Hry N hráčov

doc. RNDr. Štefan Peško

Katedra matematických metód a operačnej analýzy, FRI ŽU

April 9, 2018

Budeme predpokladať, že každý z N hráčov ($N \geq 2$) je inteligentný hráč.

Najskôr za budeme zaoberať nekooperativnymi hrami, v ktorých hráči nespolupracujú a potom kooperativnymi hrami, kde nielenže spolupracujú ale si môžu v rámci záväzných dohôd prerozdelovať zisky.

Dohoda

Budeme značiť $Q = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\widehat{i} = Q - \{i\}$. Pre $S \subseteq Q$ je $\mathcal{X}_S = \prod_{i \in S} \mathcal{X}_i$ a $\widehat{S} = Q - S$. Pre $i \in Q$ píšeme

$$\breve{M}_i(x_i, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) = M_i(x_1, \ldots, x_N).$$

Definícia 7.1

N-ticu stratégií $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*) \in \mathcal{X}_Q$ nazveme **rovnovážnou (Nashovou) stratégiou** v hre N hráčov

$$\mathcal{H}_N = \big(Q; \mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_N; M_1(\mathbf{x}), \ldots, M_N(\mathbf{x})\big) \tag{1}$$

ak pre $\forall i \in Q$ $\forall y \in \mathcal{X}_{\hat{i}}$ platí

$$\check{M}_i(x_{\hat{i}}^*, y) \leq M_i(x^*). \tag{2}$$

Rovnovážna stratégia nič nehovorí o priebehu konfliktu, ak sa od nej odchýlia dvaja hráči naraz.

Garančný princíp

Hľadá sa taká stratégia každého hráča, ktorá ho čo najlepšie istí proti všetkým voľbám ostatných hráčov. Hráč $i \in Q$ volí čistú stratégiu $x_i \in \mathcal{X}_i$ s výplatou

$$v_i(x_i) = \min_{y \in \mathcal{X}_{\hat{i}}} \check{M}_i(x_i, y), \tag{3}$$

ktorá udáva najmenší možná výplata, ku ktorej môže viesť uplatnenie stratégie x_i. Medzi čistými stratégiam v $\mathcal{X}_i$ nájdeme takú $\overline{x}_i$, ktorá maximalizuje hodnotu $v_i(x_i)$ t.j.

$$v_i(\overline{x}_i) = \max_{x_i \in \mathcal{X}_i,} v_i(x_i) = v_i, \tag{4}$$

s **hodnotou hry hráča** i. Ak sa budú hráči chovať podľa garančného princípu, zvolí každý z nich **garančnú stratégiu** $\overline{x}_i$ s výplatou, ktorá zaručene nebude menšia než hodnota hry v_i

$$M_i(\overline{x}) \geq v_i \quad \forall i \in Q.$$

Preventívny princíp

Preventívny princíp je spojený s rovnovážnou stratégiou hry $x^* \in \mathcal{X}_Q$ určenou nerovnosťami (2). Hráč $i \in Q$ volí preventívne čistú stratégiu $x_i^* \in \mathcal{X}_i$ a očakáva výplatu

$$v_i^* = M_i(x^*). \tag{5}$$

Veta 7.1

Nech má hra $\mathcal{H}_N$ pre všetky $i \in Q$ tieto vlastnosti:

- $\mathcal{X}_i \subseteq E^{m_i}$ sú kompaktné konvexné podmnožiny Euklidovského priestoru, ($m_i \geq 1$ prirodzené čísla),
- $\breve{M}_i(x_i, y)$ sú konkávne funkcie v premenných $x_i \in \mathcal{X}_i$,
- $\sum_{i=1}^{N} M_i(x)$ je spojitá funkcia na $\mathcal{X}_Q$,
- $\forall x_i \in \mathcal{X}_i$ sú funkcie $\breve{M}_i(x_i, y)$ spojité v premenných $y \in \mathcal{X}_{\hat{i}}$,

Potom má hra aspoň jednu N-ticu rovnovážnych stratégií.

