

TEÓRIA HROMADNEJ OBSLUHY

Prednášky pre AM

RNDr. Štefan Peško, CSc.

Február - Máj 2001

Obsah

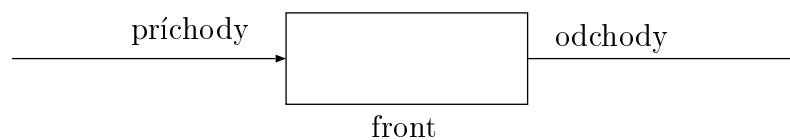
1	Definície základných pojmov	3
2	Kendallova klasifikácia elementárnych systémov	7
3	Homogénne Markovove reťazce	9
3.1	Limitné vlastnosti reťazcov	13
3.2	Grafová reprezentácia a metódy	17
4	Elementárne systémy	29
4.1	Systémy modelované procesom vzniku a zániku	32
4.1.1	Systém $M / M / 1 / \infty$	32
4.1.2	Systém $M / M / n / \infty$	39
4.1.3	Systém s odmietaním $M / M / n / n$	48
4.1.4	Systém $M / M / n / m$ s konečným frontom	51
4.1.5	Uzavretý systém $M / M / n / m$	58
4.2	Markovove systémy s prioritami	64
4.2.1	$M/M/1/1$ s absolútnou prioritou a odmietaním	64
4.2.2	Uzavretý $M/M/1/2$ s absolútnou prioritou a opakovanou obsluhou	68
4.2.3	$M/M/1/2$ s relatívnou prioritou a čakaním	70
4.2.4	$M/M/2/2$ s jednou absolútne prioritnou linkou	72
4.3	Sériové Markovove systémy	75
4.3.1	Sériový systém $M/M/2/2$	75
4.3.2	Tandem dvoch frontov $M/M/1/\infty$	77
4.4	Semimarkovove systémy	80
4.4.1	$E_2/M/1/1$	82
4.4.2	$E_2/M/1/\infty$	83
4.4.3	$M/E_3/1/1$	86
4.4.4	$E_3/E_2/1/2$	87
4.4.5	Hypererlangove systémy	89
4.5	Nemarkovove systémy	91

4.5.1	$M/G/1/\infty$	91
4.5.2	$M/G/1/m$	97
5	Obslužné siete	100
5.1	Jacksonove siete	102
5.2	Modely výpočtových systémov	110
5.3	Reverzné refazce a reverzibilita	113

Kapitola 1

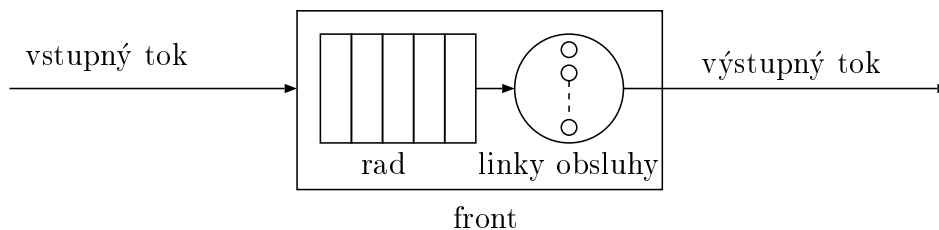
Definície základných pojmov

Definícia 1.1. *Front* je systém (Obr.1.1) riadený dvoma typmi udalostí: *príchodmi* a *odchodmi*.



Obr. 1.1: Základná štruktúra frontu

Príklad 1.1. *Klasický elementárny systém hromadnej obsluhy* Do systému - frontu prichádzajú požiadavky, v dôsledku čoho rastie počet požiadaviek v systéme. Po obslúžení požiadaviek zas klesá počet požiadaviek v systéme. Systém obsahuje *linky obsluhy* (obslužné kanály) paralelne obsluhujúce *vstupný tok* požiadaviek.



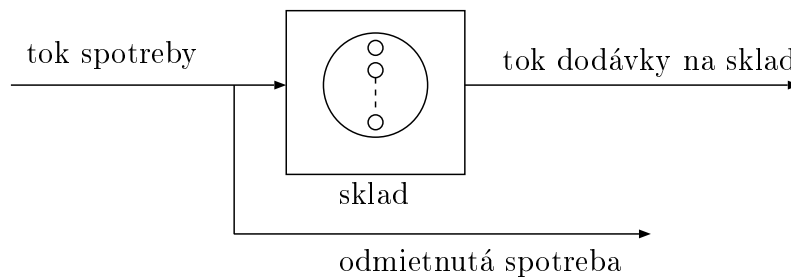
Obr. 1.2: Základná štruktúra elementárneho systému hromadnej obsluhy

O obsluhovaných požiadavkách sa hovorí, že sú v *linkách obsluhy*. *Obsluha požiadavky* trvá istý čas, počas ktorej blokuje linku, ktorá vykonáva jeho obsluhu. Požadavky po ukončení obsluhy uvoľňujú linku a tvoria *výstupný tok*. Ak v okamihu príchodu zákazníka do systému nie je voľná žiadna linka

obsluhy, zákazník môže čakať na uvoľnenie niektorej linky v *rade*. V ruskej literatúre sa frontom obyčajne rozumejú len miesta v rade. V anglosaskej literatúre sa frontom spravidla rozumie celý systém (Obr.1.2).

Odozva frontu na príchody a odchody nie je definovaná v definícii 1.1 frontu a môže byť veľmi všeobecná. Ak je stavom frontu počet požiadaviek potom príchod do frontu môže viesť aj k poklesu počtu požiadaviek frontu alebo k inému typu zmeny stavu frontu. Podobne aj odchod z frontu môže viesť k rastu počtu požiadaviek frontu. Konvenčne príchod do frontu znamená len rast počtu počtu požiadaviek a odchod len pokles počtu požiadaviek frontu.

Príklad 1.2. *Model zásob s vstupným tokom spotreby* Do systému - konečného frontu (Obr.1.3) prichádzajú požiadavky na spotrebu jednotkového množstva zásob, v dôsledku čoho buď klesne počet zásob v sklade, alebo pri deficite zásob (prázdny sklad) je takáto požiadavka odmietnitá. Vyskladnená jednotka zásob vyvolá objednanie ďalšej jednotky zásob. Táto nová požiadavka na dodávku zásoby je obslužená po dodávke na sklad. Front je tvorený len likami obsluhy, pričom aktívna linka zamená dodávku na ceste. Veľkosť frontu, počet liniek, tu potom udáva maximálnu kapacitou skladu.



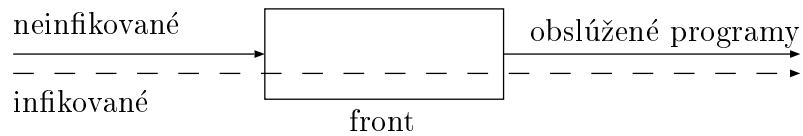
Obr. 1.3: Model zásob s vstupným tokom spotreby

Definícia 1.2. *Signál* je požiadavka, ktorá po príchode do frontu mení stav frontu a potom môže okamžite odísť. Ak je ho príchod má za následok zvýšenie počtu požiadaviek v systéme, hovoríme o *pozitívnom signály*, v opačnom prípade o *negatívnom signály*.

Keď do frontu prichádza signál a hneď odchádza, nie je potrebné špecifikovať jeho odchod.

Príklad 1.3. *Počítačové víry* Do počítača prichádzajú jednak neinfikované programy, ktoré po istom čase sú z počítača vymazané, jednak programy infikované vírmi, ktoré napádajú neinfikované programy (Obr.1.4). Víry, na

rozdiel od neinfikovaných programov možno chápať ako pozitívne signály zvyšujúce stav systému o obnovu napadnutých programov. V prípade agresívnych vírov, okamžite ničiacich neinfikované programy, sa jedná o negatívne signály znižujúce stav systému o počet zničených programov.



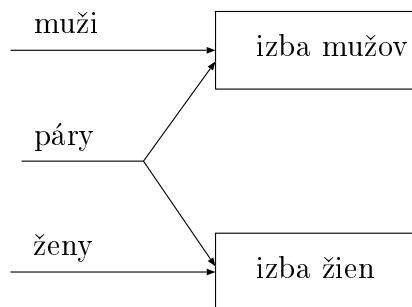
Obr. 1.4: Počítačové víry

Termín *zákazník* sa používa v konvenčnom zmysle, keď stav frontu je určený počtom požiadaviek.

Definícia 1.3. *Zákazník* je požiadavka, ktorá po príchode do frontu môže zmeniť stav frontu ale nespôsobuje jeho okamžitý odchod. Ak v dôsledku príchodu sa zvýši počet požiadaviek vo fronte a nedochádza k ich okamžitému odchodu, hovoríme o (*regulárnom*) *zákazníkovi*. Ak však po príchode klesne počet požiadaviek vo fronte a nedochádza k ich okamžitému odchodu, hovoríme o *negatívnom* *zákazníkovi*.

Poznámka. Termíny *regulárny zákazník*, *regulárny signál* budeme skracovať na *zákazník*, *signál*, ak sa v systéme neuvažuje s ich negatívnymi verziami.

Príklad 1.4. *Problém postelí* V nocľahárni majú jednu izbu pre mužov a jednu izbu pre ženy. Muži a ženy prichádzajú náhodne podobne aj páry dvojíc mužov a žien (Obr.1.5). Tento problém môže byť modelovať pomocou



Obr. 1.5: Problém postelí

systému s frontami mužov a žien. Tok samostatne prichádzajúcich mužov a

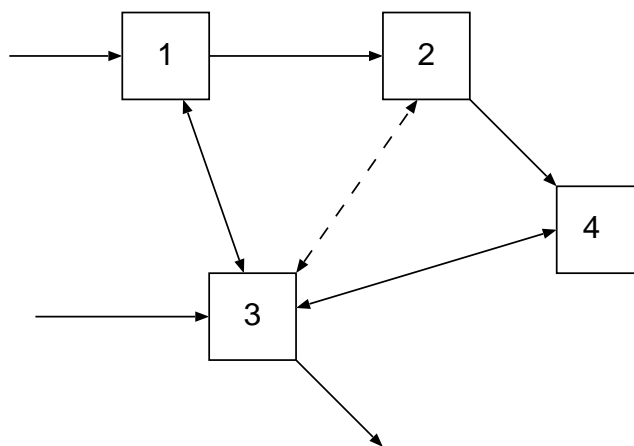
tok samostatne prichádzajúcich žien modelujeme ako regulárnych zákazníkov. Tok párov modelujeme ako regulárny signál. Signál pridá jedného zákazníka do frontu mužov potom okamžite opustí front mužov a prichádza do frontu žien, kde tiež pridá jedného zákazníka do frontu žien.

Definícia 1.4. *Trieda požiadaviek* je tvorená takými požiadavkami, ktoré sa riadia rovnakými stochastickými zákonitostami.

Príklad 1.5. Tok mužov a žien sú v príklade 1.4 modelované jednou triedou regulárnych zákazníkov. Tok párov mužov a žien zas triedou regulárnych signálov.

Definícia 1.5. *Sieť frontov* je skupina frontov, ktorých interakcia je sprostredkovaná cez príchody a odchody t.j. odchod z jedného frontu je príchodom do iného frontu. Front v takejto sieti sa nazýva *uzlom* siete.

Príklad 1.6. *Počítačové siete* Uzlymi v počítačových sieťach sú počítače, ktoré spolu komunikujú prostredníctvom paketov. Výstup z jedného počítača môže byť vstupom do jedného alebo ďalších počítačov (Obr.1.6).



Obr. 1.6: Sieť štyroch počítačov

Počítače 2 je zrkadlí počítač 3, čo sa realizuje formou signálov.

Kapitola 2

Kendalova klasifikácia elementárnych systémov

Základné modely elementárnych systémov hromadnej obsluhy pripúšťajú rozličné možnosti klasifikácie.

Podľa možnosti vzniku radu vo fronte sa rozlišujú na systémy:

- *s odmietaním* - bez čakania zákazníkov v rade,
- *s konečným frontom* - ohraničeným počtom miest v rade
- *s obmedzeným čakaním* - ohraničenou dobou čakania zákazníkov v rade
- *s nespoľahlivými linkami* - prerušovanou obsluhou zákazníkov
- *s neobmedzeným frontom* - s neobmedzenou dobou čakania zákazníkov v rade

Podľa typu modelu sa systémy delia na:

- *Markovove* - s exponenciálnymi medzermi medzi udalosťami (príchodmi a odchodmi zákazníkov),
- *semimarkovove* - s Erlangovskými (hypererlangovými) medzermi medzi udalosťami,
- *nemarkovove* - s všeobecným vstupným tokom alebo dobou obsluhy zákazníkov

Vyššie uvedené delenie systémy nie je úplné. Ďalšími špecifickými kritériami sú usporiadanie liniek obsluhy - *sériové systémy*, rôzne druhy priorít liniek alebo priorít zákazníkov - *prioritné systémy* atď.

Písmeno	X	Y
M	Poissonov tok	exponenciálne rozdelenie
M^X, M^Y	Poissonov tok dávok	exponenciálne rozdelenie dávok
MMPP	Markovovsky modulovaný Poissonov tok	
E_r	Erlangovské rozdelenie medzier toku	Erlangovo rozdelenie
H_r	hypererlangovské rozdelenie medzier toku	hypererlangovo rozdelenie
D	konštantné medzery toku	konštantná doba
G	všeobecné rozdelenie medzier toku	ľubovolné rozdelenie
Y(k)		závislosť na stave systému

Tabuľka 2.1: Základné parametre Kendalllovej klasifikácie

D.G.Kendall zaviedol v 1953 pomerne veľmi jednoduchú klasifikáciu systémov hromadnej obsluhy, ktorá sa používa dodnes. Systémy sú označené kombináciou písmen a čísiel

$$\boxed{\mathbf{X}/\mathbf{Y}/\mathbf{n}}$$

kde **X** popisuje vstupný tok zákazníkov, **Y** popisuje rozdelenie doby obsluhy a **n** udáva počet liniek obsluhy.

V súčasnosti je v anglosaskej literatúre zaužívané rozšírenie Kendalllovej klasifikácie na

$$\boxed{\mathbf{X}/\mathbf{Y}/\mathbf{n}/\mathbf{m}}$$

kde navyše **m** udáva maximálne prípustný počet zákazníkov v systéme.

Poznámka. Ďalej budeme používať rozšírenú Kendalllovu klasifikáciu. Ako príklad uveďme systém **M/D(k)/2/∞** je dvojlinkový systém s elementárnym vstupným tokom zákazníkov, konštantnou dobou obsluhy závislou na stave systému a neobmedzeným frontom, (spravidla sa predpokladá disciplína **FIFO** (prvý prichádza prvý obslužený)).

