Maticové hry

doc. RNDr. Štefan Peško

Katedra matematických metód a operačnej analýzy, FRI ŽU

9. marca 2018

Antagonistický konflikt dvoch hráčov s konečnými priestormi stratégií modeluje maticová hra.

Definícia 3.1

Konečnú hra s nulovým súčtom

$$\mathcal{H}_{\mathbb{A}} = \left(Q = \{1,2\}, \mathcal{X} = \{1,\dots,m\}, \mathcal{Y} = \{1,\dots,n\}, M(i,j) = a_{ij}\right)$$

ktorá je určená reálnou maticou $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i\in\mathcal{X},\ j\in\mathcal{Y}}$ nazveme **maticová hra**. Maticu $\mathbb{A}$ nazývame **matica hry**.

Príklad 3.1

Uvažujme $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ jednoznačne určenú maticou

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 3 & 7 \\ 7 & 8 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Prvý hráč má tri stratégie zatiaľ čo druhý hráč má štyri stratégie.

Definícia 3.2

Nech $\mathbb{A}$ je matica hry. Stratégiu $(i^*, j^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ maticovej hry $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ nazveme **rovnovážnou**, ak pre $\forall i \in \mathcal{X}$ a $\forall j \in \mathcal{Y}$ je

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}. \tag{1}$$

Rovnovážna stratégia (i^*, j^*) musí vyhovovať vzťahom

$$a_{i^*j^*} = \max_{i \in \mathcal{X}} a_{ij^*}$$

$$a_{i^*j^*} = \min_{j \in \mathcal{Y}} a_{i^*j}$$

ktoré umožňujú efektívne hľadanie rovnovážnej stratégie.

Príklad 3.1 – pokračovanie

Môžeme pokúsiť nájsť maximum z riadkových miním, $\max\{4, -3, -1\} = 4$, a minimum zo stĺpcových maxím, $\min\{7, 8, 4, 6\} = 4$. Máme teda $a_{i^*j^*} = a_{1,4} = 4$.

Lema 3.1

Nech $\mathbb{A}$ je reálna matica. Potom platí

$$\max_{i\in\mathcal{X}}\min_{j\in\mathcal{Y}} a_{ij} \le \min_{j\in\mathcal{Y}}\max_{i\in\mathcal{X}} a_{ij} \tag{2}$$

Z vlastnosti maxima je

$$a_{ij} \le \max_{i\in\mathcal{X}} a_{ij}$$

Index j je na oboch stranách nerovnosti voľný a tak

$$\min_{j\in\mathcal{Y}} a_{ij} \le \min_{j\in\mathcal{Y}}\max_{i\in\mathcal{X}} a_{ij}$$

Ľavá strana nerovnosti však nezávisí od indexu i a odhaduje jej pravú stranu zdola, takže platí

$$\max_{i\in\mathcal{X}}\min_{j\in\mathcal{Y}} a_{ij} \le \min_{j\in\mathcal{Y}}\max_{i\in\mathcal{X}} a_{ij}.$$

Príklad 3.2

Majme maticu

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Maximum z riadkových miním je $\max\{3, 1, 0\} = 3$ a minimum zo stĺpcových maxím je $\min\{4, 4\} = 4$ a tak dostáme ostrú nerovnosť $3 < 4$.

Veta 3.1 – nutná a postačujúca podmienka

Stratégia (i^*, j^*) *je rovnovážna stratégia hry* $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ *práve vtedy, keď*

$$\max_{i\in\mathcal{X}} \min_{j\in\mathcal{X}} a_{ij} = \min_{j\in\mathcal{Y}} \max_{i\in\mathcal{X}} a_{ij} = a_{i^*j^*}. \tag{3}$$

$(\Rightarrow)$: Z definície (i^*, j^*) a z vlastností min, *max* máme

$$\min_{j\in\mathcal{Y}} \max_{i\in\mathcal{X}} a_{ij} \leq \max_{i\in\mathcal{X}} a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq \min_{j\in\mathcal{Y}} a_{i^*j} \leq \max_{i\in\mathcal{X}} \min_{j\in\mathcal{Y}} a_{ij}$$

Z platnosti lemy 3.1 s opačnými nerovnosťami máme (3).
$(\Leftarrow)$: Nech platí (3). Potom pre $\forall i \in \mathcal{X}$

$$a_{ij^*} \leq \max_{i\in\mathcal{X}} a_{ij^*} = \max_{i\in\mathcal{X}} \min_{j\in\mathcal{Y}} a_{ij} = a_{i^*j^*}$$

a pre $\forall j \in \mathcal{Y}$

$$a_{i^*j} \geq \min_{j\in\mathcal{Y}} a_{i^*j} = \min_{j\in\mathcal{Y}} \max_{i\in\mathcal{X}} a_{ij} = a_{i^*j^*},$$

a tak platí (1).

Príklad 3.2 – pokračovanie

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hra $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ nemá rovnovážnu stratégu.

Ak nemá maticová hra rovnovážnu stratégiu, potom má zmysel hľadať pravdepodobnosti s akou majú hráči voliť čisté stratégie $i \in \mathcal{X}, j \in \mathcal{Y}$, čo vedie k nekonečnej hre v NT. Jej priestory stratégií budeme značiť $(\mathcal{X}), (\mathcal{Y})$.

