1 Komplexné čísla

1. Komplexné čísla $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = -3$ zobrazte v komplexnej rovine, vypočítajte ich veľkosť a určte komplexne združené číslo.

2. Vypočítajte:

$(4 - 2i)(4 + 3i) =$

$(3 - 4i)/(3 - 2i) =$

$1/i =$

$(-i)^{79} =$

$(1 + i)^{100} =$

3. Nájdite komplexné číslo, ktorého veľkosť je 2 a obe jeho zložky sú nenulové.

4. Nájdite korene kvadratickej rovnice (v C):
a) $x^2 + 2 = 0$
b) $x^2 + 2x + 2 = 0$
c) $x^2 + x + 1 = 0$

2 Úvod do riešenia lineárnych rovníc

1. Vypracujte tabuľky operácií pre sčitovanie a násobenie v Z_5 a Z_7.

2. Riešte rovnice v Z_k:

a) $3x \oplus 1 = 3$, ak $k = 5$
b) $2x \oplus 2 = 4$, ak $k = 7$

3. Riešte v Z_7 sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} 3x \oplus 2y &= 2 \\ 2x \oplus 3y &= 5 \end{aligned}$$

4. Riešte rovnicu v R (zvoľte vhodný počet parametrov).
a) $2x + 3y = -1$
b) $3x - 2y + 4z = 2$

5. Riešte rovnicu v Z_5 (zvoľte vhodný počet parametrov).
a) $3x \oplus 3y = 4$
b) $2x \oplus 4y \oplus z = 3$

6. Riešte rovnicu v komplexných číslach.

$$(1 + i)x + (2 - i) = 3 + 2i$$

7. Nájdite reálne čísla x a y, pre ktoré platí rovnosť

$$(1+i)x + (2-i)y = 3 + 2i$$

3 Systémy lineárnych rovníc

1. Gaussovou eliminačnou metódou vyriešte (v R) systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \end{array}$$

2. Jordanovou eliminačnou metódou vyriešte (v R) systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

3. Gaussovou eliminačnou metódou vyriešte (v Z_5) systém

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & \oplus & 3x_2 & \oplus & x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & \oplus & 2x_2 & \oplus & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & \oplus & x_2 & \oplus & x_3 & = & 2 \end{array}$$

4. Jordanovou eliminačnou metódou vyriešte (v Z_7) systém

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & \oplus & 2x_2 & \oplus & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & \oplus & 3x_2 & \oplus & 4x_3 & = & 5 \\ 5x_1 & \oplus & 5x_2 & \oplus & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

5. Zistite hodnosť matice (nad R)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Zistite hodnosť matice (nad Z_7)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Gaussovou eliminačnou metódou vyriešte (v R) systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & + & 11x_3 & - & 8x_4 & = & -7 \\ -4x_1 & + & 6x_2 & - & 14x_3 & + & 10x_4 & = & 8 \\ -2x_1 & + & 7x_2 & - & 11x_3 & + & 9x_4 & = & 12 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & -3 \end{array}$$

8. Jordanovou eliminačnou metódou vyriešte (v R) systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & & & + & x_5 & = & -2 \\
3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & & & = & 9 \\
3x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & -5 \\
2x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & & & + & x_5 & = & -6 \\
x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & -1
\end{array}$$

9. Vyriešte systém rovníc (v R)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\
4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 3
\end{array}$$

10. Gaussovou eliminačnou metódou vyriešte v Z_7 systém

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & \oplus & 2x_2 & \oplus & 3x_3 & = & 1 \\
4x_1 & \oplus & 4x_2 & \oplus & x_3 & = & 3 \\
3x_1 & \oplus & 3x_2 & \oplus & 2x_3 & = & 2
\end{array}$$

11. Jordanovou eliminačnou metódou vyriešte v Z_5 systém

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & \oplus & 2x_2 & \oplus & 3x_3 & = & 1 \\
4x_1 & \oplus & 4x_2 & \oplus & 2x_3 & = & 3 \\
3x_1 & \oplus & 3x_2 & \oplus & x_3 & = & 3
\end{array}$$

4 Matice

1. Vypočítajte súčin matíc $A{\cdot}B$ (nad R), kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \\ 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Vypočítajte $A{\cdot}B$ (nad Z_7), kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Vypočítajte mocniny A^2, A^3, A^4 matice (nad R)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Nájdite inverznú maticu k matici A (nad R)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Nájdite inverznú maticu k matici A (nad Z_5)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Nájdite inverznú maticu k matici A (nad Z_7)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Určte hodnotu $t \in R$ tak, aby matica A bola singulárna.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Pomocou inverznej matice nájdite maticu X v rovnostiach $A \cdot X = B$ a $X \cdot A = B$, ak

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Systém rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & z & = & -4 \\ 3x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

zapíšte ako súčin matíc a vyriešte pomocou inverznej matice.

