PRAVDEPODOBNOSŤ A ŠTATISTIKA

Náhodný vektor a jeho charakteristiky

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Katedra matematických metód a operačnej analýzy, FRI ŽU

11. apríla 2018

Náhodný vektor

Nech je daný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ a nech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú náhodné premenné definované na tomto priestore. Potom n rozmerným náhodným vektorom rozumieme usporiadanú n-ticu $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Poznámka:

Obmedzíme sa len na štúdium vzťahov medzi dvoma náhodnými premennými t.j. budeme sa zaoberať dvojrozmerným náhodným vektorom s tým, že získané poznatky sa dajú ;-) jednoducho zovšeobecniť na viacrozmerný náhodný vektor.

Dohoda:

Ďalej pod pojmom náhodný vektor budeme v tejto prednáške rozumieť dvojrozmerný náhodný vektor.

Združená distribučná funkcia

Združenou distribučnou funkciou náhodného vektora (X, Y) nazývame reálnu funkciu $F : \Re^2 \to \Re$ definovanú rovnosťou

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathcal{P}([X < x] \cap [Y < y]). \qquad (1)$$

Dohoda:
Pre $\mathcal{P}([X < x] \cap [Y < y])$ budeme používať skrátený zápis $\mathcal{P}(X < x, Y < y)$.

Poznámka:
Zápis (1) znamená, že hodnota distribučnej funkcie v bode (x, y) sa rovná pp., že náhodná premenná X je menšia než x a súčasne náhodná premenná Y je menšia než y.

Tvrdenie 14

Distribučná funkcia $F_{X,Y}$ náhodného vektora (X, Y) je funkcia

a) kde $\forall (x, y) \in \Re^2$ platí

$$0 \le F_{X,Y}(x, y) \le 1. \tag{2}$$

b) neklesajúca v oboch premenných t.j. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \Re$

$$F_{X,Y}(x_1, y_1) \le F_{X,Y}(x_2, y_2) \text{ ak } x_1 < x_2, y_1 < y_2. \tag{3}$$

c) zľava spojitá v oboch premenných t.j. $\forall (a, b) \in \Re^2$ platí

$$\lim_{\substack{x \to a^- \\ y \to b^-}} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(a, b). \tag{4}$$

d)

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F_{X,Y}(x, y) = 0, \ \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F_{X,Y}(x, y) = 1. \tag{5}$$

Tvrdenie 15

Nech (X, Y) je náhodný vektor určený distribučnou funkciu $F_{X,Y}$ a $(a, b), (c, d)$ intervaly. Potom

(i) $\mathcal{P}(a < X \leq b, Y \leq d) = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d)$,

(ii) $\mathcal{P}(X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(b, c)$,

(iii) $\mathcal{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) =$

$$= F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) + F_{X,Y}(a, c) - F_{X,Y}(b, c).$$

Združená pravdepodobnostná funkcia

Združenou pravdepodobnostnou funkciou náhodného vektora (X, Y) diskrétnych náhodných premenných nazývame reálnu funkciu $p_{X,Y} : \Re^2 \rightarrow \Re$ definovanú rovnosťou

$$p_{X,Y}(x_i, y_j) = \mathcal{P}(X = x_i, Y = y_j), \tag{6}$$

pre nanajvýš počítateľný počet hodnôt x_i resp. y_j náhodnej premennej X resp. Y pre ktorú platí

$$\sum_i \sum_j \mathcal{P}(X = x_i, Y = y_j) = 1. \tag{7}$$

Poznámka: V prípade konečného počtom hodnôt sa často funkcia $p_{X,Y}(x, y)$ reprezentuje tabuľkou

$x; y$	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	$p(x_1, y_3)$	$\dots$	$p(x_1, y_n)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	$p(x_2, y_3)$	$\dots$	$p(x_2, y_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
x_m	$p(x_m, y_1)$	$p(x_m, y_2)$	$p(x_m, y_3)$	$\dots$	$p(x_m, y_n)$

Príklad 5.1

Budeme tri krát hádzať spravodlivou mincou. Nech premenná X udáva počet pokusov pred prvým hodom znaku a premenná Y počet po sebe idúcich znakov. Zostavte tabuľku $p_{X,Y}$.

