STOCHASTICKÉ MODELY

Prednášky pre Slovenskú Poľnohospodársku Univerzitu v Nitre

RNDr. Štefan Peško, CSc.

2002 - 2003

Obsah

Kapitola 1

Markovove reťazce

Definícia 1.1. *Náhodným procesom* rozumieme množinu náhodných premenných

$$\{\mathbf{X}(\omega, t) : \omega \in \Omega, t \in T\},$$

kde Ω je množina elementárnych udalostí a T množina nezáporných reálnych čísel. Pre jednoduchosť budeme často používať skrátený technický zápis $\{\mathbf{X}(t)\}_{t\in T}$, resp. $\{\mathbf{X}_t\}_{t\in T}$.

Ak $T = \{t_0, t_1, t_2 \dots\}$, hovoríme o *procese s diskrétnym časom*.
Ak $T = \langle 0, \infty)$, hovoríme o *procese so spojitým časom*.

Náhodný proces $\{\mathbf{X}(t)\}_{t\in T}$ nazveme *náhodným reťazcom*, ak množina všetkých hodnôt S náhodného procesu je nanajvýš spočítateľná (konečná alebo spočítateľná). Množinu S nazývame *množinou stavov reťazca*.

Príklad 1.1. *V dvoch urnách je spolu 5 guličiek. Pri každom pokuse náhodne vyberieme jednu guličku a premiestnime ju do susednej urny. Modelujte chovanie takého systému vhodným náhodným procesom.*

Správanie systému môžeme modelovať náhodným reťazcom, ktorého náhodné premenné $\mathbf{X}(\omega, t)$ udávajú počet guličiek v prvej urne. Ak je v prvej urne i guličiek, potom je v druhej urne $5 - i$ guličiek. Potom $S = \{0, 1, \dots, 5\}$ udáva počet guličiek v prvej urne; $T = \{t_0, t_1, \dots\}$ reprezentuje časové okamihy jednotlivých pokusov a $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5\}$, pričom ω_i je výber $i-$tej guličky.

Poznámka. Uvedený príklad modeluje aj reálnu situáciu, keď máme vozidlový park tvorený piatimi vozidlami (guličkami). Každé vozidlo môže byť v dvoch rôznych stavoch: „jazdí“ alebo „stojí“ (v 1. alebo 2. urne). Správanie takéhoto systému možno popísať jednoznačne napr. chovaním jazdiacich vozidiel. Náhodný mechanizmus rozhoduje o zmene stavu vozidiel.

1.1 Markovove reťazce

Definícia 1.2. Náhodný reťazec $\{\mathbf{X}_n\}_{n\in T}$ s množinou stavov S nazveme *Markovov reťazec*, ak

1. množina $T = \{0, 1, 2, \dots\}$,
2. platí *Markovova vlastnosť*:

$$\forall i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in S :$$
$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_{n+1} = j | \mathbf{X}_n = i, \mathbf{X}_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \mathbf{X}_0 = i_0) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_{n+1} = j | \mathbf{X}_n = i)$$

Ak $\mathbf{X}_n = i$, potom hovoríme, že reťazec je v čase n v stave i.

Poznámka. V definícii Markovovho reťazca sme sa bez straty všeobecnosti obmedzili na časové okamihy $0, 1, 2, \dots$ namiesto $t_0, t_1, t_2, \dots$, keďže konkrétna poloha (hodnota) okamihu t_j na časovej osi je pre vlastnosti reťazca bezvýznamná a naviac to zjednodušuje zápis. Významné však môže byť poradie sledovaného okamihu.

Markovov reťazec popisuje dynamiku správania sa systému s Markovovou vlastnosťou v diskrétnom čase. Markovova vlastnosť vyjadruje nasledujúcu skutočnosť: Ak označuje n aktuálny časový okamih, potom pravdepodobnostné chovanie Markovovho reťazca v budúcom okamihu $n + 1$ závisí len na aktuálnom stave a nezávisí na minulých stavoch.

Najčastejšou interpretáciou Markovovho reťazca je fyzikálna sústava $\mathcal{S}$, ktorá môže byť v niektorom zo stavov $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$ V priebehu času mení sústava náhodne svoje stavy. Stavy sústavy pozorujeme v diskrétnych časových okamihoch $n = 0, 1, 2, \dots$. Náhodnej veličine $\mathbf{X}_n$ priradíme hodnotu k ak je sústava $\mathcal{S}$ v časovom okamihu n v stave a_k. Predpoklad, že náhodné zmeny stavu fyzikálnej sústavy tvoria Markovov reťazec, môžeme fyzikálnou terminológiou formulavať týmto spôsobom: *Všetky doterajšie stavy sústavy môžu mať vplyv na budúce stavy len prostredníctvom súčasného stavu.*

Definícia 1.3. Podmienené pravdepodobnosti figurujúce v Markovovej vlastnosti

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_{n+1} = j | \mathbf{X}_n = i) = \frac{\mathcal{P}(\mathbf{X}_{n+1} = j, \mathbf{X}_n = i)}{\mathcal{P}(\mathbf{X}_n = i)} \tag{1.1}$$

sa nazývajú *pravdepodobnosti prechodu zo stavu i do stavu j*.

V celom ďalšom texte sa obmedzíme výhradne len na Markovove reťazce, v ktorých pravdepodobnosti prechodu nezávisia na okamihoch prechodu. Všeobecne však pravdepodobnosti prechodu závisia na časovom parametri n.

1.1.1 Homogénne Markovove reťazce

Definícia 1.4. Markovov reťazec $\{\mathbf{X}_n\}_{n\in T}$ nazveme *homogénny* (v čase), ak platí

$$\forall i, j \in S,\ \ k \in N : \quad \mathcal{P}(\mathbf{X}_{n+k+1} = j | \mathbf{X}_{n+k} = i) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_{n+1} = j | \mathbf{X}_n = i)$$

V tomto prípade sa *pravdepodobnosti prechodu zo stavu i do stavu j* označujú

$$p_{ij} = \mathcal{P}(\mathbf{X}_{n+1} = j | \mathbf{X}_n = i) \tag{1.2}$$

a zvyknú sa usporiadavať do *matice pravdepodobností prechodu*

$$\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j\in S}$$

Príklad 1.2. *Vrátime sa k príkladu 1.1 s guličkami v dvoch urnách. Budeme naviac predpokladať, že výber každej guličky je rovnako pravdepodobný bez ohľadu na to, v ktorej je urne.*

Náhodný reťazec $\{\mathbf{X}_n\}_{n\in T}$ popisujúci počty guličiek v 1. urne má Markovovu vlastnosť, pretože budúci stav počtu guličiek v 1. urne záleží len na súčasnom počte guličiek v 1. urne a náhodnom výbere guličky. Pretože nezáleží ani na tom, v ktorom pokuse dochádza k premiestneniu guličky medzi urnami, jedná sa o homogénny Markovov reťazec. Potom dostávame nasledujúcu maticu prechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definícia 1.5. Pravdepodobnosť, že Markovov reťazec $\{\mathbf{X}_n\}$ sa v čase $n \in T$ nachádza v stave $i \in S$, označíme

$$p_i(n) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_n = i) \tag{1.3}$$

a nazveme *pravdepodobnosť stavu i v čase n*. Vektor tvaru

$$\mathbf{p}(n) = (p_i(n))_{i\in S}$$

nazývame *pravdepodobnostné rozdelenie reťazca (v čase n). Počiatočným rozdelením reťazca* rozumieme $\mathbf{p}(0)$.

Prejdeme teraz od hrania sa s guličkami k modelu reálneho systému.

Príklad 1.3. *Sledovala sa prevádzka stroja za dobu 1000 smien. Keď sa stroj pokazil, bola vykonaná oprava. Opravy, ktoré trvali dlhšie než jednu smenu sa evidovali zlášť. Bolo zistené, že sa stroj pokazil v 150 prípadoch z toho v 95 prípadoch trvala oprava viac, než jednu smenu.*

Označme ako 0 stav „stroj v prevádzke“ a ako stav 1 stav „stroj v oprave“. Udalosťami sú zmeny stavu stroja s poradovými číslami v množine $T = \{1, 2, \dots\}$. Náhodný reťazec $\{\mathbf{X}_n\}_{n \in T}$ tak popisuje chovanie sa stroja. Reťazec má Markovovu vlastnosť, pretože budúci stav $1 - i$ záleží len na súčasnom stave i. Pretože nezáleží ani na tom, kedy dochádza k zmene stavu, jedná sa o homogénny Markovov reťazec.

Pravdepodobnosť p_{00} vyjadruje, že stroj ktorý bol v predchádzajúcej smene v prevdzke, bude v nasledujúcej smene opät v prevádke a je rovná $p_{00} = (1000 - 150)/1000 = 0.85$ Pravdepodobnosť $p_{01} = 1 - p_{00} = 0.15$ vyjadruje mieru prechodu zo stavu 0 do stavu 1 t.j. že stroj ktorý je v jednej smene v prevádzke bude v ďalšej v oprave.

Podobne určíme pravdepodobnosť toho, že stroj, ktorý je v oprave, bude v ďalšej smene opäť v oprave t.j. $p_{11} = 95/150 = 0.63$. Pravdepodobnosť jeho uvedenia do prevádzky v nasledujúcej smene je potom $p_{01} = 1 - p_{11} = 0.37$. Matica pravdepodobnosti prechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix}$$

popisuje prevádzku stroja z hľadiska jej spoľahlivosti. Napr. v 63% prípadoch sa pri poruche nepodarí opraviť stroj do nasledujúcej smeny, v 85% prípadoch možno očakávať bezporuchové stavy medzi susednými smenami atď.

Ak určíme počiatočné pravdepodobnosti stavov 1 a 2 napr. $p_0 = 1$ a $p_1 = 0$ t.j. na počiatku procesu je stroj v prevádzke, je Markovov reťazec určený jednoznačne maticou $\mathbb{P}$ a vektorom $\mathbf{p} = (p_0, p_1)$.

1.1.2 Pravdepodobnostné rozdelenie

Lema 1.1.1. *Pre homogénny Markovov reťazec určený počiatočným rozdelením* $\mathbf{p}(0)$ *a maticou* $\mathbb{P}$ *platí*

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n)\mathbb{P} \quad \forall n \in T \tag{1.4}$$

Dôkaz. Treba ukázať, že

$$p_j(n+1) = \sum_{k \in S} p_k(n) p_{kj}, \quad \forall j \in S \; \forall n \in T$$

Označme javy $H_k = \{\mathbf{X}_n = k\}$ a $A = \{\mathbf{X}_{n+1} = j\}$. Z vety o úplnej pravdepodobnosti dostávame:

$$p_j(n+1) = \mathcal{P}(A) = \sum_{k \in S} \mathcal{P}(H_k)\mathcal{P}(A|H_k) = \sum_{k \in S} p_k(n) p_{kj}$$

□

Čas môžeme interpretovať aj ako *krok* vo vývoji reťazca. Ďalej budeme vyšetrovať pravdepodobnosti prechodu po viacerých krokoch.

Definícia 1.6. *Pravdepodobnosťami prechodu vyšších rádov* rozumieme

$$p_{ij}(k) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_{n+k} = j | \mathbf{X}_n = i) \tag{1.5}$$

po usporiadaní do matice

$$\mathbb{P}(k) = (p_{ij}(k))_{i,j \in S}$$

Špeciálne kladieme

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

Poznámka. Symbol δ_{ij} predstavuje tzv. *Kroneckerovo* δ, ktoré môžeme definovať aj netradičným spôsobom, a to zápisom v jazyku C: $\delta_{ij} = (i == j)$.

Poznámka. Vzhľadom k homogenite reťazca nezávisia ani pravdepodobnosti vyšších rádov na n.

Lema 1.1.2. *Pre ľubovoľné počiatočné rozdelenie* $\mathbf{p}(0)$ *a pre* $\forall n \in T$ *platí*

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbb{P}(n)$$

Dôkaz. Treba ukázať, že

$$p_j(n) = \sum_{k \in S} p_k(0) p_{kj}(n), \quad \forall j \in S \; \forall n \in T$$

Označme javy $H_k = \{\mathbf{X}_0 = k\}$ a $A = \{\mathbf{X}_n = j\}$. Z vety o úplnej pravdepodobnosti dostávame:

$$p_j(n) = \mathcal{P}(A) = \sum_{k \in S} \mathcal{P}(H_k)\mathcal{P}(A|H_k) = \sum_{k \in S} p_k(0) p_{kj}(n)$$

□

Príklad 1.4. *Vrátime sa k modelu reťazca z príkladu 1.1, s guličkami v dvoch urnách, ktorého pravdepobnosti prechodu sme zistili v príklade 1.2. Predpokladajme, že na začiatku sú všetky guličky v prvej urne. Zaujíma nás stredný počet guličiek v prvej urne po dvoch pokusoch.*

Náhodný reťazec $\{\mathbf{X}_n\}_{n\in T}$ popisujúci počty guličiek v 1. urne je určený pravdepodobnostným rozdelením stavov $\mathbf{p}(0) = (0,0,0,0,0,1)$ a maticou prechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočítame $p(2) = p(1).\mathbb{P} = (0,0,0,0,1,0).\mathbb{P} = (0,0,0,\frac{4}{5},0,\frac{1}{5})$. Potom stredný počet guličiek v 1. urne po dvoch pokusoch je

$$\mathcal{E}(\mathbf{X}_2) = 0.0 + 1.0 + 2.0 + 3.\frac{4}{5} + 4.0 + 5.\frac{1}{5} = 3\frac{2}{5}$$

Maticu pravdepodobností vyšších rádov však môžeme vyjadriť aj v tvare mocniny matice pravdepodobností prechodu. Umožní nám to ich nepriamy, ale pomerne jednoduchý výpočet.

Lema 1.1.3.

$$\mathbb{P}(n) = \mathbb{P}^n, \quad \forall n \in T$$

Dôkaz. Zrejme platí $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}^0$ a $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}$. Z lemy 1.1.2 a opakovaným použitím lemy 1.1.1 pre $n = 2,3,\dots$

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbb{P}(n)$$

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1)\mathbb{P} = \mathbf{p}(n-2)\mathbb{P}\mathbb{P} = \cdots = \mathbf{p}(0)\mathbb{P}^n$$

□

K významným výsledkom teórie homogénnych markovovských reťazcov patrí nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.1.1. *Chapman-Kolmogorovove rovnice*

$$\mathbb{P}(n+m) = \mathbb{P}(n)\mathbb{P}(m) \quad \forall n, m \in T$$

Dôkaz. Z vlastnosti násobenia matíc a lemy 1.1.3 dostávame

$$\mathbb{P}(n+m) = \mathbb{P}^{n+m} = \mathbb{P}^n\mathbb{P}^m = \mathbb{P}(n)\mathbb{P}(m)$$

□

Spravidla nás zaujíma správanie Markovovho systému, ktoré nebude závislé na čase.

Definícia 1.7. Nech $\mathbb{P}$ je matica prechodu. Potom vektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j\in S}$, pre ktorý platí

$$\pi_j \geq 0 \qquad \forall j \in S \tag{1.6}$$

$$\sum_{j\in S} \pi_j = 1 \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbb{P} \tag{1.8}$$

nazývame *stacionárne rozdelenie reťazca* určeného maticou $\mathbb{P}$.

Význam stacionárneho rozdelenia reťazca vyplýva z faktu, že ak sa systém reprezentovaný homogénnym Markovovým reťazcom stabilizuje, je pravdepodobnostné rozdelenie jeho stavov nielen nezávislé na čase, ale aj rovné stacionárnemu rozdeleniu reťazca.

Veta 1.1.2. *Nech $\mathbb{P}$ je matica prechodu. Potom ak existujú*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j \quad \forall i, j \in S,$$

potom existujú aj

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \pi_j \quad \forall j \in S.$$

Dôkaz.

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} p_i(0)p_{ij}(n) = \sum_{i\in S} \lim_{n\to\infty} p_i(0)p_{ij}(n) =$$

$$= \sum_{i\in S} p_i(0) \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \sum_{i\in S} p_i(0)\pi_j = \pi_j \sum_{i\in S} p_i(0) = \pi_j$$

□

Príklad 1.5. *Vrátime sa k príkladu 1.4 s guličkami v dvoch urnách. Zaujíma nás stredný počet guličiek v prvej urne po stabilizácii systému.*

Najskôr budeme hľadať $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ stacionárne rozdelenie reťazca popisujúceho počty guličiek v 1. urne. Po dosadení do sústavy (1.8) a vyjadrení jednotlivých pravdepodobností pomocou π_0 dostávame

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 5\pi_0 \\ \pi_2 &= 10\pi_0 \\ \pi_3 &= 10\pi_0 \\ \pi_4 &= 5\pi_0 \\ \pi_5 &= \pi_0 \end{aligned}$$

Ďalej z (1.7) máme

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$$

a dostávame $\pi_0 = \frac{1}{32}$. Tu interpretujeme $\pi_j = \mathcal{P}(\mathbf{X} = j)$. Potom stredný počet guličiek v 1. urne po dostatočnom počte pokusov je

$$\mathcal{E}(X) = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4 + 5\pi_5 = 2\frac{1}{2}$$

Výsledok je v zhode s naším očakávaním, že v oboch urnách bude po stabilizácii experimentu (po dostatočnom počte pokusov) v priemere rovnaký počet guličiek.

Pre daný homogénny Markovov reťazec však príslušné stacionárne rozdelenie nemusí existovať.

Definícia 1.8. Ak v Markovom reťazci konvergujú rozdelenia náhodných veličín $\mathbf{X}_n$ k *limitnému rozdeleniu* t.j. existuje

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \bar{\mathbf{p}} \tag{1.9}$$

a ak nezávisí toto limitné rozdelenie $\bar{\mathbf{p}}$ na počiatočnom rozdelení $\mathbf{p}(\mathbf{0})$ reťazca, potom nazývame tento reťazec *ergodický* (regulárny).

Lema 1.1.4. *Aj je Markovov reťazec ergodický a existuje stacionárne rozdelenie, potom je jeho limitné rozdelenie stacionárne.*

Dôkaz. Nech $\bar{\mathbf{p}}$ je ergodické rozdelenie Markovovho reťazca definované vzťahom (1.9). Podľa lemy 1.1.1 potom platí

$$\bar{\mathbf{p}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n+1) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n)\mathbb{P} = \bar{\mathbf{p}}\mathbb{P}$$

a tak je jeho limitné rozdelenie i jediné stacionárne. □

Jedna z najznámejších postačujúcich podmienok pre existenciu ergodického Markovovho reťazca je obsahom nasledujúceho tvrdenia, ktoré uvádzame bez dôkazu.

Veta 1.1.3. *(Markovova) Ak existuje také prirodzené číslo n, že všetky prvky matice $\mathbb{P}^n$ sú kladné (t.j. nenulové), potom Markovov reťazec s maticou pravdepodobností prechodu $\mathbb{P}$ je ergodický.*

1.1.3 Klasifikácia stavov

Majme nasledujúce *stochastické matice* (nezáporné štvorcové matice s jednotkovým riadkovým súčtom), ktoré sú maticami pravdepodobnosti prechodu príslušných Markovových reťazcov.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Reťazec riadiaci sa prvou maticou nemôže nikdy prejsť z množiny stavov $\{0,1\}$ do množiny $\{2,3\}$. Matica sa rozpadá na dve stochastické matice. Podľa druhej z matíc prejde reťazec z množiny stavov $\{0,1\}$ s pravdepodobnosťou 1 do množiny $\{2,3\}$, odkiaľ nemôže prejsť naspäť. Zavedieme tomu zodpovedajúce pojmy.

Definícia 1.9. Majme stav $i \in S$ reťazca $\{\mathbf{X}_n, n = 0,1,\dots\}$. Predpokladajme $\mathbf{X}_0 = i$. *Dobou návratu* do stavu i rozumieme náhodnú veličinu

$$\boldsymbol{\nu}_i = \begin{cases} \min(T_i) & \text{ak } T_i \neq \emptyset \\ \infty & \text{ak } T_i = \emptyset \end{cases} \tag{1.10}$$

kde

$$T_i = \{n > 0 : \mathbf{X}_n = i\} \tag{1.11}$$

Rozdelenie pravdepodobností doby návratu do stavu i je

$$f_i(n) = \begin{cases} 0 & \text{ak } n = 0 \\ \mathcal{P}(\boldsymbol{\nu}_i = n) & \text{ak } n \in \{1,2,\dots\} \end{cases} \tag{1.12}$$

Stav i sa nazýva *trvalým (rekurentným)*, ak je

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) = \mathcal{P}(\boldsymbol{\nu}_i < \infty) = 1 \tag{1.13}$$

Ak platí (1.13) avšak

$$\mu_i = \mathcal{E}(\boldsymbol{\nu}_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_i(n) = \infty, \tag{1.14}$$

je stavom *trvalým nulovým (rekurentným nulovým)*. Ak (1.13) neplatí, nazýva sa i stavom *prechodným (tranzientným)*.

Poznámka. Množinu T_i v (1.11) udáva poradie okamihov návratu do stavu i.

Lema 1.1.5. *Pre $i \in S$ platí*

$$p_{ii}(n) = \sum_{j=0}^{n} f_i(j) p_{ii}(n-j) \tag{1.15}$$

Dôkaz. Pre $n = 1, 2, \dots$ máme z vety o úplnej pravdepodobnosti

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_n = i) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}(\boldsymbol{\nu}_i = j)\mathcal{P}(\mathbf{X}_n = i | \mathbf{X}_s \neq i, s = 1, 2, \dots, j-1, \mathbf{X}_j = i).$$

A tak predpokladov $\mathbf{X}_0 = i, f_i(0) = 0$ a Markovovej vlastnosti reťazca dostaneme

$$p_{ii}(n) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_n = i | \mathbf{X}_0 = i) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_n = i) = \sum_{j=0}^{n} f_i(j) p_{ii}(n)$$

□

Pri výpočte pravdepodobnostného rozdelenia doby návratu $\boldsymbol{\nu}_i$ tak možeme využiť vzťah (1.15) takto:

$$f_i(1) = p_{ii}, f_i(2) = p_{ii}(2) - f_i(1)p_{ii}, f_i(3) = p_{ii}(3) - f_i(1)p_{ii}(2) - f_i(2)p_{ii}, \dots \tag{1.16}$$

Príklad 1.6. *Klasifikujme stavy množiny stavov $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Markovovho reťazca vypočítajte príslušné stredné doby návratu pre maticu pravdepodobností prechodu*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pre stav 1 dostaneme z (1.16)

$$f_1(1) = p_{11} = \frac{1}{2}, \quad f_1(2) = p_{11}(2) - f_1(1)p_{11} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Pretože sa jedná o pravdepodobnostné rozdelenie doby návratu $\boldsymbol{\nu}_1$, sú ostatné pravdepodobnosti nulové t.j. $f_1(3) = f_1(4) = f_1(5) = 0$.

$$\mu_1 = 1 \cdot f_1(1) + 2 \cdot f_i(2) + 0 + \dots = \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Keďže stredná doba návratu $\mu_1 < \infty$ je stav 1 trvalý nenulový (kladný). Pre stav 2 možno zo vzťahu (1.16) odvodiť

$$f_2(1) = 0, \quad f_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n = 2, 3, \dots$$

Potom stredná doba návratu do stavu 2 je

$$\mu_2 = \sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n\alpha^{n-1}\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} = \frac{d}{d\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}\alpha^n\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} = \frac{d}{d\alpha}\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} = 3$$

Keďže stredná doba návratu $\mu_2 < \infty$ je aj stav 1 trvalý nenulový.
Pre stav 3 platí

$$f_3(1) = 0, \quad f_3(2) = p_{33}(2) - f_1(1)p_{33} = \frac{3}{16}, \quad f_3(j) = 0, j = 3, 4, \dots$$

Vzťah (1.13) ale neplatí takže stav 3 je prechodný. Uvedeným postupom možno ukázať, že stav 4 je tiež prechodný a stav stav 5 trvalý so strednou dobou návratu $\mu_5 = 1$.

Do trvalého stavu sa reťazec s pravdepodobnosťou 1 vráti nekonečne veľa krát.

Veta 1.1.4. *Stav reťazca i je trvalý, práve keď*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty \tag{1.17}$$

Dôkaz. Použijeme metódu vytvárajúcej funkcie. Označme pre $0 \le x < 1$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_i(n)x^n, \tag{1.18}$$

Vynásobením rovnice (1.15) x^n a súčtom pre $n = 1, 2, \dots$ dostávame

$$p(x) - 1 = f(x)p(x)$$

odkiaľ

$$p(x) = \frac{1}{1 - f(x)} \tag{1.19}$$

Funkcia $p(x)$ je rastúca pre $x \uparrow 1$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \lim_{x \to 1-} p(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{1}{1 - f(x)}$$

Odtiaľ plynie, že (1.17) platí, práve keď $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) = 1$. □

Dôkaz vety pomocou vytvárajúcich funkcií je konštruktívny, dáva aj návod ako hľadať pravdepodobnostné rozdelenie a strednú hodnotu doby návratu pre trvalý stav.

Dôsledok. Nech i je trvalý stav. Máme pre $x \uparrow 1$

$$\frac{1-f(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) \frac{1-x^n}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) \to \sum_{n=1}^{\infty} n f_i(n)$$

Z rovnosti (1.19) potom vyplýva

$$\lim_{x\to 1-} (1-x)p(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{1-x}{1-f(x)} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} n f_i(n)} = \frac{1}{\boldsymbol{\mu}_i}.$$

Vidíme, že trvalý stav i je nulový, práve keď

$$\lim_{x\to 1-} (1-x)p(x) = 0, \tag{1.20}$$

čo je splnené vždy keď

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0 \tag{1.21}$$

Zložitejší je dôkaz ekvivalentnosti (1.20) a (1.21). □

Definícia 1.10. Stav j sa nazýva *dosiahnuteľný* zo stavu i, ak existuje $n \geq 0$ tak, že je $p_{ij}(n) > 0$. Markovov reťazec sa nazýva *nerozložiteľný* (ireducibilný), ak je každý jeho stav dosiahnuteľný z ľubovoľného iného stavu.

Veta 1.1.5. *Stavy dosiahnuteľné z trvalého stavu i sú trvalé a rovnakého typu.*

Dôkaz. Nech je k $(k \neq i)$ stav dosiahnuteľný z trvalého stavu i. Existuje teda najmenšie r také, že

$$p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{r-1}k} > 0$$

pre vhodnú postupnosť stavov $i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}$. V tejto postupnosti sa stav i nevyskytuje, pretože inak by ju bolo možné skrátiť. Máme $p_{ik}(r) = a > 0$. Stav i musí byť dosiahnuteľný z k, pretože opak by mal za následok

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) \leq 1 - a < 1$$

Možno preto nájsť s, pre ktoré $p_{ki}(s) > 0$. Pre $n = 0, 1, 2, \ldots$ je potom

$$p_{ii}(r+s+n) \geq p_{ik}(r) p_{kk}(n) p_{ki}(s) = ab p_{kk}(n)$$
$$p_{kk}(r+s+n) \geq p_{ki}(r) p_{ii}(n) p_{ik}(s) = ab p_{ii}(n)$$

Odtiaľ vyplývajú implikácie

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}(n) = \infty,$$

$$\lim_{x\to 1-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) x^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}(n) x^n = 0.$$

Vidíme, že k je trvalý stav, ktorý je nulový, práve keď i je nulový stav. □

V aplikáciach sa často vyskytujú Markovove reťazce s konečným počtom stavov.

Veta 1.1.6. *V Markovovom reťazci s konečným počtom stavov neexistujú trvalé nulové stavy.*

Dôkaz. Majme taký reťazec a predpokladajme, že i je jeho trvalý nulový stav. Pre každý stav k dosiahnuteľný z i platí, podľa dôkazu vety 1.1.5, pre všetky n

$$p_{ii}(s+n) \geq p_{ik}(n) p_{ki}(s) = b p_{ik}(n)$$

Ak je k nedosiahnuteľný z i, je $p_{ik}(n) = 0, n = 0, 1, \ldots$ Z (1.20) preto vyplýva

$$\lim_{x\to 1-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} p_{ik}(n) x^n = 0, \quad k \in S.$$

Sčítaním pre $k \in S$ dostávame

$$0 = \lim_{x\to 1-} (1-x) \sum_{k\in S} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ik}(n) x^n = \lim_{x\to 1-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1.$$

To je spor. □

Definícia 1.11. *Trieda trvalých stavov* je taká trieda stavov, že neexistuje stav mimo tejto triedy dosiahnuteľný z iných stavov. Trieda stavov, ktorá nie je triedou trvalých stavov, sa nazýva *trieda prechodných stavov*.

Nasledujúce tvrdenie dokonca hovorí, že s ľubovoľne veľkou pravdepodobnosťou konečný reťazec niekedy vstúpi do niektorej triedy trvalých stavov.

Veta 1.1.7. *Pre ľubovoľný stav $i \in S$ a ľubovoľný prechodný stav $j \in S$ konečného Markovoho reťazca konverguje $p_{ij}(n)$ s rastúcim n k nule.*

Dôkaz. Ak je i stav trvalý, potom j dokonca $p_{ij} = 0$ pre všetky n. Nech je i stav prechodný. Z každého prechodného stavu musí byť po konečnom počte krokov dosiahnutý nejaký trvalý stav. Ak to nastane po d krokoch s pravdepodobnosťou q potom potom s pravdepodobnosťou ne väčšou než $1-q$ sa dostane reťazec do nejakého prechodového stavu. Dokonca pravdepodobnosť toho, že reťazec z ľubovoľného prechodového stavu i sa po n krokoch dostane do prechodového stavu j nemôže byť väčšia než $(1-q)^k$ pre ľubovoľné $n \geq kd$. Odtiaľ už plynie tvrdenie. □

Definícia 1.12. Stav i sa nazýva *periodický* s periodou $d > 1$, ak je $p_{ii}(n) \neq 0$ len vtedy, ak je n násobkom d a ak je d najväčšie číslo s touto vlastnosťou. *Ergodický stav* je trvalý nenulový (kladný) a neperiodický (aperiodický).

Cvičenie. Dokážte, že všetky stavy Markovovho ergodického reťazca sú ergodické.

Príklad 1.7. *Symetrická náhodná prechádzka je Markovov reťazec, ktorého stavy sú celé čísla a platí*

$$p_{ii+1} = p_{ii-1} = \frac{1}{2}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Je to nerozložiteľný reťazec s periodou 2. Platí

$$p_{ii}(2n) = \binom{2n}{n} 2^{-2n}, \quad p_{ii}(2n+1) = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Podľa Stirlingovej formule

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad n \to \infty$$

máme

$$p_{ii}(2n) \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi 2n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \quad n \to \infty$$

Odtiaľ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty, \quad \lim_{n \to \infty} p_{ii}(n) = 0.$$

Stavy náhodnej prechádzky sú trvalé nulové.

1.1.4 Absorbčné reťazce

Definícia 1.13. Stav $i \in S$ sa nazýva *absorbčný*, ak $p_{ii} = 1$.

Každý absorbčný stav je podľa vety 1.1.4 trvalým stavom.

Definícia 1.14. Markovov reťazec s konečným počtom stavov sa nazýva *absorbčný*, ak každý jeho trvalý stav je absorbčný.

Príklad 1.8. V Markovovom reťazci s maticou prechodu

$$\mathbb{P}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sú triedy $\{0,1\}, \{2\}$ prechodné, triedy $\{3,4\}, \{5\}$ sú trvalé (nenulové) ale len stav 5 je absorbčný. Takže reťazec nie je absorbčný. Ak však položíme $p^*_{34} = 0, p^*_{35} = 1$ dostaneme reťazec s maticou

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

v ktorom sú stavy $0, 1, 2, 3, 4$ prechodné a jediný trvalý stav 5 je absorbčný. Príslušný reťazec je teda absorbčný.

V absorbčnom reťazci dôjde podľa vety 1.1.7 asymptoticky s pravdepodobnosťou 1 k prechodu do niektorého z absorbčných stavov, čo aj motivuje jeho názov.

Nech sú stavy množiny S prečíslované tak, že po *množine absorbčných stavov* $S_A = \{0, 1, \dots, m-1\}$ nasleduje *množine prechodových stavov* $S_T = \{m, m+1, \dots, m+n-1\}$. Symboly A a T používame vzhľadom k anglickému označeniu „absorbing“ a „transcient“ pre absorbčný a prechodový stav. Potom možno maticu pravdepodobností prechodu tohto reťazca písať v tvare

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

kde $\mathbb{I}$ jednotková matica typu $m \times m$ pre absorbčné stavy. $\mathbb{O}$ nulová submatica typu $m \times n$ a $\mathbb{Q}$ submatica typu $n \times n$ vyjadrujúca vzťahy medzi prechodovými stavmi, $\mathbb{R}$ submatica typu $n \times m$ vyjadrujúca vzťahy medzi prechodovými a absorbčnými stavmi. Pre ľubovoľné $i \in S_T$ zrejme platí

$$\sum_{k \in S_A} r_{ij} + \sum_{j \in S_T} q_{ij} = 1.$$

Príklad 1.9. Uvažujme absorbčný reťazec z príkladu 1.8. Matica prechodu nemá požadovanú blokovú štruktúru. Ľahko ju však prečíslovaním (napr. postupnou zámenou prvého a posledného riadku a potom prvého a posledného stĺpca) upravíme na tvar

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Potom už máme $S_A = \{0\}$ a $S_T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Hľadajme pravdepodobnosť, že reťazec skončí v niektorom absorbčnom stave. Ak reťazec vychádza z absorbčného stavu $i \in S_A$ potom v ňom s pravdepodobnosťou 1 skočí. Iná je situácia ak reťazec vychádza z niektorého prechodného stavu $i \in S_T$.

Pravdepdobnosť prechodu zo stavu i do niektorého z absorbčných stavov označme d_i a vektor $\mathbf{d} = (\mathbf{d_i})_{\mathbf{i} \in \mathbf{S}}$. Pretože pravdepodobnosť prechodu zo stavu $i \in S_T$ do absorbčných stavov S_A cez prechodný stav $j \in S_T$ je $p_{ij} d_j$, dostaneme pre pravdepodobnosti prechodu do absorbčných stavov

$$d_i = \sum_{j \in S} p_{ij} d_j, \quad i \in S, \tag{1.22}$$

v maticovom vyjadrení

$$\mathbf{d}^T = \mathbb{P} \mathbf{d}^T. \tag{1.23}$$

Sústava lineárnych rovníc (1.23) má viacero riešení. Vyberieme z nich jediný vektor $\mathbf{d}$ tak aby $d_a = 1$ pre niektorý vybraný absorbčný stav $a \in S_A$. Potom zrejme pre ostatné absorbčné stavy $j \in S_A - \{a\}$ je $d_j = 0$, čo umožňuje pre každý absobčný stav nájsť jediný vektor $\mathbf{d}$.

Príklad 1.10. *Dvaja hráči A a B vložili spolu do hry* 5 *Sk. Hráč A hádže mincou, ak padne hlava vyhrá* 1 *Sk, ak padne písmo prehrá* 1 *Sk. Aká je pravdepodobnosť,*

že hráč A bude zruinovaný ak má v danom okamžihu 3 *Sk.* Predpokladajme, že minca nie je falošná t.j. hlava i pismo padne s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. Zostavíme maticu $\mathbb{P}$ s absorbčnými stavmi $S_A = \{0, 1\}$, kde stav 0 je „hráč A zruinovaný" a stav 1 je „hráč B zruinovaný" a prechodnými stavmi $S_T = \{2, 3, 4, 5\}$, kde stav i znamená „hráč A má $(i-1)$ Sk".

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Hľadaná pravdepodobnosť je pravdepodobnosť d_4 absorbcie v stave 0 ak reťazec vychádza zo stavu $i = 4$ keď má hráč A 3 Sk. A tak máme $d_0 = 1, d_1 = 0$ a zo sústavy (1.23) dostaneme $\mathbf{d} = (1, 0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ a hráč A bude zruinovaný s pravdepodobnosťou $\frac{2}{5}$ ak má (vyhral) 3 Sk.

Pre výpočet stredného počtu prechodov cez prechodný stav a stredného počtu výskytov všetkých prechodných stavov reťazca je užitočné nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.1.8. *V absorbčnom reťazci je matica* $\mathbb{E} - Q$ *regulárna a platí*

$$(\mathbb{E} - \mathbb{Q})^{-1} = \mathbb{E} + \mathbb{Q} + \mathbb{Q}^2 + \ldots, \tag{1.24}$$

kde $\mathbb{E}$ *je jednotková matica typu* $n \times n$.

Dôkaz. Ľahko sa overí platnosť tvrdenia

$$\mathbb{E} - \mathbb{Q}^k = (\mathbb{E} - \mathbb{Q})(\mathbb{E} + \mathbb{Q} + \mathbb{Q}^2 + \cdots + \mathbb{Q}^{k-1}). \tag{1.25}$$

Pretože stavy reprezentované indexami matice S_T sú prechodné, konvergujú mocniny $\mathbb{Q}^k$ pre $k \to \infty$ k nulovej matici a matica $\mathbb{E} - \mathbb{Q}^k$ má nenulový determinant. Potože determinant súčinu matíc je rovný súčinom jeho determinatov musí mať aj matica $\mathbb{E} - \mathbb{Q}$ nenulový determinat. Po vynásobení rovnosti (1.25) zľava maticou $(\mathbb{E} - \mathbb{Q})^{-1}$ dostaneme tvrdenie. □

Definícia 1.15. Maticu $\mathbb{F} = (f_{ij})_{i,j \in S_T} = (\mathbb{E} - \mathbb{Q})^{-1}$ nazývame *fundamentálnou maticou* a maticu $\mathbb{B} = (b_{ij})_{i \in S_T, j \in S_A} = \mathbb{F}\mathbb{R}$ nazývame *maticou prechodu do absorčných stavov* príslušného absorbčného reťazca.

Prvky f_{ij} udávajú *priemerný počet krokov, počas ktorých sa reťazec nachádza v stave* j *pred prechodom do absorčného stavu, ak vyšiel so stavu* i. Zo stavu i

reťazec po jednom kroku prejde stavu k s pravdepodobnosťou p_{ik}. Ak je stav $k \in S_A$, potom ďalší prechod nie je možný, ak je stav $k \in S_T$ potom reťazec prejde cez tento stav priemerne f_{kj} krát. Pre $i, j \in S_T$ platí

$$f_{ij} = \sum_{k \in S_T} q_{ik} f_{kj} + \delta_i^j, \tag{1.26}$$

v maticovom zápise

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}\mathbb{F} + \mathbb{E} \tag{1.27}$$

Úpravou (1.27) dostaneme

$$\mathbb{E} = \mathbb{F} - \mathbb{Q}\mathbb{F} = (\mathbb{E} - \mathbb{Q})\mathbb{F},$$

odkiaľ dostaneme po vynásobení oboch strán rovnice fundamentálnou maticou $(\mathbb{E} - \mathbb{Q})^{-1}$, ktorá podľa vety 1.1.8 existuje a je rovná $\mathbb{F}$.

