

Opakované hry

doc. RNDr. Štefan Peško

Katedra matematických metód a operačnej analýzy, FRI ŽU

26. marca 2018

Príklad 6.1 – Vezňovo dilema

Dvaja prichytení lupiči sa môžu rozhodnúť navzájom spolupracovať alebo zradiť. Ak obaja spolupracujú (zapierajú) získa každý 3 body. Ak jeden spolupracuje (zapiera) a druhý zradí (prizná sa) dostáva zradca 5 bodov a ten ktorý naletel 0 bodov. Ak obaja zradia (priznajú sa) získajú po malej odmene 1 bod.

Konflikt možno modelovať dvojmaticovou hrou \mathcal{H}_{AB}

$${}_{AB} = \begin{pmatrix} 3, 3; & 0, 5 \\ 5, 0; & 1, 1 \end{pmatrix}.$$

Stratégia 1 tu znamená rozhodnutie lupičov spolupracovať a stratégia 2 zradiť. Hra má jediná rovnovážnu stratégiu (2, 2), keď obaja lupiči zradia, priznajú sa, no prídu o lup. Ich solidárna stratégia (1, 1) nie je rovnovážna - umožňuje zväčšiť výhru, no je tu pokušenie zradiť kôli maximalizácii úžitku. V tom spočíva dilema.

Definícia 6.1

Dvojmaticovú hru \mathcal{H}_{AB}

$$\text{AB} = \begin{pmatrix} u_s, u_s; & u_o, u_p \\ u_p, u_o; & u_t, u_t \end{pmatrix},$$

kde

$$u_o < u_t < u_s < u_p,$$

so stratégiami a výplatami hráčov:

- 1 - spolupráca so spoluhráčom,
- 2 - zrada spoluhráča
- u_o - užitok z ošklbania spoluhráča,
- u_t - užitok z trestu,
- u_s - užitok z odmeny za solidárnosť,
- u_p - užitok z pokušenia,

je všeobecným modelom hier vezňovo dilemma.

Interpretácia konfliktu

Pod spoluprácou si môžeme predstaviť skoro čokoľvek. Stratégia

- (spolupráca, spolupráca) zodpovedá vzájomne solidárnemu jednaniu napr. 1.hráč pomôže 2.hráčovi postaviť dom a ten mu to oplati, obaja získajú istú hodnotu ve výške odmeny,
- (spolupráca, zrada) zodpovedá situácii, keď 1.hráč pomôže 2.hráčovi, ten však podľahne pokušeniu a tak 1.hráč skončí ošklbaný,
- (zrada, zrada) predstavuje taký stav, keď hráči navzájom nespolupracujú, poprípade sa i navzájom poškodzujú a sú za to potrestaní.

Príklad 6.2 – Budovanie čističky odpadových vôd

pre dva hotely na brehu jazera

- **spolupráca** = vybudovanie čističky,
- **zrada** = nevybudovanie čističky,
- **odmena** = čistá voda priláka zákazníkov, turisti zvýšia zisky ale treba investovať istú čiastku,
- **pokušenie** = využiť zlepšie vzniknuté vybudovaním čističky u druhého hotela bez jej spolufinacovania,
- **trest** = zapáchajúca voda odradí turistom chodiť k jazeru, zisk obom hotelom klesne na nulu.

Príklad 6.3 – Duopolisti

- **spolupráca** = dohoda na optimálnom množstve výroby, ktoré zodpovedá monopolu,
- **zrada** = porušiť dohodu,
- **odmena** = najväčší zisk pre obe oboch duopolistov,
- **pokušenie** = vyrábať o niečo viac ako boli dohodnuté množstvá a tak si zvýšiť zisk na úkor druhého duopolistu,
- **trest** = celkovo menší zisk pre obe strany, súdne spory.