Definícia 3.3

Nech je daná maticová hra $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$.

$$(\mathcal{H}_{\mathbb{A}}) = \left(Q = \{1,2\}, (\mathcal{X}), (\mathcal{Y}), M(\mathbf{x},\mathbf{y})\right) \tag{4}$$

$$(\mathcal{X}) = \{\mathbf{x} \in E_m : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \tag{5}$$

$$(\mathcal{Y}) = \{\mathbf{y} \in E_n : \sum_{j=1}^{n} y_i = 1, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \tag{6}$$

$$M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \mathbf{x}^T \mathbb{A}\mathbf{y} \tag{7}$$

nazveme **zmiešaným rozšírením maticovej hry**. *Prvky* $(\mathcal{X}), (\mathcal{Y})$ *nazývame* **zmiešané stratégie** *a prvky* $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ *nazývame* **čisté stratégie**. *Funkciu* $M(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *nazývame* **strednou hodnotou platby** *resp.* **cena hry**.

Ak 1.hráč zvolí zmiešanú stratégiu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T \in (\mathcal{X})$ a 2.hráč zvolí zmiešanú stratégiu $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \in (\mathcal{Y})$ sú voľby čistých stratégií nezávislé náhodné veličiny, pričom $x_i \cdot y_j$ udávajú s ako pravdepodobnosťou bude zvolená čistá stratégia (i, j).

Definícia 3.4

Stratégiu $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in (\mathcal{X}) \times (\mathcal{Y})$ *a nazveme* **rovnovážnou zmiešanou stratégiou** *v* $(\mathcal{H}_{\mathbb{A}})$ *, ak pre* $\forall \mathbf{x} \in (\mathcal{X})$ *a* $\forall \mathbf{y} \in (\mathcal{Y})$ *je*

$$\mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{y}^* \leq \mathbf{x}^{*T} \mathbb{A} \mathbf{y}^* \leq \mathbf{x}^{*T} \mathbb{A} \mathbf{y}. \tag{8}$$

Príklad 3.3

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ nemá rovnovážne čisté stratégie. Ale $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T = \mathbf{y}^*$ sú rovnovážne zmiešané stratégie hráčov v $(\mathcal{H}_{\mathbb{A}})$ so strednou hodnotou platby

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2).\mathbb{A}.(y_1, y_2)^T = x_1 y_2 + x_2 y_1,$$

kde

$$(\mathcal{X}) = \{(x_1, x_2)^T \in E_2 : x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 \geq 0\},$$
$$(\mathcal{Y}) = \{(y_1, y_2)^T \in E_2 : y_1 + y_2 = 1, y_1, y_2 \geq 0\},$$
$$M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \frac{1}{2}.$$

Pretože platí

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2} = M(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}).$$

Lema 3.1

Rovnovážna stratégia zmiešaného rozšírenia maticovej hry sa nezmení, ak ku každému prvku matice hry pripočítame to isté nenulové číslo c. Cena hry s takto pozmenenou maticou hry bude $v + c$, kde v je cena pôvodnej hry.

Nech je $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in (\mathcal{X}) \times (\mathcal{Y})$ rovnovážna zmiešaná stratégia v $(\mathcal{H}_{\mathbb{A}})$ t.j. $\forall \mathbf{x} \in (\mathcal{X})$ a $\forall \mathbf{y} \in (\mathcal{Y})$ je

$$\mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{y}^* \leq \mathbf{x}^{*T} \mathbb{A} \mathbf{y}^* \leq \mathbf{x}^{*T} \mathbb{A} \mathbf{y}.$$

Nech $\mathbb{E} = (1)$ je matica jednotkových prvkov typu matice $\mathbb{A}$. Pre $\forall \mathbf{x} \in (\mathcal{X})$ a $\forall \mathbf{y} \in (\mathcal{Y})$ je $\mathbf{x}^T \mathbb{E} \mathbf{y} = 1$ a tak aj

$$\mathbf{x}^T c \mathbb{E} \mathbf{y}^* = \mathbf{x}^{*T} c \mathbb{E} \mathbf{y}^* = \mathbf{x}^{*T} c \mathbb{E} \mathbf{y}.$$

Po jednoduchých úpravách s vyššie uvedenou podmienkou máme

$$\mathbf{x}^T (\mathbb{A} + c\mathbb{E}) \mathbf{y}^* \leq \mathbf{x}^{*T} (\mathbb{A} + c\mathbb{E}) \mathbf{y}^* \leq \mathbf{x}^{*T} (\mathbb{A} + c\mathbb{E}) \mathbf{y}.$$

Veta 3.2 (Von Neumannova základná veta maticových hier)

Zmiešané rozšírenie každej maticovej hry má riešenie v rovnovážnych stratégiach.