Poznámka. Strednú dobu (počet krokov), ktorý reťazec strávi v prechodových stavoch ak začína v prechodovom stave i a končí v absorbčnom stave dostaneme ako súčet prvkov v i-tom riadku fundamentálnej matice.

Prvky b_{ij} udávajú *pravdepodobnosti, že reťazec začínajúci v stave i bol absorbovaný v stave j*. Ak východiskový stav započítavame do počtu prechodov, potom zo zavedených pojmov dostaneme

$$b_{ij} = q_{ik} + \sum_{k \in S_T} q_{ik} b_{kj}, \tag{1.28}$$

v maticovom zápise

$$\mathbb{B} = \mathbb{R} + \mathbb{Q}\mathbb{B} \tag{1.29}$$

Úpravou (1.29) dostaneme

$$\mathbb{R} = (\mathbb{E} - \mathbb{Q})\mathbb{R},$$

odkiaľ opäť dostaneme po vynásobení oboch strán rovnice fundamentálnou maticou $(\mathbb{E} - \mathbb{Q})^{-1}$, ktorá podľa vety 1.1.8 existuje, vzťah $\mathbb{B} = \mathbb{F}\mathbb{R}$.

Príklad 1.11. Pokračujme v príklade 1.9. Tu je fundamentálna matica

$$\mathbb{F} = (\mathbb{E} - \mathbb{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

a matica prechodu do absorčných stavov

$$\mathbb{B} = \mathbb{F}\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teraz zameriame pozornosť využitie matíc $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}, \mathbb{B}$ na príklade z praxe v *modeli hodnotiacom náklady podniku na záručné opravy*.

Príklad 1.12. *Uvažujme podnik, ktorý poskytuje 2-ročnú záručnú dobu na opravy, pričom jedenkrát opravený výrobok je už mimo záruky. Známa je priemerná hodnota opravu výrobku v záruke, ako aj štruktúra výrobkov v záručnej dobe. Dynamiky uvažovaného systému vyjadruje matica pravdepodobností prechodu $\mathbb{P}$, pri konštrukcii ktorej vychádzame zo skutočnosti, že medzi stavmi systému môžu v priebehu zvoleného časového intervalu nastať nasledujúce situácie:*

1. *výrobok bude vyžadovať opravu,*
2. *výrobok nebude vyžadovať opravu a prejde do ďalšieho roku v rámci poskytovania záruk,*
3. *výrobok prekročí dvojročné záručné obdobie.*

Tento systém môžeme modelovať absorbčným reťazcom. Označme absorbčné stavy: 0 - „po záruke“ a 1 - „požadovaná oprava“ a prechodné stavy systému: 3 - „prvý rok v záruke“ a 4 - „druhý rok v záruke“. Krok, v ktorom sa sledujú prechody medzi stavmi predstavuje rok. Majme nasledujúcu maticu pravdepodobností prechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{R} & \mathbb{Q} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Fundamentálna matica a matica pravdpodobností prechodu do absorbčných stavov sú nasledovné:

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & -0.75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0.75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0.75 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.25 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Možno teda očakávať, že priemerne 60% výrobkov, ktoré sú v prvom roku v záručnej lehote nebude požadovať opravu a priemerne 40% výrobkov bude požadovať opravu. Rovnako sa interpretujú i prvky v ostatných riadkoch matice $\mathbb{B}$.

Očakávané (priemerné) počty výrobkov po záruke x_0 a požadujúcich opravu x_1 učíme zo vztahu

$$\bar{\mathbf{x}} = (x_0, x_1) = \mathbf{q}\mathbb{B}, \tag{1.30}$$

kde $\mathbf{q}$ predstavuje súčasné rozdelenie počtu výrobkov v rámci záručnej doby a požadujúcich opravu. Ak predpokladáme $\mathbf{q} = (30000, 20000)$, potom dostaneme $\mathbf{x} = (34000, 16000)$. Čiže 16000 ks výrobkov bude vyžadovať záručnú opravu.

Celkovú hodnotu očakávaných nákladov na záruky (CON) vypočítame zo vzťahu

$$CON = \mathbf{q}\mathbb{B}\bar{\mathbf{c}}^T, \tag{1.31}$$

kde $\bar{\mathbf{c}}$ predstavuje priemernú hodnotu nákladov za výrobok v záruke. Ak predpokladáme $\bar{\mathbf{c}} = (0, 100)$ Sk, potom dostaneme

$$CON = (34000, 16000)(0, 100)^T = 1600000Sk.$$

Očakávanú diskontovú hodnotu nákladov na záruky pri známej úrokovej miere možno určiť podľa vzťahu

$$CON(d) = \mathbf{q}(\mathbb{E} - d\mathbb{Q})^{-1}\mathbb{R}\bar{\mathbf{c}}^T, \tag{1.32}$$

kde $d = 1/(1 + i)$ je odúročiteľ pri úrokvej miere i. Ak predpokladáme úrokovú mieru 10% ($i = 0.1$) potom máme $\bar{x}_{sh} = 1559091$ Sk.

Konečne *stacionárne rozdelenie očakávaného počtu* výrobkov určíme zo vzťahu

$$\bar{\mathbf{z}} = (z_0, z_1) = (k_0, 0)\mathbb{F}, \tag{1.33}$$

kde k_0 počet výrobkov priebežne dodávaných na trh. Ak teda podnik existuje dlhšie obdobie a každý rok dodá na trh $k_0 = 30000$ ks výrobku, potom dostaneme $\bar{\mathbf{z}} = (30000, 22500)$ ks. Podnik tak môže očakávať na trhu v záruke celkom 52500 ks výrobkov.

Cvičenie. Zostrojte graf závislosti celkových očakávaných a diskontových nákladov pri $1, 2.5, 5, 10$ a 15% úrokovej miere a zdôvodnite trend takto získaných hodnôt.

1.2 Markovove procesy

Definícia 1.16. Náhodný reťazec $\{\mathbf{X}(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov S nazveme *Markovov proces*, ak

1. množina $T = \langle 0, \infty)$,
2. platí *Markovova vlastnosť*:

$$\begin{aligned}&\forall t_0, t_1, \ldots, t_{n+1} \in T: \; t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}, \; \forall i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S: \\ &\mathcal{P}(\mathbf{X}(t_{n+1}) = j | \mathbf{X}(t_n) = i, \mathbf{X}(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, \mathbf{X}(t_0) = i_0) = \\ &= \mathcal{P}(\mathbf{X}(t_{n+1}) = j | \mathbf{X}(t_n) = i)\end{aligned}$$

Ak $\mathbf{X}(t) = i$, potom hovoríme, že *proces je v čase t v stave i*.

Poznámka. Pojem *Markovov proces* sa používa hlavne v technickej literatúre miesto zdĺhavejšieho názvu *Markovov reťazec so spojitým časom*.

Ak porovnáme definície Markovovho reťazca a Markovovho procesu vidíme, že môžeme prirodzene definovať príslušné analogické pojmy pre spojitý čas.

1.2.1 Homogénne Markovove procesy

Definícia 1.17. Markovov proces $\{\mathbf{X}(t)\}_{t\in T}$ nazveme *homogénny* (v čase), ak platí

$$\begin{aligned}&\forall t_1, t_1 + h, t_2, t_2 + h \in T \;\; \forall i, j \in S \\ &\mathcal{P}(\mathbf{X}(t_1 + h) = j | \mathbf{X}(t_1) = i) = \mathcal{P}(\mathbf{X}(t_2 + h) = j | \mathbf{X}(t_2) = i)\end{aligned}$$

Pravdepodobnosť prechodu zo stavu i do stavu j za čas h označíme

$$p_{ij}(h) = \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbf{X}(t + h) = j | \mathbf{X}(t) = i) & \text{ak } h > 0 \\ \delta_{ij} & \text{ak } h = 0 \end{cases} \tag{1.34}$$

Po usporiadaní máme *maticu pravdepodobností prechodu* (za čas h)

$$\mathbb{P}(h) = (p_{ij}(h))_{i,j\in S}$$

Pravdepodobnosť, že sa proces v čase t nachádza v stave j, označíme

$$p_j(t) = \mathcal{P}(\mathbf{X}(t) = j) \tag{1.35}$$

Zvykneme ich usporiadať v tvare vektora

$$\mathbf{p}(t) = (p_j(t))_{j\in S}$$

a nazývame *pravdepodobnostné rozdelenie procesu* (v čase t). Počiatočným rozdelením procesu rozumieme $\mathbf{p}(0)$.

Príklad 1.13. *Tak ako v príklade 1.1 budeme uvažovať päť guličiek v dvoch urnách. Teraz nás však bude zaujímať vývoj (chovanie) guličiek v reálnom čase. Na začiatku pozorovania je prvá urna prázdna. Dĺžky časových intervalov medzi jednotlivými zmenami počtu guličiek v urnách sú náhodné, nezávislé a nie sú ovplyvnené počtom guličiek v urnách. Pravdepodobnosť nastatia zmien počas intervalu danej dĺžky nezávisí od polohy tohto intervalu na časovej osi. Navrhnite model umožňujúci výpočet stredného počtu guličiek v prvej urne ako funkciu doby trvania pozorovania.*

Opäť budeme modelovať chovanie guličiek náhodným reťazcom $\{\mathbf{X}(t)\}_{t\in T}$ popisujúcim počty guličiek v 1. urne v spojitom čase pozorovania T. Jedná sa o homogénny Markovov proces s počiatočným rozdelením $\mathbf{p}(0) = (1,0,0,0,0,0)$. Potom stredný počet guličiek v prvej urne v čase $t \in T$ je určený vzťahom

$$\mathcal{E}(\mathbf{X}(t)) = 1.p_1(t) + 2.p_2(t) + 3.p_3(t) + 4.p_4(t) + 5.p_5(t)$$

Asi nás neprekvapí, že aj v spojitom prípade platí analógia vety 1.1.1. Umožňuje výpočet matíc pravdepodobností prechodu v časových okamihoch pomocou funkcionálnej maticovej rovnice.

Veta 1.2.1. *(Chapman-Kolmogorovove rovnice)*

$$\mathbb{P}(r+s) = \mathbb{P}(r)\mathbb{P}(s) \quad \forall r,s \in T \tag{1.36}$$

Dôkaz. Treba ukázať, že platí

$$p_{ij}(r+s) = \sum_{k\in S} p_{ik}(r)p_{kj}(s)$$

Postupne využijeme homogenitu reťazca, vetu o úplnej pravdepodobnosti, vzťah $\mathcal{P}(AB|C) = \mathcal{P}(A|BC)\mathcal{P}(B|C)$ a Markovovu vlastnosť reťazca.

$$\begin{aligned}
p_{ij}(r+s) =& \mathcal{P}(\mathbf{X}(r+s)=j|\mathbf{X}(0)=i) = \\
=& \sum_{k\in S}\mathcal{P}(\mathbf{X}(r+s)=j,\mathbf{X}(r)=k|\mathbf{X}(0)=i) = \\
=& \sum_{k\in S}\mathcal{P}(\mathbf{X}(r+s)=j|\mathbf{X}(r)=k,\mathbf{X}(0)=i)\mathcal{P}(\mathbf{X}(r)=k|\mathbf{X}(0)=i) = \\
=& \sum_{k\in S}\mathcal{P}(\mathbf{X}(r+s)=j|\mathbf{X}(r)=k)\mathcal{P}(\mathbf{X}(r)=k|\mathbf{X}(0)=i) = \\
=& \sum_{k\in S} p_{ik}(r)p_{kj}(s)
\end{aligned}$$

□

1.2.2 Pravdepodobnostné rozdelenie

Naším cieľom je vypočítať pravdepodobnostné rozdelenie Markovovho procesu $\mathbf{p}(t)$. Jeho výpočet nám napríklad umožňuje nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.2.2. *(Chapman-Kolmogorovova)*

$$\mathbf{p}(t+h) = \mathbf{p}(t)\mathbb{P}(h)\ \forall t,h \in T \tag{1.37}$$

Dôkaz. Treba ukázať, že

$$p_j(t+h) = \sum_{k\in S} p_k(t)p_{kj}(h) \quad \forall j \in S\ \forall t \in T$$

Označme javy $H_k = \{\mathbf{X}(t) = k\}$ a $A = \{\mathbf{X}(t+h) = j\}$. Z vety o úplnej pravdepodobnosti a homogenity reťazca dostávame

$$p_j(t+h) = \mathcal{P}(A) = \sum_{k\in S}\mathcal{P}(H_k)\mathcal{P}(A|H_k) = \sum_{k\in S} p_k(t)p_{kj}(h)$$

□

1.2.3 Kolmogorovove diferenciálne rovnice

Efektívnejší výpočet rozdelenia reťazca, naviac v ľubovoľnom okamihu, dostaneme z riešenia sústavy homogénnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami. Najskôr však zavedieme nasledujúce značenie pomocou symbolu o, ktorý budeme v nasledujúcom zmysle používať v celom ďalšom texte.

Definícia 1.18. Hovoríme, že reálna funkcia reálnej premennej $f(x)$ je pre $x \to 0$ rádovo menšia než x a zapisujeme $f(x) \equiv o(x)$ pre $x \to 0$, ak platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$$

Cvičenie. Overte: $o(x) + o(x) = o(x),\ K \cdot o(x) = o(x),\ o(x)\cdot o(x) = o(x)$.

Definícia 1.19. Na popis homogénneho Markovovho reťazca so spojitým časom slúžia *intenzity prechodu zo stavu i do stavu j*

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{p_{ij}(h)}{h} & \text{ak } i \neq j \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1-p_{ii}(h)}{h} & \text{ak } i = j \end{cases} \tag{1.38}$$

Zvykneme ich usporiadať v tvare matice $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j\in S}$, kde

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{ak } i \neq j \\ -\lambda_{ii} & \text{ak } i = j \end{cases} \tag{1.39}$$

a nazývame *maticou intenzít prechodu*.

Cvičenie. Dokážte, že platí

$$\sum_{j\in S} q_{ij} = 0 \ \forall i \in S$$

Príklad 1.14. *Predpokladajme, že intenzity prechodu medzi rôznymi (bezprostredne dostupnými) stavmi urien v príklade 1.13 sú rovnaké a nezávislé od počtu guličiek v urnách. Definujte v tomto modeli maticu intenzít prechodu a maticu pravdepodobností prechodu za veľmi malú dobu $\triangle t$.*

Všetky možné bezprostredné prechody medzi rôznymi stavmi systému budú mať konštantnú intenzitu prechodu λ. Dostávame nasledujúcu maticu intenzít

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

Poznamenajme, že v tomto modeli je stavom systému počet guličiek v 1.urne. Matica $\mathbb{Q}$ je aj maticou intenzít prechodu, ak by sme zvolili ako stav systému počet guličiek v 2.urne.

Hľadaná matica $\mathbb{P}(\triangle t)$ má potom podĺa definície 1.38 prvky definované pre $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$p_{ij}(\triangle t) = \begin{cases} 1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } (i,j) \in \{(0,0),(5,5)\} \\ 1 - 2\lambda\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } (i,j) \in \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} \\ \lambda\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } |i-j| = 1 \\ o(\triangle t) & \text{ak } |i-j| > 1 \end{cases}$$

Veta 1.2.3. *(Kolmogorovove diferenciálne rovnice)*

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbb{Q} \tag{1.40}$$

Dôkaz.

Označme $\mathbb{E}$ jednotkovú maticu a $\mathbb{I}$ maticu jednotiek. Z Chapman-Kolmogorovovej vety 1.2.2 dostaneme

$$\frac{\mathbf{p}(t+\triangle t) - \mathbf{p}(t)}{\triangle t} = \frac{\mathbf{p}(t)(\mathbb{P}(\triangle t) - \mathbb{E})}{\triangle t} = \mathbf{p}(t)\mathbb{Q} + \frac{o(\triangle t)}{\triangle t}\mathbf{p}(t)\mathbb{I}$$

Po limitnom prechode $\triangle t \to 0^+$ máme tvrdenie vety. □

Príklad 1.15. *V príklade 1.14 nás bude zaujímať dynamika chovania guličiek, ak na začiatku pozorovania je rovnako pravdepodobné, že sú všetky guličky v prvej alebo druhej urne.*

Chovanie guličiek v 1.urne možno popísať nasledujúcim systémom Kolmogorovových diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \lambda p_1(t) \\ p_1'(t) &= \quad \lambda p_0(t) - 2\lambda p_1(t) + \lambda p_2(t) \\ p_2'(t) &= \quad \lambda p_1(t) - 2\lambda p_2(t) + \lambda p_3(t) \\ p_3'(t) &= \quad \lambda p_2(t) - 2\lambda p_3(t) + \lambda p_4(t) \\ p_4'(t) &= \quad \lambda p_3(t) - 2\lambda p_4(t) + \lambda p_5(t) \\ p_5'(t) &= \quad \lambda p_4(t) - \lambda p_5(t) \end{aligned}$$

s počiatočnými podmienkami

$$p_0(0) = \frac{1}{2},\ p_1(0) = 0,\ p_2(0) = 0,\ p_3(0) = 0,\ p_4(0) = 0,\ p_5(0) = \frac{1}{2}$$

1.2.4 Limitné vlastnosti

Definícia 1.20. Ak existuje limita

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t) = \boldsymbol{\pi} > \mathbf{0} \tag{1.41}$$

a toto limitné rozdelenie nezávisí na $\mathbf{p}(0)$, potom Markovov proces nazveme *ergodický* (regulárny) a pravdepodobnostné rozdelenie procesu $\boldsymbol{\pi}$ nazývame *stacionárne*.

Podobne ako v diskrétnom prípade, aj v spojitom prípade možno hľadať stacionárne rozdelenie reťazca riešením systému lineárnych rovníc.

Veta 1.2.4. *Stacionárne rozdelenie* $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j\in S}$ *je určené riešením*

$$\boldsymbol{\pi}\mathbb{Q} = \mathbf{0}, \quad \sum_{j\in S}\pi_j = 1 \quad \boldsymbol{\pi} > \mathbf{0} \tag{1.42}$$

Dôkaz. Pretože stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi}$ nezávisí na čase t, dostaneme zo vzťahu 1.40 pre $\mathbf{p}(t) = \pi$

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\mathbb{Q} \tag{1.43}$$

□

Príklad 1.16. *V príklade 1.14 sa budeme zaoberať chovaním guličiek v čase, keď sa systém už stabilizuje. Zaujíma nás ustálené rozloženie počtu guličiek v prvej urne.*

Hľadáme stacionárne rozdelenie príslušného reťazca riešením systému lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}
0 &= -\pi_0 + \pi_1 \\
0 &= \quad \pi_0 - 2\pi_1 + \pi_2 \\
0 &= \quad \pi_1 - 2\pi_2 + \pi_3 \\
0 &= \quad \pi_2 - 2\pi_3 + \pi_4 \\
0 &= \quad \pi_3 - 2\pi_4 + \pi_5 \\
0 &= \quad \pi_4 - \pi_5 \\
1 &= \quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5
\end{aligned}$$

ktorý má riešenie $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ reprezentujúce očakávané rovnomerné rozloženie počtu guličiek v prvej urne.

Jedna z najjednoduchších postačujúcich podmienok pre existenciu ergodického Markovovho reťazca je obsahom nasledujúceho tvrdenia, ktoré uvádzame bez dôkazu.

Veta 1.2.5. *(Markovova) Ak existuje čas* $t > 0$, *že všetky prvky matice* $\mathbb{P}(t)$ *sú kladné (t.j. nenulové), potom je Markovov proces ergodický.*

Poznámka. Podobne ako pre Markovove reťazce možno aj pre Markovove procesy urobiť analogickú klasifikáciu stavov. Vzhľadom na ich zložitosť, napr. súčty sú tu nahradené integrálmi, klasifikácii procesov nebudeme venovať pozornosť.

1.3 Metódy riešenia

1.3.1 Prechodový graf

Matice pravdepodobností prechodov alebo matice intenzít, s ktorými sa v praxi stretávame, bývajú veľmi riedke (majú veľmi veľa nulových prvkov). Potom je výhodné reprezentovať príslušné matice vhodným prechodovým grafom.

Definícia 1.21. Nech $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j\in S}$ je matica pravdepodobností prechodu Markovovho reťazca s množinou stavov S. Potom *prechodovým grafom reťazca* rozumieme ohodnotený digraf $G = (V, H, c)$, kde $V = S$ je množina vrcholov,

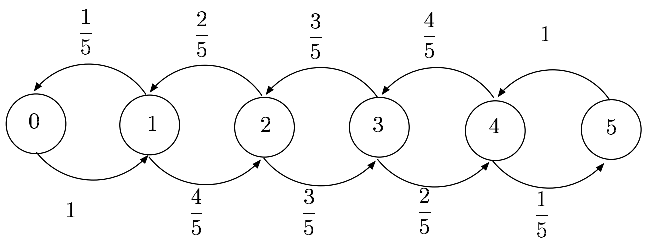
$$H = \{(i,j) \in V \times V : p_{ij} > 0\}$$

je množina orientovaných hrán a $c : H \to (0, 1\rangle$ je ohodnotenie orientovaných hrán určené $c((i,j)) = p_{ij}$.

Príklad 1.17. *V príklade 1.2 nahraďte maticu pravdepodobností prechodu prechodovým grafom.* Máme maticu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

ktorej zodpovedá ohodnotený digraf G na obr. 1.1.



Obr. 1.1: Prechodový graf reťazca a maticou $\mathbb{P}$

Analogicky sa definuje prechodový graf pre Markovov proces.

Definícia 1.22. Nech $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j\in S}$ je matica intenzít prechodu Markovovho procesu s množinou stavov S. Potom *prechodovým grafom procesu* rozumieme ohodnotený digraf $G = (V, H, c)$, kde $V = S$ je množina vrcholov,

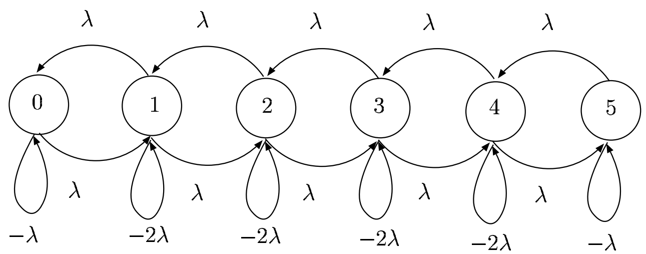
$$H = \{(i,j) \in V \times V : q_{ij} \neq 0\}$$

je množina orientovaných hrán a $c : H \to (-\infty, \infty)$ je ohodnotenie orientovaných hrán určené $c((i,j)) = q_{ij}$.

Príklad 1.18. *V príklade 1.14 nahraďte maticu intenzít prechodu prechodovým grafom.* Máme maticu

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

ktorej zodpovedá ohodnotený digraf G na obr. 1.2.



Obr. 1.2: Prechodový graf procesu a maticou $\mathbb{Q}$

Poznámka. Niekedy budeme, pre zjednodušenie obrázku prechodového grafu, vynechávať slučky. Ich ohodnotenie možno ľahko získať z ohodnotení odchádzajúcich hrán grafu. V prípade reťazca totiž platí vzťah $p_{ii} = 1 - \sum_{j\neq i} p_{ij}$ a v prípade procesu zas platí vzťah $q_{ii} = -\sum_{j\neq i} \lambda_{ij}$.

1.3.2 Algebraický prístup

Nech $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ je konečná množina stavov. V prípade homogénneho Markovovho reťazca s množinou stavov S a s maticou pravdepodobností prechodu $\mathbb{P} = (p_{ij})_{ij\in S}$ hľadáme stacionárne riešenie v tvare riešenia

systému

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbb{P} - \mathbb{E}) = \mathbf{0}, \quad \sum_{j\in S} \pi_j = 1 \quad \boldsymbol{\pi} > \mathbf{0} \tag{1.44}$$

V prípade homogénneho Markovovho procesu s množinou stavov S a maticou intenzít prechodu $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{ij\in S}$ hľadáme stacionárne riešenie v tvare riešenia systému

$$\boldsymbol{\pi}\mathbb{Q} = \mathbf{0}, \quad \sum_{j\in S} \pi_j = 1 \quad \boldsymbol{\pi} > \mathbf{0} \tag{1.45}$$

Oba systémy lineárnych rovníc (1.44) aj (1.45) môžeme, vzhľadom na lineárnu závislosť stĺpcov matíc, prepísať na tvar

$$\boldsymbol{\pi}\mathbb{A} = \mathbf{b} \tag{1.46}$$

kde $\mathbf{b} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} p_{00}-1 & p_{01} & p_{02} & \ldots & p_{0,n-1} & 1 \\ p_{10} & p_{11}-1 & p_{12} & \ldots & p_{1,n-1} & 1 \\ p_{20} & p_{21} & p_{22}-1 & \ldots & p_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{n-1,n-1}-1 & 1 \end{pmatrix}$$

pre systém (1.44) a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \ldots & q_{0,n-1} & 1 \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1,n-1} & 1 \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \ldots & q_{2,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & \ldots & q_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

pre systém (1.45).

Možno ukázať, že matica $\mathbb{A}$ je regulárna, systém rovníc (1.46) má jediné riešenie

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{b}\mathbb{A}^{-1}, \tag{1.47}$$

čo zodpovedá poslednému riadku inverznej matica $\mathbb{A}^{-1}$.

Poznámka. Systém (1.46) môžeme riešiť aj známym Cramerovým pravidlom, najskôr ho však musíme upraviť na tvar $\mathbb{A}^T\boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{b}^T$.

1.3.3 Markovove reťazce s výnosmi

V praktických aplikáciach môžeme predpokladať, že prechody medzi stavmi sú spojené s určitými *výnosmi* (tržby, náklady, produkcia,...). Každej pravdepodobnosti prechodu p_{ij} je priradený určitý výnos (ocenenie) o_{ij}, ktorý má v prípade strát zápornú hodnotu. Zvyknú sa usporiadať do *matice výnosov (ocenení)* $\mathbb{O} = (o_{ij})_{i,j\in S}$. Takéto reťazce sa nazývajú *Markovove reťazce s výnosmi*.

Označme $v_i(n)$ *očakávaný celkový výnos procesu po* n *krokoch, ktorý vznikol zo stavu* i. Vypočítame ho zo vzťahu

$$v_i(n) = \sum_{j\in S} p_{ij}(o_{ij} + v_j(n-1)), \quad i \in S. \tag{1.48}$$

Tieto výnosy usporiadame do *vektoru očakávaných výnosov po* n *krokoch* $\mathbf{v}(n) = (v_i(n))_{i\in S}$. Na začiatku je prirodzené predpokladať nulové výnosy t.j. $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$.

Označme q_i *strednú hodnotu bezprostredných výnosov stavu* i, vypočítame ju zrejme takto

$$q_i = \sum_{j\in S} p_{ij}o_{ij}, \quad i \in S. \tag{1.49}$$

Usporiadajme ich do *vektoru bezprostredných výnosov* $\mathbf{q} = (q_i)_{i\in S}$. Vzťah (1.48) potom môžeme prepísať v maticovej notácii na tvar

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbb{P}\mathbf{v}(n-1), \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}. \tag{1.50}$$

Príklad 1.19. *Podnik uvádza na trh nový produkt a sonduje jeho úspešnosť. Na začiatku - v priebehu prvého mesiaca sa zistila* 75% *úspešnosť produktu. Ak bol produkt v prvom mesiaci ne/úspešný s pravdepodobnosťou* $0.2/0.5$ *bude v nasledujúcom mesiaci úspešný. Predpokladajme, že výnosy pri zotrvaní v stave ne/úspešný sú* $-1, 10$ *a pri zmene stavu ne/úspešný* $4, 3$.

Predpokladajme, že zmeny v úspešnosti produktu môžeme modelovať Markovovým reťazcom s množinou stavov $S = \{1, 2\}$, kde stav 1 je „úspešný" a stav 2 je „neúspešný". Potom matica pravdepodobností prechodu a matica výnosov budú

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vypočítame očakávané hodnoty výnosov zodpovedajúce jednotlivým mesiacom (krokom). Najkôr vypočítame vektor bezprostredných výnosov

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_{11}o_{11} + o_{12}r_{12} \\ p_{21}o_{21} + o_{22}r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -0.2 \end{pmatrix}.$$

n	0	1	...	5	6	7
$v_0(n)$	7	10.4	...	16.615	18.484	20.345
$v_1(n)$	−0.2	1.04	...	6.354	8.206	10.062

Tabuľka 1.1: Vývoj výnosov produktu

Vektor očakávaných výnosov po 1. mesiaci je

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbb{P}\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -0.2 \end{pmatrix}.$$

Vektor očakávaných výnosov po 2. mesiaci je

$$\mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbb{P}\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.4 \\ 1.04 \end{pmatrix}.$$

Analogickým postupom vypočítame očakávané výnosy v ďalších mesiacoch a zapíšeme do tabuľky Tab.1.1. Vidíme, že rozdiel $v_0(n) - v_1(n)$ sa po určitom počte krokov blíži k hodnote 10.28. Interpretujeme to tak, že východiskový stav úspešného produktu prináša v každom mesiaci o 10.28 jednotiek vyšší výnos ako východiskový stav neúspešného výrobku. Súčasne je viditeľný konštantný prírastok hodnôt očakávaných výnosov, ktorý sa ustaľuje na hodnote $1,857$. Táto vlastnosť súvisí s limitnými vlastnosťami reťazca.

1.3.4 Markovove reťazce s alternatívami

Ocenenia pravdepodobností prechodu sú dôležité pre porovnanie rôznych alternatív, medzi ktorými sa možno rozhodovať. Ide o tzv. *riadené Markovovove reťazce* resp. *Markovovove rozhodovacie procesy*. Takáto voľba by mala byť optimálna pre dostatočne dlho prebiehajúci proces.

Predpokladá sa, že v rámci každého stavu sa môžeme rozhodnúť medzi alternatívami, ktoré s príslušným stavom súvisia. Za účelom výberu optimálnej startégie (rozhodnutia), môžeme použiť iteratívny postup zodpovedajúci aplikácii princípu dynamického programovania. Pre úlohy tohto typu je známa ako *metóda iterácie podľa hodnoty*.

Nech $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ sú stavy konečného reťazca. Označme k index alternatív, $p_{ij}^{(k)}$ resp. $o_{ij}^{(k)}$ je pravdepodobnosť resp. výnos prechodu zo stavu i do stavu j pri alternatíve k a n je krok. Postup metódy je takýto:

1. V každom kroku vypočítame celkové očakávané náklady podľa vzťahu:

$$v_i(n+1) = \max_k (q_i^{(k)} + \sum_{j \in S} p_{ij}^{(k)} v_j(n-1)), \quad i \in S, \tag{1.51}$$

   kde

$$q_i^{(k)} = \sum_{j \in S} p_{ij}^{(k)} o_{ij}^{(k)}, \quad i \in S, \tag{1.52}$$

   je stredná hodnota výnosu stavu i pri alternatíve k. Výnosy $v_i(n+1)$ sú celkové očakávané výnosy na optimálnej ceste.

2. Pri výpočte $v_i(n+1), i \in S$ určíme vektor odpovedajúcich alternatív $\mathbf{d}(n) = (d_i(n))_{i \in S}$, kde $d_i(n)$ je index odpovedajúcej alternatívy v stave i v kroku n.

3. Metóda končí nájdením takého vektora alternatív $\mathbf{d}(n^*)$, ktorý sa už nemení - vedie k maximálnemu očakávenému výnosu.

Príklad 1.20. *Pokračujeme v riešení príkladu 1.19. Podnik spustil reklamnú kampaň a prípade ne/úspešnosti sa zvýšila jeho úspešnosť na* $30/80\%$. *Predpokladajme, že sú zistené i výnosy odpovedajúce jednotlivým alternativam úspešnosti produktu.* Úlohou je stanoviť optimálne alternatívy, ktoré vedú k najvyššiemu očakávanému výnosu. Vstupné údaje obsahujú matice pravdepobností a výnosov podľa dvoch alternatív k: 1 „bez reklamy" a 2 „s reklamou":

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{O}^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{O}^{(2)} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Najkôr vypočítave vektory stredných hodnôt výnosu pre obe alternatívy:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(1)} o_{11}^{(1)} + p_{12}^{(1)} o_{12}^{(1)} \\ p_{21}^{(1)} o_{21}^{(1)} + p_{22}^{(1)} o_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -0.2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} o_{11}^{(2)} + p_{12}^{(2)} o_{12}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} o_{21}^{(2)} + p_{22}^{(2)} o_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.6 \\ -1.5 \end{pmatrix}.$$

Vypočítame celkové očakávané výnosy na optimálnej ceste:

1. Pre $n = 0$ je $v_0(0) = v_1(0) = 0$.

2. Pre $n = 1$ je

$$v_1(1) = \max(7 + 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0; 11.6 + 0.8 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0) = 11.6,$$

   čo zodpovedá alternatíve $k = 2$ (reklamovať) t.j. $d_1(1) = 2$.

$$v_2(1) = \max(-0.2 + 0.2 \cdot 0 + 0.8 \cdot 0; -1.5 + 0.3 \cdot 0 + 0.7 \cdot 0) = -0.2,$$

   čo zodpovedá alternatíve $k = 1$ (nereklamovať) t.j. $d_2(1) = 1$.

3. Pre $n = 2$

$$v_1(2) = \max(7+0.5\cdot 11.6+0.5\cdot -0.2; 11.6+0.8\cdot 11.6+0.2\cdot -0.2) = 22.84,$$

   čo zodpovedá alternatíve $k = 2$ (nereklamovať) t.j. $d_1(2) = 2$.

$$v_2(2) = \max(-0.2+0.2\cdot 11.6+0.8\cdot -0.2; -1.5+0.3\cdot 11.6+0.7\cdot -0.2) = 1.96,$$

   čo zodpovedá alternatíve $k = 1$ (reklamovať) t.j. $d_2(1) = 1$.

Rovnakým spôsobom vypočítame celkové očakávané výnosy a určíme odpovedajúce alternatívy v ďalších mesiacoch. Ďalším výpočtom možno zistiť, že od 3-tieho mesiaca sa proces ustáli tak, že využíva druhú alternatívu (reklama).

1.4 Elementárne Markovove procesy

Budeme sa zaoberať niektorými prípadmi homogénnych Markovových procesov, ktoré sú známe pod názvom *elementárne Markovove procesy*.

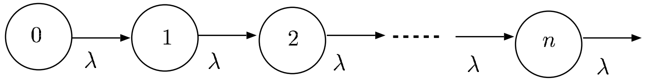
1.4.1 Poissonov proces

Definícia 1.23. *(Homogénnym) Poissonovým procesom s parametrom* $\lambda > 0$ rozumieme homogénny Markovov proces, s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, s počiatočným rozdelením $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, 0, \dots)$ a s nasledujúcim prechodovým grafom

Poznámka. Ďalej budeme v názve vynechávať slovo „homogénny" a skracovať len na *Poissonov proces*. So všeobecnejšími *nehomogénnymi Poissonovými procesmi* sa nebudeme zaoberať.

Lema 1.4.1. *Nech* $\{\mathbf{X}(t)\}_{t \in T}$ *je Poissonov proces s parametrom* λ. *Potom*

$$p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \quad \forall j \in S \tag{1.53}$$



Obr. 1.3: Prechodový graf homogénneho Poissonovho procesu

Dôkaz. Matica intenzít Poissonovho procesu je

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

Overením Kolmogorových diferenciálnych rovníc (1.40) pre rozdelenie procesu (2.1) dostávame tvrdenie vety. □

Poznámka. Z dôkazu lemy 2.1 tiež vidíme, prečo bolo výhodné definovať počiatočné rozdelenie Poissonovho procesu $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \dots)$.

Veta 1.4.1. *Nech* $\{\mathbf{X}(t)\}_{t\in T}$ *je Poissonov proces s parametrom* λ. *Potom*

$$\mathcal{E}(\mathbf{X}(t)) = \lambda t \tag{1.54}$$

Dôkaz.

$$\mathcal{E}(X(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} j\mathcal{P}(X(t) = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t} = \lambda t$$

□

Poznámka. Dôsledkom vety 1.4.1, je že parameter λ Poissonovho procesu môžeme interpretovať ako *stredný počet udalostí za jednotku času* a nazvať *intenzitou Poissonovho procesu*. Udalosťami sa tu chápu okamihy, keď dochádza k zmene stavu reťazca.

V dopravnej praxi sa často stretávame s príkladmi toku udalostí (napr. príchody vozidiel na križovatku, príchody vozidiel na čerpaciu stanicu, odchody nákladných vlakov zo zoraďovacej stanice), ktoré môžeme modelovať Poissonovým procesom.

Príklad 1.21. *Majiteľ potravín zistil, že v rannej špičke prichádza do potravín priemerne 20 zákazníkov za 5 minút. Majiteľova manželka sa domnieva, že v priebehu 10 minút môžu očakávať príchod 30-tich zákazníkov. Optimistický majiteľ však v priebehu 10 minút očakáva príchod 40-tich zákazníkov. Kto z manželov má pravdepodobnejší odhad?*

Budeme predpokladať, že príchody zákazníkov sú náhodné udalosti modelované Poissonov procesom s intenzitou $\lambda = \frac{20}{5} = 4$ zák./min. Pravdepodobnosť 30-tich udalostí v časovom intervale dĺžky 10 minút je rovná podľa vzťahu (2.1)

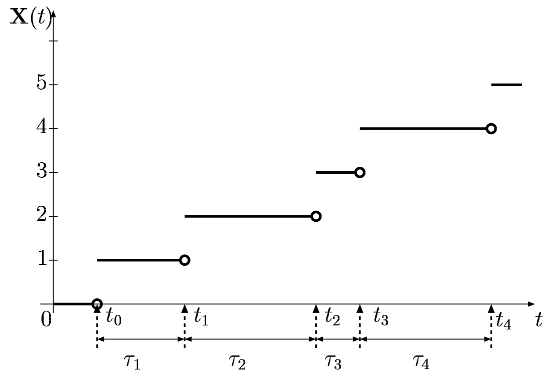
$$p_{30}(10) = \frac{(4.10)^{30}}{30!}e^{-4.10} = \frac{40^{30}}{30!}e^{-40} = 0.01847$$

a pravdepodobnosť 40-tich udalostí v 10 minútovom intervale je

$$p_{40}(10) = \frac{(4.10)^{40}}{40!}e^{-4.10} = \frac{40^{40}}{40!}e^{-40} = 0.06297$$

Optimistický odhad majiteľa má väčšiu pravdepodobnosť než opatrnejší odhad jeho manželky.

Za istých predpokladov o toku náhodných udalostí $\{\mathbf{t}_n\}_{n=0}^{\infty}$, ktoré nebudeme bližšie špecifikovať, môžeme tento tok modelovať Poissonovým procesom $\{\mathbf{X}(t)\}_{t\in T}$. Na obr.1.4 máme jednu konkrétnu realizáciu elemen-



Obr. 1.4: Realizácia toku udalostí ako Poissonovho procesu

tárneho toku a zodpovedajúce jednotkové prírastky stavu Poissonovho procesu v okamihoch výskytov jednotlivých udalostí.