Príklad 6.3 – Postreky škodcov

lesných porastov dvoch susedných revírov

- **spolupráca** = vzájomne postreky porastov oboch revírov
- **zrada** = nechať si urobiť postrek na svojom poraste ale neoplatiť to,
- **odmena** = zbaviť sa škodcov za cenu postreku aj susedných porastov,
- **pokušenie** = zbaviť sa škodcov keď to nič nestoji,
- **trest** = škody spôsobené škodcami v revíre sú väčšie než postrek porastov susedného revíru.

Príklad 6.4 – Verejná doprava

- **spolupráca** = poctivo platiť
- **zrada** = neplatiť,
- **odmena** = verejná doprava funguje, ale istú čiastku mesačne zaplatím,
- **pokušenie** = využívať ale neplatiť,
- **trest** = skoro nik neplatí, verejná doprava je zrušená, musím zaplatiť auto (taxík), čo je oveľa drahšie než poplatok za verejnú dopravu.

Príklad 6.5 – Bitva

- **spolupráca** = bojovať,
- **zrada** = schovať sa,
- **odmena** = víťazstvo s rizikom zranenia,
- **pokušenie** = víťazstvo bez rizika zranenia,
- **trest** = nepriateľ zvíťazí bez boja.

Príklad 6.6 – Nukleárne zbrojenie

- **spolupráca** = odzbrojiť,
- **zrada** = zbrojiť,
- **odmena** = svet bez nebezpečia nukleárneho konfliktu,
- **pokušenie** = byť jediný nukleárne vyzbrojený,
- **trest** = skoro všetci zbroja, platia veľké čiastky za stálej hrozby nukleárneho konfliktu.

Ako sme videli, ak sa uskutoční hra vezňovo dilema **len raz** a nie je možné vopred uzavrieť skutočne záväznú dohodu, a tak zvolí racionálny hráč rovnovážnu stratégiu **zrada**.

Ak sú ale hráči v rovnakej situácii **opakovane**, v nekonečnom alebo neurčitom časovom horizonte – v opakovaných ťahoch (kolách), potom spolupráce nie je nutne iracionálna.

Definícia 6.2 – len verbálna

Stratégia hráča v opakovanej hre je plán, ako sa hráč zachová v priebehu celej hry vo všetkých možných situáciách, v ktorých sa môže ocitnúť.

Príklad 6.7 – Opakované vezňovo dilemma

Uvažujme túto modifikáciu vezňovho dilemma, ktorá predpokladá opakovanie hry \mathcal{H}_{AB}

$$\text{AB} = \begin{pmatrix} 3, 3; & 0, 5 \\ 5, 0; & 1, 1 \end{pmatrix},$$

s pravdepodobnosťou $\frac{2}{3}$.

Ak budú hráči spolupracovať, potom dostávame priemernú výhru každého hráča rovnú

$$\bar{u}_s = 3 + 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 9.$$

K tomuto výsledku dospejú aj dvaja hráči **nevraživci** hrajúci podľa stratégie: **Spolupracuj, pokiaľ ťa druhý nezradí, potom vždy zrad'**.

Je opakovaná voľba stratégie (1, 1) je rovnovážna stratégia?

Príklad 6.7 – nevraživec & deviant

Uvažujme ešte hráča **devianta**, ktorý **hrá niekoľko kôl ako nevraživec no potom zradí aj napriek tomu že protihráč spolupracoval**.

Predstavme si, že 1.hráč je nevraživec a 2.hráč deviant, ktorý zradil prvý krát v $(n + 1)$ -tom kole hry. Pretože 1.hráč je nevraživec bude v ďalších kolách voliť len stratégiu zrady. Deviant tak nemôže získať viac než

$$\bar{u}_D = 3 + 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \dots$$

Deviant by ale mohol získať menej, keby v ďalších kolách volil spoluprácu.

Presvedčte sa, že sa s nevraživcom naozaj neoplatí zradiť, lebo

$$\bar{u}_N - \bar{u}_D > 0.$$

Príklad 6.7 – vrať aké požičáš

Uvažujme oboch hráčov **oplácačov**, ktorí **začnú spolupracou** a **potom opakujú ťah protihráča z predchádzajúceho kola**.