Označme H-hlava a Z-znak. Môže nastat 8 rôznych výsledkov hodu - náhodných udalostí: HHH,ZHH,HZH,ZZH,HHZ,ZHZ,HZZ,ZZZ. Ak je výsledok hodu HHH, potom $X = 0$, $Y = 0$; ak HHZ potom $X = 2$, $Y = 1$, atď. Náhodné veličiny môžu nadobúdať hodnoty $X \in \{0, 1, 2\}$ a $Y \in \{0, 1, 2, 3\}$ ako vidieť z tejto tabuľky:

$x; y$	0	1	2	3
0	HHH	ZHH,ZHZ	ZZH	ZZZ
1	-	HZH	HZZ	-
2	-	HHZ	-	-

Tabuľka 1: Výsledky hodov priaznivých hodnotám (X, Y)

Jedná sa o hody spravodlivou mincou a tak $\mathcal{P}(H) = \mathcal{P}(Z) = 0.5$
Výsledky hodov sú nezávislé, $\mathcal{P}(HHH) = \cdots = \mathcal{P}(ZZZ) = 0.5^3$.
Náhodné udalosti ZHH a ZHZ sú disjunktné, preto

$$\mathcal{P}(ZHH \cup ZHZ) = \mathcal{P}(ZHH) + \mathcal{P}(ZHZ) = 0.25.$$

$x; y$	0	1	2	3
0	0.125	0.25	0.125	0.125
1	0	0.125	0.125	0
2	0.	0.125	0	0

Tabuľka 2: Tabuľka združených pravdepodobností vektora (X, Y)

Ľahko overíme, že podobne ako pre náhodnú premennú aj pre náhodný vektor platí

$$0 \leq p_{X,Y}(x, y) \leq 1, \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{3} p_{X,Y}(x, y) = 1.$$

Združenou distribučnou funkciou náhodného vektora (X, Y) diskrétnych náhodných premenných rozumieme reálnu funkciu $F_{X,Y} : \Re^2 \to \Re$ definovanú rovnosťou

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{X,Y}(x_i, y_j), \tag{8}$$

kde x_i resp. y_j sú prípustné hodnoty náhodnej premennej X resp. Y .

Príklad 5.1 – pokračovanie

Zostavte tabuľku $F_{X,Y}$ z tabuľky $p_{X,Y}$ náhodného vektora (X, Y).

Z odvodenej tabuľky $p_{X,Y}$

$x; y$	0	1	2	3
0	0.125	0.25	0.125	0.125
1	0	0.125	0.125	0
2	0	0.125	0	0

Tabuľka 3: Tabuľka združených pravdepodobností $p_{X,Y}$

vypočítame podľa vzťahu (8) tabuľku $F_{X,Y}$

$x; y$	$(-\infty, 0\rangle$	$(0, 1\rangle$	$(1, 2\rangle$	$(2, 3\rangle$	$(3, \infty)$
$(-\infty, 0\rangle$	0	0	0	0	0
$(0, 1\rangle$	0	0.125	0.375	0.5	0.625
$(1, 2\rangle$	0	0.125	0.5	0.750	0.875
$(2, \infty)$	0	0.125	0.625	0.875	1

Tabuľka 4: Tabuľka združenej distribučnej funkcie $F_{X,Y}$

Združená hustota pravdepodobnosti a združená distribučná funkcia spojitého náhodného vektora

Združenou hustotou pravdepodobnosti náhodného vektora (X, Y) spojitých náhodných premenných nazývame nezápornú, integrovateľnú reálnu funkciu $f_{X,Y} : \Re^2 \to \Re$ pre ktorú platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1. \tag{9}$$

Združenou distribučnou funkciou náhodného vektora (X, Y) spojitých náhodných premenných rozumieme reálnu funkciu $F_{X,Y} : \Re^2 \to \Re$ definovanú rovnosťou

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{10}$$

ak existuje hustota pravdepodobnosti $f_{X,Y}(x, y)$.

Príklad 5.2

Majme náhodný vektor (X, Y) so združenou funkciou hustoty

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \alpha(x+y) & \text{ak } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Určte konštantu α a zostrojte distribučnú funkciu $F_{X,Y}$.

Z podmienky (9) a z nezáporných hodnôt hustoty dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \int_0^1 \alpha(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \int_0^1 \left[\int_0^1 (x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &= \alpha \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x = \alpha \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \alpha \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \alpha. \end{aligned}$$

Aby bola funkcia $f_{X,Y}(x,y)$ združenou hustotou pp., musí $\alpha = 1$.