Doba medzi dvoma po sebe nasledujúcimi udalosťami sa nazýva *medzera*. Medzery modelujeme náhodnými veličinami

$$\boldsymbol{\tau}_k = \mathbf{t}_k - \mathbf{t}_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots \tag{1.55}$$

Nasledujúce tvrdenie demonštruje charakteristickú exponenciálnu vlastnosť medzier medzi udalosťami Poissonovho procesu.

Veta 1.4.2. *Nech* $\{\boldsymbol{\tau}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *sú medzery Poissonovho procesu s intenzitou* λ. *Potom*

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_k > \tau) = e^{-\lambda\tau} \quad \forall \tau > 0 \tag{1.56}$$

Dôkaz. Podľa definície medzier, obr.1.4, k ďalším udalostiam v nich nedochádza. Pravdepodobnosť, že $\boldsymbol{\tau}_k$ presiahne nejakú hodnotu $\tau > 0$, je rovná pravdepodobnosti, že počas intervalu dĺžky τ k žiadnej ďalšej udalosti nedôjde. Naviac využijúc vlastnosť homogenity Poissonovho procesu dostávame

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_k > \tau) = \mathcal{P}(\mathbf{X}(\tau) = 0|\mathbf{X}(0) = 0) = \mathcal{P}(\mathbf{X}(\tau) = 0) = p_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$$

□

Cvičenie. Ukážte, že pre medzery $\{\boldsymbol{\tau}_k\}_{k=1}^{\infty}$ elementárneho toku platí

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_k > t + \tau | \boldsymbol{\tau}_k > t) = \mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_k > \tau) \quad \forall t, \tau > 0 \tag{1.57}$$

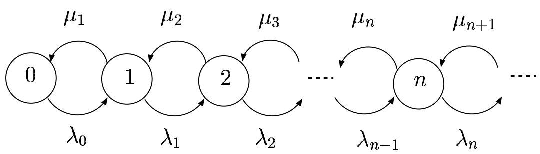
a

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\tau}_k) = \frac{1}{\lambda} \tag{1.58}$$

1.4.2 Procesy vzniku a zániku

Medzi elementárne Markovove procesy s množstvom praktických aplikácii v demografii, hromadnej obsluhe a teórii kozmického žiarenia patria procesy *vzniku a zániku*, známe aj ako procesy *rodenia a úmrtí*. Jedná sa o model populácie, v ktorej z niektorých jedincov vznikajú noví jedinci a iní jedinci postupne zanikajú.

Definícia 1.24. *Procesom vzniku a zániku* rozumieme homogénny Markovov proces, s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, s počiatočným rozdelením $\mathbf{p}(0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ a s nasledujúcim prechodovým grafom



Obr. 1.5: Proces vzniku a zániku

Najznámejšími špeciálnymi prípadmi procesu vzniku a zániku sú:

1. *lineárny proces vzniku a zániku*, u ktorého sú intenzity prechodu lineárnymi funkciami stavov, v ktorých bol systém v predošlom okamihu, t.j. $\lambda_i = i\lambda, \lambda > 0$ pre $i = 0, 1, \dots$ a $\mu_i = i\mu, \mu > 0$ pre $i = 1, 2, \dots,$

2. *procesom rastu*, keď počet jedincov v systéme s časom len rastie, t.j. $\lambda_i > 0$ pre $i = 0, 1, \dots,$

3. *procesom zániku*, keď počet jedincov v systéme s časom počet len klesá, t.j. $\mu_i > 0$ pre $i = 1, 2, \dots,$

4. *konečný proces vzniku a zániku*, u ktorého je $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ množina stavov konečná, a tak $\lambda_i > 0$ pre $i = 0, \dots, n-1$ a $\mu_i > 0$ pre $i = 1, \dots, n$.

Prechodovému grafu procesu vzniku a zániku na obr.1.5 (po pridaní slučiek) zodpovedá matica intenzít $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ definovaná takto

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{ak } j = i+1 \\ \mu_i & \text{ak } j = i-1 \\ -\lambda_i - \mu_i & \text{ak } j = i, i > 0 \\ -\lambda_i & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ 0 & \text{ak } |i-j| \geq 2 \end{cases} \tag{1.59}$$

Cvičenie. Zobrazte prechodové grafy a matice intenzít pre lineárny proces vzniku a zániku, proces rastu a proces zániku.

Z praktického hľadiska je významné najmä stacionárne rozdelenie konečného procesu vzniku a zániku.

Veta 1.4.3. *Konečný proces vzniku a zániku (obr.1.6) je ergodický a má stacionárne rozdelenie* $\pi = (\pi_j)_{j=0}^{n}$ *určené*

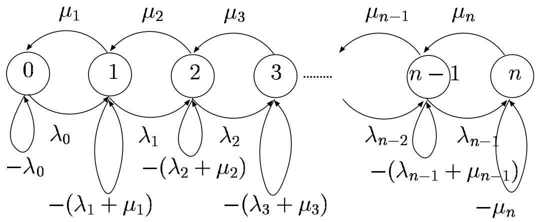
$$\pi_j = \pi_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \quad \textit{pre } 1 \leq j \leq n \tag{1.60}$$

kde

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j}\right)^{-1} \tag{1.61}$$

Dôkaz. Ergodičnosť procesu je dôsledok Markovovej vety 1.2.5. Korektnosť stacionárneho rozdelenia procesu (1.60),(1.61) stačí overiť. □

Príklad 1.22. *Opäť sa vrátime k príkladu s piatimi guličkami v dvoch urnách. Budeme predpokladať, že doba pobytu guličky v prvej urne má exponenciálne rozdelenie s parametrom* $\mu > 0$ *a doba pobytu guličky v druhej urne má exponenciálne rozdelenie s parametrom* $\lambda > 0$. *Udalosťou v tomto systéme je nezávislé preskakovanie guličiek medzi urnami. Aký je stredný počet guličiek v prvej urne?*



Obr. 1.6: Prechodový graf konečného procesu vzniku a zániku

Množinou stavov takéhoto systému môže byť opäť počet guličiek v prvej urne, teda $S=\{0,1,2,3,4,5\}$. Ďalej využijeme bezpamäťovú vlastnosť exponenciálneho rozdelenia, ktorá nám zaručuje Markovovu vlastnosť reťazca $\{\mathbf{X}(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov S. Ak $\boldsymbol{\tau}_1 \sim Exp(\mu)$ a $\boldsymbol{\tau}_2 \sim Exp(\lambda)$, potom pre $k=1,2$ a ľubovoľné $t,\tau>0$ je

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_k > t+\tau|\boldsymbol{\tau}_k > t) = \mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_k > \tau)$$

Naviac parametre oboch rozdelení nezávisia na čase, teda ide o homogénny Markovov reťazec so spojitým časom. Vypočítame pravdepodobnosti prechodu pre najaký dostatočne malý časový interval dĺžky $\triangle t$. Sústredíme sa len na zmeny stavu vyvolané zmenou polohy nanajvýš jednej guličky. Zmena polohy viac než jednej guličky v tomto intervale nastávajú totiž s pravdepodobnosťou $o(\triangle t)$ t.j. $p_{ij}(\triangle t)=o(\triangle t)$ pre $|i-j|>1$.

Pravdepodobnosť, že prvá urna je prázdna a žiadna gulička nepreskočí z druhej urny do prvej, je rovná súčinu pravdepodobností, že guličky v priebehu časového intervalu dĺžky $\triangle t$ nezmenia svoju polohu

$$p_{00}(\triangle t) = (\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_2 > \triangle t))^5 + o(\triangle t) = e^{-5\lambda\triangle t} + o(\triangle t) = 1-5\lambda\triangle t + o(\triangle t)$$

Pravdepodobnosť, že prvá urna je prázdna a jedna z 5-tich guličiek preskočí z druhej urny do prvej je rovná pravdepodobností, že jedna z piatich guličiek zmení polohu a ostatné nezmenia

$$\begin{aligned} p_{01}(\triangle t) &= 5\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_2 \le \triangle t)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_2 > \triangle t))^4 + o(\triangle t) \\ &= 5(1-e^{-\lambda\triangle t})(e^{-\lambda\triangle t})^4 + o(\triangle t) = 5\lambda\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Ak je teda v prvej urne i guličiek $(1\le i<5)$, potom analogicky máme

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\triangle t) &= i\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_1 \le \triangle t)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_1 > \triangle t))^{i-1}(\mathcal{P}(\tau_2 > \triangle t))^{5-i} + o(\triangle t) \\ &= i(1-e^{-\mu\triangle t})(e^{-\mu\triangle t})^{i-1}(e^{-\lambda\triangle t})^{5-i} = i\mu\triangle t + o(\triangle t) \\ p_{i,i+1}(\triangle t) &= (5-i)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_2 \le \triangle t)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_1 > \triangle t))^{i}(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_2 > \triangle t))^{4-i} + o(\triangle t) \\ &= (5-i)(1-e^{-\lambda\triangle t})(e^{-\mu\triangle t})^{i}(e^{-\lambda\triangle t})^{4-i} = (5-i)\lambda\triangle t + o(\triangle t) \\ p_{ii}(\triangle t) &= (\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_1 > \triangle t))^{i}(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_2 > \triangle t))^{5-i} + o(\triangle t) \\ &= (e^{-\mu\triangle t})^{i}(e^{-\lambda\triangle t})^{5-i} = 1-(i\mu+(5-i)\lambda)\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

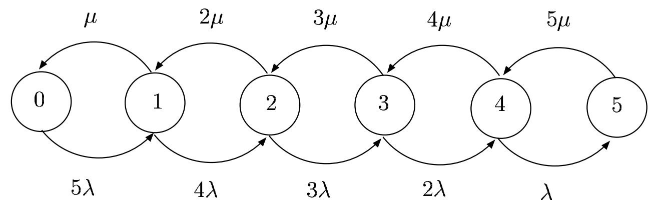
Pravdepodobnosť, že prvá urna je plná a jedna z guličiek preskočí do druhej urny, je

$$\begin{aligned} p_{5,4}(\triangle t) &= 5\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_1 \le \triangle t)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_1 > \triangle t))^4 + o(\triangle t) = 5(1-e^{-\mu\triangle t})(e^{-\mu\triangle t})^4 + o(\triangle t) \\ &= 5\mu\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Konečne pravdepodobnosť, že prvá urna zostane plná, je

$$\begin{aligned} p_{5,5}(\triangle t) &= (\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau}_1 > \triangle t))^5 + o(\triangle t) = (e^{-\mu\triangle t})^5 + o(\triangle t) \\ &= 1-5\mu\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Vidíme, že sme dostali prechodový graf konečného procesu vzniku a zániku Teraz už môžeme použiť vzorce z vety 1.4.3 a dostávame



Obr. 1.7: Prechodový graf konečného procesu vzniku a zániku

$$\pi_1 = 5\frac{\lambda}{\mu}\pi_0$$
$$\pi_2 = 10\frac{\lambda^2}{\mu^2}\pi_0$$
$$\pi_3 = 10\frac{\lambda^3}{\mu^3}\pi_0$$
$$\pi_4 = 5\frac{\lambda^4}{\mu^4}\pi_0$$
$$\pi_5 = \frac{\lambda^5}{\mu^5}\pi_0$$

Potom je stredný počet guličiek v prvej urne rovný

$$\mathcal{E}(\mathbf{X}) = \pi_0(5\frac{\lambda}{\mu} + 20\frac{\lambda^2}{\mu^2} + 30\frac{\lambda^3}{\mu^3} + 20\frac{\lambda^4}{\mu^4} + 5\frac{\lambda^5}{\mu^5})$$

kde

$$\pi_0 = (1 + 5\frac{\lambda}{\mu} + 10\frac{\lambda^2}{\mu^2} + 10\frac{\lambda^3}{\mu^3} + 5\frac{\lambda^4}{\mu^4} + \frac{\lambda^5}{\mu^5})^{-1}$$

V prípade nekonečnej množiny stavov však Markovovu nemôžeme aplikovať, a preto analogické tvrdenie uvádzame bez dôkazu.

Veta 1.4.4. *Nech pre proces vzniku a zániku s nekonečnou množinou stavov platí*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j} < \infty \tag{1.62}$$

Potom je proces ergodický a stacionárne rozdelenie $\pi = (\pi_j)_{j=0}^{\infty}$ je určené

$$\pi_j = \pi_0\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j} \quad pre\ j \geq 1 \tag{1.63}$$

kde

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j}\right)^{-1} \tag{1.64}$$

Poznámka. Vyššie uvedené tvrdenie využijeme najmä pri štúdiu niektorých elementárnych Markovových systémov hromadnej obsluhy s nekonečnou množinou stavov.

Služby	Alternatívy	Vymena	Oprava
Výmena	nový	0.4(8)	0.6(6)
	opravený	0.7(4)	0.3(1)
Oprava	bežná lehota	0.5(4)	0.5(3)
	skrátená lehota	0.8(1)	0.2(5)

Tabuľka 1.2: Služby pre mobilné telefóny - pravdepodobnosti prechodu (výnosy)

1.5 Aplikácie - cvičenia

Nasledujúce príklady sú vhodné ako cvičenia. Odporúčame pokúsiť sa aj klasifikovať stavy príslušných modelujúcich Markovových reťazcov (procesov).

Príklad 1.23. *Na trhu sa zisťuje záujem o nové druhy pečiva, ktoré budeme označovať A,B a C na základe prieskumu. Zistilo sa, že $50, 20, 30\%$ spotrebiteľov preferuje pečivo A,B,C. Za mesiac boli spotrebitelia jednotlivé druhy pečiva preverovaní, či naďalej kupujú pôvodný produkt alebo preferujú iný. Zistilo sa, že 90% spotrebiteľov vytrvalo pri A a 10% B. Rovnaký prieskum sa realizoval aj u spotrebiteľov, ktorí na začiatku preferovali pečivo B a C. Predpokladajme, že sú známe „výnosy“ z predaja, v peňažnom vyjadrení, vzhľadom na druhú časť prieskumu.* Úlohou je skúmať vývoj úspešnosti jednotlivých druhov pečiva v budúcom období a určiť odpovedajúce hodnoty očakávaného „výnosu“.

Príklad 1.24. *Firma zaoberajúca sa predajom a opravou mobilných telefónov dáva do prevádzky dva druhy služieb: „výmena telefónu“ a „oprava telefónu“. V rámci výmeny telefónu sa možno rozhodnúť medzi „výmenou za nový“ a „výmenou za opravený“ a v rámci opravý telefónu pre „opravou v bežnej lehote“ a „opravou v skrátenej lehote“ Firma zistila nasledovné (Tab1.2) podmienené pravdepodobnosti prechodu a výnosy odpovedajúce jednotlivým službám a alternatívam.* Úlohou je navrhnúť pre firmu optimálnu stratégiu opráv mobilných telefónov.

Príklad 1.25. *Podnik triedi svoje pohľadávky podľa času prekročenia ich splatnosti do 30 dňových intervalov. Doba splatnosti pohľadávky je 90 dní. Nesplatené pohľadávky nad 30 dní sú nedobitné (neinkasovateľné). Podnik sleduje v priebehu každého mesiaca po dobe splatnosti zmeny v počte splatených pohľadávok. Rovnako tiež stanovil, koľko percent nadobytných pohľadávok postúpi v priebehu mesiaca do ďalšieho mesiaca doby splatnosti. Takto získané údaje sú obsahom tabuľky Tab 1.3.* Úlohou je analyzovať uvažovaný systém splácania pohľadávok s cieľom stanoviť:

Intervaly	$0-30$ [dní]	$31-60$ [dní]	$61-90$ [dní]	Splatené pohľadávky	Nedobytné pohľadávky
$0-30$	0	0.77	0	0.23	0
$31-60$	0	0	0.34	0.66	0
$61-90$	0	0	0	0.73	27

Tabuľka 1.3: Pravdepodobnosti splácania pohľadávok podniku

1. očakávanú splatenú a nedobytnú hodnotu za predpokladu známej hodnoty pohľadávok v priebehu 3 mesačného obdobia,
2. hodnotu celkových finančných zdrojov za predpokladu známej hodnoty vznikajúcich pohľadívok každých 30 dní,
3. veľkosť rizikového fondu s vopred zvolenou istotou,
4. veľkosť finančných fondov pri uvažovaní diskontovej sadzby.

Príklad 1.26. *Pri 5 ročnom inžinierskom štúdiu sú jednotlivé ročníky buď absolvované alebo opakované, a nie je možné vracať sa do nižších ročníkov. Výstup z prvých štyroch ročníkov je možný len vylúčením, alebo postupom do vyššieho ročníka a v piatom ročníku vylúčením, alebo absolvovaním. Predpokladajme, že pravdepodobnosť vylúčenia je p_V, pravdepodobnosť postupu je p_P a pravdepodobnosť opakovania je p_O.* Určte maticu pravdepodobnosti prechodu, ak sú tieto pravdepodobnsoti pre všetky ročníky rovnaké. Akú ročníkovú štruktúru z N nastupujúcich študentov do prvého ročníka môžeme očakávať po piatich rokoch?

Príklad 1.27. *Podľa podmienok súťaže, športovec, ktorý remizuje jeden zápas, stráca jeden bod a športovec, ktorý prehrá jeden zápas, stráca dva body. Športovec je vyradený zo súťaže, ak stratí dva body. športovec, ktorý zatiaľ nestratil ani jeden bod, vyhráva v každom zápase s pravdepodobnoťou $1/2$ a remizuje s pravdepodobnosťou $1/4$. Ak už stratil jeden bod, potom v každom zápase je pravdepodobnosť jeho výhry $1/3$.* Určte pravdepodobnoť toho, že ak má športovec vyhraté všetky stretnutia, potom po ďalších dvoch zo súťaže vypadne.

Príklad 1.28. *Náhodne vybraný súbor rodín je rozdelená na tri skupiny:*

1. *rodiny, ktoré nemajú počítač a nemajú ani záujem si ho kúpiť,*
2. *rodiny, ktoré nemajú počítač, ale majú záujem si ho kúpiť,*

Počet strojov X	0	1	2	3	4	5 a viac
$p(N)$	0.2	0.7	0.07	0.02	0.01	0

Tabuľka 1.4: Rozdelenie diskrétnej náhodnej veličíny **N** - počet strojov prichádzajúcich do ptavy v intervale dĺžky 20 min

3. *rodiny, ktoré majú počítač*

Štatistické pozorovania počas jedného roka dali možnosť odhadnúť pavdepodobnosti prechodu rodiny z jednej skupiny do druhej s maticou pravdepodobnosti prechodu

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určte pravdepodobnosť toho, že rodina, ktorá

1. nemá počítač a nemá ani záujem si ho kúpiť, bude v takej situácii za dva roky,
2. nemá počítač ale má záujem si ho kúpiť, bude ho mať za dva roky.

Príklad 1.29. *V opravovni poľnohospodárskych strojov robia rýchle opravy. K dispozícii je jedna linka. Oprava trvá priemerne 20 minút. V opravovni môžu čakať nanajvýš 4 stroje. Počet strojov, ktoré v priebehu 20 minút prichádzajú do opravy je náhodná veličina bf N, ktorá má rozdelenie pravdepodobnosti zadané tabuľkou Tab1.4.*

Odvoďte maticu pravdepodobností prechodu $\mathbb{P}$ ak modelujeme stav skladu na začiatku opravy ako i. Aký je priemerný počet opráv po stabilizácii.

Príklad 1.30. *Sklad krmovív má maximálnu kapacitu uskladnenia 300 ton. V priebehu každej smeny sa do výroby odvezie 100 ton krmovín. Súčasne sklad dostane dodávku* **X** *ton na doplnenie zásob. Veličina* **X** *je náhodná a má rozdelenie pravdepodobností uvedené v tabuľke. Keď je dodávka tak veľká, že sa nevojde do skladu, potom sa nadbytočné množstvo ukladá na manipulačnú skládku. Odtiaľ sa aj za cenu zvýšených nákladov dodáva druhý deň do výroby.*

Odvoďte maticu pravdepodobností prechodu $\mathbb{P}$ ak modelujeme stav skladu na začiatku smeny ako i.

Príklad 1.31. *Uvažujme matematický model práce stroja, ktorý sa občas vypína a zapína. V každom časovom okamihu sú dve možnosti: stroj buď pracuje alebo*

Dodávka X ton krmovín	0	100	200	300	400 a viac
$p(X)$	0.55	0.25	0.10	0.10	0

Tabuľka 1.5: Rozdelenie diskrétnej náhodnej veličiny **X** - dodávka krmovín na doplnenie zásob

nepracuje. Je známa pravdepodobnosť vypnutia $\lambda(0 < \lambda < 1)$ *a pravdepodobnosť zapnutia stroja* $\mu(0 < \mu < 1)$.

Odvoďte pravdepodobnosti, že stroj po n pozorovaniach (ne)pracuje. Závisí limitné chovanie stroja od počiatočných podmienok?

Príklad 1.32. *Čata má k dispozícii* 4 *stroje, prácu vykonáva denne. Ak klesne počet prevádzkyschopných strojov pre poruchu koncom dna na menej než* 3 *stroje, dostane čata* 1 *stroj z rezervy; ten je dodaný na začiatok ďalšej smeny. Ak však majú koncom dňa* 3 *alebo* 4 *prevádzkyschopné stroje, nedostanú nič. Čata môže plniť svoje úlohy len ak má aspoň* 3 *stroje. Pri môže byť každý stroj vyradený pre poruchu s pravdepodonosťou* p. *Pravdepodonosť vyradenia* k *strojov z* n *strojov sa riadi binomickým rozdelením.*

Modelujte vhodne stavy takéhoto systému a odvoďte príslušnú maticu pravdepodobností prechodu a priemerný počet a rozptyl počtov prevádzkyschopných strojov na začiatku dňa po stabilizácii systému.

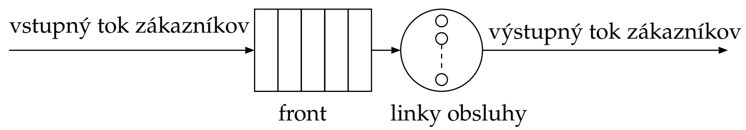
Príklad 1.33. *Dvaja hráči hrajú postupnosť partií. V každej partii hráč vyhrá korunu s pravdepodobnosťou* p *a prehrá korunu s pravdepodobnosťou* $q = 1 - p$. *Začiatočný kapitál 1. resp. 2. hráča je* K_1 *resp.* K_2 *korún. Hrá sa tak dlho, pokiaľ jeden z hráčov nepríde o všetky svoje peniaze.*

Odvoďte pravdepodobnosť výhry a výšku priemernej výhry 1. a 2. hráča.

Kapitola 2

Teória hromadnej obsluhy

Medzi aplikácie teórie Markovových reťazcov patria *systémy hromadnej obsluhy*. Jedná sa o systémy, ktorých základná štruktúra je znázornená na obr.2.1. Do systému, v ktorom sa nachádzajú *linky obsluhy* (obslužné kanály), prichádza *vstupný tok zákazníkov* požadujúcich obsluhu svojich požiadaviek. *Obsluha zákazníka* trvá istý čas, počas ktorej zákazník blokuje linku, ktorá vykonáva jeho obsluhu. Zákazníci po ukončení obsluhy uvoľňujú linku a tvoria *výstupný tok zákazníkov*. Ak v okamihu príchodu zákazníka do systému nie je voľná žiadna linka obsluhy, zákazník môže čakať na uvoľnenie niektorej linky v rade, ktorý sa nazýva *front*.



Obr. 2.1: Základná štruktúra systému hromadnej obsluhy

Použitie systémov hromadnej obsluhy je typické pre modelovanie komunikačných systémov, dopravných systémov, výrobných procesov, obchodných a kultúrnych zariadení atď. V súčasnosti sa presadzuje ich použitie pri modelovaní počítačových systémov a počítačových sietí. Vzhľadom na veľkú rôznorodosť využitia systémov hromadnej obsluhy treba pojmy *zákazník, linka obsluhy, obsluha* chápať dosť všeobecne.

Vo všetkých prípadoch sú systémy hromadnej obsluhy tvorené týmito prvkami:

- *Vstupný tok zákazníkov* je postupnosť príchodov zákazníkov, ktoré nasledujú jedna za druhou v nejakých časových okamihoch. Zákazníci môžu prichádzať jednotlivo alebo v skupinách. Ich počet môže

zákazník	*linka obsluhy*	*obsluha*
telefónny účastník	centrála	spojenie
vozidlo	križovatka	prechod
výrobok	obrábací stroj	obrobenie
pokazený stroj	opravár	oprava
kupujúci	pokladňa	zaplatenie
chorý	lekár	vyšetrenie

Tabuľka 2.1: Príklady systémov hromadnej obsluhy

byť obmedzený alebo neobmedzený. Časové intervaly medzi po sebe nasledujúcimi príchodmi (t.j. medzery) môžu byť pravidelné alebo náhodné. V prípade náhodných príchodov sa vyžadujú pravdepodobnostné charakteristiky vstupného toku.

- *Front* je miesto, kde čakajú zákazníci, ktorí pri svojom príchode nemohli byť ihneď obsluhovaní. Pravidlo, podľa ktorého sa vyberá z radu čakajúcich na obsluhu, sa nazýva *disciplína čakania*. Najznámejšie sú

  – **FIFO** prvý vstupuje, prvý obslúžený,
  – **LIFO** posledný vstupuje, prvý obslúžený,
  – **SIRO** výber v náhodnom poradí,
  – **PRI** výber podľa priority.

  Ak je počet miest frontu obmedzený, potom prichádzajúci zákazníci sú odmietnutí bez obsluhy, ak rad už dosiahol maximálnu dĺžku.

- *Linka obsluhy* poskytuje obsluhu zákazníkovi realizáciou jeho požiadavky. Obsluha v systéme môže byť poskytovaná jednou alebo viacerými nezávislými linkami obsluhy, pričom niektoré môžu byť špecializované na požiadavky niektorých zákazníkov. *Doba obsluhy* (čas trvania obsluhy) môže byť pevná, rovnaká pre všetkých zákazníkov, závislá od typu zákazníka alebo náhodná. V poslednom prípade musíme opäť poznať pravdepodobnostné charakteristiky doby obsluhy.

- *Výstupný tok zákazníkov* je postupnosť okamihov odchodov zákazníkov zo systému. Vo všeobecnosti sú vlastnosti výstupného toku závislé od vlastností vstupného toku a dôb obsluhy zákazníkov. Výstupným tokom je dôležité sa zaoberať najmä v prípadoch, keď je vstupným tokom ďalšieho systému hromadnej obsluhy.

Pri použití systémov hromadnej obsluhy na modelovanie nejakých objektov nás vo všeobecnosti zaujíma efektívnosť ich činnosti. Rozumie sa tým napr. priemerný počet obslúžených zákazníkov vzhľadom na celkový počet príchodov zákazníkov, priemerná doba práce jednotlivých liniek obsluhy, priemerný čas čakania zákazníkov vo fronte, priemerná dĺžka radu atď. To, ktoré veličiny, prípadne ich kombinácie zvolíme, býva určené formuláciou problému. V praxi sa uplatňujú najmä ekonomické hľadiská. Určením závislosti veličín charakterizujúcich činnosť systému (*charakteristík* hromadnej obsluhy) od štruktúry systému sa zaoberá teória hromadnej obsluhy.

2.1 Kendallova klasifikácia

Už základné modely systémov hromadnej obsluhy pripúšťajú rozličné možnosti klasifikácie.

Podľa možnosti vzniku frontu sa rozlišujú na systémy:

- *s odmietaním* - bez čakania zákazníkov v rade,
- *s konečným frontom* - s ohraničeným počtom miest v rade
- *s obmedzeným čakaním* - s ohraničenou dobou čakania zákazníkov v rade
- *s nespoľahlivými linkami* - s prerušovanou obsluhou zákazníkov
- *s neobmedzeným frontom* - s neobmedzenou dobou čakania zákazníkov v rade

Podľa typu modelu sa systémy delia na:

- *Markovove* - s exponenciálnymi medzerami medzi udalosťami (príchodmi a odchodmi zákazníkov),
- *semimarkovove* - s erlangovskými medzerami medzi udalosťami,
- *nemarkovove* - so všeobecným vstupným tokom a dobou obsluhy zákazníkov

Podľa zdroja vstupného toku zákazníkov sa delia na systémy:

- *otvorené* - s neobmedzeným počtom potenciálnych zákazníkov,
- *uzavreté* - s konečným počtom cirkulujúcich zákazníkov,

Písmeno	X	Y
M	Poissonov tok	exponenciálne rozdelenie
$\mathbf{E}_r$	erlangovské rozdelenie medzier toku	Erlangovo rozdelenie
D	konštantné medzery toku	konštantná doba
G	všeobecné rozdelenie medzier toku	ľubovoľné rozdelenie

Tabuľka 2.2: Základné parametre Kendallovej klasifikácie

- *zmiešané* - ako kombinácie otvorených a uzavretých systémov
- *siete* - zložené z viacerých navzájom prepojených elemenárnych systémov, pričom výstupný tok z jedného systému môže byť vstupným tokom druhého systému

Vyššie uvedené delenie systémov nie je úplné. Ďalšími špecifickými kritériami sú usporiadanie liniek obsluhy - *sériové systémy*, rôzne druhy priorít liniek alebo priorít zákazníkov - *prioritné systémy* atď.

D.G.Kendall zaviedol v 1953 pomerne jednoduchú klasifikáciu systémov hromadnej obsluhy, ktorá sa používa dodnes. Systémy sú označené kombináciou písmen a číslic

$$\boxed{\mathbf{X\,/\,Y\,/\,n}}$$

kde **X** popisuje vstupný tok zákazníkov, **Y** popisuje rozdelenie doby obsluhy a **n** udáva počet liniek obsluhy.

V súčasnosti je v anglosaskej literatúre zaužívané rozšírenie Kendallovej klasifikácie na

$$\boxed{\mathbf{X\,/\,Y\,/\,n\,/\,m}}$$

kde naviac **m** udáva maximálne prípustný počet zákazníkov v systéme.

Poznámka. Ďalej budeme používať rozšírenú Kendallovu klasifikáciu. Ako príklad uveďme systém **M / D / 2 /** ∞ - je to dvojlinkový systém s elementárnym vstupným tokom zákazníkov, konštantnou dobou obsluhy a neobmedeným frontom (spravidla sa predpokladá disciplína **FIFO**).

Presnejšia špecifikácia sa obyčajne uvádza pred alebo za klasifikáciou systému. Napríklad uzavretý systém $\mathbf{E}_2$ / **G / 1 / m** s **LIFO** je jednolinkový systém s dvojfázovými erlangovskými medzerami vo vstupnom toku zákazníkov, všeobecnou dobou obsluhy, v ktorom cirkuluje **m** zákazníkov, ktorí, ak čakajú v rade, sú z neho vyberaní podľa pravidla **LIFO**.

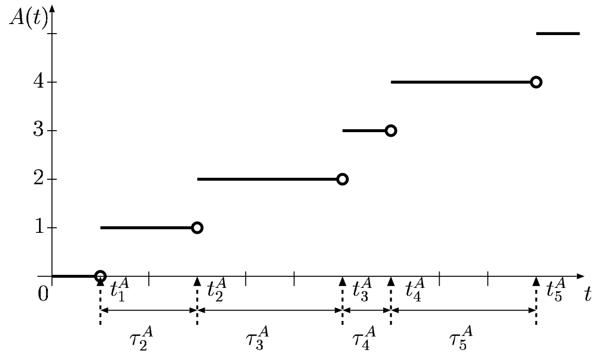
2.2 Markovove systémy hromadnej obsluhy

Markovovými systémami budeme rozumieť také systémy hromadnej obsluhy, ktoré možno modelovať homogénnym Markovovým reťazcom so spojitým časom. Nech S je množina stavov homogénneho Markovovho reťazca $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$. Stavy reťazca tu interpretujeme ako *počty zákazníkov v systéme* a

$$p_j(t) = \mathcal{P}(\mathbf{N}(t) = j)$$

chápeme ako pravdepodobnosť, že v systéme je v čase t práve j čakajúcich alebo obsluhovaných zákazníkov.

Nech $\{\mathbf{A}(t)\}_{t\in T}$ a $\{\mathbf{B}(t)\}_{t\in T}$ sú náhodné procesy, pričom náhodná veličina $\mathbf{A}(t)$ udáva počet príchodov zákazníkov do systému za čas t a náhodná veličina $\mathbf{B}(t)$ udáva počet odchodov zákazníkov zo systému za čas t. Príklady realizácie takýchto procesov popisujúcich obslužný systém sú na obr.2.2 a obr.2.3 Jedná sa o stupňovité fukcie. Náhodná veličina $\mathbf{A}(t)$ zväčší

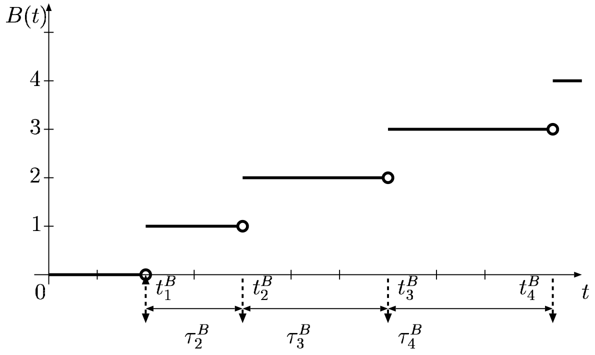


Obr. 2.2: Realizácia vstupného toku zákazníkov

svoju hodnotu o 1 práve v čase príchodu $\{\mathbf{t}_1^A, \mathbf{t}_2^A, \mathbf{t}_3^A, \mathbf{t}_4^A, \dots\}$ zákazníka do systému. Aj náhodná veličina $\mathbf{B}(t)$ zväčší svoju hodnotu o 1 práve v čase odchodu $\{\mathbf{t}_1^B, \mathbf{t}_2^B, \mathbf{t}_3^B, \mathbf{t}_4^B, \dots\}$ zákazníka zo systému. Pretože i-ty zákazník musí najskôr prísť a až potom môže odísť, platí

$$\mathbf{t}_j^A \leq \mathbf{t}_j^B \quad j = 1, 2, \dots$$

kde $\mathbf{t}_j^A$ je okamih príchodu j-teho zákazníka do systému a $\mathbf{t}_j^B$ je okamih odchodu j-teho zákazníka zo systému. Ak $\mathbf{t}_j^A = \mathbf{t}_j^B$, znamená to pre nás, že j-ty zákazník je odmietnutý.

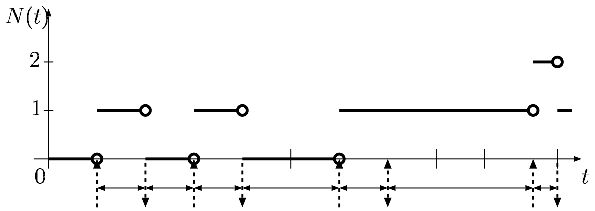


Obr. 2.3: Realizácia výstupného toku zákazníkov

Na obr.2.4 máme vývoj systému s príslušnými vstupnými a výstupnými tokmi. Vidíme, že počet zákazníkov v systéme v čase t dostaneme zo vzťahu

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)$$

Tento vzťah sa výhodne využíva pri *simulácii* systémov, keď sa ich základné charakteristiky (napr. *využitie* systému, *stredná doba pobytu zákazníka* v systéme, *stredný počet čakajúcich zákazníkov* v systéme) nevypočítavajú analyticky, ale numericky. Touto problematikou ukončíme výklad základov teórie hromadnej obsluhy. Najskôr sa budeme venovať analytickým metódam, ktoré poskytuje teória Markovových reťazcov.



Obr. 2.4: Vývoj systému hromadnej obsluhy

Pre Markovove systémy hromadnej obsluhy je charakteristické, že medzery medzi udalosťami majú bezpamäťové exponenciálne rozdelenie.

Systém hromadnej obsluhy považujeme za *stabilizovaný*, ak od istého okamihu je ďalší vývoj systému nezávislý na čase. Ak sa jedná o Markovov systém, zaujímavé sú najmä tie prípady, ktoré môžeme modelovať ergodickým Markovovým reťazcom.

Nasledujúce tvrdenie, ktoré má všeobecnú platnosť, dáva do súvislosti tri základné charakteristiky stabilizovaného systému hromadnej obsluhy. Jeho dôkaz je však aj napriek jednoduchosti tvrdenia netriviálny, a preto ho vynecháme.

Veta 2.2.1. *(Littlova formula) Majme stabilizovaný systém hromadnej obsluhy. Nech λ je stredný počet prijatých zákazníkov za jednotku času, $\mathcal{E}(\mathbf{N})$ je stredný počet zákazníkov v systéme a $\mathcal{E}(\mathbf{T})$ stredná doba strávená zákazníkom v systéme. Potom platí*

$$\lambda = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N})}{\mathcal{E}(\mathbf{T})} \tag{2.1}$$

Poznámka. λ v Littlovej formule nazývame *intenzita vstupného toku zákazníkov*.

Vrátime sa k príkladu 1.21 s manželmi v obchode s potravinami.

Príklad 2.1. *Majiteľ potravín zistil, že v rannej špičke prichádzajú do potravín priemerne 4 zákazníci za minútu. Majiteľova manželka, ktorá je pokladníčkou, zistila, že priemerný počet zákazníkov v obchode je 30. Aká je priemerná doba strávená zákazníkom v obchode?*

Opäť môžeme predpokladať, že príchody zákazníkov sú náhodné udalosti a vstupný tok zákazníkov je elementárny tok s intenzitou $\lambda = 4$ zák./min. V čase rannej špičky sa v obchode nachádza v priemere $\mathcal{E}(\mathbf{N}) =$ 30 zák. Stredná doba strávená zákazníkom v obchode je potom $\mathcal{E}(\mathbf{T}) = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N})}{\lambda} = \frac{30}{4} = 7.5$ minúty.

Elementárnymi Markovovými systémami budeme rozumieť také systémy hromadnej obsluhy, ktoré možno modelovať pomocou procesu vzniku a zániku. Najskôr sa budeme zaoberať niektorými významnými príkladmi takýchto systémov.

2.3 Systém M / M / 1 / ∞

Do jednolinkového systém s Poissonovým vstupným tokom zákazníkov s intenzitou $\lambda > 0$ prichádzajú zákazníci a požadujú obsluhu. Doba obsluhy linky má exponenciálne rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu} > 0$. Zákazníci, ktorí nájdu linku obluhy obsadenú, sa postavia do radu. Na takto vzniknutý front sa nekladú žiadne obmedzenia. Predpokladá sa, že zákazníci budú obsluhovaní v poradí príchodov, t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**. Takýto systém je príkladom systémov s neohraničeným frontom. Znamená to tiež, že doba čakania zákazníka vo fronte je tiež neobmedzená.