Vzhľadom na lemu 3.1 môžeme predpokladať, že všetky prvky matice $\mathbb{A}$ sú kladné. Pre ľubovoľné pevné $\mathbf{x}^* \in (\mathcal{X})$ definujeme funkciu $f(\mathbf{y}) = \mathbf{x}^{*\mathbf{T}}\mathbb{A}\mathbf{y}$, ktorá je kladná, spojitá na kompaktnej množine $(\mathcal{Y})$. Podľa Weirstrassovej vety nadobúda funkcia $f(\mathbf{y})$ na množine $(\mathcal{Y})$ minimum t.j. $\exists v > 0$, že

$$v \leq \mathbf{x}^{*T}\mathbb{A}\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in (\mathcal{Y}) \tag{9}$$

Vzhľadom k linearite $(\mathcal{Y})$ stačí, ak bude nerovnosť (9) splnená pre čisté stratégie hry

$$\mathbf{y} \in \{(1,0,\dots,0)^T, (0,1,\dots,0)^T, \dots, (0,0,\dots,1)^T\}$$

Pre $\mathbf{x}^* \in (\mathcal{X})$ dostávame z (9) systém rovníc

$$v\mathbf{1}^T \leq \mathbf{x}^{*T}\mathbb{A}, \quad \mathbf{x}^{*T}\mathbf{1} = 1, \quad \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0} \tag{10}$$

Veta 3.2 – pokračovanie

Podobne pre ľubovoľné pevné $\mathbf{y}^* \in (\mathcal{Y})$ definujeme funkciu $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}} \mathbb{A} \mathbf{y}^*$, ktorá je kladná, spojitá na kompaktnej množine $(\mathcal{X})$. Podľa Weirstrassovej vety $f(\mathbf{y})$ nadobúda na množine $(\mathcal{X})$ maximum, t.j. $\exists w > 0$, že

$$w \geq \mathbf{x} \mathbb{A} \mathbf{y}^* \quad \forall \mathbf{x} \in (\mathcal{X}) \tag{11}$$

Opäť stačí, aby nerovnosť (11) bola splnená pre čisté stratégie hry

$$\mathbf{x} \in \{(1, 0, \ldots, 0)^T, (0, 1, \ldots, 0)^T, \ldots, (0, 0, \ldots, 1)^T\}$$

Pre $\mathbf{y}^* \in (\mathcal{Y})$ dostávame z (11) systém rovníc

$$w\mathbf{1} \geq \mathbb{A}\mathbf{y}^*, \quad {\mathbf{y}^*}^T \mathbf{1} = 1, \quad \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0} \tag{12}$$

Veta 3.2 – dokončenie

Po zavedení nových vektorov $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{x}^*}{v}$ a $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{y}^*}{w}$ dostávame dvojice symetrických duálne združených úloh LP:

$$\min\{\mathbf{p}^T\mathbf{1} : \quad \mathbf{p}^T\mathbb{A} \geq \mathbf{1}, \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}\}, \tag{13}$$

$$\max\{\mathbf{q}^T\mathbf{1} : \quad \mathbb{A}\mathbf{q} \quad \leq \mathbf{1}, \quad \mathbf{q} \geq \mathbf{0}\}, \tag{14}$$

ktoré majú prípustné riešenia. Vzhľadom na kladné prvky matice $\mathbb{A}$ máme i optimálne riešenia so spoločnou hodnotou cieľových funkcií $\frac{1}{v} = \frac{1}{w}$.

Príklad 3.4

Maticová hra $\mathcal{H}_{\mathbb{B}}$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

nemá čistú stratégiu.

Keď ku každému prvku matice pripočítame 2 dostaneme maticovú hru určenú maticou kladných čísel

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Podľa lemy 3.1 má hra $(\mathcal{H}_{\mathbb{A}})$ tú istú rovnovážnu stratégiu ako hra $(\mathcal{H}_{\mathbb{B}})$. Z konštruktívneho dôkazu základnej vety vieme, že stačí rieši jednu z duálne združených úloh (13) alebo (14) napr.

$$\begin{aligned} \max q_0 = {} & q_1 + q_2 + q_3 \\ & 3q_1 + \frac{q_2}{2} + q_3 \leq 1 \\ & 2q_1 + 6q_2 + 4q_3 \leq 1 \\ & q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Príklad 3.4 – pokračovanie

Úloha má optimálne riešenie $\mathbf{q}^* = (\frac{3}{10}, 0, \frac{1}{10})^T$. Z podmienok komplementarity symetrických úloh (13) a (14)

$$\begin{aligned} q_1(3p_1 + 2p_2 - 1) &= 0 \\ q_2(\frac{p_1}{2} + 6p_2 - 1) &= 0 \\ q_3(p_1 + 4p_2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

dostaneme aj optimálne riešenie $\mathbf{p}^* = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})^T$. Spoločná hodnota cieľových funkcií je $q_0 = \frac{2}{5} = \frac{1}{w}$. Vynásobením $w \cdot \mathbf{q}^*, w \cdot \mathbf{p}^*$ tak máme zmiešané stratégie oboch hráčov

$$\mathbf{y}^* = \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)^T \quad \mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T.$$

Cena hry $(\mathcal{H}_{\mathbb{B}})$ je $\frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$.