Aj títo hráči sú odsúdeni na večnú spoluprácu!

Definícia 6.3

Nech \mathcal{H}_{AB} dvojmaticová hra a $p \in (0, 1)$. Potom **opakovanou dvojmaticovou hrou s pravdepodobnosťou opakovania p** rozumieme nekonečnú hru

$$(\mathcal{H}_{\text{AB}})_p^\infty = (Q = \{1, 2\}, \mathcal{X}_h, \mathcal{Y}_h, M_1^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}), M_2^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

s priestormi stratégií

$$\mathcal{X}_h = \{(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{X}^\infty : i_{t+1} \in h_1^{t+1}((i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_t, j_t))\}$$

$$\mathcal{Y}_h = \{(j_1, j_2, \dots) \in \mathcal{Y}^\infty : j_{t+1} \in h_2^{t+1}((i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_t, j_t))\}$$

s **reakciami** hráčov v $(t + 1)$ -tom ťahu

$$h_1^{t+1} : (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})^t \rightarrow \mathcal{X}, \quad h_2^{t+1} : (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})^t \rightarrow \mathcal{Y}$$

a **priemernými výplatami** definovanými pre $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h$

$$M_1^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{x_k y_k} \cdot p^k, \quad M_2^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{x_k y_k} \cdot p^k$$

Stratégia vo vezňovom dilemate I.

- **Always Cooperates** – vždy spolupracuje.
- **Always Defects** – vždy zradí.
- **Grudger, Spiteful** – spolupracuje, kým ho protihráč nezradí, potom neodpúšťa a vždy zradí.
- **Tit for Tat** – prvom ťahu spolupracuje, v ďalších opakuje ťah protihráča, ak ho v jednom ťahu zradí protihráč oplatí v ďalšom ťahu zradou, ale odpúšťa a na spoluprácu odpovedá spoluprácou (ako ty mne tak ja tebe).
- **Mistrust** – v prvom kole zradí, v ďalších opakuje ťah protihráča.
- **Naive Prober** – ako Tit for Tat, ale občas zradí napr. raz po 10 -tich kolách, (naivný pokušiteľ)
- **Remorseful Prober** – ako Naive Prober, no snaží sa kajúcne čo najskor odčiniť dôsledok svojej nespravodlivej zrady, na zradu raz zareaguje spoluprácou.

Stratégie vo vezňovom dilemate II.

- **Hard Tit for Tat** – spolupracuje s výnimkou situácie, keď ho protihráč zradil aspoň raz v poledných 10 -tich kolách.
- **Gradual** – polupracuje, kým ho protihráč nezradí. Potom po prvni zrade raz zradí a dvakrát spolupracuje, po druhej zrade dvakrát po sebe zradí a dvakrát spolupracuje, ..., po n-te zrade n-krát po sebe zradí a dvakrát spolupracuje.
- **Hard Tit for 2 Tats** – spolupracuje okrem prípadu, keď ho protihráč zradil aspoň dvakrát po sebe v posledných troch kolách.
- **Soft Tit for 2 Tats** – spolupracuje okrem prípadu, keď ho protihráč zradil v dvoch po sebe idúcich kolách.
- **Slow Tit for Tat** – hra spolupráca, spolupráca a potom ak hral protihráč dvakrát ten istý ťah, hrá ťah opačný.

Stratégie vo vezňovom dilemate III.