Ukážeme, že systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{N(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Stavy systému interpretujeme takto:

- *0* - prázdny systém,
- *1* - v systéme je len jeden obsluhovaný zákazník,
- *2* - v systéme sú dvaja zákazníci (jeden obsluhovaný a jeden čakajúci na obsluhu),
- n - v systéme je n zákazníkov (jeden obsluhovaný a $n-1$ čakajúcich v rade frontu).

V Poissonovom vstupnom toku zákazníkov majú dĺžky medzier $\boldsymbol{\tau}_1$ medzi príchodmi zákazníkov to isté exponeciálne rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$. Ďalej využijeme, že doba obsluhy $\boldsymbol{\tau}_2$ má exponeciálne rozdelenie s parametrom $\mu > 0$ a je nezávislá od dĺžok medzier $\boldsymbol{\tau}_1$ Poissonovho toku. Spolu s bezpamäťovou vlastnosťou exponenciálneho rozdelenia nám to zaručuje markovovskú vlastnosť systému. Zvyšková doba obsluhy – od nejakej udalosti v priebehu obsluhy zákazníka do ukončenia jeho obsluhy – má tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ. Teda $\boldsymbol{\tau}_1 \sim Exp(\lambda)$ a $\boldsymbol{\tau}_2 \sim Exp(\mu)$.

Vypočítame pravdepodobnosti prechodu pre nejaký dostatočne malý časový interval dĺžky $\triangle t$. Vstupný tok zákazníkov je Poissonovým procesom s parametrom λ, a tak pravdepodobnosť príchodu k zákazníkov za čas $\triangle t$ je

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = k) = \begin{cases} e^{-\lambda\triangle t} & = \ 1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } k = 0 \\ \lambda\triangle t e^{-\lambda\triangle t} & = \ \lambda\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } k = 1 \\ \frac{(\lambda\triangle t)^k}{k!} e^{-\lambda\triangle t} & = \ o(\triangle t) & \text{ak } k \geq 2 \end{cases}$$

V systéme môže byť obsluhovaný len jeden zákazník z exponenciálnou dobou obsluhy (aj zvyškovou dobou obsluhy) s parametrom μ. Pravdepodobnosť odchodu zákazníka z linky obsluhy je rovná pravdepodobnosti, že doba obsluhy resp. zvyškovej obsluhu zákazníka $\boldsymbol{\tau}$ je nanajvýš $\triangle t$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \triangle t) = 1 - e^{-\mu\triangle t} = \mu\triangle t + o(\triangle t)$$

Pravdepodobnosť, že linka neukončí obsluhu zákazníka, je rovná pravdepodobnosti, že doba obsluhy resp. zvyškovej obsluhy zákazníka $\boldsymbol{\tau}$ je väčsia než $\triangle t$

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \triangle t) = e^{-\mu\triangle t} = 1 - \mu\triangle t + o(\triangle t)$$

Ďalej sa sústredíme len na zmeny stavu vyvolané jedinou udalosťou – príchodom alebo odchodom zákazníka. Zmena stavu vyvolaná viac než jednou udalosťou nastáva totiž s pravdepodobnosťou $o(\triangle t)$ t.j. $p_{ij}(\triangle t) = o(\triangle t)$ pre $|i - j| > 1$.

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a nepríde žiaden zákazník, je rovná pravdepodobnosti, že v priebehu časového intervalu dĺžky $\triangle t$ nepríde žiaden zákazník

$$p_{00}(\triangle t) = \mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 0) = 1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t)$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a príde jeden zákazník, je rovná pravdepodobnosti, že v priebehu časového intervalu dĺžky $\triangle t$ príde jeden zákazník

$$p_{01}(\triangle t) = \mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 1) = \lambda\triangle t + o(\triangle t)$$

Ak je v systéme i zákazníkov ($i > 0$), potom je práve jeden zákazník obsluhovaný a ostatní $i - 1$ čakajú v rade. Pravdepodobnosť, že práve jeden odíde a žiaden nepríde, je rovná súčinu pravdepodobností

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\triangle t) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \triangle t) \\ &= (1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t))(\mu\triangle t + o(\triangle t)) = \mu\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že práve jeden príde a žiaden neodíde, je rovná súčinu pravdepodobností

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\triangle t) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 1)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \triangle t) \\ &= (\lambda\triangle t + o(\triangle t))(1 - \mu\triangle t + o(\triangle t)) = \lambda\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že žiaden nepríde a žiaden neodíde, je rovná súčinu pravdepodobností

$$\begin{aligned} p_{ii}(\triangle t) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \triangle t) \\ &= (1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t))(1 - \mu\triangle t + o(\triangle t)) = 1 - (\lambda + \mu)\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Vidíme, že sme dostali špeciálnu maticu intenzít v procese vzniku a zániku $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j\in S}$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{ak } j = i + 1 \\ \mu & \text{ak } j = i - 1 \\ -\lambda - \mu & \text{ak } j = i, i > 0 \\ -\lambda & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ 0 & \text{ak } |i - j| \geq 2 \end{cases}$$

Z praktického hľadiska je významný prípad, keď sa systém stabilizuje. Ak je $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, potom podľa vety 1.4.4 je splnená podmienka (1.62) a reťazec je ergodický. Má stacionárne rozdelenie, a tak zo vzťahov (1.63) a (1.64) dostávame

$$\pi_j = \rho^j(1-\rho), \quad j \geq 0 \tag{2.2}$$

Vzorce (2.2) sú známe ako *Erlangove vzorce*(1909) a umožňujú vypočítať *základné charakteristiky* stabilizovaného systému.

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N})}$ - *očakávaný (stredný) počet zákazníkov v systéme*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{N}) &= \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j = \sum_{j=1}^{\infty} j\rho^j(1-\rho) = (1-\rho)\rho\sum_{j=1}^{\infty} j\rho^{j-1} = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j \\ &= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}(\frac{\rho}{1-\rho}) = (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\end{aligned} \tag{2.3}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{T})}$ - *stredná doba pobytu v systéme*. Z Littlovej formuly a (2.3) máme

$$\mathcal{E}(\mathbf{T}) = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N})}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \tag{2.4}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{W}_S)}$ - *stredná doba obsluhy v systéme*. Z exponenciálneho rozdelenia doby obsluhy máme

$$\mathcal{E}(\mathbf{W}_S) = \frac{1}{\mu} \tag{2.5}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q)}$ - *stredná doba čakania vo fronte*. Doba strávená zákazníkom v systéme sa skladá z doby čakania vo fronte a doby obsluhu.

$$\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q) = \mathcal{E}(\mathbf{T}) - \mathcal{E}(\mathbf{W}_S) = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N})}{\mu} \tag{2.6}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)}$ - *stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte*. Z Littlovej formuly aplikovanej na front dostávame

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = \lambda\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q) = \lambda\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \rho\mathcal{E}(\mathbf{N}) \tag{2.7}$$

$\boxed{P_S}$ - *pravdepodobnosť, že zákazník najde voľnú linku.*

$$P_S = \pi_0 = 1-\rho \tag{2.8}$$

$\boxed{P_Q}$ - *pravdepodobnosť, že zákazník bude čakať vo fronte.*

$$P_Q = 1 - \pi_0 = \rho \tag{2.9}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)}$ - *stredný počet obsluhovaných zákazníkov v systéme.*

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_S) = 0\cdot\pi_0 + 1\cdot(1-\pi_0) = 1-\pi_0 = \rho \tag{2.10}$$

$\boxed{\kappa}$ - *využitie systému (linky obsluhy).*

$$\kappa = \rho \tag{2.11}$$

Cvičenie. Odvoďte vzorce $\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = P_Q.\mathcal{E}(\mathbf{N})$, $\mathcal{E}(\mathbf{N}_S) = P_S.\mathcal{E}(\mathbf{N})$ a $\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = \sum_{j=1}^{\infty}(j-1)\pi_j$.

Príklad 2.2. *K ortopédovi prichádza priemerne 16 pacientov za 8 hodín jeho pracovnej doby. Stredná doba ošetrenia pacienta je 20 minút. Zistite, či sa takýto systém môže stabilizovať, ak vstupný tok pacientov je Poissonov a doba obsluhy je exponenciálna. Vypočítajte využitie lekára, strednú dobu strávenú pacientom u lekára a strednú dobu čakania v čakárni.*

Vstupný tok pacientov (zákazníkov) je Poissonov s intenzitou $\lambda = \frac{16}{8} = 2$ zák./hod. Stredná doba obsluhy je $\frac{1}{\mu} = 20$ min. $= \frac{1}{3}$ hod. Nakoľko $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} < 1$, systém sa môže stabilizovať. Lekár je využitý na $\kappa = \rho = 0.67 = 67\%$. Paciet strávi u lekáre priemerne $\mathcal{E}(\mathbf{T}) = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{3-2} = 1$ hod., z toho v čakárni $\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3}$hod. $= 40$ min.

Cvičenie. Vypočítajte ďalšie charakteristiky systému vo vyššie uvedenom príklade.

Charakteristiky stabilizovaného systému umožňujú formulovať a riešiť *optimalizačné úlohy*. Príkladom takých úloh je nasledujúca úloha: Nech sú za isté obdobie známe tieto náklady na prevádzku obslužného systému

- c_0 - náklady na údržbu prázdneho systému,
- c_1 - náklady na chod linky obsluhy,
- c_2 - náklady na akcie orientované na udržanie zákazníkov.

Cieľom je nájsť také využitie systému κ, pri ktorom sú celkové priemerné náklady minimálne. Potom *kriteriálna funkcia* $C(\kappa)$

$$C(\kappa) = c_0\pi_0 + c_1(1-\pi_0) + c_2\mathcal{E}(\mathbf{N}) \tag{2.12}$$

je zložená z troch častí. Priemerné náklady na udržbu prázdneho systému $c_0\pi_0$ sú umerné relatívnej početnosti výskytu voľnej linky. Priemerné náklady na chod linky $c_1(1-\pi_0)$ sú úmerné relatívnej početnosti výskytu aktívnej linky. Priemerné náklady na akcie pre udržanie zákazníkov $c_2\mathcal{E}(\mathbf{N})$ rastú úmerne s ich priemerným počtom. Po dosadení príslušných charakteristík systému do (2.12) dostaneme

$$C(\kappa) = c_0(1-\kappa) + c_1\kappa + c_2\frac{\kappa}{1-\kappa} \tag{2.13}$$

Ďalej postupujeme tak, ako je to bežné pri hľadaní voľného extrému funkcie reálnej premennej, položením derivácie (2.13) podľa κ rovnú nule.

$$\frac{dC(\kappa)}{d\kappa} = -c_0 + c_1 + \frac{c_2}{(1-\kappa)^2} = 0 \tag{2.14}$$

odkiaľ po úpravách dostaneme

$$\kappa = 1 - \sqrt{\frac{c_2}{c_0 - c_1}} \tag{2.15}$$

Pomocou druhej derivácie sa môžeme presvedčiť, že $\frac{d^2C(\kappa)}{d\kappa^2} > 0$ a našli sme minimum kriteriálnej funkcie. Z prirodzenej podmienky $0 < \kappa < 1$ dostávame obmedzenia na parametre úlohy (c_0, c_1 a c_2).

$$0 < \frac{c_2}{c_0 - c_1} < 1 \tag{2.16}$$

Príklad 2.3. *Malá stavebná firma, špecializujúca sa na prestavbu bytových jadier, očakáva v priebehu mesiaca nasledujúce náklady na svoju prevádzku. Penalizácia úverujúcou bankou za nečinnosť je 150 tis.Sk. Náklady na platy zamestnancov sú 50 tis.Sk a náklady na reklamu sú 10 tis. Sk. Za akých podmienok môže mať firma minimálne náklady?*

Ak chápeme stavebnú firmu ako systém **M / M / 1 /** ∞, potom možno riešiť optimalizačnú úlohu (2.12) s parametrami $c_0 = 150000$Sk, $c_1 = 50000$Sk a $c_2 = 10000$Sk. Dosadením do vzťahu (2.12) dostaneme využitie systému

$$\kappa = 1 - \sqrt{\frac{10000}{150000 - 50000}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{10}} = 0.683 = 68.3\%$$

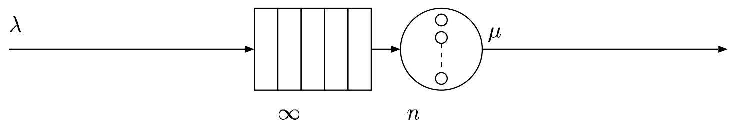
pri ktorom má firma minimálne náklady, podľa vzťahu (2.13), vo výške

$$C(\kappa) = 150000 \cdot (1-\kappa) + 50000\kappa + 10000\frac{\kappa}{1-\kappa} = 103245.55 \text{ Sk}$$

Firma dosiahne tieto minimálne priemerné mesačné náklady, ak je systém v tomto období stabilizovaný a vzťah medzi strednou dobou medzi príchodmi záazníkov $\frac{1}{\lambda}$ a strednou dobou obsluhy zákazníka $\frac{1}{\mu}$ je daný $\kappa\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$.

2.4 Systém M / M / n / ∞

Viaclinkový systém **M / M / n /** ∞ sa líši od **M / M / 1 /** ∞ len počtom navzájom nezávislých liniek.



Obr. 2.5: Viaclinkový systému **M / M / n /** ∞

Vstupným tokom zákazníkov je Poissonov tok s intenzitou $\lambda > 0$ a doba obsluhy každej z liniek má exponenciálne rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu} > 0$. Zákazník, ktorý nájde v čase príchodu aspoň jednu voľnú linku, začne byť okamžite obsluhovaný niektorou z nich. Zákazníci, ktorí nájdu všetkých n liniek obsluhy obsadených, sa postavia do radu. Na takto vzniknutý front sa opäť nekladú žiadne obmedzenia. Predpokladá sa, že zákazníci budú obsluhovaní v poradí príchodov, t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**. Takýto systém je príkladom systémov s neohraničeným frontom. Znamená to opäť, že doba čakania zákazníka vo fronte je tiež neobmedzená.

Ukážeme, že systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Stavy systému interpretujeme takto:

- *0* - prázdny systém,
- *1* - v systéme je jeden obsluhovaný zákazník,
- *2* - v systéme sú dvaja obsluhovaní zákazníci,
- *n* - v systéme je n obsluhovaných zákazníkov.
- *n+1* - v systéme je $n+1$ zákazníkov (n obsluhovaných a jeden čakajúci na obsluhu),
- *n+q* - v systéme je $n+q$ zákazníkov (n obsluhovaných a q čakajúcich).

Ďalej postupujeme analogicky ako pri analýze jednolinkového systému. Z vlastnosti vstupného toku zákazníkov vieme, že dĺžky medzier $\boldsymbol{\tau}_1$ medzi príchodmi zákazníkov majú exponeciálne rozdelenie s tým istým parametrom $\lambda > 0$. Ďalej využijeme, že doba obsluhy $\boldsymbol{\tau}_2$ ľubovoľnej z n

liniek je nezávislá od dĺžok medzier $\boldsymbol{\tau}_1$ Poissonovho toku. Naviac aj doby obslúh liniek sú navzájom nezávislé, a teda aj ich zvyškové obsluhy sú navzájom nezávislé. Bezpamäťová vlastnosť exponenciálneho rozdelenia nám opäť zaručuje markovovskú vlastnosť systému. Teda $\boldsymbol{\tau}_1 \sim Exp(\lambda)$ a $\boldsymbol{\tau}_2 \sim Exp(\mu)$.

Vypočítame pravdepodobnosti prechodu pre nejaký dostatočne malý časový interval dĺžky $\triangle t$. Vstupný tok zákazníkov je Poissonovým procesom s parametrom λ a tak pravdepodobnosť príchodu k zákazníkov za čas $\triangle t$ je

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = k) = \begin{cases} 1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } k = 0 \\ \lambda\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } k = 1 \\ o(\triangle t) & \text{ak } k \geq 2 \end{cases}$$

V systéme môže byť obsluhovaných nanajvýš n zákazníkov s exponenciálnou dobou dobou obsluhy (aj zvyškovou dobou obsluhy) s parametrom μ.

Pre náhodnú veličinu $\boldsymbol{\tau}$ čiže dobu obsluhy resp. zvyškovej obsluhy zrejme platí

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \triangle t) &= 1 - e^{-\mu\triangle t} = \mu\triangle t + o(\triangle t) \\ \mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \triangle t) &= e^{-\mu\triangle t} = 1 - \mu\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Opäť sa sústredíme sa len na zmeny stavu vyvolané jedinou udalosťou – príchodom alebo odchodom zákazníka. Zmeny stavu vyvolané viac než jednou udalosťou v tomto intervale nastávajú totiž s pravdepodobnosťou $o(\triangle t)$, t.j. $p_{ij}(\triangle t) = o(\triangle t)$ pre $|i - j| > 1$.

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a nepríde žiadny zákazník, je rovná pravdepodobnosti, že v priebehu časového intervalu dĺžky $\triangle t$ nepríde žiadny zákazník

$$p_{00}(\triangle t) = \mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 0) = 1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t)$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a príde jeden zákazník, je rovná pravdepodobnosti, že v priebehu časového intervalu dĺžky $\triangle t$ príde jeden zákazník

$$p_{01}(\triangle t) = \mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 1) = \lambda\triangle t + o(\triangle t)$$

Ak je v systéme i zákazníkov $(0 < i \leq n)$, potom je práve i zákazníkov obsluhovaných. Pravdepodobnosť, že práve jeden z nich odíde, $i - 1$ obsluhovaní neodídu a žiadny nepríde, je rovná pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\triangle t) &= i\mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \triangle t)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \triangle t))^{i-1} \\ &= i(1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t))(\mu\triangle t + o(\triangle t))(1 - (i-1)\mu\triangle t + o(\triangle t)) \\ &= i\mu\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že práve jeden príde a žiadny neodíde, je rovná pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\triangle t) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 1)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \triangle t))^{i} \\ &= (\lambda\triangle t + o(\triangle t))(1 - i\mu\triangle t + o(\triangle t)) = \lambda\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že žiadny zákazník nepríde a žiadny neodíde, je rovná pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_{ii}(\triangle t) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 0)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \triangle t))^{i} \\ &= (1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t))(1 - i\mu\triangle t + o(\triangle t)) = 1 - (\lambda + i\mu)\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Ak je v systéme i zákazníkov $(i > n)$, potom je práve n zákazníkov obsluhovaných a ostatní $i - n$ čakajú v rade. Pravdepodobnosť, že práve jeden bude doobsluhovaný a žiadny nepríde, je rovná pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\triangle t) &= n\mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \triangle t)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \triangle t))^{n-1} \\ &= n(1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t))(\mu\triangle t + o(\triangle t))(1 - (n-1)\mu\triangle t + o(\triangle t)) \\ &= n\mu\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že práve jeden príde a žiadny neodíde, je opäť rovná pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\triangle t) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 1)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \triangle t))^{n} \\ &= (\lambda\triangle t + o(\triangle t))(1 - n\mu\triangle t + o(\triangle t)) = \lambda\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

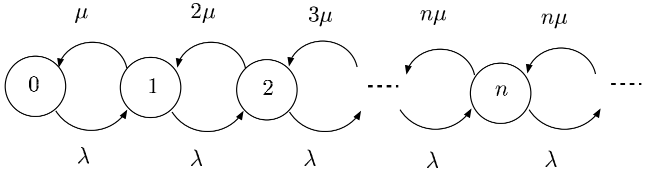
Pravdepodobnosť, že žiadny zákazník nepríde a žiadny neodíde, je rovná pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_{ii}(\triangle t) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\triangle t) = 0)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \triangle t))^{n} \\ &= (1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t))(1 - n\mu\triangle t + o(\triangle t)) = 1 - (\lambda + n\mu)\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Dostali sme špeciálnu maticu intenzít v procese vzniku a zániku $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{ak } j = i + 1 \\ i\mu & \text{ak } j = i - 1, 0 < i \leq n \\ n\mu & \text{ak } j = i - 1, i > n \\ -\lambda - i\mu & \text{ak } j = i, 0 < i \leq n \\ -\lambda - n\mu & \text{ak } j = i, i > n \\ -\lambda & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ 0 & \text{ak } |i - j| \geq 2 \end{cases}$$

Príslušný prechodový graf systému máme na obr.2.9.



Obr. 2.6: Prechodový graf systému **M / M / n /** ∞

Z praktického hľadiska je významný prípad, keď sa systém stabilizuje. Ak je $\rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1$, potom podľa vety 1.4.4 je splnená podmienka (1.62) a reťazec je ergodický. Má jediné stacionárne rozdelenie, a tak zo vzťahov (1.63) a (1.64) dostávame

$$\pi_j = \begin{cases} \dfrac{n^j}{j!}\rho^j \pi_0 & \text{ak } 0 < j \le n \\ \dfrac{n^n}{n!}\rho^j \pi_0 & \text{ak } j > n \\ \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^{\infty} \rho^j \right)^{-1} & \text{ak } j = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Vzorce (2.17) sú známe ako *Erlangove vzorce*.

Cvičenie. Zostrojte prechodový graf systému **M / M / n /** ∞ a odvoďte Erlangove vzorce zo vzťahov (1.63) a (1.64).

Poznámka. Pre $n = 1$ prechádzajú Erlangove vzorce (2.17) do postatne jednoduchšieho vzorca (2.2).

Erlangove vzorce umožňujú vypočítať *základné charakteristiky* stabilizovaného systému. Medzi najpoužívanejšie patria

$\boxed{P_Q}$- *pravdepodobnosť, že prichádzajúci zákazník bude čakať vo fronte.*

$$P_Q = \sum_{j=n}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\rho^j \pi_0 = \pi_0 \frac{n^n}{n!}\rho^n \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j$$
$$= \frac{\pi_0 (n\rho)^n}{n!(1-\rho)} = \frac{\pi_n}{1-\rho} \tag{2.18}$$

známa aj ako *Erlangova C formula*.

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)}$- *stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte (očakávaná dĺžka frontu).*

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = \sum_{j=n+1}^{\infty} (j-n)\pi_j = \frac{n^n \pi_0}{n!} \sum_{j=n+1}^{\infty} (j-n)\rho^j = \cdots = \frac{\pi_0 n^n \rho^{n+1}}{n!(1-\rho)^2}$$
$$= P_Q \frac{\rho}{1-\rho} \tag{2.19}$$

Najmä pre ľahší zápis budeme požívať parameter $\boxed{\alpha}$- *zaťaženie systému.*

$$\alpha = n\rho \tag{2.20}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)}$- *stredný počet obsadených liniek v systéme.*

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_S) = \sum_{j=0}^{n} j\pi_j + n \sum_{j=n+1}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{j\pi_0 \alpha^j}{j!} + n \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\alpha^n \rho^{j-n} \pi_0}{n!}$$
$$= \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\pi_0 \alpha^j}{j!} + n\rho \sum_{j=1}^{\infty} \pi_n \rho^{j-1} = \alpha (\sum_{j=0}^{n-1} \pi_j + \sum_{j=n}^{\infty} \pi_j)$$
$$= \alpha = n\rho \tag{2.21}$$

$\boxed{\kappa}$- *využitie systému (linky obsluhy).*

$$\kappa = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)}{n} = \rho \tag{2.22}$$

Ďalšie významné charakteristiky systému možno vypočítať pomocou Littlovej formule.

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q)}$- *stredná doba čakania vo fronte*

$$\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q) = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)}{\lambda} = \frac{P_Q \rho}{\lambda(1-\rho)} \tag{2.23}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{W}_S)}$- *stredná doba obsluhy v systéme.* Z exponenciálneho rozdelenia doby obsluhy máme

$$\mathcal{E}(\mathbf{W}_S) = \frac{1}{\mu} \tag{2.24}$$

$\boxed{\mathrm{E}(\mathbf{T})}$- *stredná doba pobytu v systéme.* Doba pobytu sa skladá z doby čakania a z doby obsluhy

$$\mathcal{E}(\mathbf{T}) = \mathcal{E}(\mathbf{W}_Q) + \mathcal{E}(\mathbf{W}_S) = \frac{P_Q \rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} \tag{2.25}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N})}$ - *stredný počet zákazníkov v systéme*

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}) = \lambda \mathcal{E}(\mathbf{T}) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\lambda}{\mu} = \mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) + \mathcal{E}(\mathbf{N}_S) \tag{2.26}$$

Erlangove vzorce (2.17) sú pre numerický výpočet pomerne nepohodlné, a tak sa používa iný postup. V Erlangových vzorcoch sa výhodne zavedie substitúcia

$$q_j = \frac{\pi_j}{\pi_0} \tag{2.27}$$

a tak máme

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } j = 0 \\ \dfrac{\alpha^j}{j!} & \text{ak } 0 < j \leq n \\ \dfrac{\alpha^n}{n!}\rho^{j-n} & \text{ak } j > n \end{cases} \tag{2.28}$$

Ďalej sa vypočítajú $\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ a z nich zo vzťahu (2.27) hľadané

$$\pi_j = \begin{cases} (q_0 + q_1 + q_2 + \dots)^{-1} & \text{ak } j = 0 \\ q_j \pi_0 & \text{ak } j > 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

Poznámka. Keďže z Erlangových vzorcov vyplýva:

$$\pi_j = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{j}\pi_{j-1} & \text{ak } 1 \leq j \leq n \\ \dfrac{\alpha}{n}\pi_{j-1} & \text{ak } j > n \end{cases}$$

je možné $\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)$ odvodiť aj takto:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{N}_S) &= 0\pi_0 + 1\pi_1 + 2\pi_2 + \dots + n\pi_n + \dots = \\ &= 1\frac{\alpha}{1}\pi_0 + 2\frac{\alpha}{2}\pi_1 + \dots + n\frac{\alpha}{n}\pi_{n-1} + n(\frac{\alpha}{n}\pi_n + \dots) = \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \alpha\end{aligned}$$

Príklad 2.4. *Dvojlinkový stabilizovaný systém* **M / M / 2 /** ∞ *je využívaný na* 50%. *Aká je očakávaná dĺžka frontu a koľko minút z hodiny prevádzky bude systém prázdny?*

j	q_j	π_j
0	1	$\frac{1}{3}$
1	$\alpha = 1$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{\alpha^2}{2!} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\sum_{j=3}^{\infty}$	$\frac{\alpha^3}{2(2-\alpha)} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\sum$	3	1

Tabuľka 2.3: Výpočet stacionárneho rozdelenia pre $\alpha = 1$

Poznáme počet liniek $n = 2$ a využitie systému $\kappa = \frac{1}{2}$ a z toho máme $\alpha = 1$. Zo vzťahov pre očakávanú dĺžku frontu (2.19) a Erlangovej C formuly (2.18) dostaneme

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = \frac{\pi_2 \rho}{(1-\rho)^2} \tag{2.30}$$

Potrebujeme teda vypočítať π_2, na čo použijeme vzťahy (2.27), (2.28) a (2.29) prehľadne vo forme tabuľky 2.3. Pre výpočet stacionárnych pravdepodobností $\{\pi_j\}_{j=0}^{2}$ treba v tabuľke vypočítať

$$\sum_{j=3}^{\infty} q_j = q_2 \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\alpha^2}{2}\frac{\alpha}{2}}{(1-\frac{\alpha}{2})} = \frac{\alpha^3}{2(2-\alpha)}$$

Teraz už môžeme dosadiť do (2.30) a dostaneme očakávaný počet čakajúcich zákazníkov rovný $\frac{1}{3}$, pričom bude systém $60 \cdot \pi_0 = 20$ min. z hodiny prevádzky prázdny.

Príklad 2.5. *Do viaclinkového stabilizovaného systému* **M /M /n /**∞ *prichádza priemerne* 4 *zák./hod., pričom každá linka obslúži priemerne* 2 *zák./hod. Pri akom minimálnom počte liniek bude stredný počet čakajúcich zákazníkov nanajvýš rovný dvom zákazníkom?*

Poznáme $\lambda = 4$ a $\mu = 2$ a tak máme $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 2$. Ak $n = 1$, potom $\rho = \alpha = 2$ a systém sa nestabilizuje. Ak $n = 2$, potom $\rho = \frac{\alpha}{2} = 1$ a systém sa ešte stále nestabilizuje. Pre $n = 3$ je $\rho = \frac{\alpha}{3} = \frac{2}{3} < 1$ a systém sa už po dostatočne dlhej dobe stabilizuje. Analogicky ako v prechádzajúcom príklade vypočítame v príslušnej tabuľke 2.4 pravdepodobnosť π_3. Pre

j	q_j	π_j
0	1	$\frac{1}{9}$
1	$\alpha = 2$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{\alpha^2}{2!} = 2$	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{\alpha^3}{3!} = \frac{4}{3}$	$\frac{4}{27}$
$\sum_{j=4}^{\infty}$	$\frac{\alpha^4}{6(3-\alpha)} = \frac{8}{3}$	$\frac{8}{27}$
$\sum$	9	1

Tabuľka 2.4: Výpočet stacionárneho rozdelenia pre $n = 3,\ \alpha = 2$

výpočet stacionárnych pravdepodobností $(\pi_j)_{j=0}^{3}$ treba v tabuľke vypočítať

$$\sum_{j=4}^{\infty} q_j = q_3 \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\alpha^3}{6}\frac{\alpha}{3}}{(1-\frac{\alpha}{3})} = \frac{\alpha^4}{6(3-\alpha)}$$

Teraz môžeme dosadiť do (2.30) a overiť, či očakávaný počet zákazníkov je

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = \frac{\pi_3\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{4}{27}\frac{\frac{2}{3}}{(1-\frac{2}{3})^2} = \frac{8}{9} < 2 \tag{2.31}$$

Praktickou optimalizačnou úlohou vo viaclinkových systémoch je úloha *optimalizácie počtu liniek*. Základný model vychádza zo známych nákladov za čakanie zákazníkov v systéme a za prestoj liniek. Nech sú známe, za isté jednotkové obdobie, tieto náklady na prevádzku stabilizovaného systému

- c_1 - náklady na čakajúceho zákazníka,
- c_2 - náklady na nevyužitú linku obsluhy zákazníkov.

Cieľom je nájsť taký počet liniek systému n, pri ktorom sú celkové priemerné náklady minimálne. Potom *kriteriálna funkcia* $C(n)$

$$C(n) = c_1\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) + c_2(n - \mathcal{E}(\mathbf{N}_S)) \tag{2.32}$$

je zložená z dvoch častí. Priemerné náklady za čakajúcich zákazníkov $c_1\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)$ sú úmerné priemernému počtu čakajúcich zákazníkov. Priemerné náklady za nevyužité linky $c_2(n - \mathcal{E}(\mathbf{N}_S))$ sú úmerné priemernému počtu

nevyužitých liniek. Po dosadení príslušných charakteristík systému do (2.32) dostaneme

$$C(n) = c_1\frac{\pi_n\rho}{(1-\rho)^2} + c_2 n(1-\rho) \tag{2.33}$$

Ďalší postup závisí od toho, ktorý z nasledujúcich prípadov nastane:

- *Sú dané intenzity* λ, μ, potom sa hľadá n^* také, že

$$C(n^*) = \min\{C(n) : n > \frac{\lambda}{\mu},\ n \text{ je prirodzené číslo}\} \tag{2.34}$$

Príklad 2.6. *Výsledkom prieskumu začínajúcej softvérovej firmy je, že môže za mesiac očakávať 4 objednávky. Charakter úloh predpokladá, že programátor je schopný vyriešiť v tomto období priemerne 2 objednávky. Mesačné náklady na provizórne riešenie, kedy zákazník čaká na požadované riešenie, sú 50 tis.Sk. Základný plat programátora je 10 tis.Sk, ak nemá prácu, a je z rezervného fondu firmy. V prípade, keď má objednávku, je základný plat plus výkonnostný príplatok programátora úplne pokrytý z ceny objednávky. Pri akom počte programátorov budú priemerné náklady firmy po stabilizácii minimálne?*

Poznáme $\lambda = 4$ zák./mes., $\mu = 2$ zák./mes. a $c_1 = 50000$ Sk. Plat programátora vo výške $c_2 = 10000$ Sk ide do nákladov v čase, keď nemá zakázku. Z Erlangových vzorcov (2.17) pre $0 < \rho < 1$ máme

$$\pi_n = \frac{\alpha^n}{n!(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!(1-\rho)})} \tag{2.35}$$

Postupným dosadzovaním do (2.33) dostaneme tabuľku 2.5. Ďalším výpočtom $C(n)$, pre $n > 6$ by sme zistili, že priemerné náklady rastú. Pri štyroch programátoroch, $n^* = 4$, sú priemerné náklady firmy vo výške $C(n^*) = 28695$ Sk minimálne.

- *Sú dané intenzity* $\lambda, \mu_{\max}$, potom sa hľadajú n^* a μ^* také, že

$$C(n^*, \mu^*) = \min\{C(n,\mu) : n\mu > \lambda, \mu \le \mu_{\max}, n \text{ je prirodzené číslo}\} \tag{2.36}$$

kde (po dosadení $\rho = \frac{\lambda}{n\mu}$ do (2.33)) je kriteriálna funkcia $C(n,\mu)$ funkciou dvoch premenných

$$C(n,\mu) = c_1\frac{\pi_n n\lambda\mu}{(n\mu-\lambda)^2} + c_2\left(n - \frac{\lambda}{\mu}\right) \tag{2.37}$$

n	ρ	π_n	$C(n)$
3	$\frac{2}{3}$	0.148	54444
4	$\frac{1}{2}$	0.087	28696
5	$\frac{2}{5}$	0.038	32083
6	$\frac{1}{3}$	0.013	40472

Tabuľka 2.5: Výpočet kriteriálnych funkcií $C(n)$

n	μ	α	ρ	π_n	$C(n,\mu)$
2	2.50	1.60	0.80	0.1422	146222
3	$2,50$	1.60	0.53	$0,1278$	29646
4	2.42	1.65	0.41	$0,0587$	26991
5	1.77	2.25	0.45	$0,0541$	31503
6	1.38	2.90	0.48	$0,05220$	35686

Tabuľka 2.6: Výpočet kriteriálnych funkcií $C(n,\mu)$

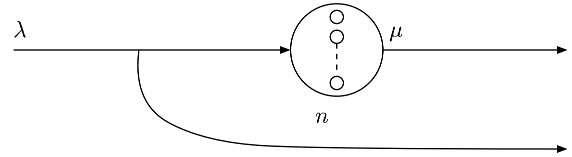
Príklad 2.7. *Predpokladajme, že v príklade 2.6 je priemerný mesačný počet zakázok na programátora nanajvýš 2.5 zakázky. Opäť nás zaujíma počet programátorov, pri ktorom budú priemerné náklady firmy minimálne.*

Teraz sa už ťažko zaobídeme bez pomoci počítača, najlepšie tabuľkového procesora – pre Windows Excel a pre Linux Gnumeric. Výsledky postupnej optimalizácie (2.37), výpočet optimálnych hodnôt μ pre pevne zvolené n pomocou funkcie *Solver* máme v tabuľke 2.6. Vidíme, že pri štyroch programátoroch, $n^* = 4$ a priemernej intenzite obsluhy $\mu^* = 2.42$ zakázok za mesiac sú priemerné náklady firmy vo výške $C(n^*, \mu^*) = 26991$ Sk minimálne.

Cvičenie. Modifikujte optimalizačné úlohy z príkladov 2.6 a 2.7, ak do celkových nákladov sa započítava aj základný plat plus výkonnostný príplatok vo výške 80% základného platu programátora.

2.5 Systém s odmietaním M / M / n / n

Budeme sa zaoberať systémom s n disponibilnými linkami obsluhy, v ktorom zákazníci nečakajú, ale sú odmietaní, ak v čase ich príchodu sú všetky linky už aktívne (obsluhujú zákazníka). Neobslúžený zákazník je pre systém stratený, preto sa takýto sytém tiež nazýva *systém so stratami*. Vstupný tok zákazníkov je Poissonov s intenzitou $\lambda > 0$ a doba obsluhy každej z liniek má exponenciálne rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu} > 0$. Zákazník, ktorý nájde v čase príchodu aspoň jednu voľnú linku, začne byť okamžite obsluhovaný niektorou z nich. Systém možno modelovať ako



Obr. 2.7: Systému s odmietaním **M / M / n / n**

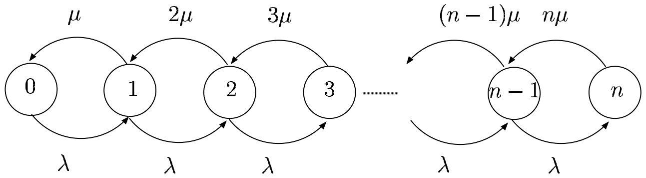
proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Stavy systému interpretujeme takto:

- *0* - prázdny systém,
- *1* - v systéme je jeden obsluhovaný zákazník,
- *2* - v systéme sú dvaja obluhovaní zákazníci,
- n - v systéme je n obsluhovaných zákazníkov.

Pri odvodení pravdepodobností prechodu postupujeme zhodne ako pri systéme **M / M / n /** ∞ len s konečnou množinou stavov reprezentujúcou stav liniek. Príslušný prechodový graf systému máme na obr.2.8.

Z praktického hľadiska je významný prípad, keď sa systém stabilizuje. Podľa vety 1.4.3 je reťazec ergodický. Má jediné stacionárne rozdelenie, a tak zo vzťahov (1.60) a (1.61) dostávame

$$\pi_j = \begin{cases} \dfrac{\alpha^j}{j!}\pi_0 & \text{ak } 0 < j \le n \\ \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \dfrac{\alpha^j}{j!}\right)^{-1} & \text{ak } j = 0 \end{cases} \tag{2.38}$$



Obr. 2.8: Prechodový graf systému **M / M / n / n**

Aj vzorce (4.58) sú známe ako *Erlangove vzorce*.

Chinčin (1911) dokázal, že Erlangove vzorce možno použit' aj v prípade stabilizovaného systému s odmietaním **M / G / n / n**, kde doba obsluhy má ľubovoľné rozdelenie s konečnou strednou hodnotou, t.j ak má hustotu $g(t)$, potom

$$\frac{1}{\mu} = \int_0^\infty x g(x) dx$$

.

Z charakteristík, označovaných v zhode s predchádzajúcimi modelmi, stabilizovaného systému uvedieme najvýznamnejšie.

$\boxed{P_Z}$- *pravdepodobnost' zamietnutia zákazníka, keď sú všetky linky blokované obsluhou zákazníkov*.

$$P_Z = \pi_n \tag{2.39}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N})}$- *stredný počet zákazníkov v systéme*, ktorý je súčasne aj $\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)}$- *stredný počet obsadených liniek v systéme*.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{N}) = \mathcal{E}(\mathbf{N}_S) &= \sum_{j=0}^{n} j\pi_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{j\pi_0\alpha^j}{j!} = \alpha\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\pi_0\alpha^j}{j!}\right) \\ &= \alpha(1-\pi_n) = \alpha(1-P_Z)\end{aligned} \tag{2.40}$$

$\boxed{\kappa}$- *využitie systému (linky obsluhy)*.

$$\kappa = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)}{n} = \rho(1-P_Z) \tag{2.41}$$

$\boxed{\text{E}(\mathbf{T})}$- *stredná doba pobytu v systéme* je rovnaká ako $\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{W}_S)}$- *stredná doba obsluhy zákazníka*.

