Základné pojmy teórie hier

doc. RNDr. Štefan Peško

Katedra matematických metód a operačnej analýzy, FRI ŽU

19. február 2019

Teória hier sa zaoberá riešením:

- **nekonfliktných situácií**: len jeden účastník, pozná množinu všetkých svojich možných rozhodnutí, vie ich oceniť.

Teória hier sa zaoberá riešením:

- **nekonfliktných situácií**: len jeden účastník, pozná množinu všetkých svojich možných rozhodnutí, vie ich oceniť.
- **konfliktných situácií**: počet účastníkov rozhodovacej situácie je konečný, všetci poznajú množinu všetkých svojich rozhodnutí – **stratégií** a množiny rozhodnutí svojich súperov, vedia oceniť svoje rozhodnutie vzhľadom na rozhodnutie svojich súperov.

Teória hier sa zaoberá riešením:

- **nekonfliktných situácií**: len jeden účastník, pozná množinu všetkých svojich možných rozhodnutí, vie ich oceniť.
- **konfliktných situácií**: počet účastníkov rozhodovacej situácie je konečný, všetci poznajú množinu všetkých svojich rozhodnutí – **stratégií** a množiny rozhodnutí svojich súperov, vedia oceniť svoje rozhodnutie vzhľadom na rozhodnutie svojich súperov.

Účastníci konfliktu si vyberú jednu svoju stratégiu, môžu byť:

- **inteligentní** – volia čo najvýhodnejšie rozhodnutie,
- **neinteligentní** – náhodný mechanizmus rozhodovania, pri **riziku** (poznáme), pri **neurčitosti** (nepoznáme),
- p-**inteligentní** – s pp. p inteligentný a pp. $1 - p$ neinteligentný.

Druhy konfliktných situácií:

- **Antagonistický konflikt** – zúčastňujú sa 2 inteligentní účastníci a volia svoje stratégie tak, aby si zabezpečili maximálne výhry, výhra jedného účastníka ide na úkor druhého účastníka.

Druhy konfliktných situácií:

- **Antagonistický konflikt** – zúčastňujú sa 2 inteligentní účastníci a volia svoje stratégie tak, aby si zabezpečili maximálne výhry, výhra jedného účastníka ide na úkor druhého účastníka.
- **Neantagonistický konflikt** – zúčastňujú sa najmenej 2 účastníci, inteligentní účastníci maximalizujú svoje výhry, výhra ide na úkor súperov. Ak účastníci môžu uzatvárať záväzné dohody o svojich rozhodnutiach hovoríme o **kooperatívnej teórii**. Ak dochádza aj k prerozdeľovaniu výhier účastníkov hovoríme o **kooperatívnej teórii s prenosnou výhrou**. Ak výhry nie je možné znovu prerozdeliť hovoríme o **kooperatívnej teórii s neprenosnou výhrou**.

Druhy konfliktných situácií:

- **Antagonistický konflikt** – zúčastňujú sa 2 inteligentní účastníci a volia svoje stratégie tak, aby si zabezpečili maximálne výhry, výhra jedného účastníka ide na úkor druhého účastníka.
- **Neantagonistický konflikt** – zúčastňujú sa najmenej 2 účastníci, inteligentní účastníci maximalizujú svoje výhry, výhra ide na úkor súperov. Ak účastníci môžu uzatvárať záväzné dohody o svojich rozhodnutiach hovoríme o **kooperatívnej teórii**. Ak dochádza aj k prerozdeľovaniu výhier účastníkov hovoríme o **kooperatívnej teórii s prenosnou výhrou**. Ak výhry nie je možné znovu prerozdeliť hovoríme o **kooperatívnej teórii s neprenosnou výhrou**.

Keď účastníci konfliktu majú možnosť viackrát za sebou rozhodovať hovoríme že majú viac **ťahov**.

