Nekonečný antagonistický konflikt

doc. RNDr. Štefan Peško

Katedra matematických metód a operačnej analýzy, FRI ŽU

12. marca 2018

V ďalšom výklade sa obmedzíme na také hry dvoch hráčov $\mathcal{H}_0$, v ktorých sú priestory stratégií hráčov **nekonečné množiny**. Takýto prístup je výhodný aj v pripadoch ak sú v konečných hrách množiny stratégií príliš početné. Prípadmi nekonečných hier, keď je jedna z množín stratégií konečná, sa nebudeme zaoberať.

Teória nekonečných antagonistických hier nie je vybudovaná tak systematicky ako teória maticových hier, pretože $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ aj $M(x, y)$ môžu mať rôzne matematické vlastnosti.

Príklad 4.1

Hľadáme rovnovážnu stratégiu symetrickej hry

$$\mathcal{H}_0 = \big(Q = \{1,2\}, \{1,2,\dots\}, \{1,2,\dots\}, (j-2)^2 - (i-2)^2\big).$$

M(i,j)	1	2	3	4	...	min
1	0	−1	0	3	...	−1
2	1	0	1	4	...	0
3	0	−1	0	3	...	−1
4	−3	−4	3	0	...	−4
5	−8	−9	−8	−5	...	−9
:	:	:	:	:	...	:
max	1	0	3	4	...	0|0

Hra $\mathcal{H}_0$ má jednu čistú rovnovážnu stratégiu $(2,2)$ s cenou hry 0.

Príklad 4.2

Hľadáme rovnovážnu stratégiu symetrickej hry

$$\mathcal{H}_0 = \big(Q = \{1,2\}, \{1,2,\dots\}, \{1,2,\dots\}, sign(i-j)\big).$$

M(i,j)	1	2	3	4	...	min
1	0	-1	-1	-1	...	-1
2	1	0	-1	-1	...	-1
3	1	1	0	-1	...	-1
4	1	1	1	0	...	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
max	1	1	1	1	...	$1 \mid -1$

Podľa pravidla **minmax**, nemá hra $\mathcal{H}_0$ čistú rovnovážnu stratégiu. Výsledok neprekvapuje, riešením by opäť mohlo byť zmiešané rozšírenie hry ako v maticových hrách.

Definícia 4.1

Nech $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ sú nekonečné spočitateľné množiny. Hru

$$(\mathcal{H}_0) = \big(Q = \{1,2\}, (\mathcal{X}), (\mathcal{Y}), M(\mathbf{x},\mathbf{y})\big), \tag{1}$$

$$(\mathcal{X}) = \{\mathbf{x} : \sum_{i \in \mathcal{X}} x_i = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \tag{2}$$

$$(\mathcal{Y}) = \{\mathbf{y} : \sum_{j \in \mathcal{Y}} y_j = 1, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}, \tag{3}$$

nazveme **zmiešaným rozšírením** hry

$$\mathcal{H}_0 = \big(Q = \{1,2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, M(i,j)\big),$$

kde pre $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in (\mathcal{X}) \times (\mathcal{Y})$ je **stredná výplata**

$$M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i \in \mathcal{X}} \sum_{j \in \mathcal{Y}} x_i \cdot M(i,j) \cdot y_j. \tag{4}$$

Príklad 4.2 – pokračovanie

Hľadajme rovnovážnu zmiešanú stratégiu hry

$$(\mathcal{H}_0) = \left(Q = \{1,2\}, (\mathcal{X}), (\mathcal{Y}), M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot sign(i-j) \cdot y_j\right).$$

Hra je symetrická, $(\mathcal{Y}) = (\mathcal{X}) = \{\mathbf{x} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Ak má podľa vety 2.2 rovnovážnu stratégiu je $(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*)$ s cenou hry 0. Ak by zvolil 2. hráč svoju ľubovoľnú čistú stratégiu, potom je

$$0 \leq M\big(\mathbf{x}^*, (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)\big) = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i^* + \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^*.$$

Ale hra nemá rovnovážnu zmiešanú stratégiu lebo neexistuje konvergentná postupnosť $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ pre ktorú by platilo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^* = 1, \quad x_i^* \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i^* \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^*.$$

Príklad 4.2 ukázal, že neplatí analógia základnej vety maticových hier. Neexistuje racionálny návod na jednanie dvoch inteligentných hráčov hrajúcich túto hru: Dvaja hráči volia nezávisle ľubovoľné prirodzené číslo. Kto zvolí väčšie číslo vyhrá 1 a pri zhode 0.