Príklad 7.1 – Optimálna produkcia oligopolu

Sú známe nasledujúce parametre modelu:

- N - počet oligopolistov
- x_i - počet jednotiek výrobkov, ktoré môže dodať na trh i-ty oligopolista,
- t - celkový objem výrobkov prichádzajúci na trh za jedno časové obdobie, $t = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$,
- $p = f(t)$ - jednotková cena určená trhom pri objeme dodávok t, (klesajúca funkcia)
- $c_i(x_i)$ - celkové náklady i-teho oligopolistu pri objeme výroby x_i,
- h_i - maximálna výrobná kapacita i-teho oligopolistu.

Treba určiť takú produkciu výroby x_i, aby každý oligopolista bez vzájomných dohôd maximalizoval svoj čistý zisk.

Príklad 7.1 – pokračovanie

Hra $\mathcal{H}_N$ má $\mathcal{X}_i = \langle 0, h_i \rangle$ s výplatnými funkciami

$$M_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) = x_i \cdot f\Big(\sum_{i=1}^{N} x_i\Big) - c_i(x_i).$$

Ak sú splnené predpoklady o parametroch modelu:

- $f(t)$ - pre $t \geq 0$ konkávna funkcia,
- $c_i(x_i)$ - pre $x_i \in \mathcal{X}_i$ konvexné funkcie,
- $M_i(x)$ - pre $x \in \mathcal{X}_Q$ diferencovateľné funkcie.

potom rovnovážnu stratégiu $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)$ nájdeme

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*} \frac{\partial M_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq x_i^* \leq h_i$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*} \frac{\partial M_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} > 0 \;\Rightarrow\; x_i^* = h_i$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*} \frac{\partial M_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} < 0 \;\Rightarrow\; x_i^* = 0.$$

Definícia 7.2

Hovoríme, že v hre $\mathcal{H}_N$ pre i-tého hráča **dominuje** stratégia $x_i \in \mathcal{X}_i$ jeho stratégii $x_i' \in \mathcal{X}_i$ ak

$$\forall y \in \mathcal{X}_{\hat{i}} \quad \check{M}_i(x_i, y) \geq \check{M}_i(x_i', y), \tag{6}$$

$$\exists y \in \mathcal{X}_{\hat{i}} \quad \check{M}_i(x_i, y) > \check{M}_i(x_i', y). \tag{7}$$

Stratégia $\bar{x}_i \in \mathcal{X}_i$ je **nedominovaná** (pre i-tého hráča) ak neexistuje stratégia $x_i \in \mathcal{X}_i$ dominujúca stratégii $\bar{x}_i$.

Stratégia $x_i \in \mathcal{X}_i$ sa nazýva **dominantná** (pre i-tého hráča) ak

$$\forall x_i' \in \mathcal{X}_i, y \in \mathcal{X}_{\hat{i}} \quad \check{M}_i(x_i, y) \geq \check{M}_i(x_i', y). \tag{8}$$

Stratégie $x_i, x_i' \in \mathcal{X}_i$ sa nazývajú (pre i-tého hráča) **ekvivalentné** ak

$$\forall y \in \mathcal{X}_{\hat{i}} \quad \check{M}_i(x_i, y) = \check{M}_i(x_i', y). \tag{9}$$

Definícia 7.3

Hovoríme, že stratégia hry $x \in \mathcal{X}_Q$ **dominuje podľa Pareta** stratégii hry $x' \in \mathcal{X}_Q$ ak

$$\forall i \in Q \quad M_i(x) \geq M_i(x'), \tag{10}$$
$$\exists i \in Q \quad M_i(x) > M_i(x'). \tag{11}$$

Stratégiu hry $x \in \mathcal{X}_Q$ nazývame **optimálnu podľa Pareta** ak nie je dominovaná podľa Pareta žiadnou inou stratégiu $\bar{x} \in \mathcal{X}_Q$.

Stratégiou $x_i \in \mathcal{X}_i$ si i-tý hráč zabezpečuje výhru $\min_{y \in \mathcal{X}_{\hat{i}}} \check{M}_i(x_i, y)$.