Z definície distribučnej funkcie (10) dostaneme pre premenné $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

$$
\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) &= \int_0^x \int_0^y (u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^x \Big[\int_0^y (u+v)\mathrm{d}v\Big]\mathrm{d}u \\
&= \int_0^x \Big[uv + \frac{v^2}{2}\Big]_{v=0}^{v=y}\mathrm{d}u == \int_0^x \Big(uy + \frac{y^2}{2}\Big)\mathrm{d}u \\
&= \Big[\frac{u^2y}{2} + \frac{y^2u}{2}\Big]_0^x = \frac{xy}{2}(x+y).
\end{aligned}
$$

a tak

$$
F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases}
0 & \text{ak } x \le 0 \text{ alebo } y \le 0, \\
\frac{xy}{2}(x+y) & \text{ak } 0 < x \le 1 \text{ a } 0 < y \le 1, \\
\frac{x}{2}(x+1) & \text{ak } 0 < x \le 1 \text{ a } y \ge 1, \\
\frac{y}{2}(1+y) & \text{ak } 0 < y \le 1 \text{ a } x \ge 1, \\
1 & \text{ak } x > 1 \text{ a } y > 1,
\end{cases}
$$

Marginálne distribučné funkcie

Ak je $F_{X,Y}$ združená distribučná funkcia náhodného vektora (X, Y), potom marginálnou distribučnou funkciou náhodnej premennej X resp. Y rozumieme distribučné funkcie F_X resp. F_Y určené vzťahmi

$$F_X(x) = \mathcal{P}(X < x) = \lim_{y \to \infty} F_{XY}(x, y), \; x \in \Re, \tag{11}$$

$$F_Y(y) = \mathcal{P}(Y < y) = \lim_{x \to \infty} F_{XY}(x, y), \; y \in \Re. \tag{12}$$

Marginálne rozdelenie diskrétneho náhodného vektora

Ak je $p_{X,Y}(x,y), x \in H_X, y \in H_Y$ združená pravdepodobnostná funkcia náhodného vektora (X, Y), potom marginálnou pravdepodobnostná funkciou náhodnej premennej X resp. Y rozumieme pravdepodobnostné funkcie p_X resp. p_Y určené vzťahmi

$$p_X(x) = \mathcal{P}(X = x) = \sum_{y \in H_Y} p_{X,Y}(x,y), \ x \in H_X, \qquad (13)$$

$$p_Y(y) = \mathcal{P}(Y = y) = \sum_{x \in H_X} p_{X,Y}(x,y), \ y \in H_Y. \qquad (14)$$

Poznámka:

Keď zadáme združenú pravdepodobnostnú funkciu $p_{X,Y}$ tabuľkou, potom riadkovým súčtom zodpovedajú pp. p_X a stĺpcovým súčtom zodpovedajú pp. p_Y.

Príklad 5.1 – pokračovanie

Doplníme tabuľku $p_{X,Y}$ o riadkové a stĺpcové súčty pp. a dostaneme

$x; y$	0	1	2	3	p_X
0	0.125	0.25	0.125	0.125	0.625
1	0	0.125	0.125	0	0.25
2	0	0.125	0	0	0.125
p_Y	0.125	0.5	0.25	0.125	1

Tabuľka 5: Marginálne pravdepodobnosti p_X, p_Y v tabuľke $p_{X,Y}$

Marginálne distribučné funkcie F_X, F_Y

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \leq 0, \\ 0.625 & \text{ak } 0 < x \leq 1, \\ 0.875 & \text{ak } 1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{ak } x > 2. \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{ak } y \leq 0, \\ 0.125 & \text{ak } 0 < y \leq 1, \\ 0.625 & \text{ak } 1 < y \leq 2, \\ 0.875 & \text{ak } 2 < y \leq 3, \\ 1 & \text{ak } x > 3. \end{cases}$$

Marginálne rozdelenie spojitého náhodného vektora

Ak je $f_{X,Y}(x,y)$ združená hustota pravdepodobnosti náhodného vektora (X,Y), potom marginálnou distribučná funkciou náhodnej premennej X resp. Y rozumieme pravdepodobnostné funkcie F_X resp. F_Y určené vzťahmi

$$F_X(x) = \mathcal{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{15}$$

$$F_Y(y) = \mathcal{P}(Y < y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{16}$$

Marginálna hustota pravdepodobnosti náhodnej premennej X resp. Y je definovaná takto

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y,\ x \in \Re, \tag{17}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x,\ y \in \Re. \tag{18}$$

Príklad 5.2 – pokračovanie

Máme náhodný vektor (X, Y) so združenou funkciou hustoty

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{ak } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Určte marginálne distribučné funkcie a hustoty pravdepodobnosti.