Analytické riešenie maticovej hry 2×2

Nech $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ nemá čistú stratégiu a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Rovnovážnu stratégiu 1. hráča dostaneme, po substitúcii $\mathbf{x}^* = \mathbf{p} \cdot v$ v primárnej úlohe (13) t.j. vynásobení nerovností premennou v, riešením úlohy LP:

$$\max v \tag{15}$$

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} \geq v, \tag{16}$$

$$x_1 a_{12} + x_2 a_{22} \geq v, \tag{17}$$

$$x_1 + x_2 = 1, \tag{18}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{19}$$

Analytické riešenie maticovej hry 2×2

Aspoň jedna z nerovnosti (16) a (17) bude splnená v tvare rovnosti a tak spolu s (18) ľahko vypočítame $\mathbf{x}^*$ a v^*.

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$
$$v^* = \frac{det(\mathbb{A})}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Z komplemetarity duálne združených úloh (13) a (14) máme po substitúcii $\mathbf{y}^* = \mathbf{q} \cdot v$ rovnosť

$$a_{11} y_1 + a_{21}(1 - y_1) = a_{21} y_1 + a_{22}(1 - y_1),$$

odkiaľ vypočítame rovnovážnu stratégiu 2. hráča

$$y_1^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad y_2^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Grafická metóda riešenia maticovej hry $2 \times n$

Uvažujme maticovú hru $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

1. hráč má dve čisté stratégie $\mathcal{X} = \{1, 2\}$ a preto jeho zmiešané stratégie môžeme písať v tvare

$$(\mathcal{X}) = \{(\alpha, 1-\alpha) : \ \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

2. hráč má $n-$čistých stratégií $\mathcal{Y} = \{1, 2, \dots, n\}$.
Z konštruktívneho dôkazu Von Neumannovej vety 3.2 už vieme, že na získanie rovnovážnej stratégie 1. hráča stačí riešiť LP úlohu kde maximalizuje svoju výhru v.

$$\begin{aligned} &\max \ v \\ &a_{1j} \cdot \alpha + a_{2j} \cdot (1-\alpha) \geq v \quad \forall j \in \mathcal{Y}, \\ &0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

Grafická metóda riešenia maticovej hry $2 \times n$

Označme

$$g_j(\alpha) = a_{1j} \cdot \alpha + a_{2j} \cdot (1 - \alpha)$$

lineárnu funkciu definovanú na $\langle 0, 1 \rangle$. Zmiešanú stratégiu 1. hráča $\mathbf{x}^* \in (\mathcal{X})$ dostaneme zo vzťahu

$$\mathbf{x}^* = arg \max_{\alpha \in \langle 0,1 \rangle} \min_{j \in \mathcal{Y}} g_j(\alpha).$$

To ale znamená, že $\mathbf{x}^*$ môžeme hľadať graficky tak, že definujeme konvexnú, po častiach lineárnu funkciu

$$h(\alpha) = \min_{j \in \mathcal{Y}} g_j(\alpha)$$

a tak

$$h(\alpha^*) = \max_{\alpha \in \langle 0,1 \rangle} h(\alpha)$$

je cena hry s $\mathbf{x}^* = (\alpha^*, 1 - \alpha^*)$.

Grafická metóda riešenia maticovej hry $2 \times n$

Z podmienky komplementarity duálne združených úloh LP platí pre rovnovážnu zmiešanú stratégiu 2. hráča

$$
\begin{aligned}
\sum_{j \in \mathcal{Y}} a_{1j} y_j^* &= v, \\
\sum_{j \in \mathcal{Y}} a_{2j} y_j^* &= v, \\
y_{j_1}^* + y_{j_2}^* &= 1, \\
y_{j_1}^*, y_{j_2}^* &\geq 0,
\end{aligned}
$$

kde

$$\mathbf{y}^* = (0, \ldots, y_{j_1}^*, 0, \ldots, 0, y_{j_2}^*, \ldots, 0) \in (\mathcal{Y})$$

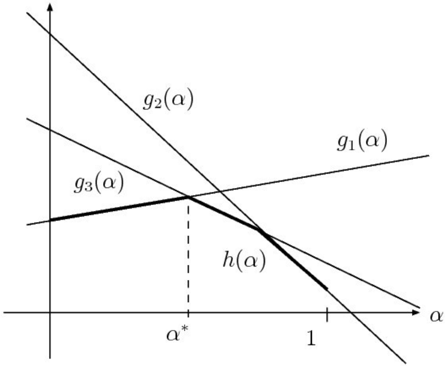
pričom indexy j_1, j_2 sa volia tak, aby platilo

$$a_{1j_1} x_1^* + a_{2j_1} x_2^* = a_{1j_2} x_1^* + a_{2j_2} x_2^* = v.$$

Príklad 3.5

Nájdite rovnovážnu zmiešanú stratégie maticovej hry $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$



Obr.: $g_1(\alpha) = 3\alpha + 2(1-\alpha), g_2(\alpha) = \frac{\alpha}{2} + 6(1-\alpha), g_3(\alpha) = \alpha + 4(1-\alpha).$

