0), (2,3,0), (5,6,0)].

20. Určte dimenziu vektorového priestoru [**a** , **b** , **c** , **d** , **e**] a nájdite nejakú jeho bázu, keď **a**=(1,1,1,1,0), **b**=(1,1,-1,-1,-1), **c**=(2,2,0,0,-1), **d**=(1,1,5,5,2), **e**=(1,-1,-1,0,0).

21. Akú dimenziu má vektorový priestor všetkých lineárnych kombinácií prvkov $\mathbf{x_1}=(1,1,1,1,0)$, $\mathbf{x_2}=(1,1,-1,-1,-1)$, $\mathbf{x_3}=(2,2,0,0,-1)$, $\mathbf{x_4}=(1,1,5,5,2)$, $\mathbf{x_5}=(1,-1,-1,0,0)$? Určte niektorú jeho bázu z daných prvkov.

22. Nájdite všetky tie hodnoty parametra c , pre ktoré má vektorový priestor [(3, 1, 1, 4), (c, 4, 10, 1), (1, 7, 17, 3), (2, 2, 4, 1)] najmenšiu dimenziu.

23. Je možné doplniť dané tri vektory (2, 3, 4, 1), (3, 2, 1, 0), (0, 1, 2, 2) na bázu vektorového priestoru $V_4(Z_5)$?

24. Nájdite súradnice polynómov vzhľadom na dané bázy
a) $p(x) = 2x^5 + x^3 - 4x^2 + 3$ v báze $\beta=\{1, 2-x, (2-x)^2, (2-x)^3, (2-x)^4, (2-x)^5\}$
b) $p(x) = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 2$ v báze $\beta=\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4, (x-1)^5\}$
c) $p(x) = 3(x-1)^5 + 15(x-1)^4 + 28(x-1)^3 + 29(x-1)^2 + 25(x-1) + 8$ v báze $\beta= \{ 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 \}$.

25. Vektor $\mathbf{a} \in V_3(R)$ má v báze $\beta_1=\{(1,0,-1), (0,2,1), (1,-1,0)\}$ súradnice $(-1,0,2)$. Aké súradnice má vektor $\mathbf{a}$ v báze $\beta_2=\{(1,-1,0), (0,0,1), (1,0,1)\}$?

26. Polynóm $p_3(x)$ má v báze $\beta_1= \{1, (x-2), (x-2)^2, (x-2)^3\}$ súradnice $p_3(x) = [-1,2,0,-3]_{\beta 1}$. Určte jeho súradnice v báze $\beta_2= \{1, x,x,x3\}$.

27. Nech $V_3(R)$ je vektorový priestor usporiadaných trojíc reálnych čísel. V prípade, že množiny $\alpha=\{(2, 3, 5), (0, 1, 2), (1, 0, 0)\}$ a $\boldsymbol{\beta}=\{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (2, 1, 2)\}$sú dve bázy $V_3(R)$, nájdite maticu prechodu od bázy $\boldsymbol{\alpha}$ k báze $\boldsymbol{\beta}$.

28. V báze $\beta_0 = \{ 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 \}$ má polynóm p(x) súradnice (3; -2; 1; -1; 2; 3). Aké súradnice bude mať v báze $\beta_1 = \{1; 2-x; (2-x)^2; (2-x)^3; (2-x)^4; (2-x)^5 \}$?

29. Polynóm p(x) má v báze $\beta_1=\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ súradnice $(3, 4, -2, 1, 2, 1)$. Aké súradnice bude mať v báze $\beta_2=\{1, 2-x, (2-x)^2, (2-x)^3, (2-x)^4, (2-x)^5\}$?

30. Polynóm p(x) má v báze $\beta_1=\{1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3, (x-2)^4\}$ súradnice $(0, 8, 10, 6, 1)$. Aké súradnice bude mať v báze $\beta_2=\{ 1, x, x^2, x^3, x^4\}$?