V intervale $\langle 0, 1 \rangle$ máme podľa vzťahov (17) a (18)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 (x+y)\mathrm{d}y = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = x + \frac{1}{2},$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = y + \frac{1}{2}.$$

a tak

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{ak } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & \text{ak } 0 < y \le 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Podľa vzťahov (15) a (16)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(t + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=x} = \frac{x}{2}(x+1),$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = \frac{y}{2}(y+1).$$

a tak

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \le 0, \\ \frac{x}{2}(x+1) & \text{ak } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{ak } x > 1. \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{ak } y \le 0, \\ \frac{y}{2}(y+1) & \text{ak } 0 < y \le 1, \\ 1 & \text{ak } x > 1. \end{cases}$$

Pre $0 \le x \le 1$ platí (11) a (12)

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y \to 1} \frac{xy}{2}(x+y) = \frac{x}{2}(x+1)$$

a analogicky pre $F_Y(y)$.

Podmienené rozdelenia

Nech je (X, Y) diskrétny náhodný vektor so združenou pravdepodobnostnou funkciou $p_{X,Y}$. Podmienené pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej X pri podmienke $Y = y$ je určené podmienenou pravdepodobnostnou funkciou

$$p_{X,Y}(x|y) = \mathcal{P}(X = x|Y = y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}, \text{ ak } p_Y(y) > 0. \quad (19)$$

Nech je (X, Y) je náhodný vektor so združenou hustotou pravdepodobnosti $f_{X,Y}$. Podmienené pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej X pri podmienke $Y = y$ je určené podmienenou hustotou pravdepodobnosti

$$f_{X,Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}, \text{ ak } f_Y(y) > 0. \quad (20)$$

Príklad 5.1 – pokračovanie

Odvodili sme tabuľku

$x; y$	0	1	2	3
0	0.125	0.25	0.125	0.125
1	0	0.125	0.125	0
2	0	0.125	0	0
p_Y	0.125	0.5	0.25	0.125

Tabuľka 6: Marginálna p_Y v tabuľke združenej $p_{X,Y}$

Potom pomocou vzťahu (19) dostaneme

$p_{X,Y}(x\|y)$	0	1	2	3
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
2	0	$\frac{1}{4}$	0	0

Tabuľka 7: Tabuľka podmienenej pravdepodobnostnej funkcie $p_{X,Y}$

Príklad 5.2 – pokračovanie

Pre náhodný vektor (X, Y) se vypočítali

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{ak } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{ak } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & \text{ak } 0 < y \leq 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Podľa vzťahu (20) dostávame

$$f_{X,Y}(x|y) = \begin{cases} 2\frac{x+y}{2y+1} & \text{ak } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(y|x) = \begin{cases} 2\frac{x+y}{2x+1} & \text{ak } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Podmienenou strednou hodnotou diskrétneho resp. spojitého náhodného vektora rozumieme funkciu

$$\mathbb{E}(Y|X = x_i) = \sum_j y_j p_{X,Y}(y_j|x_i)$$

resp.

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(y|x)\mathrm{d}y.$$

Podmienená stredná hodnota náhodnej premennej Y závisí na hodnotách náhodnej premennej X, nazýva sa regresná funkcia.

Príklad 5.3

Nech má náhodný vektor (X, Y) združenú hustotu

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{ak } 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Nájdite regresnú funkciu.

Regresná funkcia je podmienená stredná hodnota náhodnej premennej Y za podmienky, že náhodná premenná X nadobudla niektorú z množiny svojich možných hodnôt.

$$\bar{y}(x) = \mathbb{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(y|x)\mathrm{d}y,$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(y|x)\mathrm{d}y = \int_0^x \frac{2}{3}\mathrm{d}y = \frac{2}{3}x,$$

$$f_{X,Y}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}x} = \frac{1}{x}, 1 \leq x \leq 2,$$

a tak $\bar{y}(x) = \int_0^x y\frac{1}{x}\mathrm{d}y = \frac{x}{2}, 1 \leq x \leq 2.$

O dvoch náhodných premenných X a a Y hovoríme, že sú nezávislé, ak pre každé dva intervaly A a B platí

$$\mathcal{P}(X \in A, Y \in B) = \mathcal{P}(X \in A)\mathcal{P}(Y \in B). \tag{21}$$

Premenné náhodného vektora (X, Y) nazývame nezávislé, ak

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \tag{22}$$

pre každý bod (x, y) t.j. pre diskrétny vektor platí

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \tag{23}$$

a pre spojitý vektor platí

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y). \tag{24}$$

Príklad 5.2 – pokračovanie

Pre $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ je

$$f_{X,Y}(x,y) = x + y \neq \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = f_X(x) f_Y(y).$$

A tak premenné X a Y náhodného vektora (X, Y) nie sú nezávislé.