Príklad 3.5 – pokračovanie

Dostali sme po častiach lineárnu funkciu

$$h(\alpha) = \min\{\alpha + 2, -\frac{11}{2}\alpha + 6, -3\alpha + 4\},\ \alpha \in \langle 0, 1\rangle$$

s maximálnou hodnotou $v = h(\alpha^*) = h(\frac{1}{2}) = \max_{0\le\alpha\le 1} h(\alpha) = \frac{5}{2}$ a máme rovnovážnu stratégiu 1. hráča $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Nakoľko je $\mathbf{x}^{*T}\mathbb{A} = (\frac{5}{2}, \frac{13}{4}, \frac{5}{2})$ zvolime $j_1 = 1, j_2 = 3$ t.j. $\mathbf{y}^* = (y_1^*, 0, y_3^*)$. Z podmienok komplementarity dostávame systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 3y_1^* + y_3^* &= \frac{5}{2}, \\ y_1^* + y_3^* &= 1, \end{aligned}$$

ktorého riešenie $\mathbf{y}^* = (\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$ je rovnovážnou stratégiou 2. hráča.

Brownova metóda fiktívnej hry – 1950

je založenú na postupnom učení hráčov hraním opakovaných partií hry $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ keď nevedia vypočítať svoje rovnovážne zmiešané stratégie.

Hráči v každom ťahu predpokladajú, že protihráč zvolí zmiešanú stratégiu, ktorá je určená pravdepodobnosťami (frekvenciami) výskytu čistých stratégií v predchádzajúcich ťahoch hry, pričom volia tie čisté stratégie, ktoré im garantujú najlepší výsledok. Fiktívna hra má potencionálne nekonečne veľa ťahov.

V základnej verzii hry sa predpokladá, že hráči v každom ťahu súčasne zverejnia svoje čisté stratégie. V modifikovanej verzii 2. hráč reaguje svojim ťahom až po zverejnení ťahu 1. hráča. To možno interpretovať ako istú nedôveru 2. hráča k poslednej stratégii 1. hráča. Podobne 1.hráč nedôveruje 2.hráčovi.

Metóda fiktívnej hry – základná verzia

Predpokladajme, ža sa hra už k-krát opakovala, 1. hráč zvolil čisté stratégie $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{X}$ a 2. hráč čisté stratégie $j_1, \dots, j_k \in \mathcal{Y}$. V $(k+1)$ ťahu obaja hráči predpokladajú, že protihráč zvolí svoju čistú stratégiu na základe frekvencie voľby čistých stratégií, čo vedie z hľadiska 1. resp. 2. hráča k priemerným výplatám

$$\frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k} a_{ij_s} \text{ resp. } \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k} a_{i_s j}.$$

1. hráč maximalizuje očakávanú výhru zatiaľ čo 2. hráč minimalizuje očakávanú prehru a tak volia $i_{k+1} \in \mathcal{X}, j_{k+1} \in \mathcal{Y}$:

$$\sum_{s=1}^{k} a_{i_{k+1}j_s} = \max_{i\in\mathcal{X}} \sum_{s=1}^{k} a_{ij_s} = k \cdot v_1(k), \tag{20}$$

$$\sum_{s=1}^{k} a_{i_s j_{k+1}} = \min_{j\in\mathcal{Y}} \sum_{s=1}^{k} a_{i_s j} = k \cdot v_2(k). \tag{21}$$

Metóda fiktívnej hry – základná verzia

Skutočná výplata sa po $(k+1)$ ťahu rovná $a_{i_{k+1}j_{k+1}}$ a priemerná výplata

$$v^*(k) = \frac{1}{k+1}\sum_{s=1}^{k+1} a_{i_s j_s},$$

ktorá sa pri voľbe stratégií nevyužíva.

Poznamenajme, že v základnej verzii hry možno voliť čisté stratégie ľubovoľne.

Nech $(\mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k))$ je zmiešaná stratégia hry, kde $x_i(k) \cdot y_j(k)$ je rovné relatívnej frekvencie výskytu stratégie $(i,j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ po k ťahoch hry a nech v je cena hry. Potom možno dokázať, že

$$v_1(k) = \max_{i \in \mathcal{X}} \sum_{s=1}^{k} a_{i s} y_j(k) \geq v \geq \min_{j \in \mathcal{Y}} \sum_{s=1}^{k} a_{s j} x_i(k) = v_2(k).$$

Metóda fiktívnej hry

Ak by pre nejaké k_1 a k_2 platilo

$$v_1(k_1) = v_2(k_2) = v,$$

potom by $\left(\mathbf{x}(k_1), \mathbf{y}(k_2)\right) \in (\mathcal{X}) \times (\mathcal{Y})$ boli rovnovážne zmiešané stratégie hry. Naviac možno dokázať, že

$$\lim_{k\to\infty} v_1(k) = \lim_{k\to\infty} v_2(k) = v.$$

Rýchlosť konvergencie je však malá, možno ju odhadnúť

$$v_1(k) - v_2(k) = o\left(k^{-\frac{1}{n+m-2}}\right).$$

Význam metódy je i tak značný, lebo je jednoduchá a odráža získavanie skúseností hráčmi pri mnohonásobnom opakovaní konfliktnej situácie.

