

# Základné pojmy teórie hier

doc. RNDr. Štefan Peško

Katedra matematických metód a operačnej analýzy, FRI ŽU

19. február 2018

Teória hier sa zaoberá riešením:

- **nekonfliktných situácií:** len jeden účastník, pozná množinu všetkých svojich možných rozhodnutí, vie ich oceniť.

Teória hier sa zaoberá riešením:

- **nekonfliktných situácií:** len jeden účastník, pozná množinu všetkých svojich možných rozhodnutí, vie ich oceniť.
- **konfliktných situácií:** počet účastníkov rozhodovacej situácie je konečný, všetci poznajú množinu všetkých svojich rozhodnutí – **stratégií** a množiny rozhodnutí svojich súperov, vedia oceniť svoje rozhodnutie vzhľadom na rozhodnutie svojich súperov.

Teória hier sa zaoberá riešením:

- **nekonfliktných situácií**: len jeden účastník, pozná množinu všetkých svojich možných rozhodnutí, vie ich oceniť.
- **konfliktných situácií**: počet účastníkov rozhodovacej situácie je konečný, všetci poznajú množinu všetkých svojich rozhodnutí – **stratégií** a množiny rozhodnutí svojich súperov, vedia oceniť svoje rozhodnutie vzhľadom na rozhodnutie svojich súperov.

Účastníci konfliktu si vyberú jednu svoju stratégiu, môžu byť:

- **inteligentní** – volia čo najvýhodnejšie rozhodnutie,
- **neinteligentní** – náhodný mechanizmus rozhodovania, pri **riziku** (poznáme), pri **neurčitosti** (nepoznáme),
- **$p$ -inteligentní** – s pp.  $p$  inteligentný a pp.  $1 - p$  neinteligentný.

Druhy konfliktných situácií:

- **Antagonistický konflikt** – zúčastňujú sa 2 inteligentní účastníci a volia svoje stratégie tak, aby si zabezpečili maximálne výhry, výhra jedného účastníka ide na úkor druhého účastníka.

## Druhy konfliktných situácií:

- **Antagonistický konflikt** – zúčastňujú sa 2 inteligentní účastníci a volia svoje stratégie tak, aby si zabezpečili maximálne výhry, výhra jedného účastníka ide na úkor druhého účastníka.
- **Neantagonistický konflikt** – zúčastňujú sa najmenej 2 účastníci, inteligentní účastníci maximalizujú svoje výhry, výhra ide na úkor súperov. Ak účastníci môžu uzatvárať záväzné dohody o svojich rozhodnutiach hovoríme o **kooperatívnej teórii**. Ak dochádza aj k prerozdeľovaniu výhier účastníkov hovoríme o **kooperatívnej teórii s prenosnou výhrou**. Ak výhry nie je možné znovu prerozdeliť hovoríme o **kooperatívnej teórii s neprenosnou výhrou**.

Druhy konfliktných situácií:

- **Antagonistický konflikt** – zúčastňujú sa 2 inteligentní účastníci a volia svoje stratégie tak, aby si zabezpečili maximálne výhry, výhra jedného účastníka ide na úkor druhého účastníka.
- **Neantagonistický konflikt** – zúčastňujú sa najmenej 2 účastníci, inteligentní účastníci maximalizujú svoje výhry, výhra ide na úkor súperov. Ak účastníci môžu uzatvárať záväzné dohody o svojich rozhodnutiach hovoríme o **kooperatívnej teórii**. Ak dochádza aj k prerozdeleniu výhier účastníkov hovoríme o **kooperatívnej teórii s prenosnou výhrou**. Ak výhry nie je možné znovu prerozdeliť hovoríme o **kooperatívnej teórii s neprenosnou výhrou**.

Keď účastníci konfliktu majú možnosť viackrát za sebou rozhodovať hovoríme že majú viac **ťahov**.

## Definícia 1.1

Nech  $Q = \{1, 2, \dots, N\}$  je konečná neprázdna množina, jej prvky nazveme **hráčmi**. Ďalej máme  $N$  množín  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_N$  a  $N$  reálnych funkcií  $M_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, M_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$  definovaných na množine  $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_N$ .

**Hrou N hráčov v normálnom tvare (NT)** rozumíme

$$(Q; \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_N; M_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, M_N(x_1, \dots, x_N)) \quad (1)$$

kde  $Q$  je množina hráčov,  $\mathcal{X}_i$  je priestor stratégií  $i$ -teho hráča,  $x_i \in \mathcal{X}_i$  je stratégia  $i$ -teho hráča a  $M_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$  je výplatná funkcia  $i$ -teho hráča.