5 Determinanty

1. Vypočítajte determinanty:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

2. Laplaceovým rozvojom vypočítajte determinanty:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

3. Vypočítajte determinanty:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

4. Vyriešte systémy rovníc pomocou Cramerových vzorcov.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & z & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 3z & = & -1 \end{array}$$

5. Vypočítajte determinanty nad Z_7.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

6. Vypočítajte determinanty nad Z_5.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

6 Vektorové priestory

1. Zistite, či daná množina vektorov tvorí vektorový priestor nad poľom F:
a) $U = \{(x, y, 0); x, y \in R\}$ a $F = R$,
b) $V = \{(x, 1, z); x, z \in Z_7\}$ a $F = Z_7$.

2. Zapíšte vektor $\vec{v}$, ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ nad poľom F.
a) $F = R$, $\vec{v} = (5, -6, 4)$, $\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, -3)$, $\vec{v}_3 = (2, -2, -1)$,
b) $F = R$, $\vec{v} = (3, 2, -1, 2)$, $\vec{v}_1 = (2, 1, 2, -1)$, $\vec{v}_2 = (4, 3, -2, 4)$, $\vec{v}_3 = (5, 4, 3, 5)$,
c) $F = Z_5$ $\vec{v} = (3, 2, 3)$, $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_3 = (3, 2, 2)$.

3. Zistite či sú dané vektory nad poľom F lineárne závislé, alebo nezávislé.
a) $F = R$, $(-1, -1, 1, 1)$, $(1, -1, 1, -1)$, $(-1, 1, 1, -1)$, $(1, 1, 1, 1)$,
b) $F = R$, $(1, 0, -2, 3)$, $(-1, 3, 0, 0)$, $(2, 0, 1, 1)$, $(1, 6, -1, 4)$,
c) $F = Z_7$, $(1, 3, 4)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 1, 4)$.

4. Zistite, či dané vektory tvoria bázu vektorového priestoru.
a) $V_3(R)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(2, 1, 2)$,
b) $V_3(Z_5)$, $(2, 1, 2)$, $(3, 3, 1)$, $(1, 2, 2)$.

7 Polynómy

1. Vydeľte polynóm $2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$ polynómom:
a) $x^2 + 1$,
b) $x^3 + 2x^2 + x - 1$,
c) $x + 2$.

2. Určte násobnosť koreňa -2 polynómu $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$ a určte jeho ďalšie korene.

3. Nájdite normovaný polynóm s reálnymi koeficientmi najnižšieho možného stupňa podľa daných podmienok.
a) 2 je jeho dvojnásobný, 3 jednoduchý koreň a absolútny člen je 48,
b) $3 + 3i$ je jeho jednoduchý koreň a absolútny člen sa rovná 54,
c) $1 + i$ je jeho dvojnásobný koreň a absolútny člen je rovný 1.

4. Polynóm $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 6x + 5$ má koreň $2 - i$. Nájdite jeho zvyšné korene.

5. Polynóm $2x^3 - 7x^2 + 16x - 15$ má koreň $1 - 2i$. Nájdite jeho zvyšné korene.

6. Polynóm $2x^5 - 7x^4 + 7x^3 + 9x - 5$ má jeden koreň $2 - i$ a ďalší je z množiny $\{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$. Nájdite jeho zvyšné korene.

8 Rozklad funkcie na parciálne zlomky

1. Rozložte dané racionálne funkcie na parciálne zlomky.

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \qquad \frac{x-1}{(x^2+1)(x+1)} = \qquad \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} =$$

9 Vlastné hodnoty a vlastné vektory

1. Nájdite charakteristický polynóm matice.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Nájdite všetky vlastné hodnoty matíc.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Nájdite vlastný vektor matice prislúchajúci vlastnej hodnote 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$