Presnejšia špecifikácia sa obyčajne uvádza pred alebo za klasifikáciou systému. Napríklad uzavretý systém **E₂/G/1/m** s **LIFO** je jednolinkový systém s dvojfázovými Erlangovskými medzerami vo vstupnom toku zákazníkov, všeobecnou dobou obsluhy, v ktorom cirkuluje **m** zákazníkov, ktorí ak čakajú v rade sú z neho vyberaní podľa pravidla **LIFO** (posledný prichádza prvý obslužený).

Kapitola 3

Homogénne Markovove reťazce

Definícia 3.1. Nech $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ a $\{\mathbf{X}(t), t \in T\}$ je náhodný proces definovaný na spočítateľnej množine stavov S . Proces nazveme *Markovov reťazec s diskretným časom*, ak pre $\forall s \in T$ platí *markovova vlastnosť*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{X}(t+s) = x' | \mathbf{X}(t) = x, \mathbf{X}(u) = x(u), u = 0, 1, \dots, t-1) = \\ \mathcal{P}(\mathbf{X}(t+s) = x' | \mathbf{X}(t) = x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}(t) = x, \mathbf{X}(u) = x(u), u = 0, 1, \dots, t-1) > 0 \quad (3.2)$$

Ak navyše pre $\forall t \in T$ je

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}(t+1) = x' | \mathbf{X}(t) = x) = p(x, x') \quad (3.3)$$

hovoríme, že Markovov reťazec je (časovo) *homogénny*.

Pravdepodobnosť prechodu zo stavu x do stavu x' po n krokoch definujeme pomocou $p(x, x')$, *pravdepodobnosti prechodu* zo stavu x do stavu x' , vzťahom

$$p^{(n)}(x, x') = \mathcal{P}(\mathbf{X}(t+n) = x' | \mathbf{X}(t) = x) \quad (3.4)$$

Pravdepodobnostným rozdelením stavov reťazca v čase t rozumieme vektor $\mathbf{p}(t) = (p_t(x), x \in S)$, kde

$$\mathbf{p}(t) = \mathcal{P}(\mathbf{X}(t) = x) \quad (3.5)$$

Poznámka. Niekedy budeme pre stručnosť vyjadrovania miesto zápisu reťazca v tvare $\{\mathbf{X}(n), n = 1, 2, \dots\}$ písať $\{X_n, n \geq 0\}$ alebo len $\{X_n\}$.

Pravdepodobnosti prechodu a pravdepodobnosti prechodu po n krokoch (homogénneho) Markovovho reťazca, zvykneme usporiadať v tvare matíc

$$\mathbb{P} = (p(x, x'), x, x' \in S), \mathbb{P}(n) = (p^{(n)}(x, x'), x, x' \in S)$$

Veta 3.1. Pre homogénny Markovov reťazec v diskrétnom čase platí

$$\mathbb{P}(t+n) = \mathbb{P}(t)\mathbb{P}(n) \quad \forall t, n \in T \quad (3.6)$$

$$\mathbb{P}(n) = \mathbb{P}^n \quad \forall n \in T \quad (3.7)$$

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbb{P}(n) \quad \forall n \in T \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

Dôkaz. Cvičenie.

Poznámka. Rovnice (3.6) nazývame *Chapman-Kolmogorovove rovnice*

Definícia 3.2. Nech $T = \langle 0, \infty \rangle$ a $\{\mathbf{X}(t), t \in T\}$ je náhodný proces definovaný na spočítateľnej množine stavov S . Proces nazveme *Markovov reťazec so spojitým časom*, ak pre $\forall s \in T$ platí *markovova vlastnosť*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{X}(t+s) = x' | \mathbf{X}(t) = x, \mathbf{X}(u) = x(u), 0 \leq u < t) = \\ \mathcal{P}(\mathbf{X}(t+s) = x' | \mathbf{X}(t) = x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}(t) = x, \mathbf{X}(u) = x(u), 0 \leq u \leq t) > 0 \quad (3.11)$$

Ak navyše pre $\forall t \in T$ je

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}(t+s) = x' | \mathbf{X}(t) = x) = p_s(x, x') \quad (3.12)$$

hovoríme, že Markovov reťazec je (časovo) *homogénny*.

Intenzitu prechodu zo stavu x do stavu x' definujeme pomocou $p_s(x, x')$, *pravdepodobnosti prechodu* zo stavu x do stavu x' za čas s , vzťahom

$$q(x, x') = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_h(x, x')}{h} & \text{ak } x \neq x' \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_h(x, x)}{h} & \text{ak } x = x' \end{cases} \quad (3.13)$$

Pravdepodobnostným rozdelením stavov reťazca v čase $t \in T$ rozumieme vektor $\mathbf{p}(t) = (p_t(x), x \in S)$, kde

$$\mathbf{p}(t) = \mathcal{P}(\mathbf{X}(t) = x) \quad (3.14)$$

Poznámka. Niekedy budeme pre stručnosť vyjadrovania miesto zápisu reťazca v tvare $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ písať len $\{X(t)\}$.

Pravdepodobnosti prechodu a intenzity prechodu (homogénneho) Markovovho reťazca, zvykneme usporiadať v tvare matíc

$$\mathbb{P}(s) = (p_s(x, x'), x, x' \in S), \mathbb{Q} = (q(x, x'), x, x' \in S)$$

Veta 3.2. *Pre homogénny Markov reťazec v spojitom čase platí*

$$\mathbb{P}(t+h) = \mathbb{P}(t)\mathbb{P}(h) \quad \forall t, h \in T \quad (3.15)$$

$$\mathbf{p}(t+h) = \mathbf{p}(t)\mathbb{P}(h) \quad \forall t, h \in T \quad (3.16)$$

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbb{Q} \quad \forall t \in T \quad (3.17)$$

$$\mathbf{P}'(t) = -\mathbb{Q}\mathbf{P}(t) \quad \forall t \in T \quad (3.18)$$

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbb{Q} \quad \forall t \in T \quad (3.19)$$

Dôkaz. Cvičenie.

Poznámka. Rovnice (3.15) nazývame *Chapman-Kolmogorovove rovnice*, (3.17) nazývame *prospektívne Kolmogorovove diferenciálne rovnice*, (3.18) nazývame *retospektívne Kolmogorovove diferenciálne rovnice*, a (3.19) nazývame *Kolmogorovove diferenciálne rovnice*.

Vzťah medzi homogénnym Markovovým reťazom so spojitým časom a homogénnym Markovovým reťazom s diskretným časom vychádza z nasledujúceho tvrdenia, ktoré možno chápať aj ako alternatívnu definíciu Markovovho reťazca so spojitým časom.

Poznámka. Ďalej budeme značiť $q(x) = -q(x, x)$, $x \in S$.

Veta 3.3. *Homogénny Markovov reťazec v spojitom čase je náhodný proces s nasledujúcimi vlastnosťami*

- celková doba strávena v stave x pred prvým prechodom do iného stavu má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou $1/q(x)$ t.j. má distribučnú funkciu

$$F(t) = 1 - e^{-q(x)t} \quad t \geq 0 \quad (3.20)$$

- proces prechádza zo stavu x do stavu x' s prevdepodobnosťou prechodu $p(x, x')$ definovanou vzťahom

$$p(x, x') = \frac{q(x, x')}{q(x)} \quad x, x' \in S \quad (3.21)$$

Dôkaz. Prvá časť tvrdenia netriviálne vyplýva z markovovej vlastnosti (3.10) a jej dôkaz je technicky pomerne náročný. Druhá časť tvrdenia vyplýva z vlastnosti matice intenzít \mathbb{Q}

$$q(x, x) = -q(x) = - \sum_{x' \in S, x' \neq x} q(x, x') \quad x \in S$$

odkiaľ po vydelení $q(x) > 0$ máme

$$1 = \sum_{x' \in S} \frac{q(x, x')}{q(x)}$$

□

Poznámka. Ďalej budeme pre jednoduchosť vyjadrovania skracovať názov homogénny Markovov reťazec na Markovov reťazec.

Vyššie uvedené vlastnosti vety 3.3 možno využiť pri konštrukcii realizácie spojitého Markovovho reťazca $\{X(t), t \geq 0\}$ takto: Nech Y_n je stav po n -tej zmene spojitého Markovovho reťazca. Potom $\{Y_n, n \geq 0\}$ je Markovov reťazec s diskretným časom. Proces štartuje v stave $X(0) = Y_0$ a zostane v tomto stave exponenciálne dlhú dobu s parametrom $q(Y_0)$ a potom skočí do stavu Y_1 s pravdepodobnosťou prechodu $p(Y_0, Y_1)$. Ďalej proces zotrúva v stave Y_1 exponenciálne dlhú dobu s parametrom $q(Y_1)$ pred skokom do ďalšieho stavu, atď.

Definícia 3.3. Skokovým reťazcom Markovovho reťazca $\{X(t), t \geq 0\}$ s maticou intenzít \mathbb{Q} rozumieme Markovov reťazec $\{Y_n, n \geq 0\}$ definovaný vzťahom $Y_n = X(t_n)$ s maticou prechodu \mathbb{P} , kde

$$p(x, x') = \begin{cases} 0 & \text{ak } x = x' \\ \frac{q(x, x')}{q(x)} & \text{ak } x \neq x' \end{cases} \quad (3.22)$$

Ak špeciálne je $Y_n = X(n\delta)$ pre nejakú konštantu $\delta > 0$ hovoríme o δ skokovom reťazci reťazca $\{X(t)\}$ s maticou prechodu $\mathbb{P}(\delta)$.

Poznámka. δ skokový reťazec možno použiť ako diskretnú aproximáciu reťazca $\{X(t)\}$.

Príklad 3.1. Vypočítajte pravdepodobnosti skokového reťazca k Markovovmu reťazcu $\{X(t)\}$ definovanému maticou

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

Skokový reťazec k $\{X(t)\}$ je reťazec $\{Y_n\}$ určený maticou

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1 Limitné vlastnosti reťazcov

Definícia 3.4. Markovov reťazec $\{X_n, n \geq 0\}$ s diskrétnym časom a množinou stavov S nazveme

- *nerozložiteľný*, ak pre $\forall x, x' \in S, x \neq x' \exists n \in N$ také, že $p^{(n)}(x, x') > 0$ (stavy sú dosiahnuteľné),
- *periodický*, ak pre $\forall x \in S$ je $\delta(x) = NSD(n > 1 : p^{(n)}(x, x) > 0) > 1$ (stav má periódu $\delta(x)$).
- *aperiodický*, ak $\exists x \in S$ že $NSD(n > 1 : p^{(n)}(x, x) > 0) = 1$ (stav nemá periódu).
- *ergodický*, ak je nerozložiteľný a aperiodický

Poznámka. $NSD(n_1, n_2, \dots)$ označuje najväčší spoločný deliteľ čísel n_1, n_2, \dots .

Príklad 3.2. Skokový reťazec z príkladu 3.1 je nerozložiteľný reťazec s periódou 2. Pre $k \in N$ máme

$$\mathbb{P}^{2k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}^{2k} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \end{pmatrix}$$

Veta 3.4. (Markovova) Ak existuje také prirodzené číslo n , že všetky prvky matice \mathbb{P}^n sú kladné, potom je reťazec ergodický.

Dôkaz. Nech existuje prirodzené číslo n , že $\mathbb{P}^n > \mathbb{O}$. Takže reťazec má $p^{(n)}(x, x') > 0, x, x' \in S$ a je podľa definície nerozložiteľný. Nakoľko platí $\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{P}\mathbb{P}^n > \mathbb{O}$ je $\forall x \in S$ hodnota $d(x) = NSD(\dots, n, n+1, \dots) = 1$ a reťazec je aperiodický.

Veta 3.5. (Ergodická) Pre ľubovoľný ergodický Markovov reťazec $\{X_n, n \geq 0\}$ existuje také rozdelenie reťazca $\pi = (\pi(x), x \in S)$, že platí

$$\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x', x) \quad x, x' \in S \quad (3.23)$$

Dôkaz. Netriviálny.

Poznámka. Rozdeleniu π sa tiež hovorí *limitné, rovnovážne rozdelenie* alebo *stabilizované rozdelenie* stavov Markovovho reťazca.

Definícia 3.5. Hovoríme, že Markovov reťazec s maticou \mathbb{P} má *stacionárne* rozdelenie $\boldsymbol{\pi}$, ak existuje taký vektor $\boldsymbol{\pi}$, že

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbb{P} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}\boldsymbol{\pi} \quad (3.25)$$

Poznámka. Rovnice (3.24) sú známe ako *globálne rovnice rovnováhy*, a rovnica (3.25) ako *normalizačná rovnica*.

Veta 3.6. *Pre ľubovoľný egodický Markovov reťazec s diskretným časom existuje práve jedno stacionárne rozdelenie reťazca.*

Dôkaz. Z vlastnosti (3.8) a definície (3.23) plynie existencia limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(0)\mathbb{P}(n) = \mathbf{p}(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n) = \boldsymbol{\pi}$$

Z vlastnosti (3.6),(3.7) a (3.8) dostávame globálne rovnice rovnováhy

$$\boldsymbol{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(0)\mathbb{P}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n-1)\mathbb{P} = \boldsymbol{\pi}\mathbb{P}$$

□

Definícia 3.6. Markovov reťazec $\{X(t), t \geq 0\}$ so spojitým časom a množinou stavov S nazveme

- *nerozložiteľný*, ak pre $\forall x, x' \in S, x \neq x' \exists t > 0$ také, že $p_t(x, x') > 0$ (stavy sú dosiahnuteľné),
- *rekurentný*, ak pre $\forall x \in S$ je $\int_0^\infty p_t(x, x) = \infty$ (stavy sú trvalé).
- *ergodický*, ak je nerozložiteľný a rekurentný.

Veta 3.7. *Markovov reťazec $\{X(t), t \geq 0\}$ je ergodický práve vtedy keď existujú limity*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(x) = \pi(x), \quad x \in S \quad (3.26)$$

Dôkaz. je netriviálny.

Veta 3.8. *(Markovova) Ak existuje taký okamih $t > 0$, že všetky prvky matice $\mathbb{P}(t)$ sú kladné, potom je reťazec ergodický.*

Dôkaz. je netriviálny.

Veta 3.9. Markovov reťazec $\{X(t), t \geq 0\}$ je ergodický ak existujú limity

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}(X(t) = x | X(0) = x') = \pi(x), \quad x \in S \quad (3.27)$$

a $\pi(x)$ sú kladné čísla.

Dôkaz. je netriviálny.