Príklad 5.4

Možno :-) odvodiť, že v náhodnom vektore (X, Y), ktorý má nenulové hodnoty pre $x > 0, y > 0$ hustoty pp.

$$f_{X,Y}(x, y) = 4xye^{-x^2-y^2},$$
$$f_X(x) = 2xe^{-x^2},$$
$$f_Y(y) = 2ye^{-y^2}.$$

sú premenné X a Y nezávislé, lebo platí (24)

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Nech je (X, Y) diskrétny náhodný vektor so združenou pravdepodobnostnou funkciou $p_{X,Y}$, $X \in H_X$, $Y \in H_Y$. Nech $g : H_X \times H_Y \to \Re$ je reálna funkcia. Strednou hodnotou funkcie $g(X, Y)$ rozumieme súčet

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x \in H_X} \sum_{y \in H_Y} g(x, y) p_{X,Y}(x, y). \qquad (25)$$

Nech je (X, Y) je náhodný vektor so združenou hustotou pravdepodobnosti $f_{X,Y}$. Nech $g : \Re^2 \to \Re$ je reálna funkcia. Strednou hodnotou funkcie $g(X, Y)$ rozumieme integrál

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \qquad (26)$$

pokiaľ daný integrál existuje.

Príklad 5.5

Majme náhodný vektor (X, Y) určený združenou hustotou pp.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1-(x+y)/3 & \text{ak } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Chceme nájsť $\mathbb{E}(XY)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \int_0^1 \int_0^2 xy\Big(1-\frac{x+y}{3}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^1 \Big[\int_0^2 (3xy - x^2y - xy^2)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \Big[\frac{3xy^2}{2} - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{xy^3}{3})\Big]_{y=0}^{y=2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \Big(6x - 2x^2 - \frac{8x}{3}\Big)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\Big[3x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\Big(3 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\Big) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Zmiešané momenty náhodného vektora

Počiatočným momentom $\nu_{r,s}$ (r,s)-tého rádu náhodného vektora (X,Y) rozumieme hodnotu

$$\nu_{rs} = \mathbb{E}(X^r Y^s). \tag{27}$$

Centrálnym momentom $\mu_{r,s}$ (r,s)-tého rádu náhodného vektora (X,Y) rozumieme hodnotu

$$\mu_{rs} = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^r (Y - \mathbb{E}(Y))^s). \tag{28}$$

Významné momenty

Počiatočné momenty náhodného vektora (X, Y), v ktorých je jeden index rovný 1 a druhý 0, zodpovedá stredným hodnotám jednotlivých premenných

$$\nu_{1,0} = \mathbb{E}(X), \quad \nu_{0,1} = \mathbb{E}(Y). \tag{29}$$

Centrálne momenty náhodného vektora (X, Y), v ktorých je jeden index rovný 2 a druhý 0, zodpovedá rozptylom jednotlivých premenných

$$\mu_{2,0} = \mathbb{D}(X), \quad \mu_{0,2} = \mathbb{D}(Y). \tag{30}$$

Marginálnymi momentami náhodného vektora (X, Y) rozumieme strednú hodnotu náhodného vektora $(\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y))$ a disperziu náhodného vektora $(\mathbb{D}(X), \mathbb{D}(Y))$.

Kovariancia

Pod kovarianciou premených náhodného vektora (X, Y) rozumieme centrálny moment v ktorom sú oba indexy 1. Označujeme ju

$$cov(X, Y) = \mu_{1,1} = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))). \qquad (31)$$

Vlastnosti:

1) $cov(X, Y) = cov(Y, X)$,
2) $cov(X, X) = D(X), cov(Y, Y) = D(Y)$,
3) $cov(aX, bY) = abcov(X, Y)$ pre ľubovoľné $a, b \in \Re$,
4) $cov(X + a, Y + b) = cov(X, Y)$ pre ľubovoľné $a, b \in \Re$.

Kovariančnou maticou $\mathbb{C}$ rozumieme maticu

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} D(X) & cov(X, Y) \\ cov(Y, X) & D(Y) \end{pmatrix}.$$

Koeficientom korelácie rozumieme podiel

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}}, \tag{32}$$

je bezrozmernou charakteristikou, ktorá vyjadruje mieru lineárnej závislosti premenných X a Y. Ak $\rho(X, Y) = 0$, potom hovoríme, že premenné X a Y sú nekorelované.