Problémy vznikajú už pri zmiešanom rozšírení nekonečnej maticovej hry. Dvojitý rad, ako výplatná funkcia, nemusí pre ľubovoľné $M(i,j)$ konvergovať. Ak aj $M(\mathbf{x},\mathbf{y})$ existuje, môžu vznikať kuriózne spojito-diskrétne rozloženia so závislými zložkami, ktoré nevieme stochasticky realizovať.

Východiskom je obmedziť sa na také priestory stratégií, aby bolo možné realizovať získané čisté rovnovážne stratégie. Existenčné vety pre rovnovážne stratégie spravidla vyžadujú **kompaktnosť** množín $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ a **sedlovosť** výplatnej funkcie $M(x,y)$ t.j. konkávnosť v premennej x (stratégii 1. hráča) a konvexnosť v premennej y (stratégii 2. hráča).

Veta 4.1

Nech je

$$\mathcal{H}_0 = (Q = \{1,2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, M(x,y))$$

hra, kde sú $\mathcal{X} \subseteq E_m$ a $\mathcal{Y} \subseteq E_n$ kompaktné konvexné množiny a $M(x,y)$ je spojitá funkcia na $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ a je pre každé $y \in \mathcal{Y}$ konkávna v premennej x a pre každé $x \in \mathcal{X}$ konvexná v premennej y. Potom má $\mathcal{H}_0$ aspoň jednu rovnovážnu stratégiu.

Základná veta maticových hier 3.2 je síce špeciálnym prípadom vety 4.1, ale jej dôkaz neposkytuje vhodnú metódu pre vyhľadávanie rovnovážnych stratégií $\mathcal{H}_0$.

Príklad 4.3 – Ceny a výrobný program

Ústredie firmy určuje cenu výrobkov. Výroba musí rešpektovať obmedzenia plánu pri známych nákladoch a zdrojoch surovín výroby. Treba určiť takú obchodnú politiku firmy t.j. ceny a množstva výrobkov, ktorá rešpektuje možnosti odbytu, pokrytie nákladov a produkciu aspoň garantovaného zisku firmy.

Označme

- n - počet výrobkov,
- m - počet surovín,
- b_i - kapacitné obmedzenie i-tej suroviny,
- a_{ij} - množstvo i-tej suroviny na výroby j-tého výrobku,
- c_j - jednotková cena j-tého výrobku,
- h_j - maximálna predejná cena j-tého výrobku,
- $z^{\min}$ - požadovaný garantovaný zisk firmy,
- $x_j^{\min}$ - známe minimálne množstvo j-tého výrobku,
- x_j - hľadané vyprodukované množstvo j-tého výrobku,
- y_j - hľadaná veľkoobchodná cena j-tého výrobku.

Príklad 4.3 – pokračovanie

Obmedzenia výroby vytvárajú priestor stratégii 1. hráča

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^{\min}\}.$$

Hľadajú sa ceny výrobkov určené ústredím firmy $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ stratégia 2. hráča. Ceny výrobkov musia pokryť výrobné náklady $\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, rešpektovať schopnosť odbytu $\mathbf{y} \leq \mathbf{h}$, vyprodukovať aspoň garantovaný zisk $z_{\min}$ pri splnení očakávanej objednávky $\mathbf{x}^{\min} \in \mathcal{X}$ t.j. $(\mathbf{y} - \mathbf{c})^T \mathbf{x}^{\min} \geq z^{min}$. Tieto podmienky sa dajú zhrnúť do tvaru $\mathbb{D}\mathbf{y} \geq \mathbf{d}$ a máme priestor stratégií 2. hráča

$$\mathcal{Y} = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) : \mathbb{D}\mathbf{y} \geq \mathbf{d}\}.$$

Dostávame antagonistickú hru

$$\mathcal{H}_0 = \big(Q = \{1, 2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \mathbf{c})^T \mathbf{x}\big).$$

Výplatná funkcia je ostro konkávna v $\mathbf{x}$ a ostro konvexná v $\mathbf{y}$ a tak podľa vety 4.1 má hra rovnovážnu stratégiu $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$.