Definícia 3.7. Hovoríme, že Markovov reťazec s maticou \mathbb{Q} má *stacionárne* rozdelenie π , ak existuje taký vektor π , že

$$\mathbf{0} = \pi \mathbb{Q} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{1} \pi \quad (3.29)$$

Veta 3.10. Pre ľubovoľný ergodický Markovov reťazec so spojitým časom existuje práve jedno stacionárne rozdelenie reťazca určené jeho skokovým reťazcom.

Dôkaz. Nech ϕ je stacionárne rozdelenie ergodického skokového reťazca. Platia globálne rovnice rovnováhy

$$\phi = \phi \mathbb{P} \quad (3.30)$$

teda v zložkovom zápise je

$$\phi(x) = \sum_{x' \in S, x' \neq x} \phi(x') p(x', x) \quad x \in S$$

Z definície jeho pravdepodobnosti prechodu (3.22) máme

$$\phi(x) = \sum_{x' \in S, x' \neq x} \phi(x') \frac{q(x', x)}{q(x')} \quad x \in S$$

Po substitúcii s normalizačnou konštantou $K > 0$

$$\phi(x) = K q(x) \pi(x) \quad x \in S \quad (3.31)$$

dostaneme

$$\pi(x) q(x) = \sum_{x' \in S, x' \neq x} \pi(x') q(x', x) \quad x \in S$$

A tak sme dostali globálne rovnice rovnováhy pre spojitý reťazec.

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} \quad (3.32)$$

Jednoznačnosť riešenia (3.32) plynie s jednoznačnosťou limitných pravdepodobností (3.26), ktoré sú riešením Chapman-Kolmogorovových diferenciálnych rovníc (3.19). \square

Poznámka. Substitúcia (3.31) vyjadruje skutočnosť, že relatívna početnosť $\pi(x)$ pobytu v stave x spojitého reťazca je rovná súčinu relatívnej početnosti $\phi(x)$ pobytu v stave x skokového reťazca a strednej doby pobytu $1/q(x)$ v tomto stave.

Príklad 3.3. Vypočítajte a porovnajte stacionárne rozdelenia spojitého a príslušného skokového reťazca z príkladu 3.1.

Príslušné globálne rovnice rovnováhy (3.28) pre reťazec $\{X(t)\}$ sú

$$0 = -\lambda_0\pi(0) + \mu_2\pi(1) \quad (3.33)$$

$$0 = \lambda_0\pi(0) - (\lambda_1 + \mu_1)\pi(2) + \mu_2\pi(2) \quad (3.34)$$

$$0 = \lambda_1\pi(1) - \mu_2\pi(2) \quad (3.35)$$

Z rovníc (3.33), (3.34) a normalizačnej rovnice (3.29) dostávame stacionárne rozdelenie

$$\boldsymbol{\pi} = (\mu_1\mu_2, \lambda_0\mu_2, \lambda_0\lambda_1) \frac{1}{\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_0\lambda_1} \quad (3.36)$$

Príslušné globálne rovnice rovnováhy (3.24) pre skokový reťazec $\{Y_n\}$ sú

$$\phi(0) = \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \mu_1} \phi(1) \quad (3.37)$$

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi(2) \quad (3.38)$$

$$\phi(2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \phi(1) \quad (3.39)$$

Z rovníc (3.37), (3.38) a normalizačnej rovnice (3.25) dostávame stacionárne rozdelenie

$$\boldsymbol{\phi} = (\mu_1, \mu_1 + \lambda_1, \lambda_1) \frac{1}{2(\lambda_1 + \mu_1)} \quad (3.40)$$

Ak vyjdeme zo stacionárneho rozdelenia skokového reťazca (3.40) zo vzťahu (3.31) dostaneme

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{\mu_1}{K\lambda_0}, \frac{\lambda_1 + \mu_1}{K(\lambda_1 + \mu_1)}, \frac{\lambda_1}{K\mu_2} \right)$$

Z normalizačnej rovnice $\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = 1$ vypočítame normalizačnú konštantu

$$K = \frac{\lambda_0 \mu_1}{\mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \mu_1 + \lambda_0 \lambda_1}$$

a po dosadení do vyššie uvedených vzťahov dostaneme stacionárne rozdelenie spojitého reťazca (3.36).

3.2 Grafová reprezentácia a metódy

V teoreticky i prakticky sú zaujímavé prípady veľmi riedkych matíc pravdepodobností prechodov a matíc intenzít (majú veľmi veľa nulových prvkov). Potom je výhodné reprezentovať príslušné matice vhodným prechodovým grafom.

Poznámka. V prípade, keď budeme hovoriť v tejto kapitole o Markovovom reťazci jedná sa o homogénny Markovov reťazec s diskretným alebo spojitým časom.

Definícia 3.8. Nech \mathbb{P} je matica pravdepodobností prechodu Markovovho reťazca s diskretným časom a množinou stavov S . Potom *prechodovým grafom reťazca* rozumieme ohodnotený digraf $G = (V, H, c)$, kde $V = S$ je množina vrcholov,

$$H = \{(v_i, v_j) \in V \times V : p(v_i, v_j) > 0\}$$

je množina orientovaných hrán a $c : H \rightarrow (0, 1)$ je ohodnotenie orientovaných hrán určené $c((v_i, v_j)) = p(v_i, v_j)$.

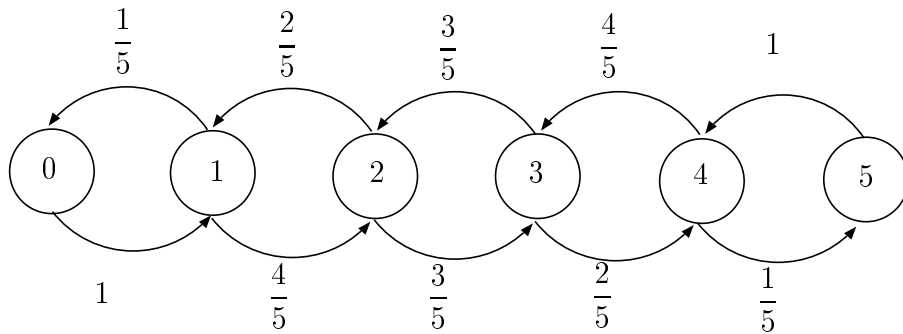
Príklad 3.4. Nahradte maticu pravdepodobností prechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

prechodovým grafom.

Definícia 3.9. Nech \mathbb{Q} je matica intenzít prechodu Markovovho reťazca so spojitým časom a množinou stavov S . Potom *prechodovým grafom reťazca* rozumieme ohodnotený digraf $G = (V, H, c)$, kde $V = S$ je množina vrcholov,

$$H = \{(v_i, v_j) \in V \times V : q(v_i, v_j) \neq 0\}$$



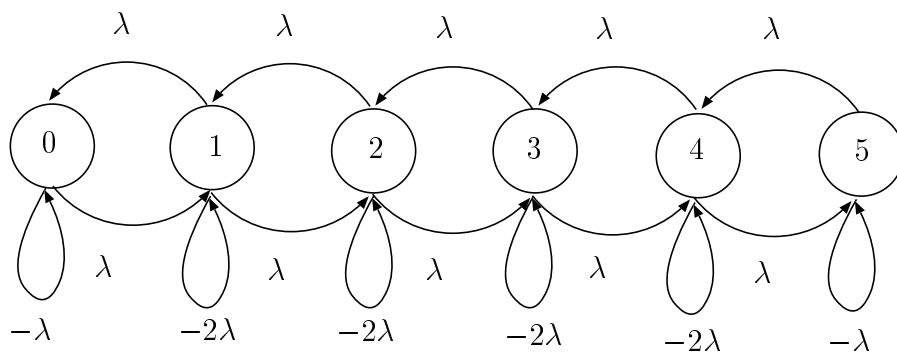
Obr. 3.1: Prechodový graf reťazca s diskretným časom a maticou \mathbb{P}

je množina orientovaných hrán a $c : H \rightarrow (-\infty, \infty)$ je ohodnotenie orientovaných hrán určené $c((v_i, v_j)) = q(v_i, v_j)$.

Príklad 3.5. Nahradte maticu intenzít prechodu prechodovým grafom.

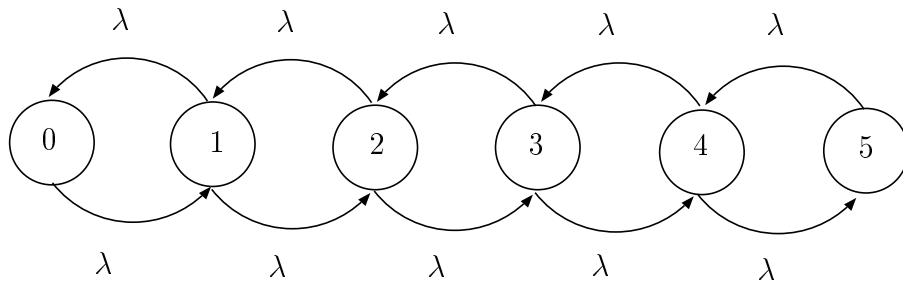
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

ktorej zodpovedá nasledujúci ohodnotený digraf G



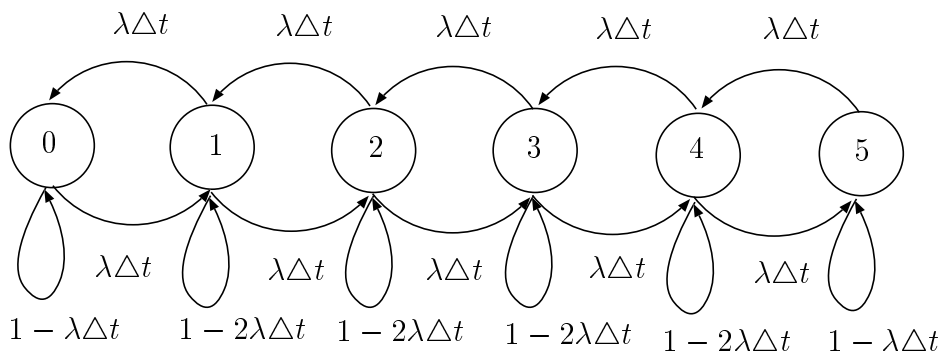
Obr. 3.2: Prechodový graf reťazca so spojitým časom a maticou \mathbb{Q}

Poznámka. Niekedy budeme, pre zjednodušenie obrázku prechodového grafu, vynechávať slučky. Ich ohodnotenie možno ľahko získať z ohodnotení odchádzajúcich hrán grafu. Vo vyššie uvedenom príklade 3.5 by sme dostali nasledujúci prechodový graf bez slučiek na obr.3.3.



Obr. 3.3: Prechodový graf bez slučiek reťazca s maticou \mathbb{Q}

V prípade reťazca so spojitým časom sa niekedy stretávame aj s prechodovým grafom, kde ohodnotenie hrán grafu je $c((v_i, v_j)) = p_{\Delta t}(v_i, v_j)$. V príklade 3.5 potom dostaneme prechodový graf na obr.3.4.



Obr. 3.4: Prechodový graf reťazca so spojitým časom a maticou $\mathbb{P}(\Delta t)$

Význam reprezentácie reťazcov pomocou prechodových grafov však nie je len vo väčšej prehľadnosti prechodov medzi stavmi reťazca. Zaujímavá je spoločná formulácia viet (3.4) a (3.8) pomocou *orientovaného sledu v digrafe*. V teórii grafov sa pod pojmom *orientovaný sled dĺžky n z vrcholu v_0 do vrcholu v_n v digrafe $G = (V, H)$* rozumie striedavá postupnosť vrcholov a hrán

$$(v_0, (v_0, v_1), v_1, (v_1, v_2), v_2, \dots, (v_{n-1}, v_n), v_n)$$

kde $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ a $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n) \in H$.

Veta 3.2.1. (Markovova) *Nech $G = (V, H, c)$ je prechodový graf Markovovho reťazca s maticou pravdepodobností prechodu \mathbb{P} resp. s maticou intenzít prechodu \mathbb{Q} . Ak existuje také prirodzené číslo n , že pre ľubovoľnú dvojicu $(v_i, v_j) \in V \times V$ existuje orientovaný sled dĺžky n z vrcholu v_i do vrcholu v_j , potom je Markovov reťazec ergodický.*

Miesto dôkazu vyššie uvedeného tvrdenia uvidíme dva demoštračné príklady.

Príklad 3.6. Zistite pomocou vety 3.2.1, či Markovov reťazec s diskretným časom z príkladu 3.4 je ergodický.

Treba ukázať, že pre ľubovoľné vrcholy $u, v \in V$ prechodového grafu na obr.3.1, existuje orientovaný sled vopred pevne zvolenej dĺžky n z i do j . Zvolme pevne dostatočne veľké párne číslo napr. $n = 2K$. Potom z vrcholu 0 existujú orientované sledy dĺžky n len do vrcholov 2, 4 a neexistujú do vrcholov 1, 3, 5. K analogickému výsledku dôjdeme aj pri voľbe $n = 2K + 1$. Potom zas z vrcholu 0 existujú orientované sledy dĺžky n len do vrcholov 1, 3, 5 a neexistujú do vrcholov 1, 3, 5. Nie je teda splnená postačujúca podmienka ergodicity reťazca.

Cvičenie. Modifikujte príklad 3.4 tak, aby príslušný Markovov reťazec bol podľa vety 3.2.1 ergodický.

Príklad 3.7. Ukážte, že Markovov reťazec so spojitým časom z príkladu 3.5 je ergodický.

Zvolíme $n = 5$. treba ukázať, že pre ľubovoľné vrcholy $u, v \in V$ prechodového grafu na obr.3.2, existuje orientovaný sled dĺžky 5 z u do v . Je to možné, pretože v našej definícii prechodového grafu sa pripúšťajú aj slučky ako orientované hrany. Takže vzorom orientovaného sledu z 0 do 3 dĺžky 5 je sled

$$(0, (0, 1), 1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 3), 3, (3, 3), 3)$$

Analogicky máme ľubovoľný orientovaný sled dĺžky 5 pre $|i - j| < 5$

$$(i, (i, \cdot), \dots, j, (j, j), j)$$

Pre $|i - j| = 5$ máme len dva orientované sledy dĺžky 5,

$$(0, (0, 1), 1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 4), 4, (4, 5), 5)$$

$$(5, (5, 4), 4, (4, 3), 3, (3, 2), 2, (2, 1), 1, (1, 0), 0)$$

Poznámka. Skutočnosť, že sa nám podarí nájsť pre každú dvojicu vrcholov v_i a v_j prechodového grafu sled danej dĺžky n , vlastne znamená, že pravdepodobnosť prechodu $p^{(n)}(v_i, v_j)$ resp. $p_{n\Delta t}(v_i, v_j)$ je najmenej rovná súčinnu ohodnotení hrán tohto sledu a ten je kladný.

Teória grafov nám poskytuje aj metódu na hľadanie stacionárnych rozdelení Markovových reťazcov s konečnou množinou stavov $S = \{0, 1, \dots, n\}$.