Definícia 7.4

Dolnou a **hornou hodnotou hry** i-tého hráča rozumieme výhry h_i^- a h_i^+ určené

$$h_i^- = \max_{x_i \in \mathcal{X}_i} \min_{y \in \mathcal{X}_{\hat{i}}} \check{M}_i(x_i, y), \tag{12}$$

$$h_i^+ = \min_{y \in \mathcal{X}_{\hat{i}}} \max_{x_i \in \mathcal{X}_i} \check{M}_i(x_i, y). \tag{13}$$

Stratégia $x_i \in \mathcal{X}_i$ i-tého hráča sa nazýva **opatrná**, ak platí

$$h_i^- = \min_{y \in \mathcal{X}_{\hat{i}}} \check{M}_i(x_i, y). \tag{14}$$

Hra $\mathcal{H}_N$ sa nazýva **podstatná** ak existuje taká stratégia hry $x \in \mathcal{X}_Q$, že

$$\forall i \in Q \quad M_i(x) \geq h_i^-, \tag{15}$$

$$\exists i \in Q \quad M_i(x) > h_i^-. \tag{16}$$

Veta 7.2

Nech sú priestory stratégií $\mathcal{X}_j, j \in Q$ kompaktné metrické priestory a nech funkcia M_i je spojitá. Potom existuje nedominovaná stratégia i-tého hráča.

Veta 7.3

Za predpokladov Vety 7.2 je ekvivalentné:

- (i) exituje dominantná stratégia i-tého hráča,
- (ii) všetky nedominované stratégia i-tého hráča sú ekvivalentné.

Veta 7.4

Za predpokladov Vety 7.2 je množina všetkých opatrných stratégií i-tého hráča neprázdna kompaktná a má neprázdny prienik s množinou všetkých jeho nedominovaných stratégií.

Veta 7.5

Nech $\mathcal{H}_N$ je nepodstatná hra a nech je x jej stratégia tvorená opatrnými stratégiami hráčov. Potom

- (i) $\forall i \in Q, \forall y \in \mathcal{X}_{\hat{i}}, M_i(x) = h_i^- \leq \check{M}_i(x_i, y)$,
- (ii) x je optimálna stratégia podľa Pareta.

Príklad 7.2 – Maticová hra troch hráčov

Uvažuje hru $\mathcal{H}_3$ troch hráčov určenú maticami $\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^2, \mathbb{A}^3$:

$$\mathbb{A}^1 = \begin{pmatrix} 0,0,3; & 0,0,0 \\ 1,0,0; & 0,0,0 \end{pmatrix}, \mathbb{A}^2 = \begin{pmatrix} 2,2,2; & 0,0,0 \\ 0,0,0; & 2,2,2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}^3 = \begin{pmatrix} 0,0,0; & 0,0,0 \\ 0,1,0; & 0,0,3 \end{pmatrix},$$

ktorých prvkami sú usporiadané trojice výplat hráčov.

Jedná sa o konečnú hru troch hráčov $Q = \{1,2,3\}$, kde 1.hráč volí riadky matíc, 2.hráč volí stĺpce matíc a 3.hráč volí matice. A tak $\mathcal{X}_1 = \{1,2\}$, $\mathcal{X}_2 = \{1,2\}$ a $\mathcal{X}_3 = \{\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^2, \mathbb{A}^3\}$. Výplatné funkcie majú tvar $M_k(i,j,\mathbb{A}) = a^k_{ij}, k \in Q$.

Hra má tri rovnovážne stratégie: prvú $(2,1,\mathbb{A}^1)$ s výplatami $(1,0,0)$, druhú $(2,1,\mathbb{A}^3)$ s výplatami $(0,1,0)$ a tretiu $(1,1,\mathbb{A}^3)$ s výplatami $(0,0,0)$.

Príklad 7.3 – Dilema troch vezňov

Uvažuje dilema troch vezňov ako hru $\mathcal{H}_3$ troch hráčov určenú 2 maticami $\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^2$:

$$\mathbb{A}^1 = \begin{pmatrix} 6,6,6; & 3,8,3 \\ 8,3,3; & 5,5,0 \end{pmatrix}, \mathbb{A}^2 = \begin{pmatrix} 3,3,8; & 0,5,5 \\ 5,0,5; & 2,2,2 \end{pmatrix}.$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade 1.hráč volí riadky matíc, 2.hráč volí stĺpce matíc a 3.hráč volí matice.

Hráči majú dvojprvkové množiny stratégií $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3 = \{1, 2\}$, kde 1 znamená spolupráca a 2 zrada. O akú hru sa jedná?