Definícia 4.2

Nech $M(x, y)$ je výplatná funkcia hry $\mathcal{H}_0$ z vety 4.1. Potom

$$\phi(x) = \min_{y \in \mathcal{Y}} M(x, y) \quad \forall x \in \mathcal{X}, \tag{5}$$

nazveme **úžlabinovou** funkciou $M(x, y)$ a

$$\psi(y) = \max_{x \in \mathcal{X}} M(x, y) \quad \forall y \in \mathcal{Y}, \tag{6}$$

nazveme **hrebeňovou** funkciou $M(x, y)$.

Úžlabinová funkcia dáva zaručenú výhry 1. hráča a hrebeňová funkcia zaručenú výhry 2. hráča pri voľbe príslušných stratégií.

Príklad 4.4

Hľadajme rovnovážnu stratégiu hry

$$\mathcal{H}_0 = \left(Q = \{1,2\}, \langle 0,1\rangle, \langle 0,1\rangle, x + xy - y + y^2\right)$$

pomocou úžlabinovej $\phi(x)$ aj hrebeňovej $\psi(y)$ funkcie.

Výplatná funkcia $M(x,y) = x + xy - y + y^2$ a pre $\forall x \in \langle 0,1\rangle$ je $\phi(x) = \min_{y\in\langle 0,1\rangle} M(x,y) = \min\left\{M(x,0), M(x,1), M\left(x, \frac{1-x}{2}\right)\right\}$.
Potom zaručená výhra 1. hráča bude

$$\phi(x^*) = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} \phi(x) = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} \frac{-x^2+6x-1}{4} = 1 = \phi(1).$$

Pre $\forall y \in \langle 0,1\rangle$ je
$\psi(y) = \max_{x\in\mathcal{X}} M(x,y) = \max\left\{M(0,y), M(1,y), M\left(1+y,y\right)\right\}$.
Potom zaručená výhra 2. hráča bude

$$\psi(y^*) = \min_{y\in\langle 0,1\rangle} \{1+y^2\} = 1 = \psi(0).$$

A tak má hra $\mathcal{H}_0$ rovnovážnu stratégiu $(1,0)$ a cenu hry 1.

Príklad 4.5

Hľadajme rovnovážnu stratégiu symetrickej hry

$$\mathcal{H}_0 = \left(Q = \{1, 2\}, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 1\rangle, (x-y)^2\right)$$

pomocou úžlabinovej $\phi(x)$.

Úžlabinová funkcia je definovanná pre $\forall x \in \langle 0, 1\rangle$ takto:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \min_{y \in \langle 0,1\rangle} M(x,y) \\ &= \min\{M(x,0) = x^2, M(x,1) = (x-1)^2, M(x,x) = 0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Potom dostávame

$$x^* = arg \max_{x \in <0,1>} \phi(x) = \delta \in \langle 0, 1\rangle$$

a stratégia druhého hráča je $y^* = x^* = \delta$. Ak však zvolíme napr. $\delta = 1$, stratégia $(x^*, y^*) = (1, 1)$, nie je rovnovážna stratégia, pre $\forall x \in \langle 0, 1\rangle$ neplatí $M(x, y^*) = (x-1)^2 \leq 0 = M(x^*, y^*)$.

Hra $\mathcal{H}_0$ nemá rovnovážnu stratégiu!

Veta 4.2 – (maxmin)

Nech sú $\phi(x)$ a $\psi(y)$ úžlabinová a hrebeňová funkcia výplatnej funkcie $M(x,y)$ hry $\mathcal{H}_0$ z vety 4.1. Nech existujú extrémy $\max_{x\in\mathcal{X}} \phi(x)$ *a* $\min_{y\in\mathcal{Y}} \psi(y)$. *Rovnosť*

$$\max_{x\in\mathcal{X}} \phi(x) = \min_{y\in\mathcal{Y}} \psi(y) \tag{7}$$

platí práve vtedy, keď v hre $\mathcal{H}_0$ existuje rovnovážna stratégia. Spoločná hodnota extrémov (7) je potom cenou hry.