V prípade homogénneho Markovovho reťazca s maticou pravdepodobnosti prechodu \mathbb{P} , hľadáme stacionárne riešenie v tvare riešenia systému

$$\boldsymbol{\pi}\mathbb{P} = \boldsymbol{\pi}, \quad \mathbf{1}\boldsymbol{\pi} = 1 \quad \boldsymbol{\pi} > \mathbf{0} \quad (3.41)$$

V prípade homogénneho Markovovho reťazca s maticou intenzít prechodu \mathbb{Q} , hľadáme stacionárne riešenie v tvare riešenia systému

$$\boldsymbol{\pi}\mathbb{Q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{1}\boldsymbol{\pi} = 1 \quad \boldsymbol{\pi} > \mathbf{0} \quad (3.42)$$

Oba systémy lineárnych (3.41) aj (3.42) môžno prepísať na tvar

$$\mathbb{A}\boldsymbol{\pi}^T = \mathbf{b}^T \quad (3.43)$$

kde $\mathbf{b} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} p_{00} - 1 & p_{10} & p_{20} & \dots & p_{n-1,0} & p_{n0} \\ p_{01} & p_{11} - 1 & p_{21} & \dots & p_{n-1,1} & p_{n1} \\ p_{02} & p_{12} & p_{22} - 1 & \dots & p_{n-1,2} & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ p_{0,n-1} & p_{1,n-1} & p_{2,n-1} & \dots & p_{n-1,n-1} - 1 & p_{n,n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

s $p_{ij} = p(v_i, v_j)$ pre systém (3.41) a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{10} & q_{20} & \dots & q_{n-1,0} & q_{n0} \\ q_{01} & q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n-1,1} & q_{n1} \\ q_{02} & q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n-1,2} & q_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ q_{0,n-1} & q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & \dots & q_{n-1,n-1} & q_{n,n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

s $q_{ij} = q(v_i, v_j)$ pre systém (3.42).

Poznámka. Možno ukázať, že systém rovníc (3.43) má jediné riešenie, ak existuje, s kladnými zložkami a môžeme ho získať algebraicky napr. známym Cramerovým pravidlom.

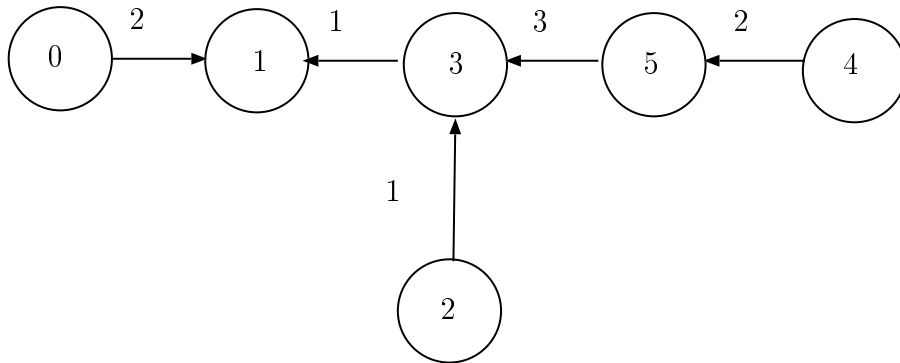
Cvičenie. Napíšte systémy rovníc (3.41), (3.42), (3.43) pre $n = 3$ a odvoďte vzorce pre výpočet stacionárneho riešenia pomocou Cramerovho pravidla.

Na formuláciu tvrdenia, ktoré je základom grafovej metódy na výpočet stacionárneho riešenia, budeme potrebovať niekoľko pojmov teórie grafov. *koreňovou kostrou v digrafe* $G = (V, H, c)$ rozumieme taký orientovaný strom $T = (V, H_T, c)$ obsahujúci všetky vrcholy digrafu, ktorý má jediným koreň (vrchol z ktorého nevychádzajú orientované hrany) a všetky jeho hrany sú

orientované do koreňa. Jej ohodnotením je *súčin* ohodnotení orientovaných hrán koreňovej kostry t.j číslo

$$c(T) = \prod_{h \in H_T} c(h)$$

Príklad 3.8. Vypočítajte ohodnotenie orientovanej kostry z obr. 3.5.



Obr. 3.5: Orientovaná kostra s koreňom 1 v digrafe \mathbb{G}

Tu máme $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $H_T = \{(0, 1), (3, 1), (2, 3), (5, 3), (4, 5)\}$ a ohodnotenie kostry $T = (V, H_T, c)$ je $c(T) = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Poznámka. Prechodový graf je digraf, ktorý môže v zmysle definícií 3.8 a 3.9 obsahovať aj slučky. Digraf nazývame *silne súvislý*, ak pre ľubovoľné vrcholy u, v grafu existuje orientovaný sled z u do v .

Veta 3.2.2. (Markl, 1993) Nech $G = (V, H, a)$ je silne súvislý prechodový graf Markovovho reťazca s konečnou množinou stavov S . Potom stacionárne rozdelenie reťazca $\pi = (\pi(v_i))_{i \in S}$ je určené

$$\pi(v_i) = \frac{B_i}{\sum_{v_i \in S} B_i} \quad (3.44)$$

kde B_i je súčet ohodnotení všetkých koreňových kostier, ktoré majú koreň vo vrchole v_i .

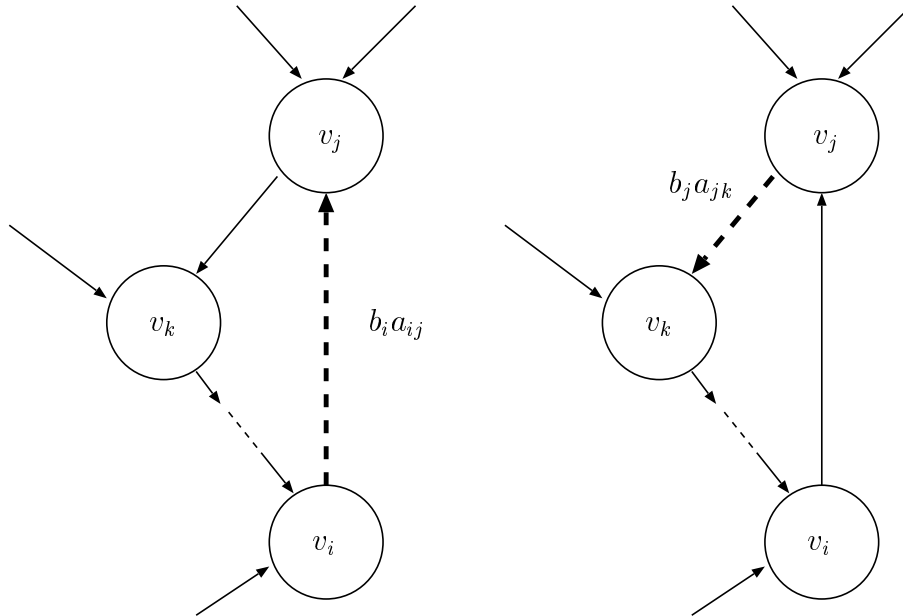
Dôkaz. Z predpokladu silnej súvislosti prechodového grafu plynie existencia koreňovej kostry pre ľubovoľný koreň $v \in V = \{0, 1, \dots, n\}$. Ocenenia všetkých hrán, ktoré nie sú slučkami, je kladné, a tak je kladné aj ocenenie každej koreňovej kostry. Potom aj menovateľ vo výraze (3.44) je kladný a kladné sú aj hodnoty $\pi(v_j)$.

Ukážeme, že $\pi(v_j)$ určené (3.44) je riešením systému rovníc (3.43). Platí $\sum_{j=0}^n \pi(v_j) = 1$ takže je splnená posledná rovnica systému (3.43). Jeho j -ta rovnica ($j = 0, 1, \dots, n-1$) má tvar

$$\pi(v_j) \sum_{k=0, k \neq j}^n a_{jk} = \sum_{i=1, i \neq j}^n \pi(v_i) a_{ij} \quad (3.45)$$

Po substitúcii (3.44) do (3.45) dostaneme

$$\sum_{k=0, k \neq j}^n B_j a_{jk} = \sum_{i=1, i \neq j}^n B_i a_{ij} \quad (3.46)$$



Obr. 3.6: Koreňové kostry s koreňmi vo vrcholoch v_i a v_j

Ľavá strana (3.46) je súčtom súčinov tvaru $b_j a_{jk}$, kde b_j je ohodnotenie niektorej koreňovej kostry v prechodovom grafe s koreňom vo vrchole v_j . Pravá strana (3.46) je zas súčtom súčinov tvaru $b_i a_{ij}$. Počet sčítancov na oboch stranách rovnice je rovnaký. Ako vidieť z obrázku Obr.3.6 každej koreňovej kostry s koreňom v_j z ľavej strany možno priradiť koreňovú kostru s koreňom v_i z pravej strany také, že $b_j a_{jk} = b_i a_{ij}$. \square

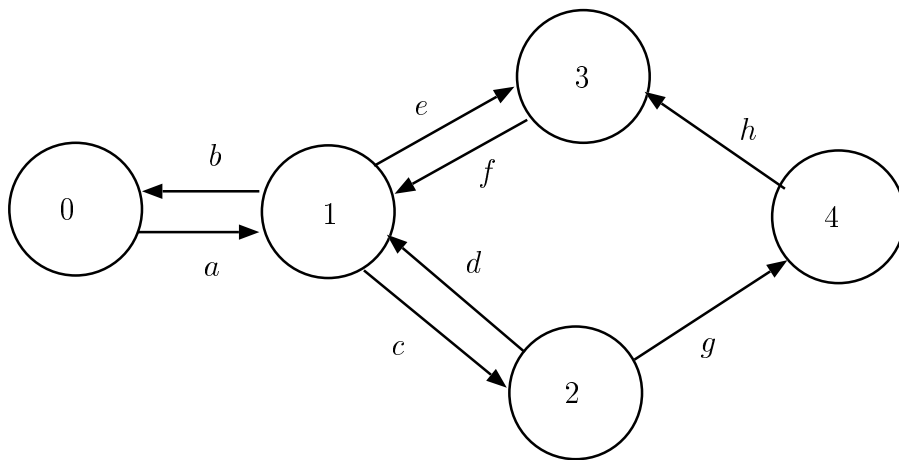
Príklad 3.9. Vypočítajte v príklade 3.4 stacionárne rozdelenie grafovou metódou

Máme $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Pre každý koreň $i \in S$ prechodového grafu z obr.3.1 existuje jediná orientovaná kostra s koreňom v i . Dostávame

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{1}{5} \frac{2}{5} \frac{3}{5} \frac{4}{5} 1 = \frac{24}{625} \\
 B_1 &= 1 \frac{2}{5} \frac{3}{5} \frac{4}{5} 1 = \frac{120}{625} \\
 B_2 &= 1 \frac{4}{5} \frac{3}{5} \frac{4}{5} 1 = \frac{240}{625} \\
 B_3 &= 1 \frac{4}{5} \frac{3}{5} \frac{4}{5} 1 = \frac{240}{625} \\
 B_4 &= 1 \frac{4}{5} \frac{3}{5} \frac{4}{5} 1 = \frac{120}{625} \\
 B_5 &= 1 \frac{4}{5} \frac{3}{5} \frac{2}{5} \frac{1}{5} = \frac{24}{625}
 \end{aligned}$$

Po dosadení do vzťahu (3.44) máme $\pi = (\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32})$.

Cvičenie. Vypočítajte stacionárne rozloženie grafovou metódou pre príklad 3.5

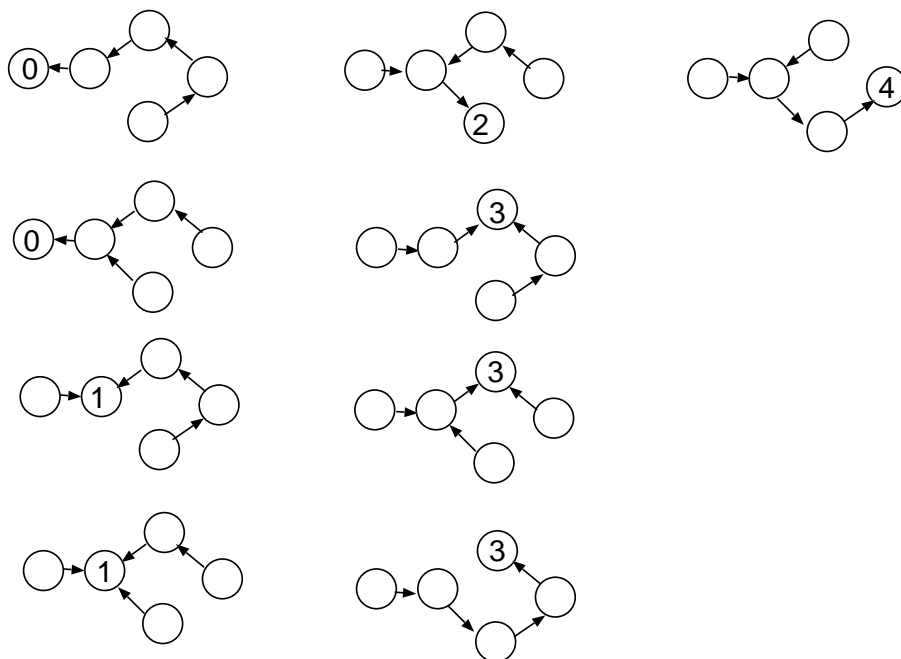


Obr. 3.7: Prechodový graf

Silu grafovej metódy oceníme v prípade, keď existujú vo vrchoch-koreňoch malý počet orientovaných kostier.

Príklad 3.10. Najdite grafovou metódou stacionárne rozloženie Markovovho reťazca s prechodovým grafom na obr.3.7.

Máme $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Označené vrcholy na obr.3.8 sú korene príslušných kostier.