Príklad 3.6

Máme maticu hry $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hráči môžu začať hrať fiktívnu hru z ľubovoľných čistých stratégií. Nech obaja hráči zverejnia v 1. ťahu svoje čisté stratégie $(1,1)$.

V 2. ťahu nastáva nasledujúca rozhodovacia situácia: 1.hráč pozná voľbu 2. hráča, 1. stĺpec matice, s možnými výhrami $(3,2)^T$ a preto svoju maximálnu výhru 3 dosiahne voľbou svojej čistej stratégie $i = 1$. Aj 2. hráč pozná voľbu 1. hráča z 1. ťahu, prvý riadok maticovej hry, s možnými prehrami $(3, \frac{1}{2}, 1)$ a preto svoju minimálnu prehru $\frac{1}{2}$ dosiahne voľbou svojej čistej stratégie $j = 2$.

Príklad 3.6 v ďalších ťahoch

Partia (ťah)	voľba i	voľba j	kumulovaná výhra 1.hráča (20)	kumulovaná prehra 2.hráča (21)
1.	1	1	$(\boxed{3}, 2)^T$	$(3, \boxed{\frac{1}{2}}, 1)$
2.	1	2	$(\frac{7}{2}, \boxed{8})^T$	$(6, \boxed{1}, 2)$
3.	2	2	$(4, \boxed{14})^T$	$(8, 7, \boxed{6})$
4.	2	3	$(5, \boxed{18})^T$	$(10, 13, \boxed{10})$
5.	2	3	$(6, \boxed{22})^T$	$(\boxed{12}, 19, 14)$

Tabuľka: Priebeh fiktívnej hry

Ak by sme ukončili fiktívnu hru v 5-tom ťahu, dostali by sme z početností volieb čistých statégií nasledujúce odhady rovnovážnych stratégií a ceny hry

$$\mathbf{x}(5) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad \mathbf{y}(5) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad \frac{12}{5} \leq v \leq \frac{22}{5}.$$

Lineárne programovanie v maticových hrách

Konštruktívny dôkaz Von Neumannova základnej vety maticových hier (veta 3.2) dáva návod, ako pomocou LP efektívne hľadať zmiešanú rovnovážnu stratégiu maticovej hry.

Najskôr dokážeme pomocné tvrdenie o hrách s kosymetrickou maticou $\mathbb{A}$ t.j. maticou s vlastnosťou $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$.

Lema 3.2

V maticovej hre s kosymetrickou maticou hry majú obaja hráči tie isté rovnovážne stratégie a nulovú cenu zmiešaného rozšírenia hry.

Hra $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ je hra s kosymetrickou maticou. Potom je $(\mathcal{H}_{\mathbb{A}})$ symetrická hra s výplatnou funkciou

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbb{A} \mathbf{y} = -\mathbf{x}^T \mathbb{A}^T \mathbf{y} = -\mathbf{y}^T \mathbb{A} \mathbf{x} = -M(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Z vety 2.2 o symetrických hrách dostávame tvrdenie.

Príklad 3.7

Najdite rovnovážnu stratégiu a cenu maticovej hry $(\mathcal{H}_{\mathbb{A}})$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Zo základnej vety vieme, že rovnovážnu stratégia 1. hráča $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ môžeme hľadať ako riešenie

$$\begin{aligned} &\max\ v \\ &-2x_2 + x_3 \geq v \\ &2x_1 - 2x_3 \geq v \\ &-x_1 + 2x_2 \geq v \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Príklad 3.7 – pokračovanie

Podobne pre 2. hráča hľadáme $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ a tak stačí riešiť

$$
\begin{aligned}
&\min \ w \\
&2y_2 - y_3 \leq w \\
&-2y_1 - 2y_3 \leq w \\
&y_1 - 2y_2 \leq w \\
&y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
&y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Po substitúcii, $w = -v, \mathbf{x} = \mathbf{y}$ zisťujeme, že sa jedná o tú istú optimalizačnú úlohu s nulovými hodnotami cieľových funkcií. Takže máme nulovú cenu zmiešaného rozšírenia hry a zhodné rovnovážne stratégie $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

Pri skúmaní maticových hier sa stačí obmedziť na symetrické maticové hry.

Veta 3.3

Ku každej hre $(\mathcal{H}_{\mathbb{B}})$ existuje hra $(\mathcal{H}_{\mathbb{A}})$ s kosymetrickou maticou $\mathbb{A}$ pričom obe hry sú ekvivalentné v tom zmysle, že rovnovážnu stratégiu jednej hry možno získať z rovnovážnej stratégie druhej hry elementárnymi operáciami.

$(\Rightarrow)$ Uvažujme maticovú hru $(\mathcal{H}_{\mathbb{B}})$ s maticou $\mathbb{B}$ typu $m \times n$. Nech $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n, z)$ je rovnovážna stratégia hry $(\mathcal{H}_{\mathbb{A}})$ s maticou

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{M} & \mathbb{B} & -\mathbb{I} \\ -\mathbb{B}^T & \mathbb{N} & \mathbb{J} \\ \mathbb{I}^T & -\mathbb{J} & 0 \end{pmatrix}$$

kde $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ sú nulové matice typu $m \times m, n \times n$ a $\mathbb{I}, \mathbb{J}$ sú matice jednotiek typu $m \times 1, n \times 1$. Pretože matica $\mathbb{A}$ je kosymetrická je cena hry nulová.