($\Rightarrow$) Ukážeme ako z existencie rovnovážnej stratégie vyplýva rovnosť extrémov (7). Z definície úžlabinovej funkcie (5) máme

$$\forall x \in \mathcal{X}\ \forall y \in \mathcal{Y} \quad \phi(x) \le M(x,y) \tag{8}$$

a teda

$$\max_{x\in\mathcal{X}} \phi(x) \le \max_{x\in\mathcal{X}} M(x,y) = \psi(y)$$

takže

$$\max_{x\in\mathcal{X}} \phi(x) \le \min_{y\in\mathcal{Y}} \psi(y). \tag{9}$$

Veta 4.2 – pokračovanie

Ak je (x^*, y^*) rovnovážna stratégia $\mathcal{H}_0$, potom pre $\forall x \in \mathcal{X}\ \forall y \in \mathcal{Y}$

$$\psi(y^*) = \max_{x \in \mathcal{X}} M(x, y^*) \leq M(x^*, y^*) \leq \min_{y \in \mathcal{Y}} M(x^*, y) = \phi(x^*)$$

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} \psi(y) \leq M(x^*, y^*) \leq \max_{x \in \mathcal{X}} \phi(x) \tag{10}$$

Z (9) a (10) máme $\max_{x \in \mathcal{X}} \phi(x) = v = \min_{y \in \mathcal{Y}} \psi(y)$.

($\Leftarrow$) Predpokladajme existenciu extrémov funkcií $\phi(x), \psi(y)$

$$x' = arg \max_{x \in \mathcal{X}} \phi(x), \quad y' = arg \min_{y \in \mathcal{Y}} \psi(y).$$

Potom pre $\forall x \in \mathcal{X}\ \forall y \in \mathcal{Y}$ platí

$$M(x, y') \leq M(x', y') = M(arg \max_{x \in \mathcal{X}} M(x, y'), y')$$
$$M(x', y) \geq M(x', y') = M(x', arg \min_{y \in \mathcal{Y}} M(x', y))$$

a tak z rovnosti (7) plynie, že (x', y') je rovnovážna stratégia hry.

Gradientná metóda

hľadá sedlový bod funkcie $M(x,y)$ v iteračných krokoch:

Vyjde sa z nejakej stratégie hry $x(0) \in \mathcal{X}, y(0) \in \mathcal{Y}$ a konštruuje sa postupnosť $\{x(t), y(t)\}_{t=1}^{N}$, kde

$$x(t+1) = \begin{cases} x(t) + \rho \dfrac{\partial M(x(t), y(t))}{\partial x} & \text{ak } x(t+1) \in \mathcal{X} \\ \\ arg \min\limits_{x \in \mathcal{X}} |x(t+1) - x| & \text{ak inak} \end{cases} \tag{11}$$

$$y(t+1) = \begin{cases} y(t) - \rho \dfrac{\partial M(x(t), y(t))}{\partial y} & \text{ak } y(t+1) \in \mathcal{X} \\ \\ arg \min\limits_{y \in \mathcal{X}} |y(t+1) - y| & \text{ak inak} \end{cases} \tag{12}$$

Dĺžka iteračného kroku ρ je vopred daná, $\rho > 0$, prípadne sa v iteráciách zmenšuje. Počet krokov metódy N je buď fixovaný alebo určený nejakým kritériom napr. danej ε presnosti výpočtu.

Príklad 4.6

Sformulujme iteračné kroky gradientnej metódy pre hru

$$\mathcal{H}_0 = \left(Q = \{1, 2\}, \langle 0, 1\rangle^2, \langle 0, 1\rangle, 3x_1 + x_1^2 + x_2 - x_2^2 - y + y^3 + x_1 y\right).$$

Krok 0: $x_1(0) = x_2(0) = y(0) = 0$ a $\rho = 0.01$.
Krok $t+1$: $t = 0, 1, \dots, N-1$

$$x_1(t+1) = \begin{cases} x_1(t) + \rho(3 + 2x_1(t) + y(t)) & \text{ak } x_1(t+1) \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 & \text{ak } x_1(t+1) > 1 \\ 0 & \text{ak } x_1(t+1) < 0 \end{cases}$$

$$x_2(t+1) = \begin{cases} x_2(t) + \rho(1 - 2x_2(t)) & \text{ak } x_2(t+1) \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 & \text{ak } x_2(t+1) > 1 \\ 0 & \text{ak } x_2(t+1) < 0 \end{cases}$$

$$y(t+1) = \begin{cases} y(t) - \rho(-1 + 3y(t)^2 + x_1(t)) & \text{ak } y(t+1) \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 & \text{ak } y(t+1) > 1 \\ 0 & \text{ak } y(t+1) < 0 \end{cases}$$

Definícia 4.3

Polyedrickou hrou nazveme hru

$$\mathcal{H}_P = \left(Q = \{1,2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathbf{x}^T \mathbb{P} \mathbf{y}\right) \tag{13}$$

s priestormi stratégií

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in E_m : \mathbb{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \tag{14}$$

$$\mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in E_n : \mathbb{D}\mathbf{y} \geq \mathbf{d}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}, \tag{15}$$

kde typ matíc $\mathbb{P}, \mathbb{B}, \mathbb{D}$ je $m \times n, m_B \times m, m_D \times n$, a m_B, m_D sú ľubovoľné.