Obr. 3.8: Koreňové kostry prechodového grafu

$$B_0 = bfhg + bfdh$$

$$B_1 = afhg + adhf$$

$$B_2 = acfh$$

$$B_3 = aehg + aedh + acgh$$

$$B_4 = acfg$$

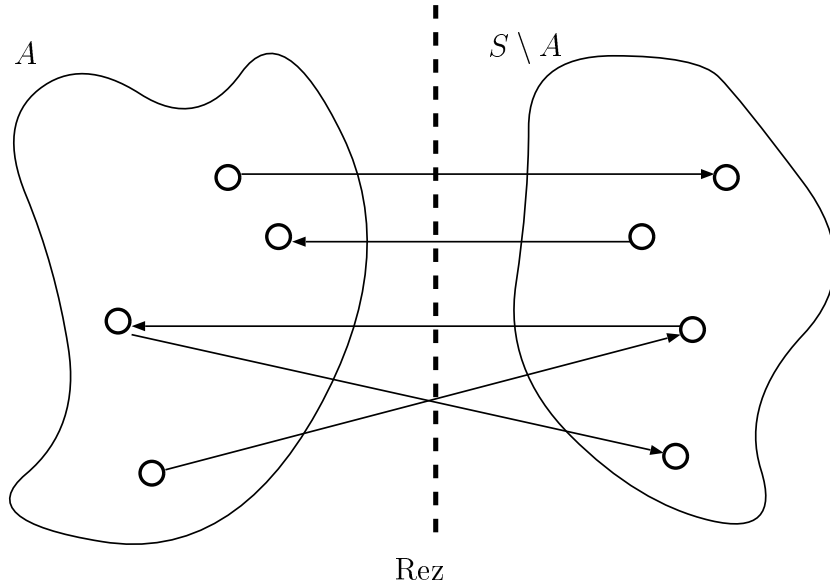
Po dosadení do vzťahu (3.44) máme hľadané stacionárne pravdepodobnosti

$$\pi_j = \frac{B_j}{B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4} \quad \forall j \in S$$

Poznámka. V prípade hustejších prechodových grafov rastie počet orientovaných kostier vo vrchoch. Slabinou grafovej metódy je práve skutočnosť, že nie je známy algoritmus efektívne vyhľadávajúci všetky koreňové kostry silne súvislého digrafu. Na vyššie uvedeních príkladoch sme videli, že pri výpočte grafovou metódou nevyužívame slučky, ak by existovali, prechodového grafu. Nie sú totiž hranami koreňových kostier.

Ďalej upustíme od obmedzujúceho predpokladu konečnej množiny stavov reťazca, čomu bude zodpovedať aj možnosť nanajvyšš spočítateľnej množiny vrcholov prechodového grafu reťazca. Globálne rovnice rovnováhy možno interpretovať v prechodovom grafe ako rovnice zachovania: Pravdepodobnosť

(intenzita) odchodu do stavu je rovná pravdepodobnosti (intenzite) príchodu z tohto stavu. Túto vlastnosť možno zovšeobecniť, Obr.3.9, na ľubovoľnú podmnožinu stavov $A \subset S$ reťazca: Pravdepodobnosť (intenzita) odchodu z ľubovoľnej podmnožiny stavov je rovná pravdepodobnosti (intenzite) príchodu do tejto podmnožiny.



Obr. 3.9: Krížová rovnováha

Veta 3.2.3. (Krížové rezové rovnice rovnováhy) Nech $G = (S, H, a)$ je prechodový graf Markovovho reťazca s množinou stavov S , ktorý má stacionárne rozdelenie π . Potom pre každú neprázdnu podmnožinu $A \subset S$ platí

$$\sum_{v_i \in A} \sum_{v_j \in S \setminus A: (v_i, v_j) \in H} \pi(v_i) a_{ij} = \sum_{v_j \in S \setminus A} \sum_{v_i \in A: (v_j, v_i) \in H} \pi(v_j) a_{ji} \quad (3.47)$$

Dôkaz. Stacionárne riešenie $\pi = (\pi(v_i) : v_i \in S)$ vyhovuje globálnym rovniciam rovnováhy, ktoré sú pre reťazec so spjitým resp. diskretným časom v tvare

$$\pi(v_i) \sum_{v_j \in S \setminus \{v_i\}: (v_i, v_j) \in H} a_{ij} = \sum_{v_j \in S \setminus \{v_i\}: (v_j, v_i) \in H} \pi(v_j) a_{ji} \quad \forall v_i \in S \quad (3.48)$$

kde $a_{ij} = p_{ij}$ resp. $a_{ij} = q_{ij}$.

Nech $A \subset S$ ľubovoľná neprázdna podmnožina S . Potom možno sčítať príslušné globálne rovnice (3.48) pre stavy množiny A a dostaneme

$$\sum_{v_i \in A} \sum_{v_j \in S \setminus \{v_i\}: (v_i, v_j) \in H} \pi(v_i) a_{ij} = \sum_{v_i \in A} \sum_{v_j \in S \setminus \{v_i\}: (v_j, v_i) \in H} \pi(v_j) a_{ji} \quad (3.49)$$

Každú hranu $(v_i, v_j) \in H \cap A \times A$ ohodnotená $\pi(v_i)a_{ij}$ sa vyskytuje na oboch stranách nasledujúcej rovnice a tak platí

$$\sum_{v_i \in A} \sum_{v_j \in A \setminus \{v_i\}: (v_i, v_j) \in H} \pi(v_i)a_{ij} = \sum_{v_i \in A} \sum_{v_j \in A \setminus \{v_i\}: (v_j, v_i) \in H} \pi(v_j)a_{ji} \quad (3.50)$$

Z rozdielov pravých a ľavých strán rovníc (3.48) a (3.50) dostávame (3.47) \square

Poznámka. Rovnice (3.47) nazývame *křížové (rezové) rovnice rovnováhy*. Ak volíme $A = \{v_i\}$ dostávame globálne rovnice rovnováhy.

Príklad 3.11. *Najdite stacionárne rozdelenie Markovovho reťazca s prechodovým grafom na obr.3.7. pomocou rezových rovníc rovnováhy.*

Stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(4))$ budeme hľadať postupnou voľbou vhodných množín A rezovým rovníc rovnováhy.

$$\begin{aligned} A = \{4\} : h.\pi(4) &= g.\pi(2) & \Rightarrow \pi(4) &= \frac{g}{h}\pi(2) \\ A = \{2, 4\} : d.\pi(2) + h.\pi(4) &= c.\pi(1) & \Rightarrow \pi(1) &= \frac{d+g}{c}\pi(2) \\ A = \{3\} : f.\pi(3) &= e.\pi(1) + h.\pi(4) & \Rightarrow \pi(3) &= \frac{de+ge+cg}{fc}\pi(2) \\ A = \{0\} : a.\pi(0) &= b.\pi(1) & \Rightarrow \pi(0) &= \frac{bd+bg}{ac}\pi(2) \end{aligned}$$

Z normalizačnej rovnice dostávame pre $\pi(i) = \frac{B_i}{B}$ je

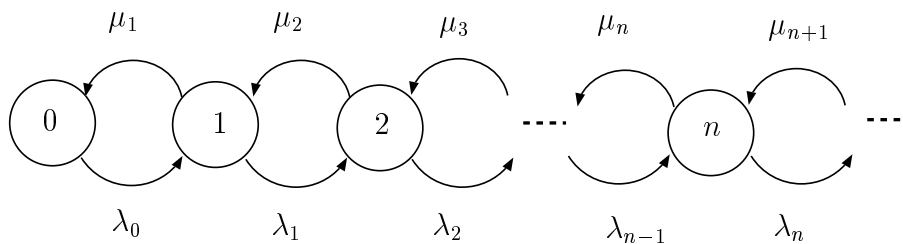
$$1 = \frac{bd+bg}{ac} + \frac{d+g}{c} + 1 + \frac{de+ge+cg}{fc} + \frac{g}{h} = \frac{B_0 + B_1 + \dots + B_4}{B}$$

a po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} B_0 &= bfhg + bfdh \\ B_1 &= afhg + adhf \\ B_2 &= acfh \\ B_3 &= aehg + aedh + acgh \\ B_4 &= acfg \\ B &= B_0 + B_1 + \dots + B_4 \end{aligned}$$

čo je v zhode s výsledkom z grafovej metódy v príklade 3.10.

Príklad 3.12. *Najdite stacionárne rozdelenie procesu vzniku a zániku (s prechodovým grafom na obr.3.10), pomocou rezových rovníc rovnováhy.*



Obr. 3.10: Proces vzniku a zániku

Stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \pi(1), \dots)$ budeme hľadať postupnou voľbou vhodných množín A rezovýmí rovnic rovnováhy, tak aby boli opäť funkciami jednej premennej.

$$\begin{aligned}
 A = \{0\} : \lambda_0 \pi(0) &= \mu_1 \pi(1) & \Rightarrow \pi(1) &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi(0) \\
 A = \{0, 1\} : \lambda_1 \pi(1) &= \mu_2 \pi(2) & \Rightarrow \pi(2) &= \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} \pi(0) \\
 A = \{0, 1, 2\} : \lambda_2 \pi(2) &= \mu_3 \pi(3) & \Rightarrow \pi(3) &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \pi(0) \\
 A = \{0, 1, \dots, j-1\} : \lambda_{j-2} \pi(j-1) &= \mu_j \pi(j) & \Rightarrow \pi(j) &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \pi(0) \\
 & & & \vdots
 \end{aligned}$$

Z normalizačnej rovnice dostávame nutnú a postačujúcu podmienku ergodicity procesu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} < \infty \tag{3.51}$$

Takže stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \dots, \pi(j), \dots)$ je určené

$$\pi(j) = \pi(0) \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \quad \text{pre } j \geq 1 \tag{3.52}$$

kde

$$\pi(0) = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \right)^{-1} \tag{3.53}$$

Kapitola 4

Elementárne systémy

Definícia 4.1. *Elementárnym systémom hromadnej obsluhy nazývame front do ktorého prichádzajú a sú obsluhovaní len regulárni zákazníci a v ktorom je počet zákazníkov frontu modelovaný Markovým reťazcom v spojitom alebo diskretnom čase.*

Poznámka. Ďalej budeme pre jednoduchosť vyjadrovania hovoriť len stručne o *systémoch* a *zákazníkoch*.

Nech S je množina stavov Markovovho reťazca $\{\mathbf{N}(t), t \geq 0\}$ modelujúceho systém potom $p_i(j) = \mathcal{P}(\mathbf{N}(t) = j)$ je pravdepodobnosť, že v systéme je v čase t práve j čakajúcich alebo obsluhovaných zákazníkov.

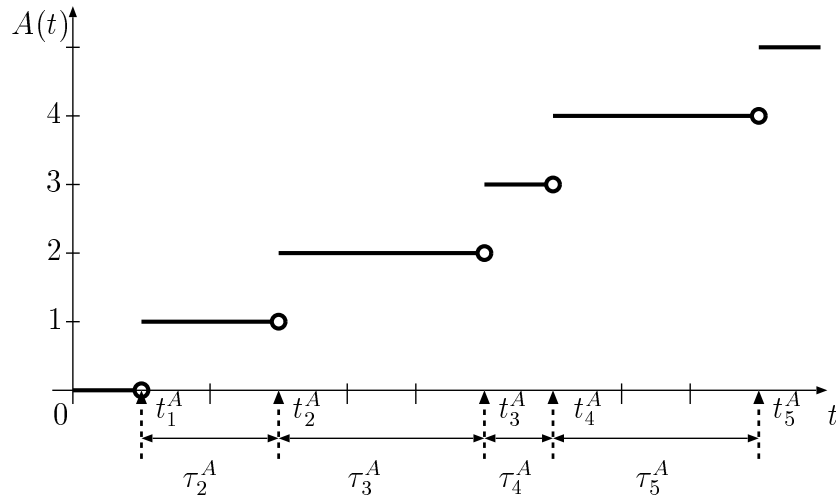
Nech $\{\mathbf{A}(t), t \geq 0\}$ a $\{\mathbf{B}(t), t \geq 0\}$ sú dva náhodné procesy, pričom náhodná veličina $\mathbf{A}(t)$ udáva *počet príchodov* zákazníkov do systému za čas t a náhodná veličina $\mathbf{B}(t)$ udáva *počet odchodov* zákazníkov zo systému za čas t .

Príklady realizácie takýchto procesov popisujúcich systém sú na obr.4.1 a obr.4.2 Jedná sa o stupňovité funkcie, Náhodná veličina $\mathbf{A}(t)$ zväčší svoju hodnotu o 1 práve v čase príchodov zákazníkov $\{\mathbf{t}_1^A, \mathbf{t}_2^A, \mathbf{t}_3^A, \mathbf{t}_4^A, \dots\}$ zákazníkov do systému, modeluje *vstupný tok zákazníkov*. Proces príchodov zákazníkov možno definovať pomocou okamihov príchodu takto

$$\mathbf{A}(t) = \max\{n : \mathbf{t}_n^A \leq t\} \quad (4.1)$$

Aj náhodná veličina $\mathbf{B}(t)$ zväčší svoju hodnotu o 1 práve v čase odchodov $\{\mathbf{t}_1^B, \mathbf{t}_2^B, \mathbf{t}_3^B, \mathbf{t}_4^B, \dots\}$ zákazníkov zo systému, modeluje *výstupný tok zákazníkov*. Proces odchodov zákazníkov možno definovať pomocou okamihov odchodov takto

$$\mathbf{D}(t) = \max\{n : \mathbf{t}_n^B \leq t\} \quad (4.2)$$

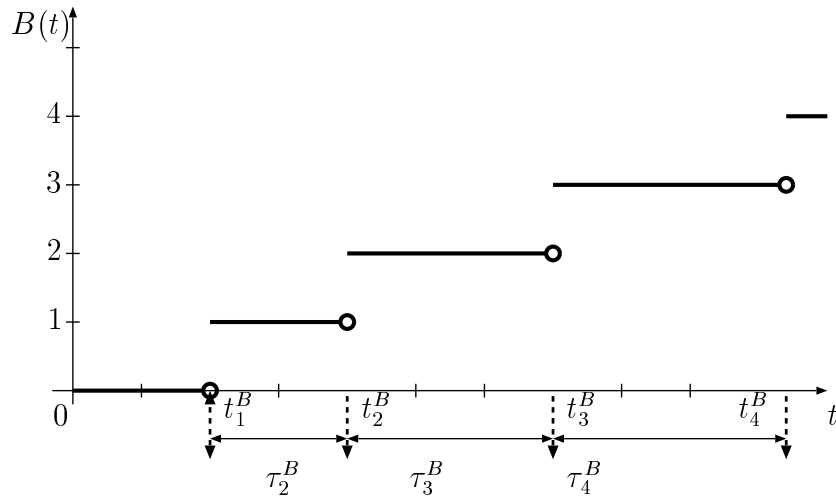


Obr. 4.1: Realizácia vstupného toku zákazníkov

Pretože i -ty zákazník musí najskôr prísť a až potom môže odísť, platí

$$\mathbf{t}_j^A \leq \mathbf{t}_j^B \quad j = 1, 2, \dots$$

kde \mathbf{t}_j^A je okamih príchodu j -teho zákazníka do systému a \mathbf{t}_j^B je okamih odchodu j -teho zákazníka zo systému. Ak $\mathbf{t}_j^A = \mathbf{t}_j^B$, potom je j -ty zákazník odmietnutý.