Vlastnosti:

1) $-1 \le \rho(X, Y) \le 1$,
2) $\rho(X, X) = \rho(Y, Y) = 1$,
3) $\rho(X, a) = \rho(Y, b) = 0$ pre ľubovoľné $a, b \in \Re$,
4) ak $|\rho(X, Y)| = 1$ potom pre ľubovoľné $a, b \in \Re, a \neq 1$ je $Y = aX + b$.

Korelačnou maticou $\mathbb{R}$ rozumieme maticu

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X, Y) \\ \rho(Y, X) & 1 \end{pmatrix}.$$

Tvrdenie 15

Nech sú X a Y náhodné premenné také, že existujú $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)$ a $\mathbb{E}(XY)$. Potom platí

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \tag{33}$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY - \mathbb{E}(X)Y - X\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

Príklad 5.6

Majme náhodný vektor (X, Y) určený združenou hustotou pp.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{ak } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Chceme nájsť korelačnú a kovariačnú maticu.

Pre výpočet $cov(X, Y)$ podľa (33) najskôr vypočítame marginálnu hustotu $f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\mathrm{d}y = x + \frac{1}{2}$ pre $x \in \{0, 1\}$. Odtiaľ $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})\mathrm{d}x = \frac{7}{12}$. $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})\mathrm{d}x = \frac{5}{12}$ a $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{11}{144}$, $\mathbb{E}(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$. Zo symetrie združenej hustotu dostaneme tie isté charakteristiky aj pre n.p. Y a tak máme

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{11}{144} & -\frac{1}{144} \\ -\frac{1}{144} & \frac{11}{144} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & 1 \end{pmatrix}.$$

Príklad 5.7

Náhodná premenná X má hustotu pp. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \Re$.
Nech náhodná premenná $Y = X^2$. Vypočítajte $cov(X, Y)$.

Náhodná premenná $X \sim N(0,1)$ a tak $\mathbb{E}(X) = 0$.

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) =$$
$$= \mathbb{E}(X^3) - 0 \cdot \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

Ale funkcia $x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$ je nepárna a tak $cov(X, Y) = 0$.

Poznámka:
Máme príklad kedy $cov(X, Y) = 0$ hoci X a Y sú závislé premenné.

Tvrdenie 16

Nech sú náhodné premenné X a Y nezávislé. Potom $\rho(X, Y) = 0$.

Dôkaz:
Ak sú náhodné premenné X a Y nezávislé, potom $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Podľa tvrdenia 15 je ale

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$$

a tak podľa definície je $\rho(X, Y) = 0$.

Poznámka:
Ak $\rho(X, Y) \neq 0$ potom medzi premennými X a Y musí existovať nejaká závislosť.

Príklad 5.5

Majme náhodný vektor (X, Y), pre ktorý existuje $(\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y))$. Hľadáme $\mathbb{D}(X+Y)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) - \mathbb{E}^2(X+Y) \\
&= \mathbb{E}(X^2 + Y^2 + 2XY) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) + 2\mathbb{E}(XY) \\
&\quad - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\
&= \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y) + 2cov(X, Y).
\end{aligned}
$$

Cvičenie

5.1 (3b) Majme náhodný vektor (X, Y) so združenou funkciou hustoty $f_{X,Y}(x, y) = (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu x})$ pre $x \geq 0, y \geq 0$. Vypočítajte a) $F_{X,Y}(x, y)$, b) $\mathcal{P}(1 \leq X \leq 2, 3 \leq Y \leq 4)$, c) $F_X(x), F_Y(y)$, d) Platí $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$?

5.2 (4b) Nech D je zjednotenie pravej hornej a ľavej dolnej štvrtiny jednotkového štvorca. a) definujte hustotu $f_{X,Y}(x, y)$ a distribučnú funkciu $F_{X,Y}(x, y)$ rovnomerného rozdelenia na množine D, b) vypočítajte $\mathcal{P}((X, Y) \in \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle)$.

5.3 (5b) Nech má združená hustota pp. (X, Y) tvar

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & \text{ak } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, \\ 0 & \text{ináč.} \end{cases}$$

Určte a) c ako funkciu a, b; b) marginálne hustoty pre X a Y, c) podmienené hustoty $f_X(x|y)$ a $f_Y(y|x)$ d) $F_{X,Y}(x, y)$.

5.4 (5b) Overte, že $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.