Výplatná funkcia $M(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je bilineárna forma a $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ sú konvexné polyedrické množiny.

Rovnovážna stratégia plyedrickej hry

Úžlabinová funkcia plyedrickej hry $\mathcal{H}_P$ je

$$\phi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}} \mathbf{x}^T \mathbb{P}\mathbf{y} \tag{16}$$

Potom

$$\mathbf{x}^* = arg \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \min_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}} \mathbf{x}^T \mathbb{P}\mathbf{y}. \tag{17}$$

Hodnota úžlabinovej funkcie $\phi(\mathbf{x})$ sa vypočíta ako optimálne riešenie úlohy LP

$$\mathbf{x}^T \mathbb{P}\mathbf{y} \to \min,\ \mathbb{D}\mathbf{y} \geq \mathbf{d},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{18}$$

Duálna úloha k úlohe (18) je úloha LP

$$\mathbf{d}^{\mathbf{T}}\mathbf{z} \to \max,\ \mathbb{D}^T\mathbf{z} \leq \mathbb{P}^T\mathbf{x},\ \mathbf{z} \geq \mathbf{0}. \tag{19}$$

Rovnovážna stratégia plyedrickej hry – pokračovanie

Ak pridáme k podmienkam úlohy (19) aj podmienku $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ dostaneme úlohu LP

$$\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{z} \to \max,\ \mathbb{D}^{T}\mathbf{z} - \mathbb{P}^{T}\mathbf{x} \leq \mathbf{0},\ \mathbb{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{z} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{20}$$

Obdobne možno výsť z hrebeňovej funkcie

$$\psi(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \mathbf{x}^{T}\mathbb{P}\mathbf{y}, \tag{21}$$

ktorej hodnota sa vypočíta ako riešenie úlohy LP

$$\mathbf{x}^{T}\mathbb{P}\mathbf{y} \to \max,\ \mathbb{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{22}$$

a po prechode k duálnej úlohe a doplnení dostaneme úlohu LP

$$\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} \to \min,\ \mathbb{B}^{T}\mathbf{w} - \mathbb{P}\mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ \mathbb{D}\mathbf{y} \geq \mathbf{d},\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{23}$$

Príklad 4.3 – Ceny a výrobný program (riešenie)

Výplatná funkcia má tvar $M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \mathbf{c})^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$ a priestory stratégií

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in E_n : \mathbb{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^{min}\}$$
$$\mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in E_n : \mathbb{D}\mathbf{y} \geq \mathbf{d}\}$$

Pomocou substitúcie $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{c}$ a $\mathbf{g} = \mathbf{d} - \mathbb{D}\mathbf{c}$ upravíme

$$\mathcal{Y} = \{\mathbf{v} \in E_n : \mathbb{D}\mathbf{v} \geq \mathbf{g}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}\}$$

Rovnovážny výrobný program $\mathbf{x}^*$ dostaneme riešením úlohy LP:

$$\mathbf{g}^{\mathbf{T}}\mathbf{z} \to \max,\ \ \mathbb{D}^{T}\mathbf{z} - \mathbf{x} \leq \mathbf{0},\ \ \mathbb{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{x}^{min},\ \ \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$$

Rovnovážne veľkoobchodné ceny $\mathbf{y}^*$ dostaneme riešením úlohy LP:

$$\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{w} \to \min,\ \ \mathbb{A}^{T}\mathbf{w} - \mathbf{v} \geq \mathbf{0},\ \ \mathbb{D}\mathbf{v} \geq \mathbf{g},\ \ \mathbf{v} \geq \mathbf{0},\ \ \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$$

zo vzťahu $\mathbf{y}^* = \mathbf{v}^* - \mathbf{c}$.