- **Soft Majority** – spolupracuje, potom použije stratégiu, ktorú protihráč použil najčastejšie, pri zhode protivníkových početností spolupracuje,
- **Hard Majority** – spolupracuje, potom použije stratégiu, ktorú protihráč použil najčastejšie, pri zhode protivníkových početností ho zradí.
- **Pavlov** – spolupracuje ak v predchádzajúcom kole zvolili obaja hráči tú istú stratégiu, ináč zradí.
- **Random** – spolupracuje s pravdepodobnosťou $1/2$.
- **Hard Joss** – hrá ako Tit for Tat ale spolupracuje len s pp. 0.9.
- **Soft Joss** – hrá ako Tit for Tat ale zradí len s pp. 0.9.
- **Better and Better** – zradí s pravdepodobnosťou poradia kola stále menšou a menšou.
- **Worse and Worse** – zradí s pravdepodobnosťou poradia kola stále väčšou a väčšou.

Prvý Axelrodov turnaj

V roku 1981 usporiadal Robert Axelrod počítačový turnaj, v ktorom sa stretlo 15 rôznych stratégií, od popredných herných teoretikov, pre opakované vezňovo dilemma s dvojmaticou výplat

$$AB = \begin{pmatrix} 3, 3; & 0, 5 \\ 5, 0; & 1, 1 \end{pmatrix},$$

v 200 ťahoch (spolu 15×15 zápasov). Najviac bodov prekvapivo získala jednoduchá stratégia **Tit for Tat**, ktorú zaslal psychológ a odborník na teóriu hier Anatol Rapoport.

V rozbere turnaja Axelrod zistil, že

- **milé stratégie** – nikdy nezradia ako prvé (len v odвете), 8 milých stratégií obsadilo 8 prvých miest, 83,4% – 78,6% podiel z 600 bodov,
- **podlé stratégie** – aspoň niekedy zradia ako prvé, najúspešnejšia mala podiel 66,3%,

Druhý Axelrodov turnaj

Nebol pevne určený počet kôl, ale turnaj prebiehal analogicky s evolučným princípom prirodzeného výberu: Všetkým stratégiám bola priradená výhra určená počtom potomkov (pri konštantnom počte jedincov). Úspešnejšie stratégie sa množili na úkor menej úspešných. Asi po 1000 generáciách bola dosiahnutá stabilita pričom opäť zvíťazila stratégia **Tit for Tat**.

Vežňovo dilema a jeho zovšeobecnenia i naďalej zamestnáva matematikov, sociálnych vedcov a biológov, pretože ilustruje široko rozšírený problém: **ako individuálne ambície vedú ku kolektívnej mizérii**.

Príklad 6.8 Vojnový front

- **spolupráca** = ži a nechaj žiť,
- **zrada** = zabi každého, koho môžeš
- **odmena** = prežitie dlhých vojnových rokov
- **pokušenie** = zneužiť, že nepriateľ je bezbranný, dobrý nepriateľ je len mŕtvy nepriateľ,
- **trest** = všetci v stálom strese, nekrytí...

Príklad 6.9 – Výpomoc samcov paviána anubiho

- **spolupráca** = pomôcť druhému samčakovi pri párení odháňať nepriateľov,
- **zrada** = neposkytnúť pomoc
- **odmena** = úspešné párenie, mláďatá
- **pokušenie** = len využiť pomoc, ušetriť si čas i námahu
- **trest** = menej mláďat.

Čím častejšie samček **A** podporuje samčeka **B**, tým častejšie samček **B** podporuje samčeka **A**.

Príklad 6.10 – Striedanie pohlaných rolí u hermafrodita kanice

- **spolupráca** = ak som teraz samček budem nabudúce samičkou,
- **zrada** = po samčekovi budem zase samčekom,
- **odmena** = harmonické súžitie, veľa potomkov,
- **pokušenie** = zopakovať si ľahkú rolu samčeka,
- **trest** = vzťah sa rozpadne.

Príklad 6.11 – Krmenie hladných jedincov netopierov

- **spolupráca** = po úspešnom love nakrmiť neúspešných jedincov
- **zrada** = nechať si všetko pre seba,
- **odmena** = dlhodobé úspešné prežívanie,
- **pokušenie** = v prípade núdze sa nechať nakrmiť ale úlovok si nechať pre seba,
- **trest** = pro neúspešnom love smrť hladom.