Z exponenciálneho rozdelenia doby obsluhy máme

$$\mathcal{E}(\mathbf{T}) = \mathcal{E}(\mathbf{W}_S) = \frac{1}{\mu} \tag{2.42}$$

$\boxed{\lambda_Z}$- *stredný počet zamietnutých zákazníkov za jednotku času*. Z vlastnosti Poissonovho vstupného toku zákazníkov vieme, že za jednotku času do systému príde λ zákazníkov. Do systému sa dostane priemerne N zákazníkov, ktorí nájdu aspoň jednu linku voľnú, a jedna z liniek ich bude obsluhovat' strednú dobu $\mathcal{E}(\mathbf{T})$. Ostatní zákazníci budú odmietnutí. Využijúc Littlovu formulu dostaneme

$$\lambda_Z = \lambda - \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N})}{\mathcal{E}(\mathbf{T})} = \lambda - \lambda(1-P_Z) = \lambda P_Z \tag{2.43}$$

Príklad 2.8. *Na parkovisko s maximálnou kapacitou 40 vozidiel prichádza v období ustálenej prevádzky priemerne 20 voz./hod. Stredná doba pobytu vozidla na parkovisku je 2.5 hod. Aké je využitie parkoviska, priemerný počet voľných parkovacích miest a priemerný počet odmietnutých vozidiel za hodinu prevádzky?*

Budeme predpokladat', že vstupný tok vozidiel je Poissonov s intenzitou $\lambda = 20$ voz./hod. Stredná doba obsluhy vozidla stojaceho na parkovisku je $\frac{1}{\mu} = \frac{5}{2}$ hod. Potom $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 50$ a $\rho = \frac{\alpha}{n} = 1.25$.

$$P_Z = \frac{\alpha^n}{n!(\sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^j}{j!})} = \frac{50^{40}}{40! \sum_{j=0}^{40} \frac{50^j}{j!}} = 0.25 \tag{2.44}$$

Takže

$$\begin{aligned}\kappa &= \rho(1-P_Z) = 0.938 \\ n - N &= n - \alpha(1-P_Z) = 2.5 \\ \lambda_Z &= \lambda P_Z = 5\end{aligned}$$

Parkovisko je využívané na 93.8%, pri priemernom počte 2.5 voľných parkovacích miest a piatich zamietnutých vozidlách za hodinu prevádzky.

Poznámka. V predchádzajúcom príklade sme využili skutočnost', že vďaka Chinčinovmu výsledku na chrakatere doby obsluhy nezáleží, stačí poznat' jej strednú hodnotu. Častejšie však poznáme rozdelenie doby obsluhy.

Príklad 2.9. *V systéme* **M /G / 2 / 2** *s 20% stratami sa hľadá využitie stabilizovaného systému, keď je doba obsluhy τ definovaná takto*

$$\mathcal{P}(\tau = 10\, min.) = \frac{1}{5}$$

$$\mathcal{P}(\tau = 5\, min.) = \frac{4}{5}$$

Stredná hodnota doby obsluhy je

$$\frac{1}{\mu} = \mathcal{E}(\tau) = 10\frac{1}{5} + 5\frac{4}{5} = 6\ min = \frac{1}{10}\ hod.$$

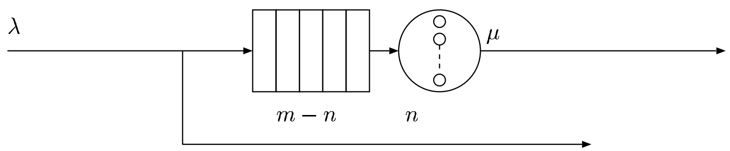
Hľadáme využitie systému $\kappa = \frac{\alpha}{2}(1 - P_Z)$. Stačí nájsť α z požiadavky

$$\begin{aligned} P_Z &= \frac{2}{10} \\ \frac{\alpha^2}{2 + 2\alpha + \alpha^2} &= \frac{2}{10} \\ 2\alpha^2 - \alpha - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Jediné kladné riešenie vyššie uvedenej kvadratickej rovnice je $\alpha = 1$. Potom využitie systému je $\kappa = \frac{1}{2}(1 - 0,2) = 0.4 = 40\%$.

2.6 Systém M /M /n /m s konečným frontom

V tomto n-linkovom systéme sa pripúšťa čakanie v obmedzenom rade frontu maximálnej prípustnej dĺžky $m-n$. Parameter m systému sa niekedy nazýva *kapacita* systému.



Obr. 2.9: Systém **M / M / n / m**

Vstupným tokom zákazníkov je Poissonov tok s intenzitou $\lambda > 0$ a doba obsluhy každej z liniek má exponenciálne rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu} > 0$. Zákazník, ktorý nájde v čase príchodu aspoň jednu voľnú linku, začne byť okamžite obsluhovaný niektorou z nich. Zákazníci, ktorí nájdu všetkých n liniek obsluhy obsadených, sa postavia do radu, ak v čase príchodu nie je front plný. Predpokladá sa, že zákazníci budú obsluhovaní v poradí príchodov, t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**. Takýto systém je príkladom systémov s konečným frontom.

Od systému **M /M /n /**∞ sa líši len konečným frontom. Systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots m\}$. Stavy systému interpretujeme takto:

- *0* - prázdny systém,
- *1* - v systéme je jeden obsluhovaný zákazník,
- *2* - v systéme sú dvaja obsluhovaní zákazníci,
- n - v systéme je n obsluhovaných zákazníkov.
- *n+1* - v systéme je $n+1$ zákazníkov (n obsluhovaných a jeden čakajúci na obsluhu),
- *n+q* - v systéme je $n+q$ zákazníkov (n obsluhovaných a q čakajúcich),
- m - v systéme je m zákazníkov (n obsluhovaných a $m-n$ čakajúcich).

Odvodenie pravdepodobností prechodu pre nejaký dostatočne malý časový interval dĺžky $\triangle t$ je zhodný s odvodením pre systém **M /M /n /**∞. Jediná zmena sa týka výpočtu pravdepodobosti prechodu zo stavu m do stavu m za čas $\triangle t$

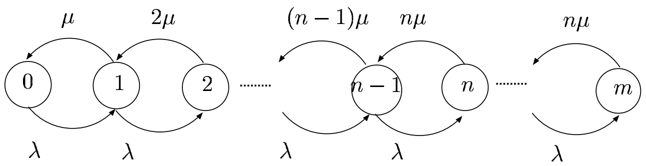
$$p_{mm}(\triangle t) = (\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \triangle t))^n = 1 - n\mu\triangle t + o(\triangle t)$$

Dostaneme tak konečnorozmernú $(m+1) \times (m+1)$ maticu pravdepodobností prechodu za čas $\triangle t \to 0^+$ t.j. $\mathbb{P}(\triangle t) = (p_{ij}(\triangle t))_{i,j\in S}$

$$p_{ij}(\triangle t) = \begin{cases} \lambda\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = i+1, 0 \le i < m \\ i\mu\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = i-1, 0 < i \le n \\ n\mu\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = i-1, n < i \le m \\ 1 - (\lambda + i\mu)\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = i, 0 < i \le n \\ 1 - (\lambda + n\mu)\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = i, n < i < m \\ 1 - n\mu\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = m, i = m \\ 1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ o(\triangle t) & \text{ak } |i - j| \ge 2 \end{cases}$$

Ľahko z nej odvodíme maticu intenzít $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j\in S}$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{ak } j = i+1, 0 \le i < m \\ i\mu & \text{ak } j = i-1, 0 < i \le n \\ n\mu & \text{ak } j = i-1, n < i \le m \\ -\lambda - i\mu & \text{ak } j = i, 0 < i \le n \\ -\lambda - n\mu & \text{ak } j = i, n < i < m \\ -n\mu & \text{ak } j = m, i = m \\ -\lambda & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ 0 & \text{ak } |i - j| \ge 2 \end{cases}$$



Obr. 2.10: Prechodový graf systému **M / M / n / m**

Vidíme, že systém môžeme popísať ako špeciálny prípad konečného procesu vzniku a zániku s nasledujúcim prechodovým grafom 2.10.

Systém má jediné stacionárne rozdelenie, a tak zo vzťahov (1.60) a (1.61) dostávame Erlangove vzorce

$$\pi_j = \begin{cases} \dfrac{\alpha^j}{j!}\pi_0 & \text{ak } 0 < j \leq n \\ \dfrac{n^n}{n!}\rho^j \pi_0 & \text{ak } n < j \leq m \\ \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^{m} \rho^j \right)^{-1} & \text{ak } j = 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

kde $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ a $\rho = \frac{\alpha}{n}$

Cvičenie. Overte, že z Erlangových vzorcov (2.45) dostaneme príslušné Erlangove vzorce pre systémy:

- **M / M / n /** ∞ ak $m \to \infty$,
- **M / M / n / n** ak $m = n$,
- **M / M /** ∞ ak $n \to \infty$.

Erlangove vzorce síce umožňujú vypočítať *základné charakteristiky* stabilizovaného systému, ale vedú k zložitým vzorcom, a tak sa pri riešení praktických úloh uprednostňuje ich *numerický* výpočet.

$\boxed{P_Z}$ - *pravdepodobnosť, že prichádzajúci zákazník bude zamietnutý.*

$$P_Z = \pi_m \tag{2.46}$$

$\boxed{P_Q}$ - *pravdepodobnosť, že prichádzajúci zákazník bude čakať vo fronte.*

$$\begin{aligned} P_Q &= \sum_{j=n}^{m-1} \pi_j = \sum_{j=n}^{m-1} \frac{n^n}{n!} \rho^j \pi_0 = \frac{\alpha^n}{n!}\pi_0 \sum_{j=0}^{m-n-1} \rho^j \\ &= \begin{cases} \pi_n \dfrac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} & \text{ak } \rho \neq 1 \\ \pi_n (m-n) & \text{ak } \rho = 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.47}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)}$ - *stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte.*

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n)\pi_j = \frac{\alpha^n \pi_0}{n!} \sum_{j=1}^{m-n} j\rho^j = \pi_n \sum_{j=1}^{m-n} j\rho^j \tag{2.48}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)}$ - *stredný počet obsadených liniek v systéme*. Využijeme rekurentný prepis Erlangových vzorcov (2.45)

$$\pi_j = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{j}\pi_{j-1} & \text{ak } 0 < j \leq n \\ \rho\pi_{j-1} & \text{ak } n < j \leq m \end{cases} \tag{2.49}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{N}_S) &= \sum_{j=0}^{n} j\pi_j + n \sum_{j=n+1}^{m} \pi_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha\pi_{j-1} + n \sum_{j=n+1}^{m} \rho\pi_{j-1} \\ &= \alpha(\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_n + \pi_{n+1} + \cdots + \pi_{m-1}) \\ &= \alpha(1 - \pi_m) \end{aligned} \tag{2.50}$$

$\boxed{\kappa}$ - *využitie systému (linky obsluhy).*

$$\kappa = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)}{n} = \rho(1 - \pi_m) \tag{2.51}$$

Ďalšie významné charakteristiky systému vypočítame pomocou Littlovej formuly.

$\boxed{\lambda_P}$ - *stredný počet prijatých zákazníkov za jednotku času* je rovný strednému počtu odchádzajúcich zákazníkov za jednotku času. Z Littlovej formuly aplikovanej na výstupný tok zákazníkov dostávame

$$\lambda_P = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)}{\frac{1}{\mu}} = \mu\alpha(1 - \pi_m) = \lambda(1 - P_Z) \tag{2.52}$$

$\boxed{\lambda_Z}$ - *stredný počet zamietnutých zákazníkov za jednotku času.* Z vlastnosti Poissonov vstupného toku zákazníkov vieme, že za jednotku času nám do systému príde priemerne λ zákazníkov. Do systému sa dostane za jednotku času λ_P zákazníkov, ostatní zákazníci budú odmietnutí.

$$\lambda_Z = \lambda - \lambda_P = \lambda - \lambda(1 - P_Z) = \lambda P_Z \tag{2.53}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q)}$ - *stredná doba čakania vo fronte*

$$\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q) = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)}{\lambda_P} \tag{2.54}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{W}_S)}$ - *stredná doba obsluhy v systéme.* Z exponenciálneho rozdelenia doby obsluhy máme

$$\mathcal{E}(\mathbf{W}_S) = \frac{1}{\mu} \tag{2.55}$$

$\boxed{\mathrm{E}(\mathbf{T})}$ - *stredná doba pobytu v systéme.* Doba pobytu sa skladá z doby čakania a z doby obsluhy

$$\mathcal{E}(\mathbf{T}) = \mathcal{E}(\mathbf{W}_Q) + \mathcal{E}(\mathbf{W}_S) \tag{2.56}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N})}$ - *stredný počet zákazníkov v systéme*

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}) = \lambda_P \mathcal{E}(\mathbf{T}) = \lambda_P \mathcal{E}(\mathbf{W}_Q) + \lambda_P \mathcal{E}(\mathbf{W}_S) = \mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) + \mathcal{E}(\mathbf{N}_S) \tag{2.57}$$

Príklad 2.10. *Dvojlinkový stabilizovaný systém* **M / M / 2 / 5** *je využívaný na 68.6%. Aký je priemerný počet čakajúcich zákazníkov a koľko percent z prichádzajúcich zákazníkov bude odmietnutých?*

Poznáme počet liniek $n = 2$ a využitie systému $\kappa = \frac{\alpha}{2}(1 - P_Z) = 0.686$. Hľadá sa $\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = \pi_3 + 2\pi_4 + 3\pi_5$ a pravdepodobnosť odmietnutia zákazníka $P_Z = \pi_5$. Najskôr vypočítame zaťaženie systému α zo známeho využitia systému κ a vzťahov (2.51), (2.46) a (2.45) ako riešenie polynomickej rovnice

$$0.686 = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\frac{\alpha^5}{2^4}}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^3}{2^3})}\right)$$

vhodnou numerickou metódou alebo využitím optimalizačnej funkcie *Solver* napr. v tabuľkových procesoroch *Excel* alebo *Gnumeric*, odkiaľ dostaneme $\alpha = \frac{3}{2}$. Potom

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = \frac{\frac{\alpha^2}{2}(\frac{\alpha}{2} + 2\frac{\alpha^2}{2^2} + 3\frac{\alpha^3}{2^3})}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^3}{2^3})} = 0.63$$

$$P_Z = \frac{\frac{\alpha^5}{2^4}}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^3}{2^3})} = 0.085 = 8.5\%$$

Pri praktických výpočtoch sa uprednostňuje výpočet v tabuľke pomocou substitúcie

$$q_j = \frac{\pi_j}{\pi_0} \tag{2.58}$$

ako sme ju poznali v predchádzajúcich modeloch (2.28).

Cvičenie. Realizujte výpočet stacionárneho rozdelenia reťazca v príklade 2.10 a charakteristík $P_Q, \mathcal{E}(\mathbf{N}_Q), \mathcal{E}(\mathbf{N}_S), P_Z$ pomocou substitúcie 2.58 a príslušnej tabuľky.

Praktickou optimalizačnou úlohou vo viaclinkových systémoch s odmietaním je úloha *optimalizácie počtu liniek s konštantnou čakárňou*. Základný model vychádza zo známych príjmov od zákazníkov, nákladov za čakanie zákazníkov v systéme a za počet liniek. Nech sú známe tieto náklady na prevádzku stabilizovaného systému

- c_1 - priemerný príjem za obsluhu jedného zákazníka,
- c_2 - priemerná zľava za čakanie zákazníka za jednotku času,
- c_3 - fixné náklady na prevázku linky obsluhy za jednotku času,
- $K_{\max}$ - konštantný maximálny počet čakajúcich zákazníkov.

Cieľom je nájsť taký počet liniek systému n, s kapacitou systému m, že $0 \le m - n = K_{\max}$, pri ktorom je celkový priemerný zisk, vyprodukovaný systémom za jednotku času, maximálny. Potom *kriteriálna funkcia* $Z(n)$

$$Z(n) = c_1\lambda_P - c_2\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) - c_3 n \tag{2.59}$$

je zložená z troch častí. Priemerný príjem za obslúžených zákazníkov $c_1\lambda_P$ je úmerný priemernému počtu obslúžených zákazníkov. Priemerné náklady za zľavy čakajúcim zákazníkom $c_2\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)$ sú úmerné priemernému počtu čakajúcich zákazníkov. Fixné náklady na prevádzku liniek $c_3 n$ sú úmerné počtu liniek v systéme. Takže hľadáme systém **M / M/ n / m** s parametrom $m = n + K_{\max}$, produkujúci maximálny zisk pri danom maximálnym počtom čakajúcich zákazníkov $K_{\max}$. Po dosadení príslušných charakteristík systému do (2.59) dostaneme

$$Z(n) = c_1\lambda(1-\pi_m) - c_2\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) - c_3 n \tag{2.60}$$

Cieľom je potom nájsť n^*, pri ktorom je

$$Z(n^*) = \max\{Z(n) : n \geq 1, n \text{ je prirodzené číslo}\} \tag{2.61}$$

Príklad 2.11. *Do opravovne traktorov prichádza priemerne za mesiac 5 pokazených traktorov. Jeden opravár za mesiac opraví priemerne dva traktory. Cena jednej opravy v bežnom mesiaci je priemerne 100 tis.Sk. Ak nemožno začať s opravou okamžite po prebratí pokazeného traktora, je zákazníkovi priznaná zľava vo výške 10 tis.Sk. Hrubá mesačná mzda opravára je priemerne 20 tis.Sk. Zákazník je ochotný čakať na opravu len v prípade, ak je nanajvýš piatym čakajúcim zákazníkom. Pri akom počte opravárov dosiahne opravovňa, pri stabilizovanej prevádzke, maximálny priemerný mesačný zisk?*

Budeme predpokladať, že vstupný tok zákazníkov je Poissonov s parametrom $\lambda = 5$ zák./mes. Doba obsluhy každého opravára má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\mu = 2$ zák./mes. Zaťaženie systému je $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 2.5$. Priemerný príjem opravovne za opravu traktora je $c_1 = 100000$ Sk, priemerné náklady za zľavu čakajúceho zákazníka sú $c_2 = 10000$ Sk/mes. a priemerné náklady na mesačnú mzdu opravárovi sú $c_3 = 20000$ Sk/mes. Maximálny počet čakajúcich zákazníkov je $K_{\max} = 5$, takže pri počte opravárov n môže byť v opravovni $m = n+5$ pokazených traktorov.

Pri výpočte kriteriálnej funkcie $Z(n)$ využijeme substitúciu (2.58) takto

$$\pi_m = \pi_{n+5} = \frac{q_n\rho^5}{\sum_{j=0}^n q_j + q_n(\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4+\rho^5)} \tag{2.62}$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = \frac{q_n(\rho+2\rho^2+3\rho^3+4\rho^4+5\rho^5)}{\sum_{j=0}^n q_j + q_n(\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4+\rho^5)} \tag{2.63}$$

Výsledky výpočtu možeme opäť zapísať do tabuľky 2.7. Vidíme, že maximálny mesačný zisk dosiahne opravovňa traktorov pri štyroch opravároch, zisk bude $Z(4) = 389062$ Sk.

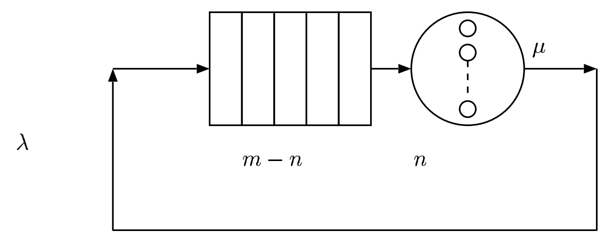
n	ρ	q_n	m	$\sum_j q_j$	q_m	$\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)$	$Z(n)$
0		1					
1	2.50	2.50	6	406.23	244.1406	4.3473	136035
2	1.25	4.94	7	59.13	15.0789	2.9463	303031
3	0.83	18.09	8	80.63	7.2698	1.7717	377202
4	0.63	347.95	9	899.08	33.1827	1.2484	389062
5	0.6	451658.39	10	889576.93	14114.3247	0.9044	383023

Tabuľka 2.7: Výpočet kriteriálnej funkcie $Z(n)$

2.7 Uzavretý systém M /M /n /m

V tomto n-linkovom systéme cirkuluje m zákazníkov, pričom môžu čakať v obmedzenom rade frontu maximálnej dĺžky $m - n \geq 0$ na uvoľnenie niektorej linky. Zákazníci po ukončení obsluhy opúšťajú systém, ale neskôr sa do neho vracajú s opätovnou požiadavkou na obsluhu.

Prípad $m = n$ je triviálny, pretože stačí priradiť každému zákazníkovi práve jednu linku obsluhy a dostaneme tak n jednolinkových systémov s jedným cirkulujúcim zákazníkom. Ďalej sa budeme zaoberať len prípadom, keď $m > n$.



Obr. 2.11: Uzavretý systému **M / M / n / m**

Doba pobytu každého zákazníka mimo systém má exponenciálne rozdelenie s tou istou strednou hodotou $\frac{1}{\lambda} > 0$. Doba obsluhy každej z liniek má tiež exponenciálne rozdelenie s rovnakou strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu} > 0$. Zákazník, ktorý nájde v čase príchodu aspoň jednu voľnú linku, začne byť okamžite obsluhovaný niektorou z nich. Zákazníci, ktorí nájdu všetkých n liniek obluhy obsadených, sa postavia do radu. Na takto vzniknutý front sa opäť nekladú žiadne obmedzenia. Predpokladá sa, že zákazníci budú obsluhovaní v poradí príchodov, t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**. Takýto systém je príkladom systémov s konečným frontom.

Ukážeme, že systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \ldots m\}$. Stavy systému interpretujeme takto:

- *0* - prázdny systém (všetkých m zákazníkov je mimo systém),
- *1* - v systéme je jeden obsluhovaný zákazník, ostatných $m-1$ je mimo systém,
- *n* - v systéme je n obsluhovaných zákazníkov (ostatných $m-n$ je mimo systém),
- *n+1* - v systéme je $n+1$ zákazníkov (n obsluhovaných a jeden čakajúci na obsluhu a $m-n-1$ mimo systém),
- *n+q* - v systéme je $n+q$ zákazníkov (n obsluhovaných a q čakajúcich a $m-n-q$ mimo systém),
- *m* - v systéme je m zákazníkov (n obsluhovaných a $m-n$ čakajúcich).

Vypočítame pravdepodobnosti prechodu pre nejaký dostatočne malý časový interval dĺžky $\triangle t$. Využijeme bezpamäťovú vlastnosť exponenciálneho rozdelenia. Doba pobytu aj zvyšková doba pobytu zákazníka má exponenciálne rozdelenie s parametrom λ. Potom pravdepodobnosť, že jeden zákazník mimo systém za čas $\triangle t$ príde do systému ,je $\lambda\triangle t + o(\triangle t)$. Pravdepodobnosť, že zotrvá mimo systém, je $1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t)$. Podobne doba obsluhy aj zvyšková doba obsluhy má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ, a teda pravdepodobnosť, že jeden zákazník v systéme za čas $\triangle t$ odíde zo systému je $\mu\triangle t + o(\triangle t)$ a že zotrvá v systéme je $1-\mu\triangle t + o(\triangle t)$.

Ak je v systém v stave i, ($0 \le i < m$), t.j. i je počet obsluhovaných a čakajúcich zákazníkov (z toho $\min\{i, n\}$ je obsluhovaných), zostáva mimo systém $m-i$ zákazníkov. Pravdepodobnosť, že práve jeden z nich príde a ostaní ani neprídu, ani neodídu, je

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\triangle t) = (m-i)(\lambda\triangle t + o(\triangle t))(1-\lambda\triangle t + o(\triangle t))^{m-i-1} \\ (1-\mu\triangle t + o(\triangle t))^{\min\{i,n\}} = (m-i)\lambda\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

Ak je systém v stave i ($1 \le i \le m$), potom pravdepodobnosť, že práve jedna linka z $\min\{i, n\}$ aktívnych liniek ukončí obsluhu zákazníka a ostatní ani

neprídu, ani neodídu, je

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\triangle t) = \min\{i,n\}(\mu\triangle t + o(\triangle t))(1-\mu\triangle t + o(\triangle t))^{min\{i,n\}-1} \\ (1-\lambda\triangle t + o(\triangle t))^{m-i} = \min\{i,n\}\mu\triangle t + o(\triangle t) \end{aligned}$$

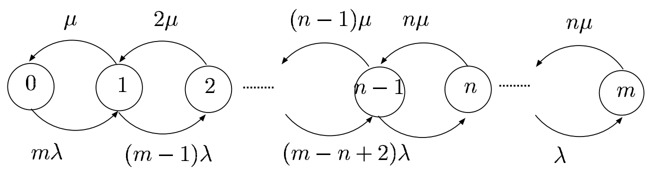
Dostaneme tak konečnorozmernú $(m+1)\times(m+1)$ maticu pravdepodobností prechodu za čas $\triangle t \to 0^+$ t.j. $\mathbb{P}(\triangle t) = (p_{ij}(\triangle t))_{i,j\in S}$

$$p_{ij}(\triangle t) = \begin{cases} (m-i)\lambda\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = i+1, 0 \le i < m \\ i\mu\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = i-1, 0 < i \le n \\ n\mu\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = i-1, n < i \le m \\ 1-((m-i)\lambda + i\mu)\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = i, 0 < i \le n \\ 1-((m-i)\lambda + n\mu)\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = i, n < i < m \\ 1-n\mu\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = m, i = m \\ 1-m\lambda\triangle t + o(\triangle t) & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ o(\triangle t) & \text{ak } |i-j| \ge 2 \end{cases}$$

Ľahko z nej odvodíme maticu intenzít $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j\in S}$

$$q_{ij} = \begin{cases} (m-i)\lambda & \text{ak } j = i+1, 0 \le i < m \\ i\mu & \text{ak } j = i-1, 0 < i \le n \\ n\mu & \text{ak } j = i-1, n < i \le m \\ -((m-i)\lambda + i\mu) & \text{ak } j = i, 0 < i \le n \\ -((m-i)\lambda + n\mu) & \text{ak } j = i, n < i < m \\ -n\mu & \text{ak } j = m, i = m \\ -m\lambda & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ 0 & \text{ak } |i-j| \ge 2 \end{cases}$$

Vidíme, že systém môžeme popísať ako špeciálny prípad konečného procesu vzniku a zániku s prechodovým grafom na obr.2.13. Má jediné



Obr. 2.12: Prechodový graf uzavretého systému **M / M / n / m**

stacionárne rozdelenie, a tak zo vzťahov (1.60) a (1.61) dostávame vzorce v rekurentnom tvare

$$\pi_j = \begin{cases} \dfrac{m-j+1}{j}\alpha\pi_{j-1} & \text{ak } 0 < j \le n \\ (m-j+1)\rho\pi_{j-1} & \text{ak } n < j \le m \\ 1 - \sum_{j=1}^{m} \pi_j & \text{ak } j = 0 \end{cases} \tag{2.64}$$

kde $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ a $\rho = \frac{\alpha}{n}$

Vzorce (2.64) umožňujú vypočítať *základné charakteristiky* stabilizovaného systému numericky, ich explicitný tvar je však pomerne zložitý. Opäť sa výhodne využíva substitúcia pre výpočet stacionárnych pravdepodobností $\pi_j = q_j\pi_0$, kde

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } j = 0 \\ \dfrac{m-j+1}{j}\alpha q_{j-1} & \text{ak } 0 < j \le n \\ (m-j+1)\rho q_{j-1} & \text{ak } n < j \le m \end{cases} \tag{2.65}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N})}$- *stredný počet zákazníkov v systéme.*

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}) = \sum_{j=0}^{m} j\pi_j = \frac{\sum_{j=1}^{m} jq_j}{\sum_{j=0}^{m} q_j} \tag{2.66}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)}$- *stredný počet obsadených liniek v systéme.*

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_S) = \sum_{j=1}^{n-1} j\pi_j + n\sum_{j=n}^{m}\pi_j = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} jq_j + n\sum_{j=n}^{m} q_j}{\sum_{j=0}^{m} q_j} \tag{2.67}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)}$- *stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte.*

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n)\pi_j = \frac{\sum_{j=n+1}^{m}(j-n)q_j}{\sum_{j=0}^{m} q_j} = \mathcal{E}(\mathbf{N}) - \mathcal{E}(\mathbf{N}_S) \tag{2.68}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N}_R)}$- *stredný počet zákazníkov mimo systém.*

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_R) = \sum_{j=1}^{m} j\pi_{m-j} = \frac{\sum_{j=1}^{m} jq_{m-j}}{\sum_{j=0}^{m} q_j} = m - \mathcal{E}(\mathbf{N}_S) - \mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) \tag{2.69}$$

j	q_j	π_j	$\mathcal{E}(\mathbf{N})$	$\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)$	$\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)$	$\mathcal{E}(\mathbf{N}_R)$
0	1	2/17	0	0	0	2
1	3	6/17	1	1	0	1
2	9/2	9/17	2	1	1	0
$\sum$	17/2	1	24/17	15/17	9/17	10/17

Tabuľka 2.8: Charakteristiky systému **M/M/1/2**

$\boxed{\lambda_R}$- *stredný počet prichádzajúcich zákazníkov za jednotku času (intenzita vstupného toku zákazníkov).* V uzavretom systéme je stredný počet prichádzajúcich zákazníkov za jednotku času rovný strednému počtu odchádzajúcich zákazníkov za jednotku času. Littlovu formulu možno aplikovať aj na výstupný tok zákazníkov, a tak dostávame

$$\begin{aligned} \lambda_R = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)}{\frac{1}{\mu}} &= \mu\left(\sum_{j=1}^{n} j\pi_j + n\sum_{j=n+1}^{m}\pi_j\right) \\ &= \mu\left(\alpha\sum_{j=1}^{n}(m-j+1)\pi_{j-1} + n\rho\sum_{j=n+1}^{m}(m-j+1)\pi_{j-1}\right) \\ &= \mu\alpha\sum_{j=1}^{m}(m-j+1)\pi_{j-1} = \lambda(m\pi_0 + (m-1)\pi_1 + \cdots + \pi_{m-1}) \\ &= \lambda\mathcal{E}(\mathbf{N}_R) \end{aligned} \tag{2.70}$$

$\boxed{\kappa}$- *využitie systému (linky obsluhy).* Z (2.70) dostávame $\lambda\mathcal{E}(\mathbf{N}_R) = \mu\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)$, čo vedie na neočakávaný vzťah

$$\kappa = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N}_S)}{n} = \rho\mathcal{E}(\mathbf{N}_R) \tag{2.71}$$

Príklad 2.12. *V uzavretom stabilizovanom systéme* **M / M / 1 / 2**, *kde* $\lambda = 3, \mu = 2$, *vypočítajte stacionárne pravdepodobnosti stavov systému a základné charakteristiky.*

Máme jednolinkový uzavretý systém, v ktorom cirkulujú dvaja zákazníci so zaťažením systému $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 1.5$ Základné charakteristiky máme v tabuľke 2.8 s využitím systému $\kappa = \frac{15}{17} = 0.882 = 88.2\%$.

Z Littlovej formuly dostaneme dve časové charakteristiky systému:

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q)}$ - *stredná doba čakania zákazníka vo fronte.*

$$\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q) = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)}{\lambda_R} = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)}{\lambda \mathcal{E}(\mathbf{N}_R)} \tag{2.72}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{W}_O)}$ - *stredná doba obehu zákazníka.* Doba obehu zákazníka je zložená z doby čakania, z doby obsluhy a z doby pobytu mimo systém.

$$\mathcal{E}(\mathbf{W}_O) = \mathcal{E}(\mathbf{W}_Q) + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \tag{2.73}$$

Príklad 2.13. *V kameňolome cirkulujú vodiči nákladných vozidiel TATRA medzi drvičkou a bagroviskom. Stredná doba nakládky kamenia má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou $\frac{1}{\mu}$. Stredná doba strávená jazdou vozidla k drvičke, vykládkou kamenia a návratom na bagrovisko má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou $\frac{1}{\lambda}$. Priemerný mesačný výkon vodičov vozidla je m_v obehov. Drvička vyžaduje na svoju efektívnu mesačnú prevádzku priemerne aspoň m_d vykládok vozidla. Mesačná mzda bagristu je c_b Sk a vodiča vozidla je c_v Sk. Treba určiť optimálny počet bagristov a vodičov tak, aby sa minimalizovali priemerné straty z prestojov vodičov i bagristov.*

Úlohu možno modelovať ako Markovov uzavretý systém **M/M/n/m**, kde n je počet bagristov a m je počet vodičov vozidiel. Dolný odhad počtu vodičov je daný minimálnou potrebou priemerného počtu vykládok, t.j. počet vodičov m musí byť $m \geq \frac{m_d}{m_v}$. Priemerný počet nevyužitých bagristov je $n - \mathcal{E}(\mathbf{N}_S)$. Pri mesačnej mzde vo výške c_b môžeme priemerné straty z prestojov bagristov odhadnúť vo výške $c_b.(n - \mathcal{E}(\mathbf{N}_S))$. Vodiči vozidiel stoja, ak čakajú na nakládku bagra. Priemerné straty z prestojov vodičov môžeme odhadnúť vo výške $c_v.\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)$. Potom celkové priemerné straty kameňolomu na mzdách n bagristov a m vodičov vozidiel pri zaťažení bagrov $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ sú

$$C(n,m) = c_b(n - \mathcal{E}(\mathbf{N}_S)) + c_v \mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)$$

Cieľom je nájsť také n^* a m^*, pri ktorých je

$$C(n^*, m^*) = \min\{C(n,m) : m \geq \frac{m_d}{m_v},\ n, m \text{ sú prirodzené čísla}\}$$

Poznámka. Vyššie uvedená optimalizačná úloha bola jednou z praktických úloh riešených VÚD Žilina v rokoch 1991/92 pre Kameňolom Ladce.

2.8 Markovove systémy s prioritami

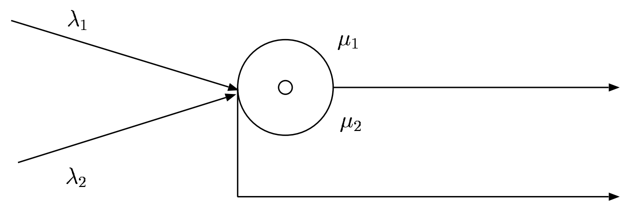
Ak prichádzajúci zákazníci nie sú rovnocení, ale niektorí sú uprednostňovaní, hovoríme o *systéme s prioritnými zákazníkmi*. Rozoznávajú sa nasledujúce základné typy priorít zákazníka:

- *absolútna s odmietaním* - prioritný zákazník ukončí obsluhu neprioritného zákazníka, ktorý musí opustiť systém,
- *absolútna s opakovaním* - prioritný zákazník preruší obsluhu neprioritného zákazníka, ktorý je neskôr buď doobsluhovaný alebo začne jeho obsluha od začiatku,
- *relatívna* - prioritný zákazník čaká na ukončenie obsluhy neprioritného zákazníka.

Prichádzajúci prioritní zákazníci môžu vytvárať front čakajúcich prioritných zákazníkov, pokiaľ to charakter systému umožňuje. Prichádzajúci neprioritní zákazníci sú okamžite obsluhovaní, len ak nájdu voľnú linku, inak, ak je to možné, vytvárajú front neprioritných zákazníkov. Uvedené typy prioritných zákazníkov budeme demonštrovať na jednoduchých *Markovových systémoch*.

2.8.1 M/M/1/1 s absolútnou prioritou a odmietaním

Do jednolinkového systému s odmietaním prichádzajú dva Poissonove toky zákazníkov. Vstupný tok zákazníkov s absolútnou prioritou má intenzitu λ_1 a tok neprioritných zákazníkov má intenzitu λ_2. Doba obsluhy prioritných zákazníkov má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1. Doba obsluhy neprioritných zákazníkov má tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_2.



Obr. 2.13: Systém **M / M / 1 / 1** s absolútnou prioritou a odmietaním

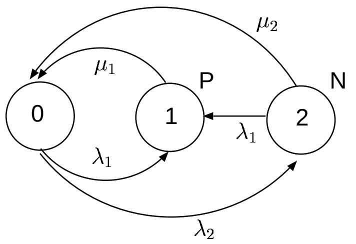
Ak príde do systému prioritný zákazník a nájde linku prázdnu, začne jeho obsluha, ktorá bude ukončená priemerne za čas $\frac{1}{\mu_1}$. Ak nájde v systéme iného prioritného zákazníka, bude prichádzajúci prioritný zákazník odmietnutý. Ak však nájde v systéme neprioritného zákazníka, uplatní sa absolútna priorita prichádzajúceho zákazníka, ktorý ukončí obsluhu neprioritného zákazníka. Tento neprioritný zákazník opúšťa nielen linku, ale aj systém.

Ak príde do systému neprioritný zákazník a nájde linku prázdnu, začne jeho obsluha, ktorá bude ukončená priemerne za čas $\frac{1}{\mu_2}$. Ak nájde v systéme zákazníka, bude systémom odmietnutý.

Systém možno modelovať ako homogénny Markovov reťazec $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- *0* - systém je prázdny,
- *1 (P)* - linka obsluhuje prioritného zákazníka,
- *2 (N)* - linka obsluhuje neprioritného zákazníka.

Markovovu vlastnosť reťazca zabezpečuje bezpamäťová vlastnosť exponenciálneho rozdelenia. Dĺžky medzier medzi príchodmi prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrami λ_1 a λ_2. Dĺžky dôb (aj zvyškových dôb) obslúh prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1 a μ_2. Prechodový graf systému máme na obr.2.14.



Obr. 2.14: Prechodový graf jednolinkového systému s absolútnou prioritou a odmietaním zákazníkov

Reťazec je ergodický a jeho jediné stacionárne rozdelenie môžeme hľadať algebraickou metódou. Dostávame tak vzorce pre výpočet stacionárneho rozdelenia $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$

$$\pi_0 = \frac{B_0}{B_0 + B_1 + B_2} = \frac{\mu_1(\lambda_1 + \mu_2)}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)} \tag{2.74}$$

$$\pi_1 = \frac{B_1}{B_0 + B_1 + B_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \tag{2.75}$$

$$\pi_2 = \frac{B_2}{B_0 + B_1 + B_2} = \frac{\lambda_2\mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)} \tag{2.76}$$

Poznámka. Pravdepodobnosť obsluhy prioritného zákazníka π_1 nezávisí od parametrov λ_2, μ_2 neprioritného zákazníka, čo je v zhode so správaním zákazníka s absolútnou prioritou.