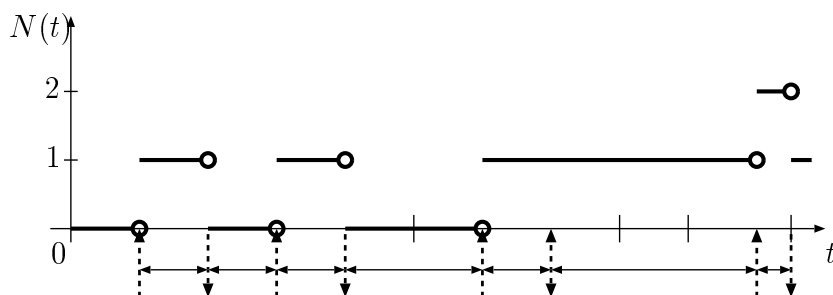
Obr. 4.2: Realizácia výstupného toku zákazníkov

Na obr.4.3 máme vývoj systému s príslušnými vstupnými a výstupnými

tokmi. Vidíme, že počet zákazníkov v systéme v čase t dostaneme zo vzťahu

$$N(t) = A(t) - B(t)$$

Tento vzťah sa výhodne využíva pri *simulácii* systémov, keď sa ich základné charakteristiky (napr. *využitie* systému, *stredná doba pobytu* zákazníka v systéme, *stredný počet čakajúcich* zákazníkov v systéme) nevypočítavajú analyticky ale numericky.



Obr. 4.3: Vývoj systému hromadnej obsluhy

Pre Markovove systémy hromadnej obsluhy je charakteristické, že medzery medzi udalosťami majú bezpamäťové exponenciálne rozdelenie.

Systém hromadnej obsluhy považujeme za *stabilizovaný* ak od istého okamihu je ďalší vývoj systému nezávislý na čase. Ak sa jedná o Markovov systém, zaujímavé sú najmä tie prípady, ktoré môžeme modelovať egodickým Markovovým reťazcom.

Nasledujúce tvrdenie, ktoré má všeobecnú platnosť, dáva do súvislosti tri základné charakteristiky stabilizovaného systému hromadnej obsluhy.

Veta 4.0.4. (*Littlova formula*) *Majme stabilizovaný systém hromadnej obsluhy. Nech λ je stredný počet prijatých zákazníkov za jednotku času vstupného toku zákazníkov, $E(N)$ je stredný počet zákazníkov v systéme a $E(W)$ stredná doba strávená zákazníkom v systéme. Potom platí*

$$\lambda = \frac{E(N)}{E(W)} \quad (4.3)$$

Dôkaz. Netriviálny

Poznámka. λ v Littlovej formule nazývame *intenzita vstupného toku* zákazníkov. Zákazníci nemusia čakať vo fronte podľa pravidla **FIFO**!

Príklad 4.1. *Majiteľ potravín zistil, že v rannej špičke prichádzajú do potravín priemerne 4 zákazníci za minútu. Majiteľova manželka, ktorá je pokladničkou zistila, že priemerný počet zákazníkov v obchode je 30. Aká je priemerná doba strávená zákazníkom v obchode.*

Môžeme predpokladať, že príchody zákazníkov sú náhodné udalosti a vstupný tok zákazníkov je modelovaný Poissonovým procesom s intenzitou $\lambda = 4$ zák./min. V čase rannej špičky sa v obchode nachádza v priemere $N = 30$ zák. Stredná doba strávená zákazníkom v obchode je potom $T = \frac{N}{\lambda} = \frac{30}{4} = 7.5$ minúty.

4.1 Systémy modelované procesom vzniku a zániku

Najjednoduchšími Markovovými systémami sú systémy $M/M/n/m$ v ktorých medzery vstupného toku aj doby obslúh zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie a navyše ich možno modelovať procesmi vzniku a zániku.

4.1.1 Systém $M / M / 1 / \infty$

Do jednolinkového systému s Poissonovým vstupným tokom s intenzitou $\lambda > 0$ prichádzajú zákazníci a požadujú obsluhu. Doba obsluhy linky má exponenciálne rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu} > 0$. Zákazníci, ktorí nájdu linku obsluhu obsadenú sa postaví do radu. Na takto vzniknutý front sa nekladú žiadne obmedzenia. Predpokladá sa, že zákazníci budú obsluhovaní v poradí príchodov t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**. Takýto systém je príkladom systémov s neohraničeným frontom. Znamená to tiež, že doba čakania zákazníka vo fronte je tiež neobmedzená.

Ukážeme, že systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{N(t), t \geq 0\}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Stav systému interpretujeme takto:

- 0 - prázdny systém,
- 1 - v systéme je len jeden obsluhovaný zákazník,
- 2 - v systéme sú dvaja zákazníci (jeden obsluhovaný a jeden čakajúci na obsluhu),
- n - v systéme je n zákazníkov (jeden obsluhovaný a n - 1 čakajúcich v rade frontu).

V Poissonovom vstupnom toku zákazníkov majú dĺžky medzery τ_1 medzi príchodmi zákazníkov to isté exponenciálne rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$. Ďalej využijeme, že doba obsluhy τ_2 má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\mu > 0$ a je nezávislá od dĺžok medzier τ_1 elementárneho toku. Spolu s bezpamätovou vlastnosťou exponenciálneho rozdelenia nám to zaručuje markovovskú vlastnosť systému. Zvyšková doba obsluhy, od nejakej udalosti v

prebehu obsluhy zákazníka do ukončenia jeho obsluhy, má tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ . Teda $\tau_1 \sim Exp(\lambda)$ a $\tau_2 \sim Exp(\mu)$.

Vypočítame pravdepodobnosti prechodu pre najaký dostatočne malý časový interval dĺžky Δt . Vstupný tok zákazníkov je Poissonovým procesom s parametrom λ a tak pravdepodobnosť príchodu k zákazníkov za čas Δt je

$$\mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = k) = \begin{cases} e^{-\lambda\Delta t} & = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } k = 0 \\ \lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t} & = \lambda\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } k = 1 \\ \frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda\Delta t} & = o(\Delta t) & \text{ak } k \geq 2 \end{cases}$$

V systéme môže byť obsluhovaný len jeden zákazník z exponenciálnou dobou obsluhy (aj zvyškovou dobou obsluhy) s parametrom μ . Pravdepodobnosť odchodu zákazníka z linky obsluhy je rovná pravdepodobnosti, že τ doba obsluhy resp. zvyškovej obsluhy zákazníka je nanajvýš Δt

$$\mathcal{P}(\tau \leq \Delta t) = 1 - e^{-\mu\Delta t} = \mu\Delta t + o(\Delta t)$$

Pravdepodobnosť, že linka neukončí obsluhu zákazníka je rovná pravdepodobnosti že τ doba obsluhy resp. zvyškovej obsluhy zákazníka je väčšia než Δt

$$\mathcal{P}(\tau > \Delta t) = e^{-\mu\Delta t} = 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)$$

Ďalej sa sústreďíme sa len na zmeny stavu vyvolané jedinou udalosťou príchodom alebo odchodom zákazníka. Zmena stavu vyvolané viac než jednou udalosťou v tomto intervale nastáva totiž s pravdepodobnosťou $o(\Delta t)$ t.j. $p_{\Delta t}(i, j) = o(\Delta t)$ pre $|i - j| > 1$.

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a nepríde žiaden zákazník je rovná pravdepodobnosti, že v priebehu časového intervalu dĺžky Δt nepríde žiaden zákazník

$$p_{\Delta t}(0, 0) = \mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 0) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a príde jeden zákazník je rovná pravdepodobnosti že v priebehu časového intervalu dĺžky Δt príde jeden zákazník

$$p_{\Delta t}(0, 1) = \mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 1) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

Ak je v systéme i -zákazníkov ($i > 0$), potom je práve jeden zákazník obsluhovaný a ostatní $i - 1$ čakajú v rade. Pravdepodobnosť, že práve jeden odíde a žiaden nepríde je rovná súčinu pravdepodobností

$$\begin{aligned} p_{\Delta t}(i, i - 1) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\tau \leq \Delta t) \\ &= (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(\mu\Delta t + o(\Delta t)) = \mu\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že práve jeden príde a žiaden neodíde je rovná súčinnu pravdepodobností

$$\begin{aligned} p_{\Delta t}(i, i+1) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 1)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t) \\ &= (\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)) = \lambda\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že žiaden nepríde a žiaden neodíde je rovná súčinnu pravdepodobností

$$\begin{aligned} p_{\Delta t}(i, i) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t) \\ &= (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)) = 1 - (\lambda + \mu)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Vidíme, že sme dostali špeciálnu maticu intenzít v procese vzniku a zániku $\mathbb{Q} = (q(i, j), i, j \in S)$

$$q(i, j) = \begin{cases} \lambda & \text{ak } j = i + 1 \\ \mu & \text{ak } j = i - 1 \\ -\lambda - \mu & \text{ak } j = i, i > 0 \\ -\lambda & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ 0 & \text{ak } |i - j| \geq 2 \end{cases}$$

Z praktického hľadiska je významný prípad, keď sa systém stabilizuje. Ak je $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ potom je splnená podmienka (3.51) a ergodicity reťazca. Má stacionárne rozdelenie, a tak zo vzťahov (3.52) a (3.53) dostávame

$$\pi(j) = \rho^j(1 - \rho), \quad j \geq 0 \quad (4.4)$$

Vzorce (4.4) sú známe ako *Erlangove vzorce*(1909) a umožňujú vypočítať základné charakteristiky stabilizovaného systému.

$E(\mathbf{N})$ - očakávaný (stredný) počet zákazníkov v systéme

$$\begin{aligned} E(\mathbf{N}) &= \sum_{j=0}^{\infty} j\pi(j) = \sum_{j=1}^{\infty} j\rho^j(1 - \rho) = (1 - \rho)\rho \sum_{j=1}^{\infty} j\rho^{j-1} = (1 - \rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \\ &= (1 - \rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{1 - \rho} \right) = (1 - \rho)\rho \frac{1}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$E(\mathbf{W})$ - stredná doba pobytu v systéme. Z Littlovej formule a (4.5) máme

$$E(\mathbf{W}) = \frac{E(\mathbf{N})}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (4.6)$$

$E(\mathbf{W}_S)$ – stredná doba obsluhy v systéme. Z exponencionálneho rozdeľenia doby obsluhy máme

$$E(\mathbf{W}_S) = \frac{1}{\mu} \quad (4.7)$$

$E(\mathbf{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte. Doba strávená zákazníkom v systéme sa skladá z doby čakania vo fronte a doby obsluhu.

$$E(\mathbf{W}_Q) = E(\mathbf{W}) - E(\mathbf{W}_S) = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{E(\mathbf{N})}{\mu} \quad (4.8)$$

$E(\mathbf{N}_Q)$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte. Z Littlovej formuly aplikovanej na front dostávame

$$E(\mathbf{N}_Q) = \lambda E(\mathbf{W}_Q) = \lambda \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \rho E(\mathbf{N}) \quad (4.9)$$

P_S – pravdepodobnosť, že zákazník najde voľnú linku.

$$P_S = \pi(0) = 1 - \rho \quad (4.10)$$

P_Q – pravdepodobnosť, že zákazník bude čakať vo fronte.

$$P_Q = 1 - \pi(0) = \rho \quad (4.11)$$

$E(\mathbf{N}_S)$ – stredný počet obsluhovaných zákazníkov v systéme.

$$E(\mathbf{N}_S) = E(\mathbf{N}) - E(\mathbf{N}_Q) = \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \rho \quad (4.12)$$

κ – využitie systému (linky obsluhy).

$$\kappa = \rho \quad (4.13)$$

Cvičenie. Odvodte vzorce $E(\mathbf{N}_Q) = P_Q \cdot E(\mathbf{N})$, $E(\mathbf{N}_S) = P_S \cdot E(\mathbf{N})$, a $E(\mathbf{N}_Q) = \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)\pi(j)$.

Príklad 4.2. *K ortopédovi prichádza priemerne 16 pacientov za 8 hodín jeho pracovnej doby. Stredná doba ošetrenia pacienta je 20 minút. Zistite, či sa takýto systém môže stabilizovať, ak vstupný tok pacientov je elementárny a doba obsluhy je exponenciálna. Vypočítajte využitie lekára, strednú dobu strávenú pacientom u lekára a strednú dobu čakania v čakárni.*

Vstupný tok pacientov (zákazníkov) je elementárny tok s intenzitou $\lambda = \frac{16}{8} = 2$ zák./hod. Stredná doba obsluhy je $\frac{1}{\mu} = 20$ min. = $\frac{1}{3}$ hod. Nakoľko $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} < 1$ systém sa môže stabilizovať. Lekár je využitý na $\kappa = \rho = 0.67 = 67\%$. Pacient strávi u lekára priemerne $E(\mathbf{W}) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3 - 2} = 1$ hod., z toho v čakárni $E(\mathbf{W}_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2}{3(3 - 2)} = \frac{2}{3}$ hod. = 40 min.
Cvičenie. Vypočítajte ďalšie charakteristiky systému vo vyššie uvedenom príklade.

Charakteristiky stabilizovaného systému umožňujú formulovať a riešiť *optimalizačné úlohy*. Príkladom takých úloh je nasledujúca úloha: Nech sú za isté obdobie známe tieto náklady na prevádzku obslužného systému

- c_0 - náklady na údržbu prázdneho systému,
- c_1 - náklady na chod linky obsluhy,
- c_2 - náklady na akcie orientované na udržanie zákazníkov.