31. Polynóm p(x) má v báze $\beta_0=\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 \}$ súradnice (4,-3,5,3,-1,2). Aké sú jeho súradnice v báze $\beta_1=\{1, x-3, (x-3)^2,(x-3)^3, (x-3)^4, (x-3)^5 \}$ a v báze $\beta_2=\{1, 1-x, (1-x)^2,(1-x)^3, (1-x)^4, (1-x)^5 \}$?

32. Dá sa z množiny $M=\{(3,3,8), (3,2,1), (2,4,6), 5,4,13), (1,3,3)\}$ vybrať vektor x a doplniť bázu $\beta=\{(1,2,3), x, (2,1,5)\}$vektorového priestoru $V_3(R)$ tak, aby vektor v=(3,1,2) mal v báze β súradnice $(-7,4,3)_\beta$?

33. Dá sa z množiny $M=\{(1,2,8), (3,2,1), (2,2,5), (5,4,-1)\}$ vybrať taký vektor $\mathbf{x}$, aby vektor $\alpha=(1,3,3)$ mal v báze $\beta= \{(3,-1,2), \mathbf{x}, (1,2,5)\}$ súradnice $(-1, 3, -2)$?

34. Daný je vektorový priestor $V_3(Z_5)$ usporiadaných trojíc nad poľom Z_5 a množina $M=\{(0,0,1), (0,4,3), (0,1,1) \}$. Dá sa z množiny M vybrať prvok *b* a ním doplniť bázu $\boldsymbol{\beta}=\{(1,1,1), (1,0,1), b \}$ tak, aby vektor $\mathbf{v}=(1,4,4)$ mal v báze $\boldsymbol{\beta}$ súradnice (3,3,4)?

35. $V(Z_5)$ je vektorový priestor usporiadaných trojíc prvkov poľa zvyškových tried modulo 5. Daná je množina $M=\{(0,1,0), (0,4,3), (0,4,2), (0,1,1)\}$. Dá sa z množiny M vybrať prvok **b** a doplniť ním bázu $\beta=\{(1,1,1), (1,0,1), \mathbf{b}\}$vektorového priestoru tak, aby prvok $\mathbf{x}=(1, 4, 4)$ mal súradnice $(3, 3, 4)_\beta$?

36. Určte súradnice polynómu $p(x) = 3(x-1)^5 + 15(x-1)^4 + 28(x-1)^3 + 29(x-1)^2 + 25(x-1) + 8$ v báze $\beta=\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 \}$ vektorového priestoru polynómov najviac 5. stupňa s reálnymi koeficientami bez roznásobovania mocnín $(x-1)^k$.

37. Dokážte, že polynómy $p_1(x) = x-5$, $p_2(x) = -3x^2 + 2x - 1$, $p_3(x) = -x^2 + 3x$ tvoria bázu vektorového priestoru polynómov najviac druhého stupňa a nájdite súradnice polynómu $q(x) = 6x^2 - 10x - 4$ v tejto báze.

38. Dokážte, že polynómy $p_1(x) = 10x^2 - 3x + 1$, $p_2(x) = 12x^2 - 2x + 2$, $p_3(x) = -x + 1$ tvoria bázu vektorového priestoru polynómov stupňa najviac druhého nad poľom reálnych čísel a nájdite súradnice polynómu $s(x) = -34x^2 + 10x - 8$ v tejto báze.

39. Vo vektorovom priestore $V_3(R)$ sú dané množiny vektorov $\alpha = \{ (2; -1; 1), (0; 1; 2), (3; -4; 2) \}$ a $\beta = \{ (-3; 1; 5), (-1; -2; -1), (3; 0; 2) \}$. Presvedčte sa, že sú to dve rôzne bázy vektorového priestoru $V_3(R)$ a potom nájdite maticu prechodu od bázy α k báze β.

40. Dané sú dve bázy vektorového priestoru $V_3(R)$: $\beta_1=\{ (0,1,1), (-1,1,0), (0,0,1) \}$ a $\beta_2=\{(1,0,1), (0,1,1), (2,0,1) \}$. Nájdite maticu prechodu od bázy β_1 k báze β_2.