Z charakteristík stabilizovaného systému sú významné

$\boxed{\kappa}$- *využitie systému (linky obsluhy)*. Linka je využívaná, pokiaľ nie je prázdna, a tak

$$\kappa = 1 - \pi_0 \tag{2.77}$$

$\boxed{P_{O1}}$- *pravdepodobnosť odmietnutia prioritného zákazníka*. Prioritný zákazník bude odmietnutý, len ak nájde v systéme iného prioritného zákazníka, a tak

$$P_{O1} = \pi_1 \tag{2.78}$$

$\boxed{P_{O2}}$- *pravdepodobnosť odmietnutia neprioritného zákazníka*. Neprioritný zákazník bude odmietnutý, ak nastane buď jav A – nájde linku obsadenú, alebo ak nastane jav B – počas obsluhy neprioritného zákazníka príde zákazník s absolútnou prioritou

$$P_{O2} = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$$

Jav A nastane, ak neprioritný zákazník nájde linku obsadenú nejakým prioritným alebo neprioritným zákazníkom

$$\mathcal{P}(A) = 1 - \pi_0$$

Jav B je však zjednotením dvoch disjunktných javov $B \cap A$ a $B \cap \overline{A}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B) &= \mathcal{P}(B \cap A) + \mathcal{P}(B \cap \overline{A}) = 0 + \mathcal{P}(B|\overline{A})\mathcal{P}(\overline{A}) \\ &= \mathcal{P}(\overline{A}) \int_0^\infty \lambda_1 t e^{-\lambda_1 t} e^{-\mu_2 t} dt \\ &= \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu_2)^2}\pi_0 \end{aligned} \tag{2.79}$$

A tak dostávame

$$P_{O2} = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) = 1 - \pi_0 + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu_2)^2}\pi_0 \tag{2.80}$$

Príklad 2.14. Do stabilizovaného jednolinkového Markovovho systému s odmietaním prichádzajú dva vstupné toky zákazníkov – s absolútnou prioritou a bez priority. Systém je využívaný na 80%, pričom bolo zistené, že 20% prichádzajúcich zákazníkov nájde v systéme neprioritného zákazníka. Koľko percent prioritných zákazníkov bude odmietnutých?

Sú známe $\kappa = 0.8,\ \pi_2 = 0.2$. Hľadá sa $P_{O1} = \pi_1$.
Zo vzťahu (2.77) a po substitúcii $\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$ z (2.75) máme

$$\kappa = 1 - \pi_0 = \pi_1 + \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 1} + \pi_2$$

Po dosadení dostaneme $\alpha_1 = \frac{3}{2}$. Z (2.78) máme

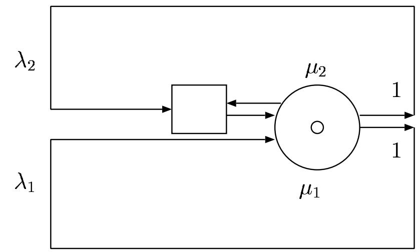
$$P_{O1} = \pi_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 1} = 0.6$$

Teda 60% prichádzajúcich prioritných zákazníkov bude odmietnutých.

2.8.2 Uzavretý M/M/1/2 s absolútnou prioritou a opakovanou obsluhou

V jednolinkovom uzavretom systéme cirkulujú dvaja zákazníci, jeden zákazník s absolútnou prioritou a jeden neprioritný zákazník. Doba pobytu prioritného zákazníka mimo systém má exponenciálne rozdelenie s parametrom λ_1 a podobne doba pobytu neprioritného zákazníka má exponenciálne rozdelenie s parametrom λ_2. Doba obsluhy prioritného zákazníka má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1. Doba obsluhy neprioritného zákazníka má tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_2.

Ak príde do systému prioritný zákazník a nájde linku prázdnu, začne jeho obsluha, ktorá bude ukončená priemerne za čas $\frac{1}{\mu_1}$. Ak nájde v systéme neprioritného zákazníka, uplatní sa absolútna priorita prichádzajúceho zákazníka, ktorý preruší obsluhu neprioritného zákazníka. Tento neprioritný zákazník opúšťa linku a vracia sa do frontu. Keď príde neskôr na rad, vykoná sa zvyšková doba obsluhy zákazníka (môže byť opäť prerušovaná príchodom prioritného zákazníka). Zvyšková doba obsluhy neprioritného



Obr. 2.15: Uzavretý **M/M/1/2** s absolútnou prioritou a opakovanou obsluhou

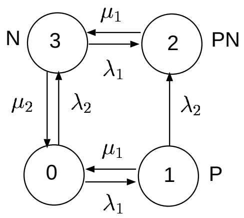
zákazníka má to isté rozdelenie ako jeho doba obsluhy. Keď prioritný zákazník ukončí obsluhu, pobudne mimo systém priemerne dobu $\frac{1}{\lambda_1}$ a opäť požaduje obsluhu.

Ak príde do systému neprioritný zákazník a nájde linku prázdnu, začne jeho obsluha, ktorá bude ukončená priemerne za čas $\frac{1}{\mu_2}$. Ak nájde v systéme prioritného zákazníka, zaradí sa do frontu. Po ukončení obsluhy pobudne mimo systém priemerne dobu $\frac{1}{\lambda_2}$ a opäť požaduje obsluhu.

Systém môžeme modelovať ako homogénny Markovov reťazec $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- *0* - systém je prázdny (obaja zákazníci sú mimo systém),
- *1 (P)* - linka obsluhuje prioritného zákazníka a neprioritný zákazník je mimo systém,
- *2 (PN)* - linka obsluhuje prioritného zákazníka a a neprioritný zákazník čaká,
- *3 (N)* - linka obsluhuje neprioritného zákazníka a prioritný zákazník je mimo systém.

Markovovu vlastnosť reťazca zabezpečuje bezpamäťová vlastnosť exponenciálneho rozdelenia. Dĺžky dôb pobytu aj zvyškových dôb pobytu prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrami λ_1 a λ_2. Dĺžky dôb aj zvyškových dôb obslúh prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1 a μ_2. Prechodový graf systému máme na obr.2.16.



Obr. 2.16: Prechodový graf jednolinkového uzavretého systému s absolútnou prioritou a opakovanou obsluhou

Reťazec je ergodický a jeho jediné stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\frac{B_0}{B}, \frac{B_1}{B}, \frac{B_2}{B}, \frac{B_3}{B})$,

$$\begin{aligned} B_0 &= \mu_1\mu_2(\lambda_2 + \mu_1) \\ B_1 &= \mu_1\mu_2\lambda_1 \\ B_2 &= \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) \\ B_3 &= \mu_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) \\ B &= B_0 + B_1 + B_2 + B_3 \end{aligned}$$

ľahko nájdeme algebraicky. Platí

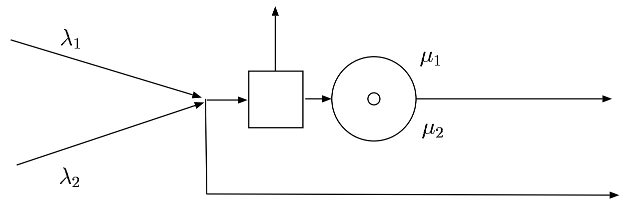
$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= \lambda_1((\lambda_2 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) + \lambda_1\lambda_2) \\ B_0 + B_3 &= \mu_1((\lambda_2 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) + \lambda_1\lambda_2) \end{aligned}$$

Opäť vidíme, že pravdepodobnosť $\pi_1 + \pi_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}$ obsluhy prioritného zákazníka nezávisí od parametrov λ_2, μ_2 neprioritného zákazníka.

2.8.3 M/M/1/2 s relatívnou prioritou a čakaním

Do jednolinkového systému s jedným čakacím miestom prichádzajú dva Poissonove toky zákazníkov. Vstupný tok zákazníkov s relatívnou prioritou má intenzitu λ_1 a tok neprioritných zákazníkov má intenzitu λ_2. Doba obsluhy prioritných zákazníkov má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1. Doba obsluhy neprioritných zákazníkov má tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_2.

Neprioritný zákazník v tomto systéme môže byť odmietnutý, jednak ak pri príchode nájde systém plný, jednak ak počas čakania na obsluhu príde prioritný zákazník. Ak však počas jeho obsluhy príde prioritný zákazník



Obr. 2.17: Systém **M / M / 1 / 2** s relatívnou prioritou a čakaním

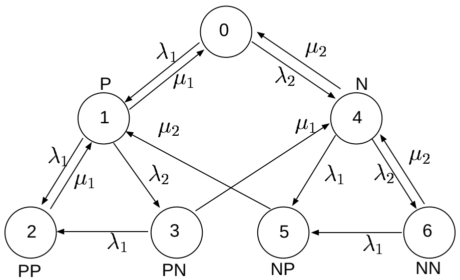
a nie je odmietnutý (čo sa stane vtedy, ak už jeden prioritný zákazník čaká na obsluhu), potom čaká na ukončenie obsluhy neprioritného zákazníka.

Systém môžeme modelovať ako homogénny Markovov reťazec $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- *0* - systém je prázdny,
- *1 (P)* - linka obsluhuje prioritného zákazníka a žiaden zákazník nečaká,
- *2 (PP)* - linka obsluhuje prioritného zákazníka a jeden prioritný zákazník čaká,
- *3 (PN)* - linka obsluhuje prioritného zákazníka a jeden neprioritný zákazník čaká,
- *4 (N)* - linka obsluhuje neprioritného zákazníka a žiaden zákazník nečaká,
- *5 (NP)* - linka obsluhuje neprioritného zákazníka a jeden prioritný zákazník čaká,
- *6 (NN)* - linka obsluhuje neprioritného zákazníka a jeden neprioritný zákazník čaká.

Markovovu vlastnosť reťazca zabezpečuje bezpamäťová vlastnosť exponenciálneho rozdelenia. Dĺžky medzier medzi príchodmi prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrami λ_1 a λ_2. Dĺžky dôb aj zvyškových dôb obslúh prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrami μ_1 a μ_2. Prechodový graf systému máme na obr.2.18.

Prechodový graf má pomerne zložitú štruktúru. Vrcholy $1, 2, 3$ reprezentujú stavy systému, keď je obsluhovaný prioritný zákazník a vrcholy



Obr. 2.18: Prechodový graf jednolinkového systému s relatívnou prioritou a čakaním

$4, 5, 6$, keď je obsluhovaný neprioritný zákazník. Relatívna priorita zákazníka sa uplatuje v prechodoch $6 \to 5$ a $3 \to 2$, keď prioritný zákazník "vytlačí" z jednomiestneho frontu neprioritného zákazníka, ktorý musí opustiť systém neobslúžený.

Reťazec je ergodický a jeho stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_6)$ môžeme nájsť ako kladné riešenie systému lineárnych rovníc

$$0 = -(\lambda_1 + \lambda_2)\pi_0 + \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_4 \tag{2.81}$$
$$0 = \lambda_1\pi_0 - (\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2)\pi_1 + \mu_1\pi_2 + \mu_2\pi_5 \tag{2.82}$$
$$0 = \lambda_1\pi_1 - \mu_1\pi_2 + \lambda_1\pi_3 \tag{2.83}$$
$$0 = \lambda_2\pi_1 - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_3 \tag{2.84}$$
$$0 = \lambda_2\pi_0 + \mu_1\pi_3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)\pi_4 + \mu_2\pi_6 \tag{2.85}$$
$$0 = \lambda_1\pi_4 - \mu_2\pi_5 + \lambda_1\pi_6 \tag{2.86}$$
$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 \tag{2.87}$$

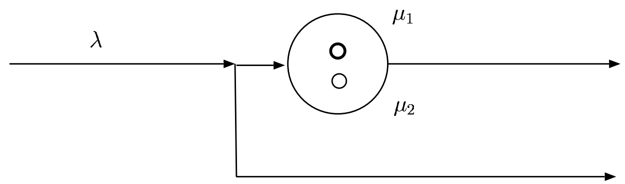
Poznámka. V prípade systémov s nekonečným frontom sa relatívna priorita zákazníka uplatňuje len jeho predbiehaním všetkých neprioritných zákazníkov vo fronte. V prípade systémov s konečnými frontami dochádza naviac aj k odmietnutiu posledného čakajúceho neprioritného zákazníka frontu.

Cvičenie. Zostrojte prechodový graf systému **M/M/1/3** s relatívnou prioritou a čakaním.

2.8.4 M/M/2/2 s jednou absolútne prioritnou linkou

V prípade obslužných liniek sa v praxi uplatňuje najmä *absolútna priorita linky*, ktorá spočíva v tom, že prichádzajúci zákazník uprednostňuje, ak je to možné, prioritnú linku. Ak začne jeho obluhu neprioritná linka, potom obsluhu dokončí tá istá linka aj v prípade, že sa počas jeho obsluhy uvolní prioritná linka.

V našom prípade do dvojlinkového systému so zamietaním prichádza elementárny vstupný tok zákazníkov s parametrom λ. Doba obsluhy na prvej, prioritnej linke má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1 a na druhej, neprioritnej linke tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_2. Zákazníci si prednostne vyberajú prioritnú linku. Zákazníci, ktorí nájdu linky obsadené, sú odmietnutí.

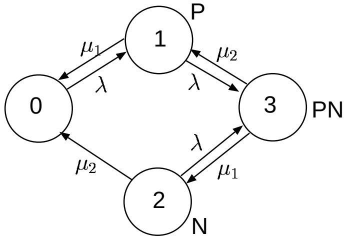


Obr. 2.19: Systém **M / M / 2 / 2** s jednou absolútne prioritnou linkou

Systém môžeme modelovať ako homogénny Markovov reťazec $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- *0* - systém je prázdny,
- *1 (P)* - len prioritná linka obsluhuje zákazníka,
- *2 (N)* - len neprioritná linka obsluhuje zákazníka,
- *3 (PN)* - obe linky sú obsadené.

Markovovu vlastnosť reťazca zabezpečuje jednak bezpamäťová vlastnosť exponenciálneho rozdelenia medzier medzi príchodmi zákazníkov, jednak bezpamäťová vlastnosť doby obsluhy prioritnej a neprioritnej linky. Prechodový graf systému máme na obr.2.20. Reťazec je ergodický a jeho jediné



Obr. 2.20: Prechodový graf dvojlinkového systému s odmietaním a s jednou absolútne prioritnou linkou

stacionárne rozdelenie nájdeme v tvare

$$\begin{aligned} B_0 &= \mu_1\mu_2(2\lambda + \mu_1 + \mu_2) \\ B_1 &= \lambda\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2) \\ B_2 &= \lambda^2\mu_1 \\ B_3 &= \lambda^2(\lambda + \mu_2) \\ B &= B_0 + B_1 + B_2 + B_3 \end{aligned}$$

Dostaneme stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\frac{B_0}{B}, \frac{B_1}{B}, \frac{B_2}{B}, \frac{B_3}{B})$

$$\pi_0 = \frac{\beta_1\beta_2(2 + \beta_1 + \beta_2)}{\beta} \tag{2.88}$$

$$\pi_1 = \frac{\beta_2(1 + \beta_1 + \beta_2)}{\beta} \tag{2.89}$$

$$\pi_2 = \frac{\beta_1}{\beta} \tag{2.90}$$

$$\pi_3 = \frac{1 + \beta_2}{\beta} \tag{2.91}$$

kde $\beta_1 = \frac{\mu_1}{\lambda}$, $\beta_2 = \frac{\mu_2}{\lambda}$ a $\beta = (1 + \beta_1 + \beta_2)(1 + \beta_2 + \beta_1\beta_2) + \beta_1\beta_2$.

Z charakteristík stabilizovananého systému sú najpoužívanejšie
$\boxed{P_Z}$- *pravdepodobnosť zamietnutia zákazníka.*

$$P_Z = \pi_3 \tag{2.92}$$

$\boxed{\kappa_1}$- *využitie prioritnej linky.*

$$\kappa_1 = \pi_1 + \pi_3 \tag{2.93}$$

$\boxed{\kappa_2}$- *využitie neprioritnej linky.*

$$\kappa_2 = \pi_2 + \pi_3 \tag{2.94}$$

$\boxed{\kappa}$- *využitie systému.*

$$\kappa = \frac{\pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3}{2} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \tag{2.95}$$

Cvičenie. Do stabilizovaného systému **M/M/2/2** s jednou prioritnou linkou prichádzajú zákazníci s intenzitou $\lambda = 18$ zák./hod. pri intenzite prioritnej linky $\mu_1 = 12$ zák./hod. a neprioritnej linky $\mu_2 = 6$ zák./hod. Pri akej intenzite obslúh μ stabilizovaného systému **M/M/2/2** s neprioritnými linkami budú mať oba systémy zhodné využitie? Porovnajte pravdepodobnosti zamietnutia zákazníka v oboch systémoch.

2.9 Semimarkovove systémy

Mnohé praktické obslužné systémy nespĺňajú niektoré požiadavky Markovových modelov. Medzery medzi príchodmi zákazníkov nemajú to isté exponenciálne rozdelenie, alebo doby trvania obslúh nemajú exponenciálne rozdelenie. Exponenciálne rozdelenie týchto veličín je nahradené Erlangovým rozdelením $E(n, \gamma)$ s vhodnými parametrami n, γ (n-prirodzené číslo, $\gamma > 0$), definované hustotou

$$f_{n,\gamma}(t) = \frac{\gamma^n t^{n-1} e^{-\gamma t}}{(n-1)!} \text{ pre } t \in \langle 0, \infty) \tag{2.96}$$

Poznámka. Erlangovo rozdelenie $E(n, \gamma)$ je špeciálnym prípadom gama rozdelenia $\Gamma(a, \gamma)$, kde parameter a je prirodzené číslo. Parameter γ je výhodné voliť tak, aby stredná hodnota náhodnej veličiny s týmto rozdelením nezávisela od parametra n.

Semimarkovove systémy sú systémy typu **E$_r$/ E$_s$/ n**, kde

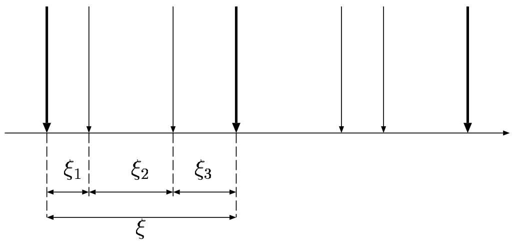
- *vstupný tok zákazníkov* má medzery medzi príchodmi zákazníkov $\{\boldsymbol{\tau}_k\}_{k=1}^{\infty}$ tvorené nezávislými náhodnými veličinami $\boldsymbol{\tau}_k$ s tým istým Erlangovým rozdelením s parametrami $r, r\lambda$, ($\boldsymbol{\tau}_k \sim E(r, r\lambda)$). Takýto vstupný tok sa nazýva *Erlangov* vstupný tok **E$_r$**.
- *doba obsluhy* liniek obsluhy $\boldsymbol{\tau}$ má Erlangovo rozdelenie s parametrami $s, s\mu$, ($\boldsymbol{\tau} \sim E(s, s\mu)$).

Náhodnú veličinu $\boldsymbol{\xi} \sim E(n, n\beta)$ možno chápať aj ako súčet n nezávislých náhodných veličín s tým istým exponeciálnym rozdelením $Exp(n\beta)$ t.j.

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + \boldsymbol{\xi}_n \tag{2.97}$$

kde $\boldsymbol{\xi}_i \sim Exp(n\beta)$. Výhodou modelovania pomocou náhodnej veličiny $\boldsymbol{\xi}$ sú práve jej dva parametre umožňujúce jednoduchú interpretáciu pomocou známych charakteristík $\mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\beta}$ a $\mathcal{D}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{n\beta^2}$.

Erlangov tok zákazníkov $\mathbf{E}_r$ môžeme získať *riedením* elemetárneho toku zákazníkov takto: Z elementárneho toku s intenzitou $r\lambda$ vyberieme vždy $r-1$ zákazníkov. Vzniknuté medzery sú potom súčtom r nezávislých medzier elementárneho toku. Elementárny tok však má medzery s exponenciálnym rozdelením s parametrom $r\lambda$, a tak nový tok má medzery s Erlangovým rozdelením s parametrom λ. Stredná dĺžka medzery Erlangovho toku je rovná $\frac{1}{\lambda}$, pretože je súčtom r stredných medzier elementárneho toku $\frac{1}{r\lambda}$. Intenzita Erlangovho toku udávajúca stredný počet zákazníkov za jednotku času je potom rovná λ. Uvedený postup však prirodzene neznamená, že Erlangov tok vzniká výlučne riedením elementárneho toku.



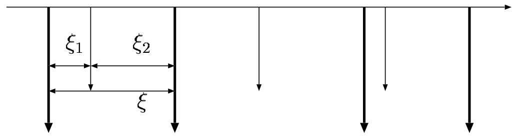
Obr. 2.21: Vznik Erlangovho toku $\mathbf{E_3}$ riedením elemetárneho toku

Na obr.2.21 máme príklad vzniku Erlangovho toku $\mathbf{E}_3$, ktorý vznikne riedením elementárneho toku vybratím dvojíc zákazníkov, prichádzajúci zákazníci v Erlangovom toku zákazníkov sú zobrazení hrubými čiarami.

Vstup zákazníka v Erlangovom toku $\mathbf{E}_r$ si môžeme predstaviť tak, že jeho príchod je zložený z *r fáz vstupu* zákazníka, pričom zákazník príde do systému až v okamihu ukončania r-tej fázy vstupu. Intenzita jednej fázy vstupu je potom $r\lambda$. Takýto tok sa preto tiež nazýva *r-fázový Erlangov tok*.

Aj Erlangovu dobu obsluhy $\mathbf{E}_s$ so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu}$ si môžeme obdobne rozfázovať. Namiesto vykonania jednej Erlangovej doby obsluhy zákazníka sa vykoná *s fáz obsluhy* zákazníka (s nezávislých obslúh s exponenciálnym rozdelením so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{s\mu}$), pričom zákazník

je obslúžený až v okamihu ukončenia s-tej fázy obsluhy. Na obr.2.22 máme príklad rozfázovania doby obsluhy $\mathbf{E}_2$. Intenzita jednej fázy obsluhy je potom $s\mu$. Takáto doba obsluhy sa preto tiež nazýva *s-fázová Erlangova doba obsluhy*.



Obr. 2.22: Fázy Erlagovej doby obsluhy $\mathbf{E_2}$

Ak teda vstup a obsluhu zákazníka rozfázujeme a za udalosť považujeme *absolvovanie ktorejkoľvek fázy*, dostávame markovovský model. To je tiež dôvod, prečo hovoríme o semimarkovových systémoch. Analýza takýchto modelov je pomerne zložitá, preto sa ďalej obmedzíme len na jednoduché jednolinkové modely.

Poznámka. Môžeme písať $\mathbf{E_1} = \mathbf{M}$, pretože $E(1, \gamma) = Exp(\gamma)$.

2.9.1 E$_2$/M/1/1

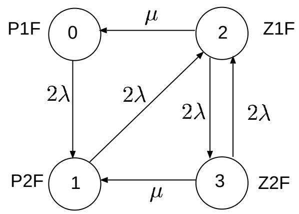
Do tohto jednolinkového semimarkovovho systému prichádza dvojfázový Erlangov vstupný tok zákazníkov s intenzitou λ a doba obsluhy má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ.

Systém možno modelovať ako homogénny Markovov reťazec $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- *0 (P1F)* - systém je prázdny pred prvou fázou príchodu zákazníka,
- *1 (P2F)* - systém je prázdny pred druhou fázou príchodu zákazníka,
- *2 (Z1F)* - linka obsluhuje zákazníka pred prvou fázou príchodu ďalšieho zákazníka,
- *3 (Z2F)* - linka obsluhuje zákazníka pred druhou fázou príchodu ďalšieho zákazníka.

Prechodový graf systému máme na obr.2.23.

Poznámka. Pravdepodobnosť prechodu $p_{32}(\triangle t) = 2\lambda\triangle t + o(\triangle t)$ zodpovedá situácii, keď sa v časovom intervale dĺžky $\triangle t$ nestihne uvoľniť linka a dôjde k ukončeniu druhej fázy príchodu zákazníka, ktorý musí byť odmietnutý.



Obr. 2.23: Prechodový graf systému **E$_2$/M/1/1**

Reťazec je ergodický a jeho jediné stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ môžeme hľadať riešením systému rovníc

$$\begin{aligned} 0 &= -2\lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\ 0 &= 2\lambda\pi_0 - 2\lambda\pi_1 + \mu\pi_3 \\ 0 &= -(2\lambda+\mu)\pi_3 + 2\lambda\pi_2 \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{aligned}$$

odkiaľ pri zaťažení systému $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ máme

$$\pi_0 = \frac{1}{2(1+2\alpha)} \tag{2.98}$$

$$\pi_1 = \frac{1+4\alpha}{2(1+2\alpha)^2} \tag{2.99}$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha}{1+2\alpha} \tag{2.100}$$

$$\pi_3 = \frac{2\alpha^2}{(1+2\alpha)^2} \tag{2.101}$$

(2.102)

Z charakteristík stabilizovaného systému uvedieme aspoň niektoré:
$\boxed{P_{0Z}}$- *pravdepodobnosť, že systém je prázdny.*

$$P_{0Z} = \pi_0 + \pi_1 \tag{2.103}$$

$\boxed{P_{1Z}}$- *pravdepodobnosť, že linka obsluhuje zákazníka* je súčasne aj *pravdepodobnosťou, že zákazník bude odmietnutý.*

$$P_{1Z} = \pi_2 + \pi_3 \tag{2.104}$$

$\boxed{\kappa}$- *využitie systému (linky obsluhy).* Linka je využívaná, pokiaľ systém nie je prázdny, a teda

$$\kappa = 1 - P_{0Z} = P_{1Z} \tag{2.105}$$

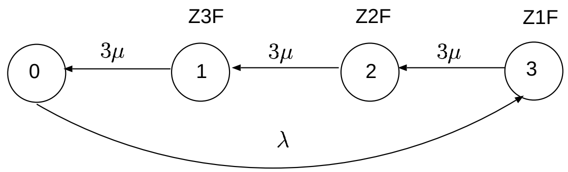
2.9.2 M/E$_3$/1/1

Do tohto jednolinkového semimarkovovho systému prichádza elementárny tok zákazníkov s intenzitou λ a doba obsluhy má trojfázové Erlangovo rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu}$.

Systém možno modelovať ako homogénny Markovov reťazec $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- *0* - systém je prázdny,
- *1 (Z3F)* - linka je v tretej fáze obsluhy zákazníka,
- *2 (Z2F)* - linka je v druhej fáze obsluhy zákazníka,
- *3 (Z1F)* - linka je v prvej fáze obsluhy zákazníka.

Prechodový graf systému máme na obr.2.24.



Obr. 2.24: Prechodový graf systému **M/E$_3$/1/1**

Reťazec je ergodický a jeho jediné stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ môžeme výhodne hľadať grafovou metódou. Dostaneme

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\alpha} \tag{2.106}$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha}{3(1+\alpha)} \tag{2.107}$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha}{3(1+\alpha)} \tag{2.108}$$

$$\pi_3 = \frac{\alpha}{3(1+\alpha)} \tag{2.109}$$

Z charakteristík stabilizovaného systému uvedieme aspoň niektoré:

$\boxed{P_{0Z}}$- *pravdepodobnosť, že systém je prázdny.*

$$P_{0Z} = \pi_0 = \frac{1}{1+\alpha} \tag{2.110}$$

$\boxed{P_{1Z}}$- *pravdepodobnosť, že linka obsluhuje zákazníka* je súčasne aj *pravdepodobnosťou, že zákazník bude odmietnutý.*

$$P_{1Z} = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \frac{\alpha}{1+\alpha} \tag{2.111}$$

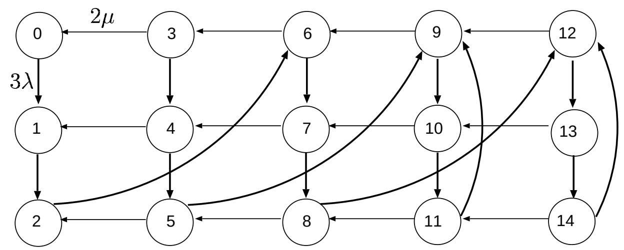
Poznámka. Vypočítané vzťahy (2.110), (2.111) sú v zhode s Chinčinovým výsledkom, že pravdepodobnosti P_{0Z} a P_{1Z} možno hľadať ako riešenie v systéme **M/ M/ 1/ 1**.

$\boxed{\kappa}$- *využitie systému (linky obsluhy).* Linka je využívaná, pokiaľ systém nie je prázdny, a tak

$$\kappa = 1 - P_{0Z} = P_{1Z} \tag{2.112}$$

2.9.3 $E_3/E_2/1/2$

Do tohto jednolinkového semimarkovovho systému prichádza trojfázový Erlangov tok zákazníkov s intenzitou λ a doba obsluhy má dvojfázové Erlangovo rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu}$.



Obr. 2.25: Prechodový graf systému **E$_3$/E$_2$/1/2**

Systém možno modelovať, ako homogénny Markovov reťazec $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, 14\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- *0* pred 1. fázou vstupu a linka je prázdna,

- *1* pred 2. fázou vstupu a linka je prázdna,
- *2* pred 3. fázou vstupu a linka je prázdna,
- *3* pred 1. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy,
- *4* pred 2. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy,
- *5* pred 3. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy,
- *6* pred 1. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy,
- *7* pred 2. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy,
- *8* pred 3. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy,
- *9* pred 1. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,
- *10* pred 2. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,
- *11* pred 3. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,
- *12* pred 1. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,
- *13* pred 2. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,
- *14* pred 3. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,

Prechodový graf systému máme na obr.2.25. Reťazec je ergodický a jeho jediné stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{14})$ môžeme nájsť numericky, riešením príslušných lineárnych rovníc.

Z charakteristík stabilizovaného systému uvedieme aspoň niektoré:

$\boxed{P_{0Z}}$- *pravdepodobnosť, že systém je prázdny.*

$$P_{0Z} = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \tag{2.113}$$

$\boxed{P_{1Z}}$- *pravdepodobnosť, že v systéme je práve jeden zákazník.*

$$P_{1Z} = \pi_3 + \pi_4 + \dots + \pi_8 \tag{2.114}$$

$\boxed{P_{2Z}}$ - *pravdepodobnosť, že v systéme sú práve dvaja zákazníci.*

$$P_{2Z} = \pi_9 + \pi_{10} + \cdots + \pi_{14} \tag{2.115}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)}$ - *stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte.*

$$\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q) = P_{2Z} \tag{2.116}$$

$\boxed{\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q)}$ - *stredná doba čakania zákazníkov vo fronte.*

$$\mathcal{E}(\mathbf{W}_Q) = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{N}_Q)}{\lambda(1 - P_{2Z})} \tag{2.117}$$

Cvičenie. Modelujte, vhodnou modifikáciou, prezentované príklady markovových systémov ako semimarkovove systémy.

Kapitola 3

Teória obnovy

Teória obnovy sa vyvinula z poistnej matematiky, v ktorej sa aparát teórie pravdepodobnosti využil na skúmanie úmrtnosti osôb. Neskorší vývoj viedol k vzniku matematickej demografie zaoberajúcej sa zákonitosťami vývoja obyvateľstva.

Základnou otázkou teórie obnovy je, akým spôsobom nahradzovať objekty, ktoré sa *opotrebúvajú* alebo *zlyhávajú*, novými objektami. Modely skúmajú zákonitosti medzi stavmi objektov, ich hodnotou, opotrebovaním a udržiavaním objektov v produktívnom stave. Delia sa na

- *modely s opotrebovaním* - v týchto deterministických modeloch sa objekty vyraďujú vplyvom opotrebovania s cieľom optimalizovať dobu životnosti minimalizáciou príslušnej nákladovej funkcie. Jedná sa tu o opraviteľné poruchy objektov, kde náklady na ich údržbu vedú k postupnému poklesu ich hodnoty, napr. televízory, autá, budovy atď.

- *modely so zlyhaním* - v týchto stochastických modeloch sú objekty nahradzované v dôsledku zlyhania. Opotrebovanie objektu sa tu vyjadruje pravdepodobnosťou zlyhania objektov. Cieľom je zistiť vzťah medzi vekovou štruktúrou objektov a pravdepodobnosťou ich zlyhania. Jedná sa tu o neopraviteľné poruchy objektov, pričom sa opotrebovanie neberie priamo do úvahy, napr. žiarovky, obaly tovarov, súčiastky zariadení.

Ďalej sa budeme zaoberať len dvoma diskrétnymi modelmi so zlyhaním, ktoré možno modelovať aj ako Markovove reťazce. Zaujíma nás vývoj rozsiahlych *súborov homogénnych objekov*, v ktorých vyradené objekty nahrádzame novými *na konci určitého obdobia*. Vzniká prirodzená potreba poznať stredný počet nových objektov, ktoré musíme mať k dispozícii na zabezpečenie bezproblémového chodu systému, ktorý obsahuje tieto objekty.

3.1 Homogénny diskrétny model so zlyhaním

Model vychádza z nasledujúcich predpokladov:

- *konečný súbor objektov sa na začiatku prvého obdobia skladá len z daného počtu w_0 nových objektov (počiatočný súbor),*
- *všetky obdobia (života, prevádzky) objektov sú rovnako dlhé,*
- *maximálna životnosť objektu je T období, na konci tohto obdobia, ak do tých čias objekt nezlyhal, je považovaný za zlyhaný objekt a nahradený novým objektom,*
- *obnova zlyhaných (vyradených) objektov v i-tom období sa uskutočňuje vždy na konci tohto obdobia formou výmeny jedného zlyhaného objektu za jeden nový objekt,*
- *je známe pravdepodobnostné rozdelenie $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_T)$ zlyhania objektov, kde všetky objekty súboru majú rovnakú pravdepodobnosť zlyhania v_i v i-tom období*, t.j. $v_i \geq 0$ pre $i = 1, 2, \ldots, T$ a platí

$$\sum_{i=1}^{T} v_i = 1 \tag{3.1}$$

Ďalej budeme používať nasledujúce označenie:

- w_i - očakávaný (priemerný) počet obnov objektov na konci i-teho obdobia,
- u_i - pravdepodobnosť, že objekt prežije i období.

Pre matematický model je síce základným parametrom rozdelenie pravdepodobnosti zlyhania $\mathbf{v}$, ale je výhodné používať aj *pravdepodobnosti prežitia i období u_i* definované pre $i = 0, 1, \ldots, T-1$ vzťahom

$$u_i = \sum_{j=i+1}^{T} v_j \tag{3.2}$$

Jav, že objekt prežije i období, je ekvivalentný s javom, že objekt zlyhá v období $i+1$ alebo $i+2\ldots$ alebo T.

Životnosť objektov je náhodná veličina $\mathbf{T}$ s pravdepodobnostným rozdelením $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_T)$ nadobúdajúca hodnoty $\{1, 2, \ldots, T\}$. Stredná doba životnosti objektov $\mathcal{E}(\mathbf{T})$ sa potom vypočíta podľa vzťahu

$$\mathcal{E}(\mathbf{T}) = \sum_{j=1}^{T} j v_j = \sum_{j=1}^{T} v_j + \sum_{j=2}^{T} v_j + \cdots + \sum_{j=T}^{T} v_j = \sum_{i=0}^{T-1} u_i \tag{3.3}$$

Model umožňuje určiť priemerný počet obnov w_i na konci i-teho obdobia na základe nasledujúcich úvah. Poznáme počet prvkov súboru na začiatku prvého obdobia w_0 a pravdepodobnosť zlyhania v prvom období života objektu v_1. Potom priemerný počet zlyhaných objektov v prvom období života $w_0 v_1$ je rovný priemernému počtu nahradených objektov na konci prvého obdobia w_1. Na konci druhého obdobia proces obnovy pokračuje jednak nahradením objektov začiatočného súboru w_0 s pravdepodobnosťou v_2, jednak opakovaným nahradením objektov už obnovených v prvom období w_1 s pravdepodobnosťou v_1. Celkový priemerný počet obnovovaných objektov na konci druhého obdobia je $w_0 v_2 + w_1 v_1$. Na konci tretieho obdobia treba počítať s obnovou troch vekových ročníkov. Takto dostávame systém rovníc, ktorý je známy ako *rovnice obnovy*

$$w_i = w_0 v_i + w_1 v_{i-1} + w_2 v_{i-2} + \cdots + w_{i-1} v_1 \qquad 1 \leq i < T \tag{3.4}$$
$$w_i = w_{i-T} v_T + w_{i-T+1} v_{T-1} + w_{i-T+2} v_{T-2} + \cdots + w_{i-1} v_1 \qquad i \geq T \tag{3.5}$$

Rovnice (3.4) popisujú obnovu počiatočného súboru a rovnice (3.5) proces obnovy po vyradení všetkých objektov počiatočného súboru. Rovnice obnovy môžeme riešiť postupným dosadzovaním výsledkov predchádzajúcich rovníc $w_j, 0 \leq j < i$ do nasledujúcej rovnice pre výpočet w_i alebo ako *systém lineárnych diferenčných rovníc s konštantnými koeficientami* (3.5) s počiatočnými podmienkami určenými rovnicami (3.4).

Príklad 3.1. *Systém má na začiatku 2000 nových súčiastok. Maximálna doba života súčiastky sú 4 roky. Pravdepodobnostné rozdelenie zlyhania súčiastky je* $(0.2, 0.25, 0.25, 0.3)$ *Treba určiť očakávaný počet obnov na konci šiesteho roku prevádzky systému.*

Systém $w_0 = 2000$ súčiastok. Ich zlyhanie je určené $\mathbf{v} = (0.2, 0.25, 0.25, 0.3)$. Očakávaný počet obnov w_6 vypočítame postupne z rovníc obnovy (3.4) a

w_{ij}	0	1	2	3	...	T	...	i	...
0	w_0	w_1	w_2	w_3	...	w_T	...	w_i	...
1	0	w_0u_1	w_1u_1	w_2u_1	...	$w_{T-1}u_1$	...	$w_{i-1}u_1$	...
2	0	0	w_0u_2	w_1u_2	...	$w_{T-2}u_2$	...	$w_{i-2}u_2$	...
3	0	0	0	w_0u_3	...	$w_{T-3}u_3$	...	$w_{i-3}u_3$	...
...					...		...		...
$T-1$	0	0	0	0	...	w_1u_{T-1}	...	$w_{i-T+1}u_{T-1}$	...
$\sum$	w_0	w_0	w_0	w_0	...	w_0	...	w_0	...

Tabuľka 3.1: Veková štruktúra objektov

(3.5).

$$
\begin{aligned}
w_1 &= w_0v_1 = 400 \\
w_2 &= w_0v_2 + w_1v_1 = 580 \\
w_3 &= w_0v_3 + w_1v_2 + w_2v_1 = 718 \\
w_4 &= w_0v_4 + w_1v_3 + w_2v_2 + w_3v_1 = 988.2 \\
w_5 &= w_1v_4 + w_2v_3 + w_3v_1 + w_4v_1 = 641.64 \\
w_6 &= w_2v_4 + w_3v_3 + w_4v_2 + w_5v_1 = 728.378
\end{aligned}
$$

Očakávaný počet obnov v šiestom období je 728.4 súčiastok.