Definícia 1.1

Nech $Q = \{1, 2, \ldots, N\}$ je konečná neprázdna množina, jej prvky nazveme **hráčmi**. Ďalej máme N množín $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_N$ a N reálnych funkcií $M_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, M_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ definovaných na množine $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \cdots \times \mathcal{X}_N$.
Hrou N hráčov v normálnom tvare (NT) rozumieme

$$(Q; \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_N; M_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, M_N(x_1, \ldots, x_N)) \quad (1)$$

kde Q je množina hráčov, $\mathcal{X}_i$ je priestor stratégií i-teho hráča, $x_i \in \mathcal{X}_i$ je stratégia i-teho hráča a $M_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ je výplatná funkcia i-teho hráča.
Hodnotu $M_i(x_1, \ldots, x_N)$ po dosadení zvolených stratégií $x_1, \ldots, x_N$ nazveme **výplatou** $i-$teho hráča. Ak $M_i(x_1, \ldots, x_N) < 0$ hovoríme, že hráč i zaplatí (prehrá) čiastku $-M_i(x_1, \ldots, x_N)$.

Hra v NT je matematický model konfliktnej situácie. Každý hráč $i \in Q$ volí nejaký prvok $x_i \in \mathcal{X}_i$. Potom hráči svoje voľby zverejnia a $i-$ty hráč dostane čiastku $M_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Predpokladá sa, že všetkým hráčom sú známe všetky prvky hry t.j. aj stratégie súperov.

Príklad 1.1

$Q = \{1, 2\}, \quad \mathcal{X}_1 =< 0, 1 >, \quad \mathcal{X}_2 = \{-1, 0, 1\}$

$$M_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad M_2(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2$$

1. hráč volí stratégiu $x_1 \in< 0, 1 >$ a 2. hráč volí stratégiu $x_2 \in \{-1, 0, 1\}$. Ak sú obaja hráči inteligentní volia $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Definícia 1.2

Hru v NT nazveme **konečnou**, ak priestory stratégií všetkých hráčov sú konečné množiny, ináč ju nazveme **nekonečnou**.

Definícia 1.3

Hru v NT v ktorej

$$\forall i \in Q \quad \forall x_i \in \mathcal{X}_i \quad \sum_{i \in Q} M_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) = K \tag{2}$$

kde K je konštanta nezávislá na voľbe stratégií $x_1, x_2, \ldots, x_N$ sa nazýva **hra s konštantným súčtom**. Ak $K = 0$ hovoríme o **hre s nulovým súčtom**. Ak súčet (2) závisí na zvolených stratégiách hovoríme o **hre s nekonštantným súčtom**.

Príklad 1.2

Príklad 1.1 je nekonečná hra dvoch hráčov s konštantným súčtom $K = 1$.

Príklad 1.3 (O trhoch)

Dve firmy A a B súťažia o trhy v n krajinách. Firmy A,B už investovali čiastky $a_i, b_i, i = 1, \ldots, n$ a chcú ešte investovať do reklamy a rozvoja služieb čiastky a, b. Predpokladá sa, že obe firmy investujú rovnako efektívne a tak celkový objem objednávok i-tej krajiny s_i sa rozdelí proporcionálne k investovaným sumám. Ako majú firmy optimálne investovať čiastky a, b ?

Budeme predpokladať, že do každej z krajín investovala aspoň jedna firma t.j. $a_i + b_i > 0$. Označíme x_i, y_i dodatočný počet peňazí investovaných firmami A,B do i-tej krajiny s priestormi stratégií

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in E_n : \sum_{j=1}^{n} x_j = a, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in E_n : \sum_{j=1}^{n} y_j = b, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}.$$

Celkový objem objednávok získaných firmami A,B je

$$M_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i + x_i)s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i}, \; M_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(b_i + y_i)s_i}{x_i + y_i + a_i + b_i}.$$

Vidíme, že ide o nekonečnú hru 2 hráčov s konštantným súčtom.

Príklad 1.4 (O útoku a obrane)

Majme a útočných a b obranných prostriedkov. Nech existuje m miest možného prechodu útočníkov cez líniu obrany. Nech i označuje index miesta prechodu medzi líniami. Predpokladajme, že umiestnenie jedného obranného prostriedku v i-tom mieste tu môže zničiť p_i *útočných prostriedkov. Útočník maximalizuje celkové množstvo prostriedkov, ktoré prejdú cez líniu obrany a obrana počet uhájených prechodov.*

Označme x_i množstvo útočných prostriedkov, ktoré prejdú v i-tom mieste línie a y_i množstvo množstvo obranných prostriedkov umiestnených v i-tom mieste. Potom máme priestory stratégií 1. hráča (útočníkov) a 2. hráča (obrancov)

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in E_m : \sum_{i=1}^{m} x_i = a, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in E_m : \sum_{i=1}^{m} y_i = b, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}.$$

Kritériami efektívnosti operácií útočníkov a obrancov budú

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \max(x_i - p_i y_i, 0), \; M_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} (p_i y_i - x_i + 1)^+.$$

Matematickým modelom **nekonfliktnej** rozhodovacej situácie je hra v NT, v ktorej sa snaží jediný hráč zabezpečiť maximálnu výhru.

