Taguchiho scenáre v službách záchranárov

Revidované 19.3.2017

Štefan PEŠKO

Katedrový seminár
KMMOA

O čom ?

O riešení problematiky umiestnenia sanitiek, ktoré zaisťujú zdravotnú službu, pri neistej dobe jázd, dobe a mieste zásahu.

Základný model je modifikovanou formuláciou váženého kapacitného p-mediánu s viacerými kritickými no neistými scenármi s neznámou frekvenciou výskytu.

Pri vyhodnocovaní $min - max$ kritéria navrhujem využiť Taguchiho metódu z plánovania experimentov, ktorá ponúka odhad pravdepodobnostného rozloženia kritických scenárov.

Navrhujem tvorbu Taguchiho scenárov pri intervalovom odhade doby jazdy.

Prezentujem možnosť riešenia takto formulovaných problémov pomocou úloh zmiešaného lineárneho programovania (MLP).

Základný $min - max$ model

Je daná množina $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ scenárov a matica ocenení priradenia $\mathbf{C} = (c_{ijk}), i \in I, j \in J, k \in K = \{1, 2, \ldots, m\}$, kde

- I je množina možných stredísk,
- J je množina miest zásahu,
- b_j početnosťou obyvateľov v mieste zásahu $j \in J$,
- J_{ik} je podmnožina miest zásahu J, ktoré sú v scenári s_k v dosahu strediska i,
- p je počet disponibilných sanitiek,
- λ- max. počet zásahov sanitky za sledované obdobie, $\leq \left\lceil \frac{|J|}{p} \right\rceil$.

Pre $i \in I, j \in J_{ik}, k \in K$ máme priraďovaciu premennú

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ak v scenári } s_k \text{ je miesto } j \text{ je priradená stredisku } i \\ 0 & \text{ináč,} \end{cases}$$

výberovú premenné $y_i \in \{0, 1, \ldots, p\}, i \in I$ udávajúcu počet sanitiek v stredisku i a nazáporné premenné w_1, w_2 udávajúce celkové ocenenie priradenia miest zásahu v 1., 2. najhoršom scénári (s najväčšou cenou).

Model MLP s 2 najhoršími scenármi

Problematická interprácia optimálnych (kritických) w_1^*, w_2^*.

$$
\begin{aligned}
& w_1 \to \min && && (1)\\
& \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_{ik}} b_j c_{ijk} x_{ijk} \le w_1 && \forall k \in K && (2)\\
& \sum_{i\in I: j\in J_{ik}} x_{ijk} = 1 && \forall j \in J, \forall k \in K && (3)\\
& \sum_{i\in I} y_i = p && && (4)\\
& \sum_{j\in J_{ik}} x_{ijk} \le \lambda y_i && \forall i \in I, \forall j \in K && (5)\\
& x_{ijk} \in \{0,1\} && \forall i \in I, \forall k \in K, \forall j \in J_{ik} && (6)\\
& y_i \in \{0,1,\ldots,p\} && \forall i \in I && (7)\\
& w_1 \ge 0 && && (8)
\end{aligned}
$$

Druhý najhorší scenár k_2^* s cenou w_2^* dostaneme riešením redukovanej úlohy s $K - \{k_1^*\}$ scenármi, kde k_1^* je najhorší scenár.

Ortogonálnym poľom z s prvkov, ktoré označujeme $L_N(s^m)$ nazývame maticu typu $N \times m$, ktorej stĺpce majú tú vlastnosť, že každá dvojica stĺpcov obsahuje každú každú možnú usporiadanú dvojicu prvkov rovnaký počet krát.

Ortogonálne polia slúžia ako štatisticky postačujúca náhrada $s^m - 1$ experimentov s N experimentami pri analýze vplyvu m faktorov s-hodnotami na výsledky pozorovaní.

Taguchiho ortogonálne pole $L_8(2^7)$

Raghu N. Kacker, Eric S. Lagergren, and James J. Filliben (1991): Taguch's Orthogonal Arrays Are Classical Designs of Experiments, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol., Volume 96, Number 5, pp. 557–591

Row / Col.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	0	0	0	0	0	0	0
2.	0	0	0	1	1	1	1
3.	0	1	1	0	0	1	1
4.	0	1	1	1	1	0	0
5.	1	0	1	0	1	0	1
6.	1	0	1	1	0	1	0
7.	1	1	0	0	1	1	0
8.	1	1	0	1	0	0	1

Table 1: *Dvojhodnotové Taguchiho pole pre 7 faktorov a 8 experimentov.*

Obmedzím sa na ortogonálne pole $\mathbf{T} = L_N(2^m)$, kde $m = |S|$ je počet scenárov a N je počet výpočtov redukovanej $min - max$ úlohy MLP(ν). Zrejme $\mathbf{T} = (t_{\nu k})$ má $t_{\nu k} \in \{0, 1\}$. Označme $K_{\nu 1} = \{k \in K | t_{\nu k} = 0\}$, platí $K_{\nu 1} \subset K$.