Ďalšou úlohou je určenie *vekovej štruktúry* súboru objektov na konci jednotlivých období. Veková štruktúra objektov na konci j-teho obdobia je vektor

$$(w_{0j}, w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{T-1,j}) \tag{3.6}$$

kde w_{0j} je priemerný počet nových objektov na konci j-teho obdobia a w_{ij} je priemerný počet objektov vo veku i (období) na konci j-teho obdobia.

Veková štruktúra objektov na konci j-tych období je potom prehľadne určená j-tym stĺpcom tabuľky 3.1, v ktorej sa výhodne využívajú pravdepodobnosti prežitia u_i. Podľa predpokladu modelu, na začiatku prvého obdobia (konci 0-tého obdobia) sú všetky objekty nové v počte $w_{00} = w_0$. Na konci prvého obdobia, po vykonaní obnov, počet nových objektov bude v priemere $w_{01} = w_1$ a priemerný počet objektov vo veku jedno obdobie bude

$$w_{11} = w_0 - w_1 = w_0 - w_0v_1 = w_0(1 - v_1) = w_0u_1$$

w_{ij}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2000	400	580	716	983.2	641.6	728.4	767.9	792.6
1	0	1600	320	464	572.8	790.6	513.3	582.7	614.3
2	0	0	1100	220	319.0	393.8	543.5	352.9	400.6
3	0	0	0	600	120.0	174.0	214.8	296.5	192.5
$\sum$	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000

Tabuľka 3.2: Veková štruktúra objektov za 9 období

Na konci druhého obdobia je priemerný počet nových objektov $w_{02} = w_2$, priemerný počet objektov vo veku 2 obdobia je $w_{22} = w_0u_2$, a tak priemerný počet objektov vo veku 1 obdobie je

$$
\begin{aligned}
w_{12} &= w_0 - w_{02} - w_{22} = w_0 - w_2 - w_0u_2 \\
&= w_0 - w_0v_2 - w_1v_1 - w_0(1 - v_1 - v_2) \\
&= w_0v_1 - w_1v_1 = w_1 - w_1v_1 = w_1(1 - v_1) = w_1u_1
\end{aligned}
$$

Analogicky sa odvodia vekové štruktúry za ďalšie obdobia. Tabuľková forma zápisu 3.1 naviac poskytuje aj pomerne efektívny nástroj riešenia modelu elementárnymi prostriedkami v niektorom tabuľkovom procesore (Excel, Gnumeric). *Tabuľkovú metódu* hľadania vekovej štruktúry demonštruje nasledujúci príklad.

Príklad 3.2. *Určite vekovú štruktúru súčiastok z príkladu 3.1 na konci ôsmeho roku.*

Počet nových súčiastok na začiatku prvého obdobia je $w_{00} = 2000$. Pravdepodobnosti prežitia súčiastok sú postupne $u_1 = 0.8$, $u_2 = 0.55$, $u_3 = 0.3$. Tabuľku 3.2 dostaneme takto: Vypočítame ďalšie hodnoty na diagonálnych políčkach tabuľky

$$w_{11} = w_{00}u_1 = 1600,\ w_{22} = w_{00}u_2 = 1100,\ w_{33} = w_{00}u_3 = 600$$

Potom vypočítame $w_{01} = 400$. Pokračujeme postupným násobením a získame ďalší pás hodnôt

$$w_{12} = w_{01}u_1 = 320,\ w_{23} = w_{01}u_2 = 220,\ w_{34} = w_{01}u_3 = 120$$

Takýmto jednoduchým a efektívnym spôsobom môžeme vyplniť celú tabuľku. Hľadaná veková štruktúra súčiastok na konci ôsmeho roku je

$$(792.6,\ 614.3,\ 400.6,\ 192.5)$$

w_{ij}	0	1	2	3	...	T	...	n
0	$w_0(0)$	$w_0(1)$	$w_0(2)$	$w_0(3)$	...	$w_0(T)$	...	$w_0(n)$
1	0	$w_1(1)$	$w_1(2)$	$w_1(3)$	...	$w_1(T)$	...	$w_1(n)$
2	0	0	$w_2(2)$	$w_2(3)$	...	$w_2(T)$	...	$w_2(n)$
3	0	0	0	$w_3(3)$	...	$w_3(T)$	...	$w_3(n)$
...					...		...	
$T-1$	0	0	0	0	...	$w_{T-1}(T)$	...	$w_{T-1}(n)$
$\sum$	w_0	w_0	w_0	w_0	...	w_0	...	w_0

Tabuľka 3.3: Empirická veková štruktúra objektov za n období

V praxi sa však často stretávame so situáciou, keď *nie sú známe pravdepodobnosti zlyhania resp. prežitia objektov*, ale máme vyplnenú tabuľku vekovej štruktúry objektov. Naším cieľom je najskôr tieto pravdepodobnosti odhadnúť. Najjednoduchší prípad nastáva, keď poznáme všetky hodnoty *empirickej tabuľky vekovej štruktúry za* n *období* ($n > T$) v tvare tabuľky 3.3, kde $w_{ij} = w_i(j)$ udáva počet objektov vo veku i na konci obdobia j. Porovnaním tabuliek 3.1 a 3.3 vidíme, že pravdepodobnosti u_i by sme mohli odhadnúť niektorou z hodnôt

$$u_1 \approx \frac{w_1(1)}{w_0(0)} \approx \frac{w_1(2)}{w_0(1)} \approx \cdots \approx \frac{w_1(n)}{w_0(n-1)}$$

Možno však dokázať, že nestranným odhadom u_1 je u_1^*

$$u_1 \approx u_1^* = \frac{w_1(1) + w_1(2) + \cdots + w_1(n)}{w_0(0) + w_0(1) + \cdots + w_0(n-1)}$$

Potom pre $j = 1, \ldots, T-1$ je u_j^* nestranným odhadom u_j

$$u_j \approx u_j^* = \frac{w_j(j) + w_j(j+1) + \cdots + w_j(n)}{w_0(0) + w_0(1) + \cdots + w_0(n-j)} \tag{3.7}$$

Príklad 3.3. *Odhadnite pravdepodobnosti zlyhania súčiastok z nasledujúcej tabuľky empirickej vekovej štruktúry súčiastok za 5 rokov 3.4.*

w_{ij}	0	1	2	3	4	5
0	2000	400	600	700	900	700
1	0	1600	300	400	600	650
2	0	0	1100	300	100	400
3	0	0	0	600	400	250
$\sum$	2000	2000	2000	2000	2000	2000

Tabuľka 3.4: Empirická veková štruktúra súčiastok za 5 rokov

Najskôr z tabuľky 3.4 vypočítame podľa vzťahov (3.7) odhady pravdepodobnosti prežitia

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{1600+300+400+600+650}{2000+400+600+700+900} = 0.7717 \\ u_2^* &= \frac{1100+300+100+400}{2000+400+600+700} = 0.5405 \\ u_3^* &= \frac{600+400+250}{2000+400+600} = 0.3125 \end{aligned}$$

Zo vzťahov

$$\begin{aligned} u_3^* &= v_4^* \\ u_2^* &= v_3^* + v_4^* \\ u_1^* &= v_2^* + v_3^* + v_4^* \\ 1 &= v_1^* + v_2^* + v_3^* + v_4^* \end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} v_4^* &= u_3^* &&= 0.3125 \\ v_3^* &= u_2^* - v_4^* &&= 0.2280 \\ v_2^* &= u_1^* - v_3^* - v_4^* &&= 0.2312 \\ v_1^* &= 1 - v_2^* - v_3^* - v_4^* &&= 0.2283 \end{aligned}$$

Poznámka. Na podobnej myšlienke sú založené aj štatistické odhady pravdepodobností prežitia len pre neúplnú tabuľku empirickej vekovej štruktúry objektov, napr. len pre niektoré obdobia alebo s chýbajúcimi nerekonštruovateľnými položkami.

3.2 Nehomogénny diskrétny model so zlyhaním

V praxi sa skôr stretávame s prípadmi, keď už na začiatku pozorovania má počiatočný súbor objektov rôznu vekovú štruktúru. Teda na rozdiel od homogénneho modelu na začiatku nie sú všetky objekty nutne nové. Ostatné predpoklady ostávujú v platnosti. Takéto modely sa nazývajú tiež *modely s rôznorodou počiatočnou vekovou štruktúrou*.

Je teda známa *počiatočná veková štrutúra objektov*

$$(n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{T-1}) \tag{3.8}$$

kde n_j je počet objektov, ktoré sú na začiatku vo veku j období. Na začiatku máme v súbore len n_0 nových objektov. Pre celkový počet objektov súboru w_0 potom platí

$$w_0 = \sum_{j=0}^{T-1} n_j \tag{3.9}$$

Najskôr zostavíme rovnice obnovy pre takto modifikovaný model. Na rozdiel od homogénneho modelu musíme počítať aj objektami, ktoré nie sú na začiatku nové, ale majú vek j období.

Podmienená pravdepodobnosť zlyhania objektu v období $j+k$ za podmienky, že sa dožil veku j, je $\frac{v_{j+k}}{u_j}$. Potom priemerný počet objektov, ktoré mali na začiatku vek j a zlyhali v období $j+k$, je rovný

$$\frac{n_j v_{j+k}}{u_j} \tag{3.10}$$

Takto dostávame modifikovaný systém *rovníc obnovy*

$$w_1 = n_0 v_1 + n_1 \frac{v_2}{u_1} + n_2 \frac{v_3}{u_2} + \cdots + n_{T-1} \frac{v_T}{u_{T-1}} \tag{3.11}$$

$$w_i = n_0 v_i + n_1 \frac{v_{i+1}}{u_1} + n_2 \frac{v_{i+2}}{u_2} + \cdots + n_{T-i} \frac{v_T}{u_{T-i}} + \\ + w_1 v_{i-1} + w_2 v_{i-2} + w_3 v_{i-3} + \cdots + w_{i-1} v_1 \qquad 1 < i \leq T \tag{3.12}$$

$$w_i = w_{i-T} v_T + w_{i-T+1} v_{T-1} + w_{i-T+2} v_{T-2} + \cdots + w_{i-1} v_1 \qquad i > T \tag{3.13}$$

Rovnice (3.11) a (3.12) popisujú obnovu počiatočného súboru a rovnice (3.13) proces obnovy po vyradení všetkých objektov počiatočného súboru. Rozdiel medzi homogénnou a nehomogénnou vekovou štruktúrou sa nám prejavila iba v prvých T rovniciach obnovy. Prirodzene aj rovnice obnovy v tomto modeli môžeme riešiť priamo dosadzovaním výsledkov predchádzajúcich rovníc do nasledujúcich rovníc obnovy.

Príklad 3.4. *V mliekarni majú prepravky maximálnu životnosť štyri roky. Koľko nových prepravok bude treba priemerne nahradiť na konci druhého roku, ak na začiatku majú v mliekarni* 25 *nových,* 20 *jednoročných,* 35 *dvojročných a* 40 *trojročných prepravok? Pravdepodobnosti zničenia prepravok v prvom až treťom roku sú* $0.2,\ 0.1,\ 0.3$.

Sú známe $n_0 = 25,\ n_1 = 20,\ n_2 = 35,\ n_3 = 40$ a $v_1 = 0.2,\ v_2 = 0.1,\ v_3 = 0.3,\ v_4 = 0.4$. Hľadá sa w_2, preto treba vypočítať $u_1 = 0.8,\ u_2 = 0.7,\ u_3 = 0.4$. Po dosadení do rovníc obnovy dostaneme

$$w_1 = n_0 v_1 + n_1 \frac{v_2}{u_1} + n_2 \frac{v_3}{u_2} + n_3 \frac{v_4}{u_3} = 62.5$$
$$w_2 = n_0 v_2 + n_1 \frac{v_3}{u_1} + n_2 \frac{v_4}{u_2} + w_1 v_1 = 42.5$$

Na konci druhého roku treba nahradiť priemerne 42.5 prepraviek.

Poznámka. Pri hľadaní vekovej štruktúry možno opäť výhodne využiť formu jej zápisu do príslušne modifikovanej tabuľky vekovej štruktúry pre nehomogénny model 3.1 ($w_{i0} = n_i,\ i = 0, 1, \ldots, T-1$), a teda i tabuľkovú metódu.

3.3 Model Markovových reťazcov

Na určenie vekovej štruktúry súboru objektov pre homogénny aj nehomogénny model môžeme výhodne využiť teóriu Markovových reťazcov s diskrétnym časom.

Budeme sa zaoberať obnovou *jedného objektu* s maximálnou životnosťou T období, ktorý môže mať vek $0, 1, \ldots, T-1$. Neuvažuje sa vek objektu T období, pretože na konci obdobia T je vymenený za nový objekt s vekom 0. Keď objekt zlyhá a nahradíme ho novým, znamená to, že výmenou nadobudol vek 0. Objektu v období n priradíme náhodnú premennú $\mathbf{X}_n$ udávajúcu vek objektu v n-tom období. Vek objektu v období $k+1$ závisí len od veku v období k, čo je Markovova vlastnosť reťazca $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Reťazec je naviac homogénny, pretože pravdepodobnosti prechodu nezávisia od obdobia, v ktorom k nemu dôjde.

Homogénny resp. nehomogénny model obnovy zlyhávajúcich objektov môžeme modelovať homogénnym Markovovým reťazcom $\{\mathbf{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, \ldots, T-1\}$, maticou prechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{v_2}{u_1} & 0 & \frac{u_2}{u_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{v_3}{u_2} & 0 & 0 & \frac{u_3}{u_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{v_{T-1}}{u_{T-2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{u_{T-1}}{u_{T-2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

a s počiatočným rozdelením

$$\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, \ldots, 0) \tag{3.14}$$

resp.

$$\mathbf{p}(0) = (\frac{n_0}{w_0}, \frac{n_1}{w_0}, \frac{n_2}{w_0}, \ldots, \frac{n_{T-1}}{w_0}) \tag{3.15}$$

Cvičenie. Nakreslite prechodový graf reťazca pre model s päťročnou životnosťou objektov.

Pravdepodobnostné rozdelenie reťazca

$$\mathbf{p}(n) = (p_0(n), p_1(n), p_2(n), \ldots, p_{T-1}(n)) \tag{3.16}$$

je *pravdepodobnostným rozdelením vekovej štruktúry na konci obdobia* n.

Súčin $w_0\mathbf{p}(n)$ potom udáva vekovú štruktúru na konci obdobia n. Potom $w_{in} = w_0 p_i(n)$ udáva očakávaný počet objektov, ktoré budú mať na konci obdobia n (po obnove) vek i.

Možno ukázať, že podľa Markovovej vety 1.1.3 reťazec je ergodický, ak pravdepodobnostné rozdelenie zlyhania objektov má všetky zložky kladné (stačí voliť $n = T$). Po dostatočnom počte období sa veková štruktúra stabilizuje. Existujú totiž limity

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \boldsymbol{\pi} \tag{3.17}$$

Môžeme počítať s *limitnou vekovou štruktúrou* $w_0\boldsymbol{\pi}$, t.j. s limitným priemerným počtom obnov $w_0\pi_0$ objektov.

Fréchet dokázal, že limitná veková štruktúra pre homogénny aj nehomogénny model, ak existuje, je určená explicitne

$$w_0(\frac{1}{\mathcal{E}(\mathbf{T})}, \frac{u_1}{\mathcal{E}(\mathbf{T})}, \frac{u_2}{\mathcal{E}(\mathbf{T})}, \ldots, \frac{u_{T-1}}{\mathcal{E}(\mathbf{T})}) \tag{3.18}$$

kde $\mathcal{E}(\mathbf{T})$ je stredná doba životnosti objektov definovaná vzťahom (3.3). Ľahko sa presvedčíme, že

$$\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{\mathcal{E}(\mathbf{T})}, \frac{u_1}{\mathcal{E}(\mathbf{T})}, \frac{u_2}{\mathcal{E}(\mathbf{T})}, \ldots, \frac{u_{T-1}}{\mathcal{E}(\mathbf{T})}) \tag{3.19}$$

je stacionárne rozdelenie reťazca.

Poznámka. Limitná veková štruktúra je očakávanou vekovou štruktúrou, skutočná veková štruktúra môže byť iná.

Príklad 3.5. *Podnik zakúpil 1100 rovnakých obalov s trojročnou maximálnou životnosťou. Zistite očakávanú vekovú štruktúru obalov na konci tretieho roku a limitnú vekovú štruktúru. Predpokladá sa, že v prvom, druhom roku zlyhá* 20% *a* 40% *obalov.*

Máme pravdepodobnosti $v_1 = 0.2, v_2 = 0.4, v_3 = 0.4, u_1 = 0.8, u_2 = 0.4$, takže matica prechodu je

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & 0 \\ \frac{v_2}{u_1} & 0 & \frac{u_2}{u_1} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Model je homogénny, a tak $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0)$ a $\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(0)\mathbb{P}^3 = (0.568, 0.352, 0.08)$ a veková štruktúra na konci tretieho roku je

$$1100\mathbf{p}(3) = (624.8,\ 387.2,\ 88.0)$$

Stacionárne rozdelenie reťazca je podľa (3.19) $\boldsymbol{\pi} = (\frac{5}{11}, \frac{4}{11}, \frac{2}{11})$, a teda limitná veková štruktúra je

$$1100\boldsymbol{\pi} = (500,\ 400,\ 200)$$

Kapitola 4

Teória zásob

Teória zásob opatrí medzi disciplíny operačnej analýzy, ktoré majú špecifickú povahu riešených úloh. *Zásobami* sa rozumie skladovaný substrát, ktorý je v procese výroby a obehu uschovaný na neskoršiu spotrebu. Potreba tvorby zásob je vyvolaná nesúladom medzi výrobou a spotrebou substrátov. Cieľom snaženia podnikateľa či prenájomcu skladu je nájsť optimálnu stratégiu riešenia tohto konfliktu ponuky a dopytu počas celého sledovaného obdobia.

S prvým pokusom riešiť problém výšky zásob ako optimalizačnú úlohu sa stretávame už v roku 1888, keď sa hľadala optimálna výška pokladničnej hotovosti v peňažnom ústave. Príliš vysoká hotovosť vedie k stratám na úrokoch, zatiaľčo príliš nízka hotovosť môže spôsobiť nedostatok peňazí v pokladni.

Jednou zo základných *optimalizačných úloh* v teórii zásob je určenie *optimálnej veľkosti zásob* tak, aby sa zabezpečil plynulý chod výroby alebo obeh substrátov s minimálnymi celkovými nákladmi na tvorbu a údržbu zásob.

Modely teórie zásob možno charakterizovať rôznymi stratégiami vstupu, skladovania a výstupu. Často majú charakter pravidiel medzi

- *dodávkou* – komodita (substrát) dodaný na sklad,
- *spotrebou* – komodita (substrát) vyskladnený zo skladu

Tieto základné prvky nám umožňujú klasifikáciu modelov pomocou voľby nasledujúcich stratégií:

- *stratégia vstupu* – rozlišuje dodávky podľa *času uskutočnenia dodávok* a *veľkosti dodávok*. Obe veličiny sa môžu riadiť deterministickými pravidlami. Čas dodávok môže byť pravidelný a konštantný, alebo

sa môže riadiť inými presne vymedzenými zmluvnými pravidlami. V prípade stochastickej povahy veličín poznáme len jej pravdepodobnostné charakteristiky. Dôležitou praktickou veličinou je *dodacia lehota* určená časom od okamihu zadania objednávky do okamihu dodania substrátu na sklad.

- *stratégia skladovania* – predstavuje pravidlá o spôsobe zmeny uskladnených dodávok na vyskladnené dodávky. Snahou je maximálne uspokojenie objednávok na dodávky pri minimálnych očakávaných nákladoch resp. maximálnom očakávanom zisku. Takéto modely sa nazývajú *nákladovo orientované*. V najjednoduchších modeloch sa predpokladá *neobmedzená skladovateľnosť* substrátov. Príklad potravín však vyžaduje obmedzenú skladovateľnosť tovaru. Z hľadiska organizácie skladu sa rozlišujú skladovacie systémy *so signalizáciou zmien*, keď sa eviduje každá zmena stavu skladu, a *s periodickou kontrolou*, keď sa zmeny stavu zásob evidujú len v pravidelných intervaloch formou inventarizácie zásob.

- *stratégia výstupu* – predstavuje pravidlá o spôsobe spotreby zásob. Podľa charakteristiky množstiev, v akých sa dodávky spotrebúvajú, sa rozoznávajú modely *so spojitou spotrebou*, keď má spotreba neprerušený priebeh, a *s diskrétnou spotrebou*, keď sa spotreba odohráva jednorazovo, najčastejšie v diskrétnych a konštantných množstvách po pravidelných časových intervaloch. V oboch prípadoch je významný *dodávkový cyklus* určený časom od dodania dodávky na sklad po jej spotrebu. Ak sa spotreba v jednotlivých cykloch nemení, hovoríme o *stacionárnom*, v opačnom prípade o *dynamickom* modeli. Keď systém nie je schopný uspokojiť spotrebu vzhľadom na nedostatočný stav zásob, hovoríme o *deficite*. Systémy s deficitom sa ďalej delia na systémy *s odloženou spotrebou*, keď sa neuspokojená spotreba uspokojí z najbližšej dodávky, a *stratenou spotrebou*, keď sa potencionálna spotreba (predaj) stráca. Prirodzene aj veľkosť deficitu môže byť deterministická alebo náhodná veličina

Tabuľka 4.1 sprehľadňuje čiastočnú klasifikáciu modelov zásob. Dôležitou súčasťou nákladovo orientovaných modelov je *funkcia očakávaných nákladov*, ktorá sa pri splnení obmedzujúcich podmienok minimalizuje.

Potreba tvorby zásob je vyvolaná nesúladom medzi výrobou a spotrebou jednotlivých komodít. Cieľom snaženia podnikateľa či prenájomcu skladu je nájsť optimálnu stratégiu riešenia tohto *konfliktu medzi dodávkami a spotrebou* (ponukou a dopytom) počas celého sledovaného obdobia.

Predpoklady	I.	II.
Typ veličín	deterministické	stochastické
Spotreba	spojitá	diskrétna
Vývoj spotreby	statický	dynamický
Spotreba v dodávkovom cykle	stacionárna	nestacionárna
Deficit zásob	odložená spotreba	stratená spotreba
Počet substrátov	jednoprvková	viacprvková
Počet skladov	jeden	viacero

Tabuľka 4.1: Čiastočná klasifikácia modelov zásob

Firmám skladovanie neprináša zisk, a preto vzniká potreba riešiť *optimalizačné úlohy*, ktoré určia *optimálnu veľkosť zásob* tak, aby sa zabezpečil plynulý chod výroby alebo obeh jednotlivých komodít *s minimálnymi celkovými nákladmi* na tvorbu a údržbu zásob. Náklady spojené so skladovaním sa členia na

- *akvizičné náklady* – súvisia so zabezpečením jednej dodávky do skladu a sú priamo úmerné počtu dodávok,
- *variabilné náklady skladovania* – sa menia priamo úmerne so skladovaným množstvom, napr. úroky z obchodného úveru kryjúce zásoby, alebo náklad stratenej príležitosti ako ušlý úrok z terminovaného vkladu použitého na nákup zásob,
- *náklady deficitu* – vznikajúce pri chýbajúcej komodite v sklade v čase príchodu požiadavky na výber zo skladu,
- *náklady obstarávania* – sú výdaje firmy na nákup komodít do skladu rovné jednotkovej cene komodity vynásobenej nakupovaným množstvom,
- *fixné náklady skladovania* – ako náklady na prenájom, odpisy budovskladov alebo ich vykurovanie, nie je súčasťou ďalej uvedených modelov.

Ďalej sa obmedzíme na niekoľko najjednoduchších *modelov optimálnej veľkosti dodávok*, v ktorých je cieľová funkcia očakávaných nákladov funkciou veľkosti dodávok.

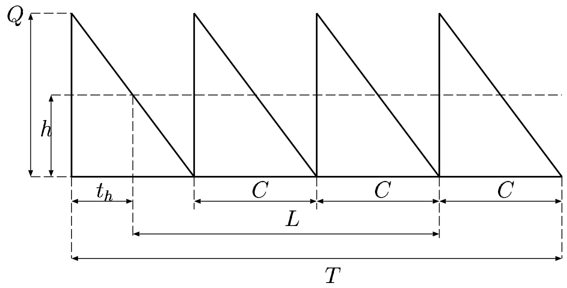
Základné obdobie, na ktoré sa podnikateľ či prenájomca skladu podujme skladovať substrát, nemusí byť jeden rok, ani mesiac ani iná časová jednotka, preto ju budeme označovať všeobecne T a interpretovať ako obdobie, na ktoré sa robí zásobovacia stratégia.

4.1 Modely so spojitou spotrebou

Medzi najstaršie modely patria deterministické modely, ktoré sú charakteristické ideálnymi predpokladmi. Doplňovanie zásob sa v najjednoduhších modeloch uskutočňuje v pravidelných rovnako dlhých cykloch so známou budúcou spotrebou. Realistickejšie modely pripúšťajú dopĺňanie zásob v cykloch rôznej dĺžky. Umožňujú modelovať reálne situácie, ktoré sú vo svojej postate deterministické (napr. výrobné linky), ale aj aproximovať stochastický model pomocou stredných hodnôt náhodných veličín.

Nasledujúci *deterministický model hospodárnej veľkosti dodávky* tzv. EOQ (economic order quantity) známy tiež ako *Harris - Wilsonov model* má skôr metodický ako praktický význam. Zásobovací proces je znázornený na obr.4.1 a vychádza z nasledujúcich predpokladov:

- V základnom období T sa očakáva spotreba R jednotiek substrátu.
- Veľkosť dodávky na sklad Q je neobmedzená a realizuje sa naraz v čase prijatia dodávky tak, že dodávka príde na sklad práve v čase vyprázdnenia skladu.
- Spotreba je lineárna funkcia času s konštantnou intenzitou λ. Konštanta λ udáva množstvo jednotiek substrátu spotrebovaných za jednotku času.
- Skladovateľnosť substrátu je časovo neobmedzená.
- Deficit zásob sa nepripúšťa.
- Sú známe konštantné akvizičné náklady (na jednu dodávku) c_a a konštantné náklady na skladovanie jednotkového množstva substrátu za jednotku času c_s.
- Úlohou je určiť *optimálnu veľkosť dodávky* Q^* na sklad, pri ktorej bude *funkcia očakávaných nákladov za jednotkové obdobie minimálna*.



Obr. 4.1: Vývoj stavu zásob v modeli so spojitou spotrebou

Označíme ďalej C veľkosť dodávkového cyklu a N počet dodávok za základné obdobie T. Z predpokladu konštantnej intenzity spotreby λ máme nasledujúce vzťahy

$$\lambda = \frac{Q}{C} \tag{4.1}$$

$$\lambda = \frac{R}{T} \tag{4.2}$$

$$N = \frac{T}{C} = \frac{R}{Q} = \frac{\lambda T}{Q} \tag{4.3}$$

Z vývoja stavu zásob na obr.4.1 vidieť, že priemerný stav zásob $\mathcal{E}(\mathbf{Q})$ v jednom dodávkovom cykle C je aritmetický priemer maximálneho a minimálneho stavu zásob

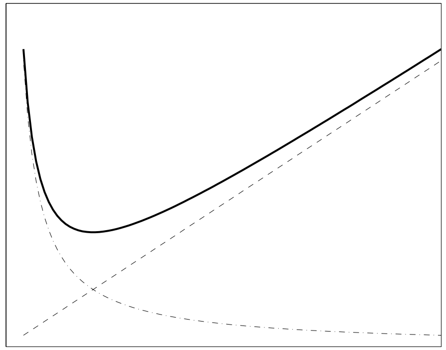
$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \frac{Q}{2} \tag{4.4}$$

Ten istý výsledok dostaneme, ak si uvedomíme, že okamžitý stav zásob v čase $t \in (0, C)$ je lineárna funkcia $Q - \lambda t$

$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{C}\int_0^C (Q - \lambda t)dt = Q - \frac{\lambda C}{2} = \frac{Q}{2} \tag{4.5}$$

S využitím vzťahov (4.1)–(4.4) dostaneme nákladovú funkciu udávajúcu priemerné náklady za časovú jednotku v tvare

$$\boxed{H(Q)} = (c_a + c_s C\mathcal{E}(\mathbf{Q}))\frac{N}{T} = c_a\frac{1}{C} + c_s\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \boxed{c_a\tfrac{\lambda}{Q} + c_s\tfrac{Q}{2}} \tag{4.6}$$



Obr. 4.2: Nákladová funkcia $H(Q)$ v modeli so spojitou spotrebou

Nákladová funkcia, obr.4.2, je pre $Q > 0$ rýdzo konvexná funkcia, a teda nadobúda jediný extrém, ktorý môžeme nájsť

$$\frac{dH(Q)}{dQ} = -c_a\frac{\lambda}{Q^2} + \frac{c_s}{2} = 0 \tag{4.7}$$

odkiaľ dostávame známy *Harris - Wilsonov (Adlerov) vzorec* pre optimálnu veľkosť dodávky

$$\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda c_a}{c_s}}} \tag{4.8}$$

Optimálne náklady za časovú jednotku budú

$$H(Q^*) = c_a\frac{\lambda}{Q^*} + c_s\frac{Q^*}{2} = \sqrt{2\lambda c_a c_s} \tag{4.9}$$

Konečne z obr.4.1 možno vypočítať čas (znovu)objednania t_h a hladinu objednania h ak je známa kladná dodacia lehota $L > 0$:

$$t_h = C - (L - KC) = (K+1)C - L \tag{4.10}$$

$$h = Q - \lambda t_h = Q - \big((K+1)C - L\big) = \lambda L - KQ \tag{4.11}$$

kde číslo $K = int(\frac{L}{C})$ sa nazýva *počet dodávok na ceste* a číslo KQ *zásoby na ceste*. Nulová dodacia lehota $L = 0$ sa interpretuje ako okamžitá dodávka.

Poznámka. Často používaným kritériom hodnotenia výkonnosti zásobovacej politiku firiem je *rýchlosť obratu zásob* ROZ definovaných ako podiel *celkových nákladov na zásoby* a *priemerných nákladov na zásoby*, čo v modeli EOQ vedie k vzorcu

$$ROZ = \frac{2R}{Q^*} \tag{4.12}$$

Príklad 4.1. Výrobca predpokladá nákup 9 600 súčiastok za dva roky. Náklady na dodávku sú 5 000 Sk a náklady na skladovanie jednej súčiastky sú 25 Sk/mes. pri trojmesačnej dodacej lehote. Vypočítajte optimálne množstvo súčiatok, ktoré má výrobca objednať, optimálne mesačné náklady, čas objednania a hladinu objednania.

Zvolíme za časovú jednotku mesiac a máme

$$T = 2.12 = 24,\ R = 9600,\ c_a = 5000,\ c_s = 25,\ L = 3$$

Po dosadení do odvodených vzťahov dostaneme

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{R}{T} = \frac{9600}{24} = 400\\
Q^* &= \sqrt{\frac{2\lambda c_a}{c_s}} = \sqrt{\frac{2.400.5000}{25}} = 400\\
C^* &= \frac{Q^*}{\lambda} = \frac{400}{400} = 1\\
H(Q^*) &= \sqrt{2\lambda c_a c_s} = \sqrt{2.400.5000.25} = 10000\\
K &= int(\frac{L}{C^*}) = int(\frac{3}{1}) = 3\\
t_h^* &= (K+1)C - L = 4.1 - 3 = 1\\
h^* &= \lambda L - KQ = 400.3 - 3.400 = 0
\end{aligned}$$

Výrobca má objednávať 400 súčiastok vždy v okamihu, keď úroveň zásob klesne na nulu, čo je vždy mesiac po dodávke zásob. Jeho mesačné náklady potom budú 10 000 Sk.

V prípade, keď uvažujeme naviac aj nákupné (obstarávacie) náklady c_n, ktoré sú úmerné objednávanému množstvu Q, dostávame nasledujúcu modifikovanú nákladovú funkciu

$$\boxed{H_1(Q)} = (c_n Q + c_a + c_s C\mathcal{E}(\mathbf{Q}))\frac{1}{C} = \boxed{c_n\lambda + c_a\tfrac{\lambda}{Q} + c_s\tfrac{Q}{2}} \tag{4.13}$$

ktorá sa od pôvodnej nákladovej funkcie $H(Q)$ líši len konštantou $c_n\lambda$. Tá nemá vplyv na optimálnu veľkosť dodávky, ktorá je tak určená opäť Harrisonovým vzorcom (4.8).

Príklad 4.2. (Gazda) Čistiaca firma zabezpečuje servis v rámci víkendov, pričom v priebehu roka nedochádza k žiadnym sezónnym výkyvom vo výdaji čistiaceho prostriedku *Clif*. Štatistickým výskumom sa zistilo, že stav zásob na sklade v čase t možno aproximovať regresnou priamkou

$$Q(t) = 105,2873 - 530,6352t,\quad t = 1,2,\ldots,30$$

v priebehu 30-tich týždňov roka. Skladovacie náklady c_s jedného balenia za rok sú dané úrokom z úveru vo výške 2 Sk na jedno balenie *Clif*u. Akvizičný náklad c_a je daný mzdou šoféra, ktorý ide *Clif* nakúpiť do veľkoskladu, a nákladmi na dopravu autom spolu vo výške 200 Sk. Nákupná cena c_n *Clif*u je 20Sk. Predpokladá sa jednodňová dodacia lehota.

Optimálnu výšku zásob dostaneme podľa (4.8), $Q^* = 325,777$ kusov *Clif*u. Optimálna dĺžka dodávkového cyklu je podľa (4.1) $C^* = 0,614$ roka. Pri dodacej lehote jeden deň, čo je $\frac{1}{365}$ roka, je podľa (4.11) hladina objednania $h = 1,45$ kusov. Celkové skladovacie náklady dostaneme zo vzťahu (4.13) vo výške $H_1(Q^*) = 11264,62$ Sk. Čistiace prostriedky nemôžeme kupovať na zlomky, výsledok zaokúhlime na 325 kusov *Clif*u. Pri 326 kusoch dostávame vyššie náklady.

V súčasnosti je aktuálna modifikácia Harris-Wilsonovho modelu *s obstarávaním a rabatom*. Predpoklady klasického modelu zostávajú v platnosti, ale naviac sa predpokladá, že v prípade nákupu najmenej Q_r jednotiek substrátu klesne nákupná cena (v dôsledku poskytnutia rabatu) na $c_r, c_r < c_n$. Nákladová funkcia bude mať v tomto prípade tvar

$$H_2(Q) = \begin{cases} \lambda c_n + c_a\dfrac{\lambda}{Q} + c_s\dfrac{Q}{2} & \text{ak } Q < Q_r\\ \lambda c_r + c_a\dfrac{\lambda}{Q} + c_s\dfrac{Q}{2} & \text{ak } Q \geq Q_r \end{cases} \tag{4.14}$$

Vidíme, že nižšia nákupná cena sa prejaví len v prípade uplatnenia rabatu v posune celej nákladovej funkcie $H_1(Q)$ smerom nadol. Stacionárny bod Q^* je opäť daný Harris-Wilsonovým vzorcom (4.8). Ak je $Q^* \neq Q_r$, potom môžu nastať tri možnosti:

- $Q^* < Q_r, H_2(Q^*) < H_2(Q_r)$ - minimálne náklady sa dosahujú pri výške dodávky Q^*, ktorá je optimálnou veľkosťou dodávky, pričom sa rabat nevyužije,
- $Q^* < Q_r, H_2(Q^*) > H_2(Q_r)$ - minimálne náklady sa dosahujú pri výške dodávky Q_r, ktorá je optimálnou veľkosťou dodávky, pričom sa využíva rabatová cena,

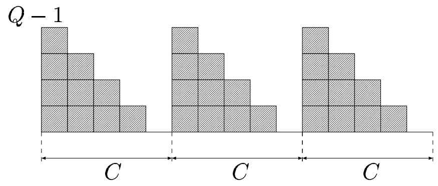
- $Q^* > Q_r, H_2(Q^*) < H_2(Q_r)$ - minimálne náklady sa dosahujú pri výške dodávky Q^*, ktorá je optimálnou veľkosťou dodávky, pričom sa využíva rabatová cena.

Príklad 4.3. (Gazda) Pokračujme v príklade 4.1 a predpokladajme, že dodávateľ zmenil stratégiu predaja tak, že za nákup presahujúci 400 kusov dáva 10% rabat t.j. predáva *Clif* za 18 Sk.

Keďže $Q^* < Q_r$, musíme ešte vypočítať $H_2(400) = 10217,08$. Pretože je $H_2(Q_r) < H_2(Q^*)$, rozhodneme sa pre dodávku veľkosti 400 kusov *Clif*u s uplatnením rabatu.

4.2 Model s diskrétnou spotrebou

Najjednoduchšia diskrétna verzia Harris-Wilsonovho modelu sa líši len predpokladom o spotrebe, ktorá sa realizuje v jednotkových kvantách. Vývoj stavu zásob je zobrazený na obr.4.3 Na začiatku dodávkového cyklu C



Obr. 4.3: Vývoj stavu zásob v modeli s diskrétnou spotrebou

sa predpokladá, že jednotka zásob je okamžite spotrebovaná. Počet spotrieb v dodávkovom cykle je Q, a tak stredný stav zásob v dodávkovom cykle je

$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \frac{\sum_{j=1}^{Q-1} j}{Q} = \frac{Q(Q-1)}{2Q} = \frac{Q-1}{2} \tag{4.15}$$

Potom príslušná nákladová funkcia má tvar

$$\boxed{H(Q)} = (c_a + c_s C\mathcal{E}(\mathbf{Q}))\frac{1}{C} = c_a\frac{1}{C} + c_s\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \boxed{c_a\frac{\lambda}{Q} + c_s\frac{Q-1}{2}} \tag{4.16}$$

ktorá sa od nákladovej funkcie (4.5) spojitého modelu líši len konštantou $\frac{c_s}{2}$.

Optimálnu veľkosť dodávky však vzhľadom na diskrétnosť nákladovej funkcie nemôžeme priamo hľadať pomocou derivácie. Ak však upustíme od predpokladu diskrétnosti funkcie $H(Q)$, t.j. relaxujeme premennú Q, potom stacionárny bod Q^* je opäť určený Harris-Willsonovým vzorcom (4.6). Môžu nastať nasledujúce tri prípady:

- $int(Q^*) = Q^*$, potom je Q^* celé číslo, a teda aj optimálna veľkosť dodávky,
- $int(Q^*) < Q^*$, $H(int(Q^*)) \leq H(int(Q^*)+1)$, potom je $int(Q^*)$ optimálna veľkosť dodávky, v prípade rovnosti máme dokonca dve optimálne riešenia,
- $int(Q^*) < Q^*$, $H(int(Q^*)) > H(int(Q^*)+1)$, potom je $int(Q^*)+1$ optimálna celočíselná veľkosť dodávky.