Príklad 4.4 – Súboj dvoch bojových lietadiel

Lietadlá sú vyzbrojené po jednej rakete VZDUCH-VZDUCH. Úlohou oboch protivníkov (hráčov) je určiť vzdialenosť pre odpálenie rakety. Ak pilot čaká s odpálením rakety, zväčšuje pravdepodobnosť, že bude protivníkom zostrelený. Ak niektorý hráč vystrelí a minie protivníkovo lietadlo, môže protivník zaujať výhodnú pozíciu a s istotou zostreliť naozbrojeného súpera.

Výsledkom súboja je:

- *1*, zostrelený protihráč,
- *0*, obaja hráči minú alebo sú zostrelení,
- *-1*, zostrelený hráč.

Označme $p(x)$ pravdepodobnosť zásahu 2. hráča, ak vystrelí 1. hráč vo vzdialenosti x od 2. hráča a $q(y)$ pravdepodobnosť zásahu 1. hráča, ak vystrelí 2. hráč vo vzdialenosti y od 1. hráča.

Raketa s väčším dostrelom je efetívnejšia. Predpokladajme, že maximálny dostrel rakiet je jednotkový. Potom $p(x), q(y)$ sú nerastúce funkcie na intervale $\langle 0, 1\rangle$ s vlastnosťou $p(0) = q(0) = 1$.

Príklad 4.4 – pokračovanie

Dostávame hru

$$\mathcal{H}_0 = \big(Q = \{1, 2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, M(x, y)\big),$$

kde $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \langle 0, 1 \rangle$ a strednú hodnotu výhry 1. hráča vypočítame:

$$M(x, y) = \begin{cases} 1 \cdot p(x) + (-1) \cdot (1 - p(x)) & \text{ak } x > y \\ 1 \cdot p(x) \cdot (1 - q(y)) + (-1) \cdot q(y) \cdot (1 - p(x)) & \text{ak } x = y \\ 1 \cdot (1 - q(y)) + (-1) \cdot q(y) & \text{ak } x < y \end{cases}$$

Racionálnou stratégiu letcov je taká vzdialenosti lietadiel z keď obaja letci súčasne vystrelia vo vzdialenosti určenej rovnicou $p(z) + q(z) = 1$. Ľahko overíme, že $M(z, z) = p(z) - q(z)$ je cenou hry pri rovnovážnej stratégii $(z, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ v hre $\mathcal{H}_0$.

Príklad 4.5 – O trhoch (riešenie príkladu 2.1)

Hľadáme rovnovážnu stratégiu hry

$$\mathcal{H}_0 = \left(Q = \{1,2\}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i + x_i - b_i - y_i)\cdot s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i}\right),$$

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in E_n : \sum_{i=1}^{n} x_i = a, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \quad \mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in E_n : \sum_{i=1}^{n} y_i = b, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}.$$

Možno očakávať, že racionálne rozdelenie zakázok bude proporcionálne, a tak rovnovážnou stratégiou $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$:

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{s_1 \cdot a}{s}, \frac{s_2 \cdot a}{s}, \ldots, \frac{s_n \cdot a}{s}\right), \quad \mathbf{y}^* = \left(\frac{s_1 \cdot b}{s}, \frac{s_2 \cdot b}{s}, \ldots, \frac{s_n \cdot b}{s}\right),$$

kde $s = \sum_{i=1}^{n} s_i$. Potom by bola cena hry $\mathcal{H}_0$ rovná

$$M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \frac{s \cdot (a-b)}{a+b}.$$

Príklad 4.5 – O trhoch (dokončenie)

Najskôr ukážeme, že $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ je $M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$. Označíme

$$f(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i \cdot a - s \cdot y_i}{s_i \cdot a + s \cdot y_i} s_i = M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

Treba ukázať, že platí

$$M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = s \cdot \frac{a - b}{a + b} \leq \min_{y \in \mathcal{Y}} f(\mathbf{y}).$$

Funkcia $f(\mathbf{y})$ je konvexná funkcia, pretože je súčtom n konvexných funkcií. Jej Lagrangián

$$F(\mathbf{y}, \lambda) = f(\mathbf{y}) + \lambda(\sum_{i=1}^{n} y_i - b)$$

má minimum v $\mathbf{y}^*$ a tak $f(\mathbf{y}^*) = s \cdot \frac{a-b}{a+b}$.
Analogicky sa dokáže prípad, že $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$ je $M(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$.