41. Vektor γ má v báze $\beta_1=\{ (0,1,1), (-1,1,0), (0,0,1) \}$ súradnice $(1,-2,0)$. Aké sú súradnice vektora γ v báze $\beta_2=\{(1,0,1), (0,1,1), (2,0,1) \}$, keď matica prechodu od bázy β_1 k báze β_2 je $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$?

42. Zistite, či matice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu 2x2 nad poľom reálnych čísel.

43. Môžu matice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ tvoriť bázu vektorového priestoru všetkých štvorcových matíc stupňa dva nad poľom reálnych čísel? Ak áno, nájdite súradnice matice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ v tejto báze.

44. Sú matice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lineárne nezávislými prvkami vektorového priestoru reálnych matíc typu 2x2 nad poľom reálnych čísel? Ak áno, aké sú súradnice matice $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$ v báze $\beta = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$?

45. Zistite, či daná podmnožina tvorí vektorový podpriestor priestoru $V_2(R)$:

a) $M=\{(x,y) \mid x=y+1, x,y \in R\}$

b) $N=\{(x,y) \mid y=k, x,y,k \in R\}$

46. Množina všetkých diagonálnych matíc stupňa 2 tvorí vektorový priestor nad poľom celých čísel. Dokážte alebo vyvráťte toto tvrdenie.

47. Napíšte vektorový podpriestor prislúchajúci matici a určte jeho dimenziu a bázu:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

48. Pre akú reálnu hodnotu parametra *c* bude mať vektorový podpriestor prislúchajúci matici $A = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ najmenšiu dimenziu?

49. Antisymetrické štvorcové matice stupňa tri tvoria podpriestor vektorového priestoru všetkých štvorcových matíc stupňa tri nad poľom reálnych čísel. Dokážte! Nájdite jeho bázu a určte jeho dimenziu.

50. Nech M je množina reálnych antisymetrických matíc typu 3x3. Presvedčte sa, že množina M s operáciou sčítania matíc a násobku matice reálnym číslom tvorí vektorový priestor nad poľom reálnych čísel. Určte jeho dimenziu, niektorú jeho bázu a nájdite súradnice matice $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$ v tejto báze.

51. Tvoria matice $\boxed{A = \begin{pmatrix} u+v & 2v \\ 2u & u-v \end{pmatrix}}$, kde u,v sú ľubovoľné reálne čísla, vektorový priestor nad poľom reálnych čísel vzhľadom na operáciu sčítania matíc a násobenia matice reálnym číslom? Ak áno, nájdite jednu jeho bázu a určte súradnice matice $\boxed{B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}$ v tejto báze.

52. Ukážte, že $V_2(R)$ vzhľadom na operácie + a · je vektorový priestor. $V_2(R)$ je množina usporiadaných dvojíc reálnych čísel, + je operácia sčítania dvojíc reálnych čísel. · je operácia násobenia usporiadanej dvojice skalárom.

53. Môžu vektory $\mathbf{v_1}$=(1,2,6,3), $\mathbf{v_2}$=(2,6,0,4), $\mathbf{v_3}$=(3,1,2,2), $\mathbf{v_4}$=(5,3,5,6) tvoriť bázu vektorového priestoru usporiadaných štvoríc nad poľom (Z_7, +, .)?

54. *n* vektorov z vektorového priestoru $V_n(R)$ tvorí riadky matice **A**. |**A**|=0,5. Čo viete povedať o vektoroch na základe tejto informácie?