Definícia 7.5

Koalíciou v hre $\mathcal{H}_N$ nazývame každú podmnožinu $S \subseteq Q$ a **protikoalícou** rozumieme množinu $\widehat{S}$ pre $S \in 2^Q$.
Charakteristickou funkciou hry $\mathcal{H}_N$ s množinou hráčov Q rozumieme (množinovú) reálnu funkciu

$$v : S \to \Re,\ \ S \subseteq Q, \tag{17}$$

ktorá má tieto vlastnosti

$$v(\emptyset) = 0 \tag{18}$$

$$v(S_1) + v(S_2) \leq v(S_1 \cup S_2),\ \ \forall S_1, S_2 \subseteq Q,\ \ S_1 \cap S_2 = \emptyset. \tag{19}$$

Dvojicu (Q, v) nazývame **kooperatívnou hrou N hráčov v tvare charakteristickej funkcie** a číslo $v(S)$ **výhrou koalície S**.

Superaditivita (19) charakteristickej funkcie vyjadruje vlastnosť, že výhra väčšej koalície je najmenej rovná súčtu výhier menších koalícii.

Takéto hry znikajú prirodzeným spôsobom z hier $\mathcal{H}_N$ v NT, kde

$$v(S) = \max_{x \in \mathcal{X}_S} \min_{y \in \mathcal{X}_{\hat{S}}} \sum_{i \in S} \breve{M}_i^{\,S}(x, y), \tag{20}$$

pričom index S hore značí, že najskôr uvažujeme argumenty z množiny S.

Definícia 7.6

Hra (Q, v) sa nazýva **nepodstatná** ak platí

$$v(Q) = \sum_{i \in Q} v(\{i\}). \tag{21}$$

Hra ktorá nie je nepodstatná sa nazýva **podstatná**.

Veta 7.7

Nech K je ľubovoľná koalícia v nepodstatnej hre (Q, v). Potom

$$v(K) = \sum_{i \in K} v(\{i\}).$$

Dôkaz: Pre každú koalíciu K platí zo superadivity (19) nerovnosť $v(K) \geq \sum_{i \in K} v(\{i\})$. Ak by pre nejakú koalíciu K platila ostrá nerovnosť, potom spor: $v(Q) = v(K) + v(\widehat{K}) > \sum_{i \in Q} v(\{i\})$.

Príklad 7.4 – Úspora sekretárky

Riaditeľ podniku má troch námestníkov. Každý námestník má vlastnú sekretárku. Riaditeľ nariadil námestníkom, aby sa dohodli a jednu sekretárku prepustili. Námestník, ktorý prepustí sekretárku bude využívať zvyšné dve sekretárky. Ak sa nedohodnú, budú potrestaní pre neschopnosť. Ak sa dvaja námestníci dohodnú, že má byť prepustená sekretárka toho treteho, riaditeľ bude súhlasiť.

Námestníci sú hráči $Q = \{1, 2, 3\}$. Z hľadiska tvorby koalícií možno silu kolícií oceniť charakteristickou funkciou:

$$
\begin{aligned}
&v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = -1,\\
&v(\{1,2\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,3\}) = 1,\\
&v(\{1,2,3\}) = 0.
\end{aligned}
$$

Hra (Q, v) je podstatná.

Definícia 7.8

Rozdelením hry (Q, v) nazývame ľubovoľnú N-ticu $x \in \Re^N$ spĺňajúcu podmienky:

- (i) **individuálnej racionality**:

$$x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in Q, \tag{22}$$

- (ii) **kolektívnej racionality**:

$$\sum_{i \in Q} x_i = v(Q). \tag{23}$$

Množinu všetkých rozdelení hry (Q, v) označíme $E(v)$.

Definícia 7.9

Nech $\emptyset \neq S \subseteq Q$, $x, y \in E(v)$. Hovoríme, že **rozdelenie** x **dominuje pre koalíciu** S **rozdeleniu** y, píšeme $x \succ_S y$, ak platí

$$x_i > y_i \quad \forall i \in S, \tag{24}$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S). \tag{25}$$

Rozdelenie x **dominuje** rozdeleniu y, píšeme $x \succ y$, ak existuje $\emptyset \neq S \subseteq Q$ tak, že $x \succ_S y$.