Potom MLP(ν1):

$$w_{\nu 1} \to \min \tag{9}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J_{ik}} b_j c_{ijk} x_{ijk} \leq w_{\nu 1} \qquad \forall k \in K_{\nu 1} \tag{10}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \tag{11}$$

$$w_{\nu 1} \geq 0 \tag{12}$$

Analogicky MLP(ν2) pre $K_{\nu 2} = K_{\nu 1} - \{k_1^*\}$, k_1^* je najhorší scenár v úlohe MLP(ν1) t.j. kde je (10) splnené ako rovnosť.

Riešenie Taguchiho inštancií

Označme • kritické scenáre v úlohe MLP(ν).

Row / Col.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	0	0	$0^\bullet$	$0^\bullet$	0	0	0
2.	$0^\bullet$	0	$0^\bullet$	1	1	1	1
3.	$0^\bullet$	1	1	0	$0^\bullet$	1	1
4.	$0^\bullet$	1	1	1	1	0	$0^\bullet$
5.	1	0	1	$0^\bullet$	1	$0^\bullet$	1
6.	1	0	1	1	$0^\bullet$	1	$0^\bullet$
7.	1	1	$0^\bullet$	0	1	1	$0^\bullet$
8.	1	1	$0^\bullet$	1	$0^\bullet$	0	1

Table 2: *Výsledky riešenia pre* 7 *scenárov a* 8 *inštancií.*

Riadkové súčty • nám dávajú pravdepodobnostné rozdelenie kritických scenárov

$$\pi = \left(\frac{3}{16}, 0, \frac{4}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right).$$

Z N optimálnych riešení úloh MLP(ν) dostaneme N kritických hodnôt $w^*_{\nu 1}, w^*_{\nu 2}, \nu \in \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ – váh scenárov, ktoré sú vybrané podmienkou (10) do zoznamu scenárov

$$S^* = [s_{1,k^*_{11}}, s_{1,k^*_{12}}, \ldots, s_{N,k^*_{N1}}, s_{N,k^*_{N2}}],$$

v ktorom sa prvky budú opakovať. Z početnosti výskytu scenárov v zozname $\mathcal{S}^*$ môžeme vypočítať

$$\pi_k = \frac{|\{\nu | s_{\nu k} \in \mathcal{S}^*\}|}{2N}, k \in K$$

resp. z váh scenárov

$$\pi_k = \frac{\sum\limits_{\nu : s_{\nu k} \in \mathcal{S}^*} w^*_{\nu 1} + w^*_{\nu 2}}{\sum\limits_{\nu \in \mathcal{N}} w^*_{\nu 1} + w^*_{\nu 2}}, k \in K.$$

Nech $(\pi_k | k \in K)$ je pravdepodobnostné rozdelenie výskytu scenárov $s_k \in S$.

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{j \in J_{ik}} \pi_k b_j c_{ijk} x_{ijk} \to \min \tag{13}$$

$$\sum_{i \in I : j \in J_{ik}} x_{ijk} = 1 \qquad \forall j \in J, \forall k \in K \tag{14}$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \tag{15}$$

$$\sum_{j \in J_{ik}} x_{ijk} \leq \lambda y_i \qquad \forall i \in I, \forall j \in K \tag{16}$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall j \in J_{ik} \tag{17}$$

$$y_i \in \{0, 1, \ldots, p\} \qquad \forall i \in I \tag{18}$$

Hľadanie Taguchiho scenárov v dopravnej sieti

Nech je v neistej dopravnej sieti modelovanej grafom $G = (V, H)$ ohodnotenie hrán určené intervalom $c(h_\nu) = \langle \underline{c}_\nu, \overline{c}_\nu \rangle, h_\nu \in H$.

Z článku [Aissi & Bazgan & Vanderpooten, 2009], Min–max and min–max regret versions of combinatorial optimization problems: A survey, EJOR; vieme, že v prípade *min* − *max regret* kritérií pre diskrétne kombinatorické problémy sa stačí obmedziť na scenáre obsahujúce len hraničné hodnoty t.j.$\underline{c}_i$ a $\overline{c}_i$.

Ak položíme $m = |H|$, potom má zmysel vybrať taký dostatočný počet inštancií N, pre ktoré existuje ortogonálne pole $\mathbf{T} = L_N(2^m)$. Príslušný scenár $s_k \in S$ je definovaný ohodnotením hrán takto:

$$c_k(h_\nu) = \begin{cases} \underline{c}_\nu & \text{ak } t_{\nu,k} = 0, \\ \overline{c}_\nu & \text{ak } t_{\nu,k} = 1, \end{cases}$$

Ďakujem za pozornosť a trpezlivosť

Príspevek vznikol vďaka podpore grantu VEGA 1/0582/16
Ekonomická optimalizácia procesov na sieťach.