[Spať na obsah]

Kúsok teórie

1. Napíšte príklad relácie ρ , ktorá je tranzitívna, ale nie je ani reflexívna ani symetrická. A presvedčte sa o tom, že má požadované vlastnosti.
2. Napíšte príklad binárnej operácie na zvolenej množine, ktorá nebude mať neutrálny prvok a presvedčte sa o tom.
3. Uveďte príklad relácie ρ, ktorá je reflexívna a tranzitívna, ale nie je symetrická. A presvedčte sa o tom, že má požadované vlastnosti.
4. Na množine celých čísel uveďte príklad binárnej operácie, ktorá nie je ani komutatívna ani asociatívna a presvedčte má, že má požadované vlastnosti.
5. Algebraické štruktúry s jednou binárnou operáciou – definujte + definujte aj súvisiace pojmy.
6. Uveďte príklad binárnej operácie, ktorá spolu s množinou racionálnych čísel bude tvoriť komutatívny monoid. A presvedčte sa o tom.
7. Ukážte, že $V_2(R)$ vzhľadom na operácie + a · je vektorový priestor. $V_2(R)$ je množina usporiadaných dvojíc reálnych čísel, + je operácia sčítania dvojíc reálnych čísel. · je operácia násobenia usporiadanej dvojice skalárom.
8. Nech $M_{m,n}$ je množina všetkých matíc typu *m* x *n* nad daným poľom., znamená sčítanie matíc uvedeného typu, predstavuje násobenie matice skalárom z uvažovaného poľa. Vyslovte a dokážte tvrdenie o ($M_{m,n}$, ,).
9. Na množinách Z, Q, R nájdite binárnu operáciu, ktorá bude:
   a) komutatívna aj asociatívna
   b) nie komutatívna ale asociatívna
   c) komutatívna ale nie asociatívna
   d) ani komutatívna ani asociatívna

   Ukážte, že vami definované operácie spĺňajú požadované vlastnosti.
10. Algebraické štruktúry s dvomi binárnymi operáciami – definujte + definujte aj súvisiace pojmy.
11. Determinant matice – definujte a definujte aj pojmy súvisiace + spôsoby výpočtu determinantu.
12. Napíšte ktoré operácie vykonané na riadkoch matice menia hodnotu determinantu. Napíšte všetky prípady, kedy detA sa rovná nule.
13. Dokážte tvrdenie:
    a) „V grupe existuje ku každému prvku práve jeden symetrizačný prvok."

b) „V okruhu (A, □, □), ktorého aditívna grupa má neutrálny prvok 0, pre ľubovoľné $a \in A$ platí: a□0 = 0□a = 0."

c) „V poli (F,⊕,⊗) platí: ∀ a,b,c∈ F   a⊕ b = a⊕ c => b=c; a⊗ b = a⊗ c => b=c."

d) „ V štvorcovej matici A stupňa n sú riadkové vektory lineárne závislé práve vtedy, keď det A = 0."

e) „Vektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sú lineárne závislé <=> jeden je lineárnou kombináciou ostatných."

f) „Všetky bázy konečno rozmerného vektorového priestoru majú rovnaký počet prvkov."

g) „Riadkové vektory štvorcovej matice A stupňa n sú lineárne závislé <=> detA=0."

h) „Každé pole je obor integrity."