Množinu všetkých nedominovaných rozdelení nazývame **jadrom** a značíme $C(v)$.

Poznámka

Podmienka (25) hovorí, že hráči v koalícii S môžu získať dostatočne vysokú hodnotu na to aby každému mohla byť vyplatená čiastka x_i. V jadre hry nemá žiadna skupina hráčov dôvod vytvoriť novú koalíciu s iným rozdelením.

Veta 7.8

Majme hru (Q, v) a jej rozdelenie x. Potom $x \in C(v)$ práve vtedy keď

$$\forall S \subseteq Q \sum_{i \in S} x_i \geq v(S). \tag{26}$$

Veta 7.9

Pre ľubovoľnú hru (Q, v) platí

$$C(v) = \left\{ x \in \Re^N \mid \forall S \subseteq Q \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \sum_{i \in Q} x_i = v(Q) \right\}. \tag{27}$$

Príklad 7.5

Uvažujme hru 3 hráčou určenú tabuľkou

Stratégie	Výplaty
$(1,1,1)$	$(-2,1,2)$
$(1,1,2)$	$(1,1,-1)$
$(1,2,1)$	$(0,-1,2)$
$(1,2,2)$	$(-1,2,0)$
$(2,1,1)$	$(1,-1,1)$
$(2,1,2)$	$(0,0,1)$
$(2,2,1)$	$(1,0,0)$
$(2,2,2)$	$(1,2,-2)$

Množina hráčov je $Q = \{1,2,3\}$ a koalície

$$S \in \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

Príklad 7.5 – pokračovanie

Po normovaní vzťahu (20) máme

$$v(S) = \frac{\max_{x \in \mathcal{X}_S} \min_{y \in \mathcal{X}_{\hat{S}}} \sum_{i \in S} \check{M}_i^{S}(x, y)}{\max_{x \in \mathcal{X}_Q} \sum_{i \in Q} M_i(x)},$$

odkiaľ vypočítame

$$v(\emptyset) = 0, v(\{1\}) = 1/4, v(\{2\}) = -1/3, v(\{3\}) = -1/3,$$
$$v(\{1,2\}) = 1, v(\{1,3\}) = 4/3, v(\{2,3\}) = 3/4, v(\{1,2,3\}) = 1$$

Máme charakteristickú funkciu v a rozdelenie hry $x \in \Re^3$: $x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 \geq 1/3, x_2 \geq= 1/3, x_3 \geq 0.$ Jadro hry

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 \geq 1/3, x_2 \geq= 1/3, x_3 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 1, x_1 + x_3 \geq 4/3, x_2 + x_3 \geq 3/4.$$

je však prázdne.

Definícia 7.10 – Shapleyho vektor

Nech $\mathcal{V}$ je množina hier (Q, v). Nech $u, v \in \mathcal{V}, \alpha \in \Re, \alpha \ > 0$ a π je permutácia množine Q. Definujme pomocou koalícií $S \subseteq Q$ hry $u + v, \alpha u, \pi u$ takto:

$$(u + v)(S) = u(S) + v(S), \tag{28}$$

$$u(\alpha S) = \alpha u(S), \tag{29}$$

$$u(\pi u)(S) = u(\pi^{-1} S). \tag{30}$$

Hráč $i \in Q$ je **podstatný**, ak existuje $i \notin S \subseteq Q$ že

$$v(S \cup \{i\}) > v(S) + v(\{i\}). \tag{31}$$

V opačnom prípade hovoríme o **balvane**.

Definícia 7.10 – pokračovanie

Definujme niekoľko axiómov na funkciu $\phi : \mathcal{V} \to \Re^N$:

- *S1:* $\phi_i[u+v] = \phi_i[u] + \phi_i[v]$,
- *S2:* $\phi_i[\alpha u] = \alpha \cdot \phi_i[u]$,
- *S3:* $\phi_i[\pi u] = \phi_{\pi^{-1} i}[u]$,
- *S4:* $\forall S$ podstatných hráčov Q je $\sum_{i \in S} \phi_i[u] = v(S)$.