Hodnotu  $M_i(x_1, \dots, x_N)$  po dosadení zvolených stratégií  $x_1, \dots, x_N$  nazveme **výplatou**  $i$ -teho hráča. Ak  $M_i(x_1, \dots, x_N) < 0$  hovoríme, že hráč  $i$  zaplatí (prehrá) čiastku  $-M_i(x_1, \dots, x_N)$ .



Hra v NT je matematický model konfliktnej situácie. Každý hráč  $i \in Q$  volí nejaký prvok  $x_i \in \mathcal{X}_i$ . Potom hráči svoje voľby zverejnia a  $i$ -ty hráč dostane čiastku  $M_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Predpokladá sa, že všetkým hráčom sú známe všetky prvky hry t.j. aj stratégie súperov.

### Príklad 1.1

$$Q = \{1, 2\}, \quad \mathcal{X}_1 = \langle 0, 1 \rangle, \quad \mathcal{X}_2 = \{-1, 0, 1\}$$

$$M_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad M_2(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2$$

1. hráč volí stratégiu  $x_1 \in \langle 0, 1 \rangle$  a 2. hráč volí stratégiu  $x_2 \in \{-1, 0, 1\}$ . Ak sú obaja hráči inteligentní volia  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ .

## Definícia 1.2

Hru v NT nazveme **konečnou**, ak priestory stratégií všetkých hráčov sú konečné množiny, ináč ju nazveme **nekonečnou**.

## Definícia 1.3

Hru v NT v ktorej

$$\forall i \in Q \quad \forall x_i \in \mathcal{X}_i \quad \sum_{i \in Q} M_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = K \quad (2)$$

kde  $K$  je konštanta nezávislá na voľbe stratégií  $x_1, x_2, \dots, x_N$  sa nazýva **hra s konštantným súčtom**. Ak  $K = 0$  hovoríme o **hre s nulovým súčtom**. Ak súčet (2) závisí na zvolených stratégiách hovoríme o **hre s nekonštantným súčtom**.

## Príklad 1.2

*Príklad 1.1 je nekonečná hra dvoch hráčov s konštantným súčtom  $K = 1$ .*

### Príklad 1.3 (O trhoch)

Dve firmy A a B súťažia o trhy v  $n$  krajinách. Firmy A, B už investovali čiastky  $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$  a chcú ešte investovať do reklamy a rozvoja služieb čiastky  $a, b$ . Predpokladá sa, že obe firmy investujú rovnako efektívne a tak celkový objem objednávok  $i$ -tej krajiny  $s_i$  sa rozdelí proporcionálne k investovaným sumám. Ako majú firmy optimálne investovať čiastky  $a, b$  ?

Budeme predpokladať, že do každej z krajín investovala aspoň jedna firma t.j.  $a_i + b_i > 0$ . Označíme  $x_i, y_i$  dodatočný počet peňazí investovaných firmami A, B do  $i$ -tej krajiny s priestormi stratégií

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in E_n : \sum_{j=1}^n x_j = a, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in E_n : \sum_{j=1}^n y_j = b, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}.$$

Celkový objem objednávok získaných firmami A, B je

$$M_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{(a_i + x_i)s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i}, M_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{(b_i + y_i)s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i}.$$

Vidíme, že ide o nekonečnú hru 2 hráčov s konštantným súčtom.

## Príklad 1.4 (O útoku a obrane)

Majme  $a$  útočných a  $b$  obranných prostriedkov. Nech existuje  $m$  miest možného prechodu útočníkov cez líniu obrany. Nech  $i$  označuje index miesta prechodu medzi líniami. Predpokladajme, že umiestnenie jedného obranného prostriedku v  $i$ -tom mieste tu môže zničiť  $p_i$  útočných prostriedkov. Útočník maximalizuje celkové množstvo prostriedkov, ktoré prejdú cez líniu obrany a obrana počet uhájených prechodov.