Cieľom je nájsť také využitie systému κ , pri ktorom sú celkové priemerné náklady minimálne. Potom *kriteriálna funkcia* $C(\kappa)$

$$C(\kappa) = c_0\pi(0) + c_1(1 - \pi(0)) + c_2E(\mathbf{N}) \quad (4.14)$$

je zložená z troch častí. Priemerné náklady na údržbu prázdneho systému $c_0\pi(0)$ sú umerné relatívnej početnosti výskytu voľnej linky. Priemerné náklady na chod linky $c_1(1 - \pi(0))$ sú umerné relatívnej početnosti výskytu aktívnej linky. Priemerné náklady na akcie pre udržanie zákazníkov $c_2E(\mathbf{N})$ rastú úmerne s ich priemerným počtom. Po dosadení príslušných charakteristík systému do (4.14) dostaneme

$$C(\kappa) = c_0(1 - \kappa) + c_1\kappa + c_2\frac{\kappa}{1 - \kappa} \quad (4.15)$$

Ďalej postupujeme tak, ako je to bežné pri hľadaní voľného extrému funkcie reálnej premennej, položením derivácie (4.15) podľa κ rovnú nule.

$$\frac{dC(\kappa)}{d\kappa} = -c_0 + c_1 + \frac{c_2}{(1 - \kappa)^2} = 0 \quad (4.16)$$

odkiaľ po úpravách dostaneme

$$\kappa = 1 - \sqrt{\frac{c_2}{c_0 - c_1}} \quad (4.17)$$

Pomocou druhej derivácie sa môžeme presvedčiť, že $\frac{d^2C(\kappa)}{d\kappa^2} > 0$ a našli sme minimum kritriálnej funkcie. Z prirodzenej podmienky $0 < \kappa < 1$ dostávame obmedzenia na parametre úlohy (c_0 , c_1 a c_2).

$$0 < \frac{c_2}{c_0 - c_1} < 1 \quad (4.18)$$

Príklad 4.3. *Malá stavebná firma, špecializujúca sa na prestavbu bytových jadier, očakáva v priebehu mesiaca nasledujúce náklady na svoju prevádzku. Penalizácia úverujúcou bankou za nečinnosť je 150 tis.Sk. Náklady na platy zamestnancov sú 50 tis.Sk a náklady na reklamu sú 10.tis Sk. Za akých podmienok môže mať firma minimálne náklady?*

Ak chápeme stavebnú firmu ako systém $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{1} / \infty$, potom možno riešiť optimalizačnú úlohu (4.14) s parametrami $c_0 = 150000\text{Sk}$, $c_1 = 50000\text{Sk}$ a $c_2 = 10000\text{Sk}$. Dosadením do vzťahu (4.14) dostaneme využitie systému

$$\kappa = 1 - \sqrt{\left(\frac{10000}{150000 - 50000}\right)} = 1 - \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)} = 0.683 = 68.3\%$$

pri ktorom má firma minimálne náklady, podľa vzťahu (4.15), vo výške

$$C(\kappa) = 150000 * (1 - \kappa) + 50000\kappa + 10000 \frac{\kappa}{1 - \kappa} = 103245.55\text{Sk}$$

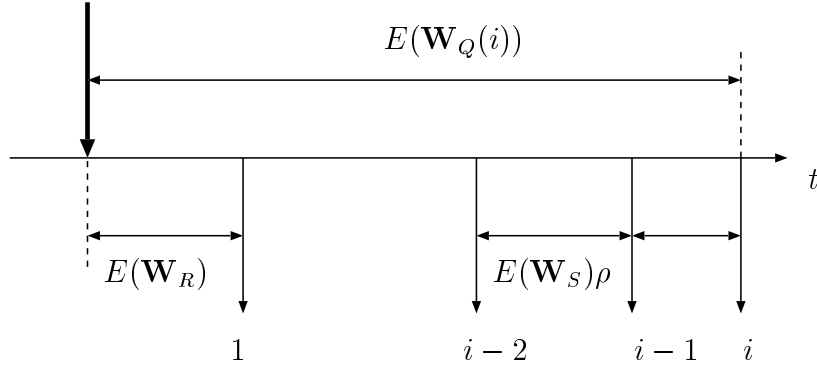
Firme dosiahne tieto minimálne priemerné mesačné náklady, ak je systém v tomto období stabilizovaný a vzťah medzi strednou dobou medzi príchodmi záazníkov $\frac{1}{\lambda}$ a strednou dobou obsluhy zákazníka $\frac{1}{\mu}$ je daný $\kappa \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$.

Zákazníka spravidla zaujíma okrem strednej doby čakania zákazníkov v systéme určenej vzťahom (4.8) najmä s akou strednou dobou čakania môže počítať, ak v čase príchodu nájde v systéme i zákazníkov. Pre analýzu je najjednoduchší prípad, keď je disciplína čakania je **FIFO**. Ďalej budeme potrebovať nasledujúce označme.

$E(\mathbf{W}_Q(i))$ - stredná doba čakania vo fronte, keď prichádzajúci zákazník nájde v systéme i zákazníkov. Na jej výpočet potrebujeme poznať, obr.4.4, strednú reziduálnu zvyškovú (reziduálnu) dobu obsluhovaného zákazníka a stredné doby obslúh $i - 1$ čakajúcich zákazníkov vo fronte.

$E(\mathbf{W}_R)$ - stredná zvyšková (reziduálna) doba obsluhy zákazníka, počas obsluhy ktorého došlo k príchodu ďalšieho zákazníka, sa vypočíta takto. Táto doba je s pravdepodobnosťou rovnou ρ (aspoň jedného zákazníka v systéme) je rovná strednej doby obsluhy zákazníka $\frac{1}{\mu}$ a s pravdepodobnosťou (prázdneho systému) $1 - \rho$ je rovná 0. A tak máme

$$E(\mathbf{W}_R) = \rho \frac{1}{\mu} + (1 - \rho)0 = \frac{\rho}{\mu} \quad (4.19)$$



Obr. 4.4: Stredná zvyšková doba a stredná doba čakania

Spolu s (4.19) a analogickou argumentáciou pre nezvyškovú časť doby čakania zákazníka, počas ktorej prebehne obsluha $i - 1$ zákazníkov, dostávame

$$E(\mathbf{W}_Q(i)) = E(\mathbf{W}_R) + (i - 1)\rho E(\mathbf{W}_S) = \frac{\rho}{\mu} + \frac{i - 1}{\mu}\rho = \frac{i\rho}{\mu} \quad (4.20)$$

Korektnosť nášho postupu si môžeme overiť výpočtom strednej doby čakania zákazníkov v rade frontu. Treba si však uvedomiť, že pravdepodobnosť príchodu zákazníka, ktorý nájde v systéme i zákazníkov je podmienená javom, že v systéme je aspoň jeden zákazník t.j. je rovná $\frac{\pi_i}{\rho}$. Potom

$$\begin{aligned} E(\mathbf{W}_Q) &= \sum_{i=1}^{\infty} E(\mathbf{W}_Q(i)) \frac{\pi(i)}{\rho} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{\mu} \rho^i (1 - \rho) = \frac{1 - \rho}{\mu} \sum_{i=1}^{\infty} i \rho^i \\ &= \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

čo je vzhode zo vzťahom (4.8). Využijeme Littlovu formulu pre rad frontu front v tvare (4.9) a dostaneme zaujímavý vzťah medzi strednou dobou čakania vo fronte a strednou reziduálnou dobou.

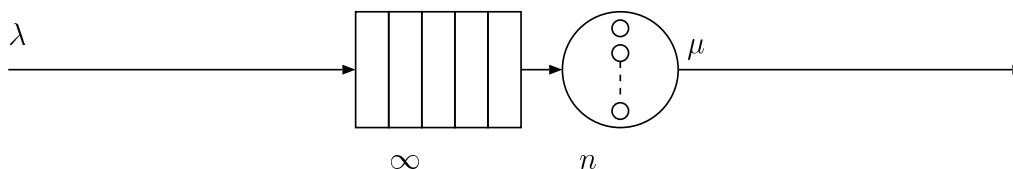
$$\begin{aligned} E(\mathbf{W}_Q) &= \sum_{i=1}^{\infty} E(\mathbf{W}_Q(i)) \frac{\pi(i)}{\rho} \\ &= E(\mathbf{W}_R) \sum_{i=1}^{\infty} \rho^{i-1} (1 - \rho) + E(\mathbf{W}_S) \sum_{i=1}^{\infty} (i - 1) \pi(i) \\ &= E(\mathbf{W}_R) + E(\mathbf{W}_S) E(\mathbf{N}_Q) = E(\mathbf{W}_R) + \lambda E(\mathbf{W}_Q) E(\mathbf{W}_S) \\ &= E(\mathbf{W}_R) + E(\mathbf{W}_Q) \rho \end{aligned} \quad (4.22)$$

a máme

$$E(\mathbf{W}_Q) = \frac{E(\mathbf{W}_R)}{1 - \rho} \quad (4.23)$$

4.1.2 Systém $M / M / n / \infty$

Viaclinkový systém $M / M / n / \infty$ sa líši od $M / M / 1 / \infty$ len počtom navzájom nezávislých liniek.



Obr. 4.5: Viaclinkový systému $M / M / n / \infty$

Vstupným tokom zákazníkov je opäť Poissonov proces s intenzitou $\lambda > 0$ a doba obsluhy každej z liniek má exponenciálne rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu} > 0$. Zákazník, ktorý nájde v čase príchodu aspoň jednu voľnú linku, začne byť okamžite obsluhovaný niektorou z nich. Zákazníci, ktorí nájdu všetkých n liniek obsluhy obsadených, sa postavia do radu. Na takto vzniknutý front sa opäť nekladú žiadne obmedzenia. Nieleď sa predpokladá, že zákazníci budú obsluhovaní v poradí príchodov, t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**. Takýto systém je príkladom systémov s neohraničeným frontom. Znamená to opäť, že doba čakania zákazníka vo fronte je tiež neobmedzená.

Ukážeme, že systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}(t), t \geq 0\}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Stav systému interpretujeme takto:

- 0 - prázdny systém,
- 1 - v systéme je jeden obsluhovaný zákazník,
- 2 - v systéme sú dvaja obsluhovaní zákazníci,
- n - v systéme je n obsluhovaných zákazníkov.
- $n+1$ - v systéme je $n+1$ zákazníkov (n obsluhovaných a jeden čakajúci na obsluhu),
- $n+q$ - v systéme je $n+q$ zákazníkov (n obsluhovaných a q čakajúcich).

Ďalej postupuje analogicky, ako pri analýze jednolinkového systému. Tiež sa sústredíme sa len na zmeny stavu vyvolané jedinou udalosťou príchodom alebo odchodom zákazníka. Zmeny stavu vyvolané viac než jednou udalosťou v tomto intervale nastávajú totiž s pravdepodobnosťou $o(\Delta t)$ t.j. $p_{\Delta t}(i, j) = o(\Delta t)$ pre $|i - j| > 1$.

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a nepríde žiadny zákazník je rovná pravdepodobnosti, že v priebehu časového intervalu dĺžky Δt nepríde žiadny zákazník

$$p_{\Delta t}(0, 0) = \mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 0) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a príde jeden zákazník je rovná pravdepodobnosti, že v priebehu časového intervalu dĺžky Δt príde jeden zákazník

$$p_{\Delta t}(0, 1) = \mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 1) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

Ak je v systéme i -zákazníkov ($0 < i \leq n$), potom je práve i zákazníkov obsluhovaných. Pravdepodobnosť, že práve jeden z nich odíde, $i - 1$ obsluhovaní neodídu a žiadny nepríde je rovná pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_{\Delta t}(i, i - 1) &= i\mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \Delta t)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t))^{i-1} \\ &= i(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(\mu\Delta t + o(\Delta t))(1 - (i - 1)\mu\Delta t + o(\Delta t)) \\ &= i\mu\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že práve jeden príde a žiadny neodíde je rovná pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_{\Delta t}(i, i + 1) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 1)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t))^i \\ &= (\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - i\mu\Delta t + o(\Delta t)) = \lambda\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že žiadny zákazník nepríde a žiadny neodíde je rovná pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_{\Delta t}(i, i) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 0)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t))^i \\ &= (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - i\mu\Delta t + o(\Delta t)) = 1 - (\lambda + i\mu)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Ak je v systéme i -zákazníkov ($i > n$), potom je práve n zákazníkov obsluhovaných a ostatní $i - n$ čakajú v rade. Pravdepodobnosť, že práve jeden bude doobsluhovaný a žiadny nepríde je rovná pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_{\Delta t}(i, i - 1) &= n\mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \Delta t)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t))^{n-1} \\ &= n(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(\mu\Delta t + o(\Delta t))(1 - (n - 1)\mu\Delta t + o(\Delta t)) \\ &= n\mu\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že práve jeden príde a žiadny neodíde je opäť rovná pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_{\Delta t}(i, i + 1) &= \mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 1)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t))^n \\ &= (\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - n\mu\Delta t + o(\Delta t)) = \lambda\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

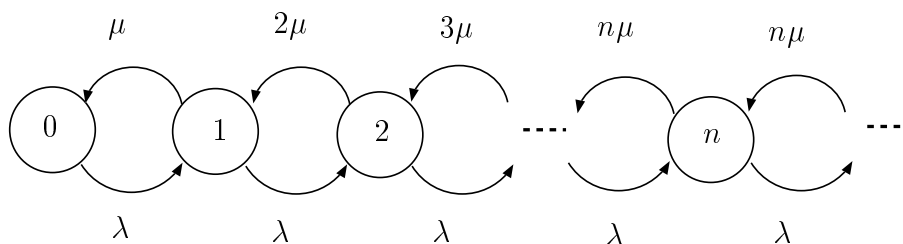
Pravdepodobnosť, že žiadny zákazník nepríde a žiadny neodíde je rovná pravdepodobnosť

$$p_{\Delta t}(i, i) = \mathcal{P}(\mathbf{A}(\Delta t) = 0)(\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t))^n \\ = (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - n\mu\Delta t + o(\Delta t)) = 1 - (\lambda + n\mu)\Delta t + o(\Delta t)$$

Dostali sme špeciálnu maticu intenzít v procese vzniku a zániku $\mathbb{Q} = (q(i, j), i, j \in S)$

$$q(i, j) = \begin{cases} \lambda & \text{ak } j = i + 1 \\ i\mu & \text{ak } j = i - 1, 0 < i \leq n \\ n\mu & \text{ak } j = i - 1, i > n \\ -\lambda - i\mu & \text{ak } j = i, 0 < i \leq n \\ -\lambda - n\mu & \text{ak } j = i, i > n \\ -\lambda & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ 0 & \text{ak } |i - j| \geq 2 \end{cases}$$

Príslušný prechodový graf systému máme na obr.4.6.



Obr. 4.6: Prechodový graf systému $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{n} / \infty$

Z praktického hľadiska je významný prípad, keď sa systém stabilizuje. Ak je $\rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1$ potom je splnená podmienka (3.51) pre ergodický reťazec vzniku a zániku. Má jediné stacionárne rozdelenie, a tak zo vzťahov (3.52) a (3.53) dostávame

$$\pi(j) = \begin{cases} \frac{n^j}{j!} \rho^j \pi(0) & \text{ak } 0 < j \leq n \\ \frac{n^n}{n!} \rho^j \pi(0) & \text{ak } j > n \\ \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^{\infty} \rho^j \right)^{-1} & \text{ak } j = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Vzorce (4.24) sú známe ako *Erlangove vzorce*.

Poznámka. Pre $n = 1$ prechádzajú Erlangove vzorce (4.24) do postatne jednoduchšieho vzorca (4.4).

Erlangove vzorce umožňujú vypočítať *základné charakteristiky* stabilizovaného systému. Medzi najpoužívanejšie patria

$\boxed{P_Q}$ – pravdepodobnosť, že prichádzajúci zákazník bude čakať vo fronte.

$$\begin{aligned} P_Q &= \sum_{j=n}^{\infty} \pi(j) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \rho^j \pi(0) = \pi(0) \frac{n^n}{n!} \rho^n \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \\ &= \frac{\pi(0)(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} = \frac{\pi(n)}{1-\rho} \end{aligned} \quad (4.25)$$

známa aj ako *Erlangova C formula*.