Veta 7.10 – Shapley

Existuje, a to jediná, funkcia ϕ vyhovujúca axiómom *S1* – *S4* v tvare

$$\phi_i[v] = \sum_{i \in K \subseteq Q} \frac{(|K|-1)! \cdot (N-|K|)!}{N!} \cdot \big(v(K) - v(K - \{i\})\big).$$

Definícia 7.11

Hodnotu $\phi_i[v]$ nazývame Shaplyho hodnotou hráča i v hre (Q, v).

Shaplyho hodnota berie do úvahy hráčov príspevok k úspechu koalície.

Veta 7.10

Shaplyho vektor $\phi(v)$ je rozdelením v hre (Q, v).

Príklad 7.6 – Kooperatívny oligopol troch oligopolistov

Uvažujme model olygopolu z príkladu 1 s tým, že traja oligopolisti môžu uzatvárať medzi sebou zmluvy o rozsahu dodávok a prerozdelení ziskov.

Nech cenová funkcia riadiaca tvorbu ceny na trhu je

$$f(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3) + 6$$

kde funkčná hodnota udáva jednotkovú cenu pri dodávkach oligopolu x_1, x_2, x_3. Nech sú priestory stratégií

$$\mathcal{X}_1 =< 0, 6 >, \quad \mathcal{X}_2 =< 0, 3 >, \quad \mathcal{X}_3 =< 0, 4 >$$

a nákladové funkcie

$$c_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1 + 2, \quad c_2(x_2) = \frac{1}{2}x_2 + 3,$$
$$c_3(x_3) = \frac{3}{4}x_3 + 1.$$

Príklad 7.6 – pokračovanie

$$M_1(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3) + \frac{11}{2}x_1 - 2$$
$$M_2(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{2}(x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3) + \frac{11}{2}x_2 - 3$$
$$M_3(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{2}(x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2) + \frac{21}{4}x_3 - 1$$

Vypočítame minimaxové hodnoty charakteristickej funkcie

$$v(\{1\}) = \max_{x_1 \in <0,6>} \min_{(x_2,x_3) \in <0,3> \times <0,4>} M_1(x_1,x_2,x_3)$$
$$= \max_{x_1 \in <0,6>} M_1(x_1,3,4)$$
$$v(\{2\}) = \max_{x_2 \in <0,3>} \min_{(x_1,x_3) \in <0,6> \times <0,4>} M_2(x_1,x_2,x_3)$$
$$= \max_{x_2 \in <0,3>} M_1(6,x_2,4)$$
$$v(\{3\}) = \max_{x_3 \in <0,4>} \min_{(x_1,x_2) \in <0,6> \times <0,3>} M_3(x_1,x_2,x_3)$$

Príklad 7.6 – pokračovanie

$$
\begin{aligned}
v(\{1,2\}) &= \max_{(x_1,x_2)\in<0,6>\times<0,3>} \min_{x_3\in<0,4>} (M_1(x_1,x_2,x_3) + M_2(x_1,x_2,x_3)) \\
&= \max_{(x_1,x_2)\in<0,6>\times<0,3>} (M_1(x_1,x_2,4) + M_2(x_1,x_2,4)) \\
v(\{2,3\}) &= \max_{(x_2,x_3)\in<0,3>\times<0,4>} \min_{x_1\in<0,6>} (M_2(x_1,x_2,x_3) + M_3(x_1,x_2,x_3)) \\
&= \max_{(x_2,x_3)\in<0,3>\times<0,4>} (M_1(6,x_2,x_3) + M_3(6,x_2,x_3)) \\
v(\{1,3\}) &= \max_{(x_1,x_3)\in<0,6>\times<0,4>} \min_{x_2\in<0,3>} (M_1(x_1,x_2,x_3) + M_3(x_1,x_2,x_3)) \\
&= \max_{(x_1,x_3)\in<0,6>\times<0,4>} (M_1(x_1,3,x_3) + M_3(x_1,3,x_3)) \\
v(\{1,2,3\}) &= \max_{(x_1,x_2,x_3)\in<0,6>\times<0,3>\times<0,4>} (M_1(x_1,x_2,x_3) + M_2(x_1,x_2,x_3) \\
&+ M_3(x_1,x_2,x_3)) = M_1(6,3,4) + M_2(6,3,4) + M_3(6,3,4)
\end{aligned}
$$

Výpočet Shaplyho rozdelenia $\phi(v)$ ponecháme ;-) na cvičenie.