Označme  $x_i$  množstvo útočných prostriedkov, ktoré prejdú v  $i$ -tom mieste línie a  $y_i$  množstvo množstvo obranných prostriedkov umiestnených v  $i$ -tom mieste. Potom máme priestory stratégií 1. hráča (útočníkov) a 2. hráča (obrancov)

$$\mathcal{X} = \left\{ \mathbf{x} \in E_m : \sum_{i=1}^m x_i = a, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}, \quad \mathcal{Y} = \left\{ \mathbf{y} \in E_m : \sum_{i=1}^m y_i = b, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \right\}.$$

Kritériami efektívnosti operácií útočníkov a obrancov budú

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m \max(x_i - p_i y_i, 0), \quad M_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m (p_i y_i - x_i + 1)^+.$$

Matematickým modelom **nekonfliktnej** rozhodovacej situácie je hra v NT, v ktorej sa snaží jediný hráč zabezpečiť maximálnu výhru.

### Definícia 1.3

Nech  $(Q, \mathcal{X}, M(x))$  je hra v NT. **Optimálnou stratégiou** v tejto hre rozumieme taký prvok  $x^* \in \mathcal{X}$ , pre ktorý platí

$$M(x^*) = \max_{x \in X} M(x). \quad (3)$$

Ak taký prvok nenexistuje hovoríme, že **hra nemá riešenie**.

### Príklad 1.4

Nech  $g_j(x), j = 1, \dots, m$  sú reálne funkcie v Euklid. priestore  $E_n$  a

$$\mathcal{X} = \{x \in E_n : g_1(x) \geq 0, g_2(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0, x \geq 0\}.$$

Potom optimálnej stratégii v tejto hre zodpovedá optimálne riešenie úlohy matematického programovania. Ak sú  $M(x)$  a  $g_j(x)$  lineárne funkcie ide o úlohu lineárneho programovania, ak sa požaduje ich konkávnosť, ide o úlohu kvadratického programovania.

## Príklad 1.5 (Puzzle sudoku)

Do hracieho poľa  $9 \times 9$  puzzle sa dopĺňajú čísla od 1 do 9. Každý z 9 blokov po  $3 \times 3$  políčkach, každý riadok aj každý stĺpec musí každé z čísel  $1 \dots 9$  obsahovať iba raz. Je dané nejaké rozmiestnenie čísel v puzzle a hľadá sa prípustné doplnenie prázdnych políčk.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1			4	8					
2		9		4	6			7	
3		5					6		4
4	2	1		6			5		
5	5	8		7		9		4	1
6			7			8		6	9
7	3	4	5					9	
8		6			3	7		2	
9						4	1		

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6	2	4	8	7	1	9	5	3
2	1	9	3	4	6	5	8	7	2
3	7	5	9	3	9	2	6	1	4
4	2	1	9	6	4	3	5	8	7
5	5	8	6	7	2	9	3	4	1
6	4	3	7	1	5	8	2	6	9
7	3	4	5	2	1	6	7	9	8
8	8	6	1	9	3	7	4	2	5
9	9	7	2	5	8	4	1	3	6

Figure: Zadanie a riešenie puzzle sudoku.

Nech

- $a_{ij}$  udáva počiatočné umiestnenia čísel  $1, \dots, 9$  a  $0$  ak políčko  $(i, j)$  nie je vyplnené,
- $c_{ijk} := 1$  ak  $a_{ij} = k$  inak  $0$ ,
- $b_{ij}$  udáva číslo bloku políčka  $(i, j)$ ,
- premenná  $x_{ijk} = 1$  ak je číslo  $k$  umiestnené v políčku  $(i, j)$ .

Priestor stratégií riešiteľa tvorený trojindexovými bivalentnými maticami

$$\mathcal{X} = \{(x_{ijk}), i, j, k \in \{1, \dots, 9\} : (5), \dots, (9)\},$$

je určený obmedzujúcimi podmienkami (5)–(9) ďalej uvedenej úlohy BLP kde výplatná funkcia

$$M(x) = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 \sum_{k=1}^9 c_{ijk} x_{ijk},$$

udáva počet správne umiestnených čísel zadania sudoku v riešení.

$$\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^9 \sum_{k=1}^9 c_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \max \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^9 x_{ijk} = 1 \quad \forall i, k \in \{1, \dots, 9\}, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^9 x_{ijk} = 1 \quad \forall j, k \in \{1, \dots, 9\}, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^9 \sum_{j=1|b_{ij}=l}^9 x_{ijk} = 1 \quad \forall k, l \in \{1, \dots, 9\}, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^9 x_{ijk} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 9\}, \quad (8)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, 9\}. \quad (9)$$