Veta 3.3 – pokračovanie dôkazu

1. hráč nemôže získať, ak zahrá svoju čistú stratégiu proti rovnovážnej stratégii 2. hráča, a tak $\mathbb{A}\mathbf{u} = -\mathbf{u}^T\mathbb{A} \leq 0$. Rozpísaním $\mathbf{u}^T\mathbb{A} \geq 0$ a rozdelenia $\mathbf{u}$ stratégií $(\mathcal{H}_{\mathbb{A}})$ máme

$$
\begin{aligned}
-\sum_j b_{ij} y_j + z &\geq 0 \\
\sum_i b_{ij} x_i - z &\geq 0 \\
\sum_i x_i + \sum_j y_j + z &= 1
\end{aligned}
$$

Označme $t = \sum_j y_j = \sum_i x_i$ a $x_i^* = \frac{x_i}{t}, y_j^* = \frac{y_j}{t}, v = \frac{z}{t}$. Po vydelení rovníc $t > 0$ dostávame vzťahy pre rovnovážnu stratégiu $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ hry $(\mathcal{H}_{\mathbb{B}})$.

Veta 3.3 – dokončenie dôkazu

($\Leftarrow$) Nech naopak $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ sú rovnovážne zmiešané stratégie $(\mathcal{H}_{\mathbb{A}})$ s cenou hry v t.j. vyhovujú nerovnostiam

$$\sum_j a_{ij} y_j^* \leq v$$

$$\sum_i a_{ij} x_i^* \geq v$$

Položíme $t = \frac{1}{2+v}$, $z = t \cdot v$, $x_i = t \cdot x_i^*$, $y_j = t \cdot y_j^*$ a po vynásobení nerovností máme

$$\sum_j b_{ij} y_j \leq z$$

$$\sum_i b_{ij} x_i \geq z$$

a vidíme, že $(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n, zt)$ je rovnovážna stratégia $(\mathcal{H}_{\mathbb{B}})$.

Príklad 3.8

Priraďme k maticovej hre ($\mathcal{H}_{\mathbb{B}}$) *ekvivalentnú symetrickú maticovú hru* ($\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$)

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hra ($\mathcal{H}_{\mathbb{B}}$) má rovnovážne stratégie hráčov $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $\mathbf{y}^* = (\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$ a cenu hry $v = \frac{3}{2}$. Ekvivalentá symetrická hra ($\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$)

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

má podľa vety 3.3 rovnovážnu stratégiu

$$\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{14}, 0, \frac{1}{14}, \frac{3}{7}\right) : t = \frac{1}{2+v}, \; z = t \cdot v, \; x_i = t \cdot x_i^*, \; y_j = t \cdot y_j^*.$$

Veta 3.4

Ak existuje číslo $z > 0$ také, že $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)$ je rovnovážna stratégia zmiešaného rozšírenia maticovej hry $\mathcal{H}_{\mathbb{B}}$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{M} & -\mathbb{A}^T & \mathbf{c} \\ \mathbb{A} & \mathbb{N} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^\mathbf{T} & \mathbf{b}^\mathbf{T} & 0 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ sú nulové matice typu $m \times m, n \times n$. potom dvojice duálne združených úloh LP:

$$\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \quad \mathbb{A}\mathbf{x} \quad \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \tag{22}$$

$$\min\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} : \quad \mathbb{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \tag{23}$$

majú optimálne riešenie a naopak (ohodnotené $z > 0$). Ak sú $\mathbf{x}'$,$\mathbf{y}'$ optimálne riešenia úloh (22) a (23) platí $\mathbf{x} = \mathbf{x}' \cdot z$,$\mathbf{y} = \mathbf{y}' \cdot z$.

Príklad 3.8 – pokračovanie

Zistili sme, že maticová hra $\mathcal{H}_{\mathbb{B}}$ *má rovnovážnu zmiešanú stratégiu* $\mathbf{u}^{\mathbf{T}} = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{14}, 0, \frac{1}{14}, \frac{3}{7}\right)$ *s kosymetrickou maticou* $\mathbb{B}$.

Dvojice príslušných duálne združených úloh LP

$$\begin{aligned} \max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} :\quad & \mathbb{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \\ \min\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} :\quad & \mathbb{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

s maticami

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

má optimálne riešenia $\mathbf{x}' = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ a $\mathbf{y}' = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6})$, pretože $z = \frac{3}{7} > 0, \mathbf{x}' = \mathbf{x}/z, \mathbf{y}' = \mathbf{y}/z$. Ľahko totiž overíme, že platí

$$\mathbb{A}^T\mathbf{y}' \geq \mathbf{c}, \quad \mathbb{A}\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}' = \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}'.$$

Dominancia v maticových hrách

Nektoré čisté stratégie môžu byť tak nevýhodné, že ich inteligentný hráč nebude voliť ani ako zložku zmiešanej stratégie. Môžeme ich vylúčiť z maticovej hry príslušnou redukciou matice.