14. Vyslovte
   a) fundamentálnu vetu algebry
   b) nutnú a postačujúcu podmienku existencie inverznej matice
   c) vlastnosti determinantov
   d) Steinitzovu vetu
15. Vyslovte a dokážte
   a) Frobeniovu vetu
   b) asociatívnosť násobenia matíc
   c) vetu o súradniciach vektora vzhľadom na dve rôzne bázy **α** a **β**.
   d) vetu o výpočte súradníc vektora γ pri prechode od bázy **α** k báze **β**.
16. Odvoďte Hornerovu schému a napíšte jej praktické použitie.
17. Napíšte, čo všetko viete získať z jednorázového použitia Hornerovej schémy.
18. Napíšte, na čo všetko je použiteľná opakovaná Hornerova schéma.
19. Odvoďte Taylorov rozvoj polynómu okolo bodu *c* pomocou viacnásobného použitia Hornerovej schémy.
20. Dokončite a dokážte vetu:
   a) V štvorcovej matici $\mathbf{A}=(a_{ij})$ stupňa n sú riadkové vektory lineárne závislé práve vtedy keď.......
   b) Nech $p_n(x)$ je polynóm n-tého stupňa nad poľom komplexných čísel. Nech c je ľubovoľné číslo. Potom ....
   c) Nech S je množina všetkých riešení homogénneho systému *m* rovníc o *n* neznámych. Potom........
   d) Vektory $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n$ tvoria bázu vektorového priestoru V(F) práve vtedy, keď......
   e) Nech $X=(x_1, \ldots, x_n)$ sú súradnice vektora $\gamma \in V_n(R)$ v báze $\alpha=(\alpha_1, \ldots,\alpha_n)$. $Y=(y_1, \ldots, y_n)$ sú súradnice toho istého vektora v báze $\beta=(\beta_1, \ldots,\beta_n)$. Potom Y..........
21. Elementárne matice – definujte; typy elementárnych matíc, vety vzťahujúce sa k elementárnym maticiam.
22. Matica – definujte; špeciálne typy matíc – vymenujte a definujte.
23. Definujte determinant matice a napíšte základné vlastnosti determinantov.
24. Homogénny systém lineárnych rovníc – zadefinujte, vyslovte vetu o riešiteľnosti systému, zadefinujte pojmy súvisiace s témou.
25. Homogénny systém 3 lineárnych rovníc o 5 neznámych má nekonečne veľa riešení. Čo viete usúdiť na základe tejto informácie o vektoroch zodpovedajúcich koeficientom pri premenných $x_1,\ldots,x_5$?
26. Nehomogénny systém lineárnych rovníc –definujte; definujte súvisiace pojmy; napíšte vety o riešiteľnosti systému.
27. Inverzná matica – definujte; vety vzťahujúce sa k inverznej matici; definície súvisiacich pojmov; spôsoby výpočtu.
28. Vlastné hodnoty a vlastné vektory matíc a pojmy s nimi súvisiace.
29. Lineárna závislosť a nezávislosť prvkov vektorového priestoru – definujte, uveďte všetky podmienky lineárnej závislosti (resp. nezávislosti), na ktoré si spomeniete.

30 . Súradnice vektorov vzhľadom na bázu **α**=$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$a bázu **β**=$\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Napíšte všetko, čo k danej téme patrí.

31 . Definujte:

binárnu operáciu;

rozklad množiny;

reláciu ekvivalencie;

ekvivalenciu na množine A;

algebraickú štruktúru;

monoid;

okruh;

grupu;

delitele nuly;

obor integrity;

teleso;

k-násobný koreň polynómu;

polynóm nad poľom F;

ireducibilný polynóm nad poľom F;

reducibilný polynóm nad daným poľom;

rýdzoracionálnu funkciu;

elementárne zlomky;

elementárne riadkové operácie;

elementárnu maticu;

singulárnu maticu;

regulárnu maticu;

inverznú maticu;

antisymetrickú maticu;

symetrickú maticu;

súčin matíc;

n-tú mocninu matice;

inverziu v permutácii;

determinant matice;

ekvivalentnosť matíc;

vedúci prvok riadku matice;

hornú trojuholníkovú maticu;

dolnú trojuholníkovú maticu;

redukovanú trojuholníkovú maticu;

hodnosť matice;

nulitu matice;

defekt matice;

algebraický doplnok prvku a_{ij};

Laplaceov rozvoj determinantu;

Laplaceov rozvoj podľa i-teho riadku;

Laplaceov rozvoj determinantu podľa j-teho stĺpca;

riešenie sústavy lineárnych rovníc;

vektorový priestor nad poľom F;

podpriestor vektorového priestoru;

lineárny obal vektorov $v_1, v_2, \ldots, v_n$;

lineárnu nezávislosť vektorov;

lineárne závislé vektory;

dimenziu vektorového priestoru;

bázu vektorového priestoru;

súradnice vektora vzhľadom na danú bázu;

charakteristický polynóm matice A;

vlastné hodnoty matice;

vlastný vektor prislúchajúci vlastnej hodnote;

Späť na obsah

Výsledky

Algebraické štruktúry

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67.

Polynómy

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40.

41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67.

Matice a determinanty

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. a)

$$A^{-1} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) c) 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67.

Vektory a vektorové priestory

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67.