Definícia 1.3

Nech $(Q, \mathcal{X}, M(x))$ je hra v NT. **Optimálnou stratégiou** v tejto hre rozumieme taký prvok $x^* \in \mathcal{X}$, pre ktorý platí

$$M(x^*) = \max_{x \in X} M(x). \tag{3}$$

Ak taký prvok nenexistuje hovoríme, že **hra nemá riešenie**.

Príklad 1.4

Nech $g_j(x), j = 1, \ldots, m$ sú reálne funkcie v Euklid. priestore E_n a

$$\mathcal{X} = \{x \in E_n : g_1(x) \geq 0, g_2(x) \geq 0, \ldots, g_m(x) \geq 0, x \geq 0\}.$$

Potom optimálnej stratégii v tejto hre zodpovedá optimálne riešenie úlohy matematického prohramovania. Ak sú $M(x)$ a $g_j(x)$ lineárne funkcie ide o úlohu lineárneho programovania, ak sa požaduje ich konkávnosť, ide o úlohu kvadratického programovania.

Príklad 1.5 (Puzzle sudoku)

Do hracieho poľa 9×9 *puzzle sa dopĺňajú čísla od* 1 *do* 9. *Každý z* 9 *blokov po* 3×3 *políčkach, každý riadok aj každý stĺpec musí každé z čísel* $1 \ldots 9$ *obsahovať iba raz. Je dané nejaké rozmiestnenie čísel v puzzle a hľadá sa prípustné doplnenie prázdnych políčok.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1			4	8					
2		9		4	6			7	
3		5					6		4
4	2	1		6			5		
5	5	8		7		9		4	1
6			7			8		6	9
7	3	4	5					9	
8		6			3	7		2	
9						4	1		

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6	2	4	8	7	1	9	5	3
2	1	9	3	4	6	5	8	7	2
3	7	5	9	3	9	2	6	1	4
4	2	1	9	6	4	3	5	8	7
5	5	8	6	7	2	9	3	4	1
6	4	3	7	1	5	8	2	6	9
7	3	4	5	2	1	6	7	9	8
8	8	6	1	9	3	7	4	2	5
9	9	7	2	5	8	4	1	3	6

Figure: Zadanie a riešenie puzzle sudoku.

Nech

- a_{ij} udáva počiatočné umiestnenia čísel $1, \dots, 9$ a 0 ak políčko (i, j) nie je vyplnené,
- $c_{ijk} := 1$ ak $a_{ij} = k$ inak 0,
- b_{ij} udáva číslo bloku políčka (i, j),
- premenná $x_{ijk} = 1$ ak je číslo k umiestnené v políčku (i, j).

Priestor stratégií riešiteľa tvorený trojindexovými bivalentnými maticami

$$\mathcal{X} = \{(x_{ijk}), i, j, k \in \{1, \dots, 9\} : (5), \dots, (9)\},$$

je určený obmedzujúcimi podmienkami (5)–(9) ďalej uvedenej úlohy BLP kde výplatná funkcia

$$M(x) = \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=1}^{9} \sum_{k=1}^{9} c_{ijk} x_{ijk},$$

udáva počet správne umiestnených čísel zadania sudoku v riešení.

$$\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{9}\sum_{k=1}^{9} c_{ijk}x_{ijk} \to \max \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i,k \in \{1,\dots,9\}, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad \forall j,k \in \{1,\dots,9\}, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{9} \sum_{j=1 | b_{ij}=l}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad \forall k,l \in \{1,\dots,9\}, \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,9\}, \tag{8}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j,k \in \{1,\dots,9\}. \tag{9}$$