Hovoríme, že vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je **ostro dominovaný** vektorom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ resp. vektor **a ostro dominuje** vektor **b**, ak pre všetky $j \in \{1, \ldots, n\}$ je

$$a_j > b_j.$$

Rozšírením vektora c $= (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ na k-tom mieste rozumieme vektor

$$\mathbf{c}^{[k]} = (c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, 0, c_k, c_{k+1}, \ldots, c_n)$$

Príklad 3.9

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & \frac{5}{2} & 6 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. hráč nikdy nezvolí stratégiu 2, druhý riadok matice $\mathbb{A}$ je ostro dominovaný 1. riadkom - vyškrtneme 2.riadok a dostaneme maticu

$$\mathbb{A}' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & \frac{5}{2} & 6 & 3 \\ 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

V hre $\mathcal{H}_{\mathbb{A}'}$ zas 2. hráč nezvolí stratégiu 1 pretože 1. stĺpec ostro dominuje 5. stĺpec, ale ani stratégiu 4 pretože 4. stĺpec ostro dominuje 2. stĺpec. Po ich vynechaní dostávame hru s maticou

$$\mathbb{A}'' = \begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{2} & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

s riešením $\mathbf{x}'' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $\mathbf{y}'' = (\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$ s cenou hry $v'' = \frac{9}{2}$. Hra $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ má $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ a $\mathbf{y} = (0, \frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$.

Veta 3.5

Nech je i-ty riadok maticovej hry $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ ostro dominovaný konvexnou kombináciou ostatných riadkov. Ak tento riadok vynecháme máme maticovú hru $\mathcal{H}_{\mathbb{B}}$ s redukovanou maticou. Potom ceny zmiešaných rozšírení oboch hier sú rovnaké a rovnovážna stratégia 1. hráča v hre $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ je rozšírením rovnovážnej stratégie 1. hráča hry $\mathcal{H}_{\mathbb{B}}$.

Nech $\mathbf{a}_k$ označuje k-ty riadok matice $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ a nech $i \in \{1, \ldots, m\}$ je vybraný riadok ostro dominovaný konvexnou kombináciou ostatných riadkov t.j. $\exists \lambda_k \geq 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\} - \{i\}$

$$\mathbf{a}_i = \sum_{k=1, k\neq i}^{m} \lambda_k \mathbf{a}_k, \qquad \sum_{k=1, k\neq i}^{m} \lambda_k = 1. \tag{24}$$

Nech $(\mathbf{x}_{\mathbb{B}}, \mathbf{y}_{\mathbb{B}})$ je rovnovážna zmiešaná stratégia hry $\mathcal{H}_{\mathbb{B}}$ s cenou hry $v_{\mathbb{B}}$. Nech $\mathbf{b}^j$ označuje j-ty stĺpec matice $\mathbb{B}$.

Veta 3.5 – pokračovanie

Zo základnej vety 3.2 dostaneme pre hru $\mathcal{H}_{\mathbb{B}}$, že
$\forall k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbf{a}_k \mathbf{y}_{\mathbb{B}} \leq v_{\mathbb{B}}, \tag{25}$$
$$\mathbf{x}_{\mathbb{B}}^T \mathbf{b}^j \geq v_{\mathbb{B}}. \tag{26}$$

Z definície (24) ostro dominovaného riadku i matice $\mathbb{A}$ a (25) dostaneme

$$\mathbf{a}_i \mathbf{y}_{\mathbb{B}} < \Big(\sum_{k=1, k\neq i}^{m} \lambda_k \mathbf{a}_k \Big) \cdot \mathbf{y}_{\mathbb{B}} \leq v_B \sum_{k=1, k\neq i}^{m} \lambda_k = v_{\mathbb{B}}. \tag{27}$$

Nerovnosť (26) môžeme prepísať $\mathbf{x}_{\mathbb{B}}^{[i]\,T} \mathbf{a}^j \geq v_{\mathbb{B}}$, kde $\mathbf{a}^j$ je j-ty riadok matice $\mathbb{A}$. Z vety o komlementarite duálne združených úloh LP dostávame, že $\mathbf{x}_{\mathbb{A}} = \mathbf{x}_{\mathbb{B}}^{[i]}$ a $\mathbf{y}_{\mathbb{A}} = \mathbf{y}_{\mathbb{B}}$. A tak aj ceny oboch hier sú rovnaké.

Príklad 3.10

Nájdite redukovanú maticu v maticovej hre $\mathcal{H}_{\mathbb{A}}$ s maticou

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ak v matici $\mathbb{A}$ vynásobíme 1. riadok $\frac{1}{3}$ a 3. riadok $\frac{2}{3}$ t.j. zvolíme $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ a $\lambda_3 = \frac{3}{3}$ dostaneme maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{5}{3} \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a vidíme, že 2. riadok je ostro dominovaný súčtom 1. a 3. riadku. To teda znamená, že 2. riadok matice $\mathbb{A}$ môžeme vynechať a dostaneme maticu

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$