Cvičenie. Zobrazte tri prípady pôvodnej a relaxovanej $H(Q)$ a určte optimálne riešenie. Navrhnite a zobrazte čas a hladinu objednania dodávky a dodaciu lehotu.

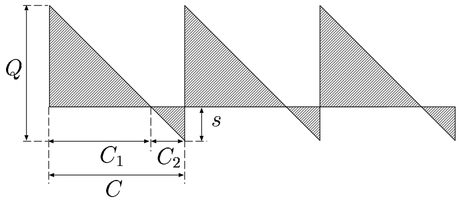
4.3 Modely s deficitom

V týchto modeloch môže nastať situácia, že keď príde požiadavka na výber zo skladu, nemožno ju uspokojiť, lebo táto komodita na sklade chýba. Podľa spôsobu riešenia problému deficitu zásob sa rozlišujú modely *s odloženou spotrebou* a modely *so stratenými predajmi*.

V prípade **modelu s odloženou spotrebou** predpokladáme, že neuspokojená požiadavka bude uspokojená z nasledujúcej dodávky. Jednotkový náklad deficitu c_d možno chápať ako penále za zadržanie dodávky jednej jednotky substrátu za jednotku času. Výšku deficitu, t.j. počet neuspokojených požiadaviek v jednom dodávkovom cykle, budeme značiť s. Ostatné predpoklady Harris-Wilsonovho modelu ostávajú v platnosti.

Nákladová funkcia potom obsahuje naviac aj nový druh nákladov deficitu. Dodávkový cyklus $C = C_1 + C_2$ sa skladá z dvoch období: C_1, keď sú uspokojené všetky požiadavky na výber zo skladu, a C_2, keď vzniká deficit. Keďže platí $\frac{Q-s}{Q} = \frac{C_1}{C}$, priemerný stav zásob v jednom dodávkovom cykle je

$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \frac{(Q-s)C_1}{2C} = \frac{(Q-s)^2}{2Q}$$



Obr. 4.4: Vývoj stavu zásob v modeli s odloženou spotrebou

Podobne platí $\frac{s}{Q} = \frac{C_2}{C}$, a tak priemerný stav deficitu v jednom dodávkovom cykle je

$$\mathcal{E}(\mathbf{s}) = \frac{s \cdot C_2}{2C} = \frac{s^2}{2Q}$$

Nákladová funkcia má potom tvar

$$\boxed{H(Q,s)} = (c_a + c_s C\mathcal{E}(\mathbf{Q}) + c_d C\mathcal{E}(\mathbf{s}))\frac{1}{C} = \boxed{c_a\frac{\lambda}{Q} + c_s\frac{(Q-s)^2}{2Q} + c_d\frac{s^2}{2Q}} \tag{4.17}$$

Optimalizačná úloha potom vedie na hľadanie minima nákladovej funkcie (4.17) s nutnou podmienkou

$$\frac{\partial H(Q,s)}{\partial Q} = 0, \quad \frac{\partial H(Q,s)}{\partial s} = 0 \tag{4.18}$$

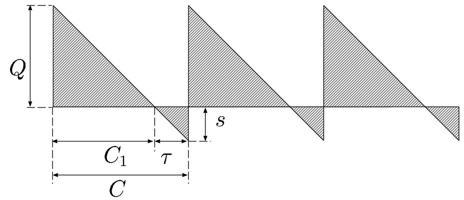
čo vedie k vzťahom

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda c_a}{c_s}}\sqrt{\frac{c_d + c_s}{c_d}} \tag{4.19}$$

$$s^* = \sqrt{\frac{2\lambda c_a c_s}{c_d(c_d + c_s)}} \tag{4.20}$$

V prípade **modelu so stratenými predajmi** predpokladáme, že neuspokojená požiadavka je stratená, pričom c_u sú náklady za časovú jednotku trvania deficitu. Ostatné predpoklady sú ako v modeli s odloženou spotrebou. Obdobie deficitu tu budeme označovať τ. Potom dĺžka celého cyklu je

$$C = C_1 + \tau = \frac{Q}{\lambda} + \tau = \frac{Q + \lambda\tau}{\lambda}$$



Obr. 4.5: Vývoj stavu zásob v modeli so stratenými

Priemerný stav zásob počas dodávkového cyklu je

$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \frac{QC_1}{2C} = \frac{Q^2}{2\lambda C}$$

Nákladová funkcia má tvar

$$\begin{aligned}\boxed{H(Q,\tau)} &= (c_a + c_s C\mathcal{E}(\mathbf{Q}) + c_u\tau)\frac{1}{C}\\ &= c_a\frac{\lambda}{Q + \lambda\tau} + c_s\frac{Q^2}{2(Q + \lambda\tau)} + c_u\frac{\tau\lambda}{Q + \lambda\tau}\\ &= \frac{2c_a\lambda + c_s Q^2 + 2c_u\tau\lambda}{2(Q + \lambda\tau)}\end{aligned} \tag{4.21}$$

Optimalizačná úloha potom vedie na hľadanie minima nákladovej funkcie (4.21) s nutnou podmienkou

$$\frac{\partial H(Q,\tau)}{\partial Q} = \frac{-a_1Q^2 + a_2Q\tau + a_3\tau + a_4}{(Q + \lambda\tau)^2} = 0 \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial H(Q,\tau)}{\partial \tau} = \frac{-b_1Q^2 + b_2Q + b_3\tau + b_4}{(Q + \lambda\tau)^2} = 0 \tag{4.23}$$

Optimálne hodnoty Q^* a τ^* možno hľadať s danou presnosťou $\varepsilon > 0$ nasledujúcou iteračnou metódou

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2\lambda c_a}{c_s}} \tag{4.24}$$

$$\tau_2 = \frac{a_1Q_1^2 - a_4}{a_2Q_1 + a_3} \tag{4.25}$$

$$Q_2 = \frac{b_2 - \sqrt{b_2^2 + 4b_1(b_3\tau_2 + b_4)}}{2b_1} \tag{4.26}$$

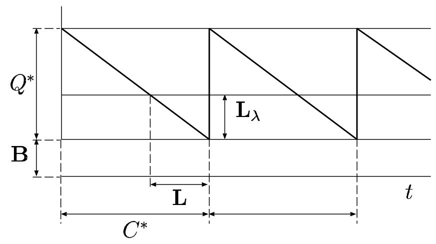
Ak $|Q_1 - Q_2| > \varepsilon$, v ďalšej iterácii položíme $Q_1 = Q_2$ a nové hodnoty τ_2 a Q_2 dostaneme zo vzťahov (4.25) a (4.26). V opačnom prípade končíme s hodnotami $Q^* = Q_2$ a $\tau^* = \tau_2$.

Poznámka. Vyššie uvedená iteračná metóda nie je vhodná na ručné spracovanie. Nie v každom prípade je tiež zaručená konvergencia k optimálnemu riešeniu. Pomerne náročná numerická analýza dáva v niektorých prípadoch aspoň postačujúce podmienky riešiteľnosti.

4.4 Klasické stochastické modely

V stochastických modeloch sa rieši deficit zásob rovnako ako v deterministických modeloch s deficitom, a to buď *odloženou spotrebou* alebo *stratenými predajmi*. V dôsledku náhodnej spotreby sa však naviac rozlišuje, či je stále známy momentálny stav zásob pri *signalizácii zmien*, alebo či sa robí inventarizácia zásob pri *periodickej kontrole* zásob. Najskôr sa budeme zaoberať problému určenia veľkosti *poistnej zásoby* pri náhodnej spotrebe.

4.4.1 Poistná zásoba pri náhodnej spotrebe



Obr. 4.6: Trend stavu zásob v modeli s poistnou zásobou a náhodnou spotrebou pre $L < C^*$

Zásoby sa z hľadiska ich funkcie niekedy delia na *obratové* (zabezpečujúce bežnú potrebu) a *poistné* (zabraňujúce vzniku deficitu zásob). *Poistná zásoba* sa vytvára s cieľom znížiť vplyv náhodnej spotreby (dopytu). Jej udržiavanie zvyšuje náklady na skladovanie ale znižuje náklady súvisiace s deficitom zásob. Efektívne riadenie zásob potom predpokladá určenie *optimálnej veľkosti poistnej zásoby*, pri ktorej uvedené náklady dosiahnu minimálnu hodnotu a súčasne sú splnené pravidlá objednávania.

Uvažujme model, v ktorom môže dojsť k deficitu zásob len počas konštantnej dodacej lehoty L. Nech $\mathbf{S}_L$ je spotreba (dopyt) počas L a predpokladajme, že pravdepodobnosť deficitu zásob počas L neprekročí hodnotu α - riziko deficitu. Úlohou je určiť veľkosť poistnej zásoby tak, aby

$$\mathcal{P}(\mathbf{S}_L \geq B + L_\lambda) \leq \alpha \tag{4.27}$$

kde L_λ je veľkosť spotreby počas L.

Ak budeme predpokladať, že spotreba je náhodná veličina s normálnym rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$, potom aj spotreba $\mathbf{S}_L$ počas L je ná veličina s normálnym rozdelením s parametrami μ_L a σ_L^2. Úlohou je určiť B tak, aby platilo (4.27) t.j. pravdepodobnosť deficitu zásob bola nanajvýš α. Vzťah medzi rozptylmi σ a σ_L možno odvodiť v tvare

$$\sigma_L = \sqrt{t_h \sigma^2} \tag{4.28}$$

kde t_h čas (znovu)objednania dostaneme zo vzťahu (4.10)

Medzi funkciou hustoty $f(x)$ a poistnou zásobou B platia nasledujúce vzťahy:

$$\mathcal{P}(\mathbf{S}_L \geq B + \mu_L) \leq \alpha \tag{4.29}$$

Postupnými úravami dostaneme

$$F(B + \mu_L) \geq 1 - \alpha, \tag{4.30}$$

a po normovaní máme

$$\Phi\Big(\frac{B}{\sigma_L}\Big) \geq 1 - \alpha \tag{4.31}$$

kde Φ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$.

Vzťah (4.31) nám umožňuje určiť pri zvolenom riziku α *dolnú hranicu poistnej zásoby* B. Vidíme, že veľkosť poistnej zásoby nezávisí od strednej hodnoty spotreby μ_L počas dodacej lehoty, ale závisí iba na variabilite spotreby počas doby dodania σ_L. Ak je $\sigma_L = 0$ ide o deterministický model, v ktorom netreba uvažovať poistnú zásobu.

Príklad 4.4. *Predpokladajme, že dopyt po nejakej komodite (v ks) má normálne rozdelenie $N(100, 100)$ riziko deficitu $\alpha = 0,05$. Nech optimálna dĺžka cyklu $C^* = 4$ dni. Najdite poistnú zásobu pre $L = 2, 5, 11$ dní.*

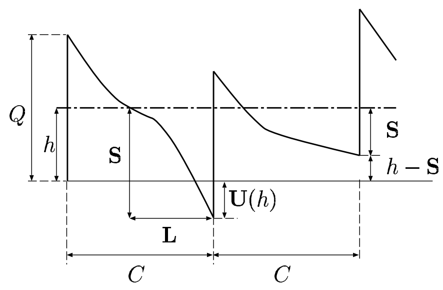
Ak je $\alpha = 0,05$ potom $\Phi\Big(\frac{B}{\sigma_L}\Big) = 0.95 = \Phi(1,64)$, čiže $B = 1.64\sigma_L$. Pre $L = 2$ dni je $L < C^*$ a $\sigma_L = \sqrt{(4-2) \cdot 100} = 14.142$ a tak $B = 23.2$ ks. Pre $L = 5$ dni je $L > C^* > l/2$ a $\sigma_L = \sqrt{(5-4) \cdot 100} = 10$ = tak $B = 16.4$ ks. Konečne pre $L = 11$ dni je $L > C^* < l/2$ a $\sigma_L = \sqrt{round(11/4) \cdot 100} = 17.32$ = tak $B = 28.4$ ks.

4.4.2 Signalizácia zmien a odložená spotreba

V prípade *modelu so signalizáciou zmien a odloženou spotrebou* sa obmedzíme na jedinú náhodnú veličinu, a to spotrebu $\mathbf{S}$ určenú hustotou $f(x)$ počas dodacej lehoty. Významnú úlohu tu zohráva stredná spotreba zásob počas dodacej lehoty

$$\mathcal{E}(\mathbf{S}) = \int_0^\infty x f(x) dx \tag{4.32}$$

Predpokladá sa tiež stacionárna spotreba s intenzitou λ počas celého prognózovaného obdobia. Dodávkový C cyklus zostane pre jednoduchosť deterministický. Dodacia lehota $\mathbf{L}$ je náhodná veličina, o ktorej budeme pre jednoduchosť predpokladať len $\mathbf{L} < C$. Znalosť jej hustoty nebude potrebná, nakoľko predpokladáme, že vždy, keď spotreba klesne pod hladinu objednania h, bude objednaná dodávka za čas $\mathbf{L}$ dodaná. Veľkosť dodávky Q je vždy konštantná a jednorazová na začiatku každého dodávkového cyklu.



Obr. 4.7: Vývoj stavu zásob v modeli so signalizáciou zmien s odloženou spotrebou

Sú opäť známe akviziční náklady na jednu dodávku c_a, náklady na skladovanie jednotky zásob za jednotku času c_s a náklady deficitu na jednotkové množstvo substrátu c_u. Výšku deficitu tu budeme v dôsledku náhodnej spotreby náhodná veličina $\mathbf{U}(h)$ zrejme závislá od hladiny objednania h.

Cieľom je určiť optimálne hodnoty Q^* a h^*, pri ktorých sú priemerné náklady na skladovanie

$$\boxed{H(Q,h)} = \left(c_a + c_s C\mathcal{E}(\mathbf{Q}) + c_u C\mathcal{E}(\mathbf{U}(h))\right)\frac{1}{C} \tag{4.33}$$

minimálne, pričom

$$C = \frac{Q}{\lambda} \tag{4.34}$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \frac{Q + \mathcal{E}(h-\mathbf{S}) + \mathcal{E}(h-\mathbf{S})}{2} = \frac{Q}{2} + h - \mathcal{E}(\mathbf{S}) \tag{4.35}$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{U}(h)) = \int_h^\infty (x-h) f(x) dx = \int_h^\infty x f(x) dx - hF^*(h) \tag{4.36}$$

Optimálne hodnoty Q^* a τ^* možno hľadať pomocou parciálnych derivácií

$$\frac{\partial H(Q,h)}{\partial Q} = -c_a \frac{\lambda}{Q^2} + \frac{c_s}{2} - c_u \mathcal{E}(\mathbf{U}(h)) \frac{\lambda}{Q^2} = 0 \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial H(Q,h)}{\partial h} = c_s - c_u \frac{\lambda}{Q} F^*(h) = 0 \tag{4.38}$$

odkiaľ dostaneme sústavu dvoch rovníc

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda(c_a + c_u\mathcal{E}(\mathbf{U}(h)))}{c_s}} \tag{4.39}$$

$$F^*(h^*) = \frac{c_s Q^*}{c_u \lambda} \tag{4.40}$$

ktorá nemá explicitné riešenie. Môžeme ho nájsť opäť s danou presnosťou $\varepsilon > 0$ len numericky iteračnou metódou

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2\lambda c_a}{c_s}} \tag{4.41}$$

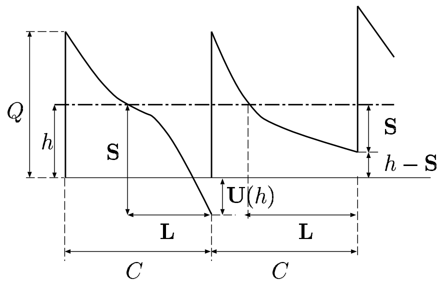
$$h_2 = F^{*-1}\left(\frac{c_s Q_1}{c_u \lambda}\right) \tag{4.42}$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2\lambda(c_a + c_u\mathcal{E}(\mathbf{U}(h_2)))}{c_s}} \tag{4.43}$$

Ak $|Q_1 - Q_2| > \varepsilon$, v ďalšej iterácii položíme $Q_1 = Q_2$ a nové hodnoty τ_2 a Q_2 dostaneme zo vzťahov (4.42) a (4.43). V opačnom prípade končíme s hodnotami $Q^* = Q_2$ a $h^* = h_2$.

Hadlay a Within ukázali, že tento postup konverguje k jedinému optimálnemu riešeniu, ak platí $Q_1 \leq Q_2$, kde Q_1 a Q_2 sú vypočítané z (4.39) a (4.40) pre $h = 0$.

Poznámka. Analogicky sa postupuje aj v prípade **modelu so signalizáciou zmien a stratenou spotrebou**. Rozdiel je len vo výpočte stredného stavu



Obr. 4.8: Vývoj stavu zásob v modeli so signalizáciou zmien a stratenou spotrebou

zásob. Vychádza sa z úvahy, že maximálny stav zásob je $Q + h - \mathcal{E}(\mathbf{S})$, minimálny stav je $h - \mathcal{E}(\mathbf{S})$, ak nedošlo k deficitu, a 0, ak deficit nastal. Keďže pre nenulový stav deficitu platí $\mathcal{E}(\mathrm{U}(h)) = \mathcal{E}(\mathbf{S}) - h$, môžeme pre oba prípady písať

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{Q}) =& \frac{(Q + h - \mathcal{E}(\mathbf{S})) + (h - \mathcal{E}(\mathbf{S}) + \mathcal{E}(\mathbf{U}(h)))}{2} = \\ =& \frac{Q}{2} + h + \frac{\mathcal{E}(\mathbf{U}(h))}{2} - \mathcal{E}(\mathbf{S}))\end{aligned} \tag{4.44}$$

Nákladová funkcia je opäť tvaru (4.33). Nutné podmienky jej globálneho minima vedú na systém dvoch rovníc

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda(c_a + c_u\mathcal{E}(\mathbf{U}(h)))}{c_s}} \tag{4.45}$$

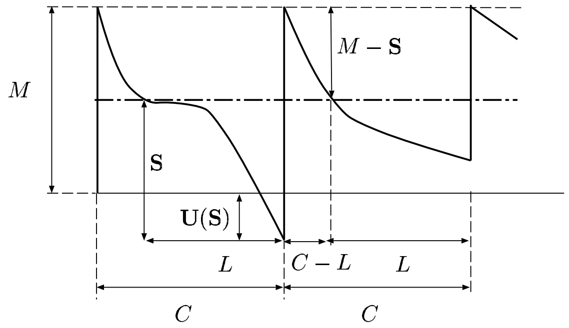
$$F^*(h^*) = \frac{c_s Q^*}{c_u\lambda + c_s Q^*} \tag{4.46}$$

ktorá nemá explicitné riešenie. Riešenie sa hľadá analogickou iteračnou metódou.

4.4.3 Periodická kontrola a odložená spotreba

V prípade *modelu s periodickou kontrolou a odloženou spotrebou* sa optimalizuje jednak *hladina doplnenia zásob* M, po ktorú sa dopĺňajú zásoby, a *dĺžka kontrolného cyklu* C, ktorá je pri konštantnej dodacej lehote $L < C$ rovná dodávkovému cyklu. Objednávky na sklad sa robia vždy do výšky zásob

M, obr.4.10, pri *periodickej kontrole*. Tá sa odohrá v čase $C - L$ po poslednej jednorazovej dodávke. Akvizičné náklady sa zlučujú s inventarizačnými nákladmi do fixných nákladov c_f. Budeme predpokladať, že okrem skladovacích nákladov c_s tu máme náklady deficitu c_u tentoraz závislé len od veľkosti deficitu.



Obr. 4.9: Vývoj stavu zásob v modeli s periodickou kontrolou a odloženou spotrebou

Spotreba $\mathbf{S}$ je tu popísaná ako dvojrozmerná náhodná veličina množstva x a času t hustotou $f(x,t)$. Priemerná spotreba počas dodacej lehoty L je

$$\mathcal{E}(\mathbf{S}) = \int_0^\infty x f(x,L)dx \tag{4.47}$$

Predpokladá sa opäť stacionárna spotreba s intenzitou λ počas celého prognózovaného obdobia, priemerná spotreba v celom cykle C je teda λC. Nákladová funkcia za jednotku času má tvar

$$\boxed{H(M,C)} = (c_f + c_s C\mathcal{E}(\mathbf{Q}) + c_u\mathcal{E}(\mathbf{U}(\mathbf{S})))\frac{1}{C} \tag{4.48}$$

pričom

$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \frac{M - \mathcal{E}(\mathbf{S}) + M - \mathcal{E}(\mathbf{S}) - \lambda C}{2} = M - \mathcal{E}(\mathbf{S}) - \frac{\lambda C}{2} \tag{4.49}$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{U}(\mathbf{S})) = \int_M^\infty (x - M)f(x,C)dx \tag{4.50}$$

Optimálne hodnoty M^* a C^* možno hľadať pomocou parciálnych derivácií

$$\frac{\partial H(M,C)}{\partial M} = c_s - \frac{c_u}{C}\int_M^\infty f(x,C)dx = 0 \tag{4.51}$$

$$\frac{\partial H(M,C)}{\partial C} = -\frac{c_f}{C^2} - \frac{c_s\lambda}{2} - \frac{c_u}{C^2}\mathcal{E}(\mathbf{U}(\mathbf{S})) + c_u\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{U}(\mathbf{S}))}{\partial C} = 0 \tag{4.52}$$

Analytické riešenie je spravidla veľmi obtiažne, uspokojivé je približné numerické riešenie založené na vzťahu (4.51). Zvolíme C_i a vypočítame M_i z integrálnej rovnice

$$C_i = \frac{c_u}{c_s}\int_{M_i}^\infty f(x,C_i)dx \tag{4.53}$$

Dvojica (M^*, C^*) z takto získaných hodnôt s minimálnou hodnotou $H(M^*, C^*)$ sa považuje za dobré aproximatívne riešenie.

4.5 Frontové modely zásob

Systémy hromadnej obsluhy vystupujú aj pri modelovaní zásob, nakoľko Poissonovým procesom možno modelovať

- *tok dodávok*, keď tok zákazníkov reprezentuje jednotky dodávky a operácia obsluhy zákazníka predstavuje uspokojenie jednotky spotreby,
- *tok spotreby*, keď tok zákazníkov je tok jednotiek spotreby substrátu a obsluha predstavuje dopĺňanie zásob v čase od podania objednávky po príchod dodávky na sklad.

4.5.1 Systém M/M/1/∞

V tomto modeli sú zákazníci dodávkami na sklad. Tok dodávok je Poissonov tok s intenzitou λ. Priemerná dĺžka medzery medzi príchodmi jednotkových dodávok na sklad má strednú dobu $\frac{1}{\lambda}$. Doba obsluhy dodávky zodpovedá dobe od objednania dodávky po jej odobratie a má exponeciálne rozdelenie s parametrom μ. Jednotka zásob opúšťajúca systém po priemernej dobe $\frac{1}{\mu}$ je teda spotrebovaná.

Množina stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ predstavuje počet jednotiek zásob v sklade. Stav 0 reprezentuje stav deficitu zásob, keď nemôže byť žiadna jednotka spotreby uspokojená. Systém je opäť zaujímavý po stabilizácii

v prípade $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Pomocou stacionárneho rozdelenia $\boldsymbol{\pi}$ vyberieme tie charakteristiky, ktoré umožnia optimalizovať uvažovaný zásobovací systém.

Priemerná výška zásob v sklade je rovná podľa (2.3) strednému počtu zákazníkov v systéme

$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \mathcal{E}(\mathbf{N}) = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{4.54}$$

Optimalizácia sa aj v modeloch tohto typu realizuje hľadaním minima nákladovej funkcie $H(\rho)$ zloženej z priemerných nákladov skladovania a z priemerných nákladov deficitu pri známych jednotkových sadzbách c_s a c_u

$$H(\rho) = c_s\mathcal{E}(\mathbf{Q}) + c_u\pi_0 = c_s\frac{\rho}{1-\rho} + c_u(1-\rho) \tag{4.55}$$

Ľahko zistíme, že optimálnym riešením je

$$\rho^* = 1 - \sqrt{\frac{c_s}{c_u}} \tag{4.56}$$

Nevýhodou optimalizácie nákladovej funkcie $H(\rho)$ je, že neoptimalizuje priemerný stav zásob, ktorý tak môže nadobudnúť neprijateľné hodnoty. Môžeme však vypočítať pravdepodobnosť, že stav zásob prekročí určitú kritickú hodnotu q

$$\mathcal{P}(\mathbf{Q} > q) = \sum_{j=q+1}^{\infty}\pi_j = \rho^{q+1} \tag{4.57}$$

Príklad 4.5. *V sklade s náhodnými dodávkami, pri ktorom možno riadiť len intenzitu príchodov dodávok na sklad sú náklady na skladovani 10 Sk a náklady deficitu 1000 Sk pri priemernej spotrebe 100 jednotiek týždenne. Vypočítaje charakteristiky skladu pri minimálnych nákladoch.*

Optimálnu intenzitu λ^* príchodov dodávok do skladu dostaneme z optimálneho využitia skladu

$$\rho^* = 1 - \sqrt{\frac{c_s}{c_u}} = 1 - \sqrt{\frac{10}{1000}} = 0.9$$

a tak

$$\lambda^* = \rho^*\mu = 0.9\ 100 = 90$$

Priemerný stav zásob je

$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \frac{\rho^*}{1-\rho^*} = \frac{0.9}{1-0.9} = 9$$

Pravdepodobnosť deficitu

$$\pi_0 = 1 - \rho^* = 1 - 0.9 = 0.1$$

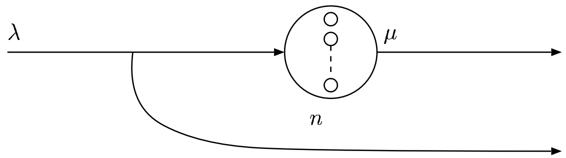
Priemerné týždenné náklady

$$H(\rho^*) = c_s \frac{\rho^*}{1-\rho^*} + c_u(1-\rho^*) = 10.\,9 + 1000.\,0.1 = 190$$

Poznámka. V prípade potreby ohraničiť maximálny stav zásob hodnotou m možno použiť systém $\mathbf{M/M/1/m}$. Problematická však môže byť interpretácia odmietnutých dodávok, ktoré by bolo treba vrátiť dodávateľovi.

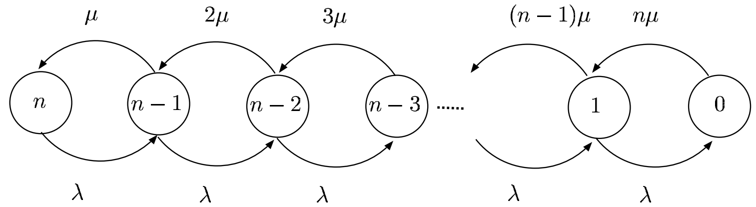
4.5.2 Inverzný systém M/M/n/n

V tomto modeli sú zákazníci jednotkové požiadavky spotreby na sklad. Tok spotrieb je Poissonov tok s intenzitou λ. Priemerná dĺžka medzery medzi príchodmi jednotkových požiadaviek na sklad má strednú dobu $\frac{1}{\lambda}$. Doba „obsluhy“ spotreby je dobou dodacej lehoty na novú jednotku substrátu a má exponeciálne rozdelenie s parametrom μ. Jednotka spotreby opúšťa vždy systém okamžite po svojom príchode. Ak však nájde nejakú linku voľnú, potom je na sklade aspoň jedna jednotka zásob, ktorou bude táto požiadavka uspokojená, a zároveň je vystavená nová objednávka na doplnenie zásob skladu. Po priemernej dobe $\frac{1}{\mu}$ je takto k dispozícii nová jednotka substrátu. Ak požiadavka spotreby nájde všetky linky obsadené, znamená to, že sklad je prázdny, a preto bude v dôsledku deficitu zásob odmietnutá.



Obr. 4.10: Inverzný Systému **M / M / n / n**

Problém môžeme modelovať Markovovým reťazcom $\{\mathbf{N}(t)\}_{t\in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Stavu i systému zodpovedá počet jednotiek zásob v sklade. Stav 0 reprezentuje stav deficitu zásob, keď nemôže byť žiadna jednotka spotreby uspokojená. Na rozdiel od klasického systému $\mathbf{M/M/n/n}$, v *inverznom systéme* však príchod zákazníka (jednotky spotreby) nespôsobuje zväčšenie stavu systému o jednotku, ale naopak zmenšenie stavu systému o jednotku, čomu zodpovedá prechodový graf 4.11.



Obr. 4.11: Prechodový graf inverzného systému **M / M / n / n**

Podľa vety 1.4.3 je reťazec ergodický. Má jediné stacionárne rozdelenie, a tak zo vzťahov (1.60) a (1.61) dostávame

$$\pi_j = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{n-j}}{(n-j)!}\pi_n & \text{ak } 0 \le j < n \\ \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha^{n-j}}{(n-j)!}\right)^{-1} & \text{ak } j = 0 \end{cases} \tag{4.58}$$

pričom parameter $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ sa nazýva *predstih zásob*.

Potom priemerný stav zásob $\mathcal{E}(\mathbf{Q})$ v stabilizovanom systéme je určený vzťahom

$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \sum_{j=1}^{n} j\pi_j = \pi_n \sum_{j=1}^{n} \frac{j\alpha^{n-j}}{(n-j)!} \tag{4.59}$$

Pre výpočet charakteristík $\pi_0, \pi_n, \mathcal{E}(\mathbf{Q})$ možno výhodne využiť tabelované *funkcie kumulovaných hodnôt Poissonovho rozdelenia*

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} e^{-x} \tag{4.60}$$

ktoré vedú k vzťahom

$$\pi_0 = 1 - \frac{P_{n-1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} \tag{4.61}$$

$$\pi_n = \frac{e^{-\alpha}}{P_n(\alpha)} \tag{4.62}$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}) = \frac{nP_n(\alpha) - \alpha P_{n-1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} \tag{4.63}$$

Priemerný počet objednaných jednotiek substrátu je $n - \mathcal{E}(\mathbf{Q})$. Priemerný počet uspokojených spotrieb počas dodacej lehoty je podľa Littlovej formuly tiež

$$\frac{\lambda(1-\pi_0)}{\mu} = \alpha(1-\pi_0) = \alpha\frac{P_{n-1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} = n - \frac{nP_n(\alpha) - \alpha P_{n-1}(\alpha)}{P_n(\alpha)} = n - \mathcal{E}(\mathbf{Q})$$

Optimálnu hodnotu hladiny zásob n^* možno získať maximalizáciou priemerného čistého zisku počas dodacej lehoty

$$Z(n) = c_z(n - \mathcal{E}(\mathbf{Q})) - c_s\mathcal{E}(\mathbf{Q}) \tag{4.64}$$

kde c_z je hrubý zisk z predaja jednej jednotky zásob a c_s sú náklady na skladovanie jednotky zásob v čase priemernej dodacej lehoty.

4.6 Diferenciácia zásob metódou ABC

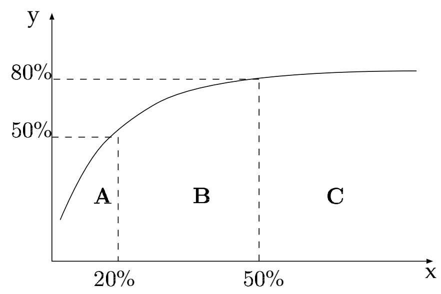
Manažérskeé rozhodovanie v podnikoch vyžaduje venovať pozornosť jednotlivým druhom položiek v zásobách prípadne skupinám položiek. Optimalizácia aplikovaná na všetky položky zásob býva v praxi neefektívna - i zbytočná. Nie všetky položky sú pre podnik rovnako významné hlavne z hladiska úverovej zaťaženosti a nákladovosti podniku.

Cieľom metódy **ABC**, je *roztriediť všetky druhy položiek v zásobách do skupín A,B,C*. Vychádza zo zvolenej *miery dôležitosti*. najčastejšie sú to celkové jednotkové (ročné) náklady na zásoby, celková hodnota predaja položiek a pod.

Východiskom klasifikácie položiek v zásobách je tzv. *krivka* **ABC**, ktorú možno zobrazit v rovine takto:

- *os x* predstavuje položky usporiadané zostupne vzhľadom na náklady spojené s položkami, prípadne vzhľadom na jednotkové ceny ceny položiek v závislosti na zvolenej miere dôležitosti.

- *os y* predstavuje celkové náklady, prípadne celková hodnota predaja položiek opäť v závislosti na zvolenej miere dôležitosti v kumulatívnom vyjadrení.



x - položky v zostupnom poradí

y - kumulatívne hodnoty zvolenej miery dôležitosti

Obr. 4.12: Krivka **ABC**

Teoretická krivka **ABC** - obr.4.12, je založená na pravidle **20-80**: Bod **A** na krivke predstavuje 50% kumulatívnej hodnoty zvolenej miery dôležitosti (os y), ktorej odpovedá 20% celkového počtu druhov položiek v zásobách. Bod **B** na krivke predstavuje 50% celkového počtu druhov položiek v zásobách (os x), ktorej zodpovedá 80% kumulatívnej hodnoty zvolenej miery dôležitosti (os y).

Body **A** a **B** rozdelia priestor pod krivkou **ABC** na oblasti:

- **A** - patria do najvyššej triedy na miere dôležitosti. Predstavujú síce malé percento (20%) celkových zásob, ale sa podieľajú na 50% celkovej hodnoty zvolenej miery dôležitosti,
- **C** - patria do najnižšej triedy na miere dôležitosti. Početne predstavujú síce veľkú skupinu položiek (50%) celkovej zásoby, ale ich podiel na celkovej miere dôležitosti je pomerne nízky (20%),
- **B** - sa nachádzajú medzi položkami v oblastiach **A** a **C**.

Príklad 4.6. *Predmetom výrobnej činnosti mliekarenského podniku sú nasledujúce komodity: mliečne výrobky, nealkoholické a mliečne nápoje a kokteily, mliekarenské obaly a základný materiál.* Napr. pre základný materiál boli diferencované zásoby takto: Oblasť **A**: 14.81% druhov položiek sa podieľa na

Číslo položky	Dopyt [ks/rok]	Náklady na skladovanie [Sk/deň]	Intenzita dopytu
i	R_i	s_{si}	$\lambda_i = R_i/T$
1	5300	$0,02$	$14,722$
2	3100	$0,06$	$8,611$
3	10300	$0,03$	$28,611$

Tabuľka 4.2: Ročný dopyt, náklady a intenzita dopytu skladovaných položiek

65.15% nákladov na zásoby a oblasť **B**: 44.44% druhov položiek sa podieľa na 31.61% nákladov na zásoby.

4.7 Aplikácie - cvičenia

Nasledujúce príklady sú vhodné ako cvičenia.

Príklad 4.7. *Obchodná organizácia má zabezpečiť dodávky určitého výrobku v množstve 3600 ks za rok ($T = 360$ dní. Náklady na objednávku činia 122.5 Sk, jednotkové náklady na skladovanie výrobkov sú 0.5 Sk na deň*

Zobrazte graficky priebeh zásobovacieho procesu pre rozličné hodnoty dodávky Q od 30 ks až po hodnotu 100 ks a určte optimálnu veľkosť dodávky pri konštantnom spojitom dopyte. Výsledok porovnajte s diskrétnym modelom s dennou spotrebou 20 ks.

Príklad 4.8. *Uvažujme, že sa ročne objednávajú u jedného dodávateľa tri skladové položky. Náklady na jednu spoločnú objednávku činia 25 Sk. Veľkosť dopytu, náklady na skladovanie a intenzita dopytu sú pre jednotlivé položky uvedené v tabuľke 4.2.* Odvoďte vzorce pre n položkový model EOQ pre výpočet *optimálnej dĺžky spoločného cyklu*

$$C^* = \sqrt{\frac{2\lambda c_a}{\sum_{i=1}^{n} c_{si}\lambda_i}} \tag{4.65}$$

optimálnu veľkosť položky i

$$Q_i^* = \lambda_i C^* \tag{4.66}$$

celkové náklady pri optimálnej dĺžke cyklu

$$H_T(C^*) = T\sqrt{2\lambda c_a \sum_{i=1}^{n} c_{si}\lambda_i} \tag{4.67}$$

Dopyt počas L	Pravdepodobosť dopytu
1650	0.05
1600	0.08
1550	0.14
1500	0.45
1450	0.09
1450	0.06
1350	0.04

Tabuľka 4.3: Dopyt počas dodacej lehoty L

a vyčíslite ich pre tabelované hodnoty.

Príklad 4.9. *Uvažujme, dopyt 1000 ks/rok s nákladmi na objednávku 50 Sk a na skladovanie 0.5 Sk. Jednotková nákupná cena závisí od veľkosti objednávky takto: 50 Sk pri odbere menej než 100 ks, 48 Sk pri odbere menej než 200 ks a 46 Sk pri odbere najmenej 200 ks.*

Úlohou je stanoviť: optimálne množstvo objednávky, počet objednávokm za rok a celkové jednotkové náklady na zásoby pri zohľadnení rabatov (množstevných diskontov).

Príklad 4.10. *Nech je dopyt počas dodacej lehoty pri hladine objednania zásob $h = 1500$ jedn. vyjadrený tabuľkou 4.3. Jednotkové ročné náklady na skladovanie sú $c_s = 2$ p.j./jedn. a deficitné náklady sú $c_d = 2$ p.j./jedn. Optimálne sú 4 dodávky za rok.*

Určte optimálnu hodnotu poistnej zásoby pri minimálnych očakávaných celkových skladovacích a deficitných nákladoch. Výpočet realizujte v tabuľke 4.4.

Príklad 4.11. *Rozhodnite metódou ABC o diferenciácii zásob podniku na základe zoznamu zásob za rok v tabuľke 4.5.*

Poistná zásoba	Veľkosť nedostatku	Pravdepodobnosť nedostatku	Celkové náklady na poistnú zásobu
B	n_i	p_i	$c_d \sum_i n_i p_1 + c_s B$
?	: : :	: : :	minimum

Tabuľka 4.4: Vypočet optimálnej voľby poistnej zásoby B^* pri minimálnych očakávaných nákladoch

Čislo položky	Množstvo [kg]	Náklady [Sk]
1	42124	2328222
2	12227	1321685
3	8710	944164
4	256082	845071
5	23335	680449
6	40108	427232
7	3550	319500
8	11383	201078
9	124	201078
10	2360	111467
11	2988	91482
12	769	78874
13	4419	69386
14	217	24152
15	22	9824

Tabuľka 4.5: Zoznam ročných zásob základného materiálu podniku