$\boxed{E(\mathbf{N}_Q)}$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte (očakávaná dĺžka frontu).

$$\begin{aligned} E(\mathbf{N}_Q) &= \sum_{j=n+1}^{\infty} (j-n)\pi(j) = \frac{n^n \pi_0}{n!} \sum_{j=n+1}^{\infty} (j-n)\rho^j = \dots = \frac{\pi_0 n^n \rho^{n+1}}{n!(1-\rho)^2} \\ &= P_Q \frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Najmä pre ľahší zápis budeme požívať parameter $\boxed{\alpha}$ – zaťaženie systému.

$$\alpha = n\rho \quad (4.27)$$

$\boxed{E(\mathbf{N}_S)}$ – stredný počet obsadených liniek v systéme.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{N}_S) &= \sum_{j=0}^n j\pi(j) + n \sum_{j=n+1}^{\infty} \pi(j) = \sum_{j=1}^n \frac{j\pi(0)\alpha^j}{j!} + n \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\alpha^n \rho^{j-n} \pi(0)}{n!} \\ &= \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\pi(0)\alpha^j}{j!} + n\rho \sum_{j=1}^{\infty} \pi(n)\rho^{j-1} = \alpha \left(\sum_{j=0}^{n-1} \pi(j) + \sum_{j=n}^{\infty} \pi(j) \right) \\ &= \alpha = n\rho \end{aligned} \quad (4.28)$$

$\boxed{\kappa}$ – využitie systému (linky obsluhy).

$$\kappa = \frac{N_S}{n} = \rho \quad (4.29)$$

Ďalšie významné charakteristiky systému možno vypočítať pomocou Littlovej formule.

$E(\mathbf{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte

$$E(\mathbf{W}_Q) = \frac{E(\mathbf{N}_Q)}{\lambda} = \frac{P_Q \rho}{\lambda(1 - \rho)} \quad (4.30)$$

$E(\mathbf{W}_S)$ – stredná doba obsluhy v systéme. Z exponencionálneho rozdelenia doby obsluhy máme

$$E(\mathbf{W}_S) = \frac{1}{\mu} \quad (4.31)$$

$E(\mathbf{W})$ – stredná doba pobytu v systéme. Doba pobytu sa skladá z doby čakania a z doby obsluhy

$$E(\mathbf{W}) = E(\mathbf{W}_Q) + E(\mathbf{W}_S) = \frac{P_Q \rho}{\lambda(1 - \rho)} + \frac{1}{\mu} \quad (4.32)$$

$E(\mathbf{N})$ – stredný počet zákazníkov v systéme

$$E(\mathbf{N}) = \lambda E(\mathbf{W}) = P_Q \frac{\rho}{1 - \rho} + \frac{\lambda}{\mu} = N_Q + N_S \quad (4.33)$$

Erlangove vzorce (4.24) sú pre numerický výpočet pomerne nepohodlné a tak sa používa nasledujúci postup. V Erlangových vzorcoch sa výhodne zavedie substitúcia

$$q_j = \frac{\pi(j)}{\pi(0)} \quad (4.34)$$

a tak máme

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } j = 0 \\ \frac{\alpha^j}{j!} & \text{ak } 0 < j \leq n \\ \frac{\alpha^n}{n!} \rho^{j-n} & \text{ak } j > n \end{cases} \quad (4.35)$$

ďalej sa vypočítajú $(q_j)_{j=1}^{\infty}$ a z nich zo vzťahu (4.34) hľadané

$$\pi(j) = \begin{cases} (q_0 + q_1 + q_2 + \dots)^{-1} & \text{ak } j = 0 \\ q_j \pi(0) & \text{ak } j > 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

Príklad 4.4. Dvojlinkový stabilizovaný systém $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{2} / \infty$ je využívaný na 50%. Aká je očakávaná dĺžka frontu a koľko minút z hodiny prevádzky bude systém prázdny?

j	q_j	$\pi(j)$
0	1	$\frac{1}{3}$
1	$\alpha = 1$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{\alpha^2}{2!} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\sum_{j=3}^{\infty}$	$\frac{\alpha^3}{2(2-\alpha)} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
Σ	3	1

Tabuľka 4.1: Výpočet stacionárneho rozdelenia pre $\alpha = 1$

Poznáme počet liniek $n = 2$ a využitie systému $\kappa = \frac{1}{2}$ a tak máme $\alpha = 1$. Zo vzťahov pre očakávanú dĺžku frontu (4.26) a Erlangovej C formuly (4.25) dostaneme

$$E(\mathbf{N}_Q) = \frac{\pi(2)\rho}{(1-\rho)^2} \quad (4.37)$$

Takže potrebujeme vypočítať $\pi(2)$ na čo použijeme vzťahy (4.34), (4.35) a (4.36) prehľadne vo forme tabuľky 4.1. Pre výpočet stacionárnych pravdepodobností ($\pi(j), j = 0, 1, 2$) treba v tabuľke vypočítať

$$\sum_{j=3}^{\infty} q_j = q_2 \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\alpha^2}{2} \frac{\alpha}{2}}{(1-\frac{\alpha}{2})} = \frac{\alpha^3}{2(2-\alpha)}$$

Teraz už môžeme dosadiť do (4.37) a dostaneme očakávaný počet čakajúcich zákazníkov rovný $\frac{1}{3}$, pričom bude systém $60 \cdot \pi(0) = 20$ min. z hodiny prevádzky prázdny.

Príklad 4.5. *Do viaclinkového stabilizovaného systému $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{n} / \infty$ prichádza priemerne 4zák./hod., pričom každá linka obsluži priemerne 2zák./hod. Pri akom minimálnom počte liniek bude stredný počet čakajúcich zákazníkov nanajvyšš rovný dvom zákazníkom?*

Poznáme $\lambda = 4$ a $\mu = 2$ a tak máme $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 2$. Ak $n = 1$ potom $\rho = \alpha = 2$ a systém sa nestabilizuje. Ak $n = 2$ potom $\rho = \frac{\alpha}{2} = 1$ a systém sa ešte stále nestabilizuje. Pre $n = 3$ je $\rho = \frac{\alpha}{3} = \frac{2}{3} < 1$ a systém sa už po dostatočne dlhej dobe stabilizuje. Analogicky ako v prechádzajúcom príklade vypočítame v príslušnej tabuľke 4.2 pravdepodobnosť $\pi(3)$. Pre výpočet stacionárnych pravdepodobností ($\pi(j), j = 0, 1, 2, 3$) treba v tabuľke

j	q_j	$\pi(j)$
0	1	$\frac{1}{9}$
1	$\alpha = 2$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{\alpha^2}{2!} = 2$	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{\alpha^3}{3!} = \frac{4}{3}$	$\frac{4}{27}$
$\sum_{j=4}^{\infty}$	$\frac{\alpha^4}{6(3-\alpha)} = \frac{8}{3}$	$\frac{8}{27}$
Σ	9	1

Tabuľka 4.2: Výpočet stacionárneho rozdelenia pre $n = 3$, $\alpha = 2$

vypočítať

$$\sum_{j=4}^{\infty} q_j = q_3 \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\alpha^3}{6} \frac{\alpha}{3}}{(1-\frac{\alpha}{3})} = \frac{\alpha^4}{6(3-\alpha)}$$

Teraz už môžeme dosadiť do (4.37) a overiť, či je očakávaný počet zákazníkov rovný

$$E(\mathbf{N}_Q) = \frac{\pi(3)\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{4}{27} \frac{\frac{2}{3}}{(1-\frac{2}{3})^2} = \frac{8}{9} < 2 \quad (4.38)$$

Praktickou optimalizačnou úlohou vo viaclinkových systémoch je úloha *optimalizácie počtu liniek*. Základný model vychádza zo známych nákladov za čakanie zákazníkov v systéme a za prestoj liniek. Nech sú známe, za isté jednotkové obdobie, tieto náklady na prevádzku stabilizovaného systému

- c_1 - náklady za čakajúceho zákazníka,
- c_2 - náklady za nevyužitú linku obsluhy zákazníkov.

Cieľom je nájsť taký počet liniek systému n , pri ktorom sú celkové priemerné náklady minimálne. Potom *kriteriálna funkcia* $C(n)$

$$C(n) = c_1 E(\mathbf{N}_Q) + c_2 (n - E(\mathbf{N}_S)) \quad (4.39)$$

je zložená z dvoch častí. Priemerné náklady za čakajúcich zákazníkov $c_1 E(\mathbf{N}_Q)$ sú úmerné priemernému počtu čakajúcich zákazníkov. Priemerné náklady za

nevyužité linky $c_2(n - E(\mathbf{N}_S))$ sú úmerné priemernému počtu nevyužitých liniek. Po dosadení príslušných charakteristík systému do (4.39) dostaneme

$$C(n) = c_1 \frac{\pi(n)\rho}{(1-\rho)^2} + c_2 n(1-\rho) \quad (4.40)$$

Ďalší postup závisí od toho, ktorý z nasledujúcich prípadov nastane:

- Sú dané intenzity λ, μ , potom sa hľadá n^* také, že

$$C(n^*) = \min\{C(n) : n > \frac{\lambda}{\mu}, n \text{ je prirodzené číslo}\} \quad (4.41)$$

Príklad 4.6. Výsledkom prieskumu začínajúcej softvérovej firmy je, že môže za mesiac očakávať 4 zakázky. Charakter úloh predpokladá, že programátor je schopný vyriešiť v tomto období priemerne 2 zakázky. Mesačné náklady na provizórne riešenie, kedy zákazník čaká na požadované riešenie, sú 50 tis.Sk. Základný plat programátora je 10 tis.Sk ak nemá prácu a je z rezervného fondu firmy. V prípade, keď má zakázku, je základný plat plus výkonostný príplatok programátora úplne pokrytý z ceny zakázky. Pri akom počte programátorov budú priemerné náklady firmy, po stabilizácii, minimálne?

Poznáme $\lambda = 4$ zák./mes., $\mu = 2$ zák./mes. a $c_1 = 50000$ Sk. Plat programátora vo výške $c_2 = 10000$ Sk ide do nákladov v čase, keď nemá zakázku. Z Erlangových vzorcov (4.24) pre $0 < \rho < 1$ máme

$$\pi(n) = \frac{\alpha^n}{n! \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{\alpha^n}{n!(1-\rho)} \right)} \quad (4.42)$$

Postupným dosadzovaním do (4.40) dostaneme tabuľku 4.3. Ďalším výpočtom $C(n)$, pre $n > 6$ by sme zistili, že priemerné náklady rastú. Pri štyroch programátoroch, $n^* = 4$, sú priemerné náklady firmy vo výške $C(n^*) = 28695$ Sk minimálne.

- Sú dané intenzity λ, μ_{\max} , potom sa hľadajú n^* a μ^* také, že

$$C(n^*, \mu^*) = \min\{C(n, \mu) : n\mu > \lambda, \mu \leq \mu_{\max}, n \text{ je prirodzené číslo}\} \quad (4.43)$$

kde (po dosadení $\rho = \frac{\lambda}{n\mu}$ do (4.40)) je kritériálna funkcia $C(n, \mu)$ funkciou dvoch premenných

$$C(n, \mu) = c_1 \frac{\pi(n)n\lambda\mu}{(n\mu - \lambda)^2} + c_2 \left(n - \frac{\lambda}{\mu} \right) \quad (4.44)$$

n	ρ	$\pi(n)$	$C(n)$
3	$\frac{2}{3}$	0.148	54444
4	$\frac{1}{2}$	0.087	28696
5	$\frac{2}{5}$	0.038	32083
6	$\frac{1}{3}$	0.013	40472

Tabuľka 4.3: Výpočet kritériálnych funkcií $C(n)$

n	μ	α	ρ	$\pi(n)$	$C(n, \mu)$
2	2.50	1.60	0.80	0.1422	146222
3	2,50	1.60	0.53	0,1278	29646
4	2.42	1.65	0.41	0,0587	26991
5	1.77	2.25	0.45	0,0541	31503
6	1.38	2.90	0.48	0,05220	35686

Tabuľka 4.4: Výpočet kritériálnych funkcií $C(n, \mu)$

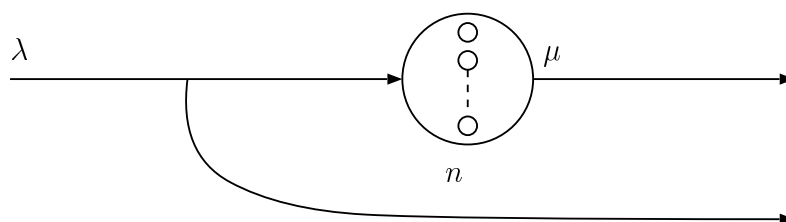
Príklad 4.7. *Predpokladajme, že v príklade 4.6 je priemerný mesačný počet zakázok na programátora nanajvýš 2.5 zakázky. Opäť nás zaujíma počet programátorov, pri ktorom budú priemerné náklady firmy minimálne.*

Teraz sa už ťažko zaobídeme bez pomoci počítača, najlepšie tabuľkového procesoru pre Windows Excel a pre Linux Gnumeric. Výsledky postupnej optimalizácie (4.44), výpočet optimálnych hodnôt μ pre pevne zvolené n , pomocou funkcie *Solver*, máme v tabuľke 4.4. Vidíme, že pri štyroch programátoroch, $n^* = 4$ a priemernej intenzite obsluhy $\mu^* = 2.42$ zakázok za mesiac sú priemerné náklady firmy vo výške $C(n^*, \mu^*) = 26991$ Sk minimálne.

Cvičenie. Modifikujte optimalizačné úlohy z príkladov 4.6 a 4.7 ak do celkových nákladov sa započítava aj základný plat plus výkonnostný príplatok vo výške 80% základného platu programátora.

4.1.3 Systém s odmietaním $M / M / n / n$

Budeme sa zaoberať systémom s n disponibilnými linkami obsluhy, v ktorom zákazníci nečakajú, ale sú odmietaní, ak v čase ich príchodu sú všetky linky už aktívne (obsluhujú zákazníka). Neobslúžený zákazník je pre systém stratený, preto sa takýto systém tiež nazýva *systém so stratami*. Vstupný tok zákazníkov je modelovaný Poissonov procesom s intenzitou $\lambda > 0$ a doba obsluhy každej z liniek má exponenciálne rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu} > 0$. Zákazník, ktorý nájde v čase príchodu aspoň jednu voľnú linku, začne byť okamžite obsluhovaný niektorou z nich. Systém možno modelovať ako



Obr. 4.7: Systému s odmietaním $M / M / n / n$

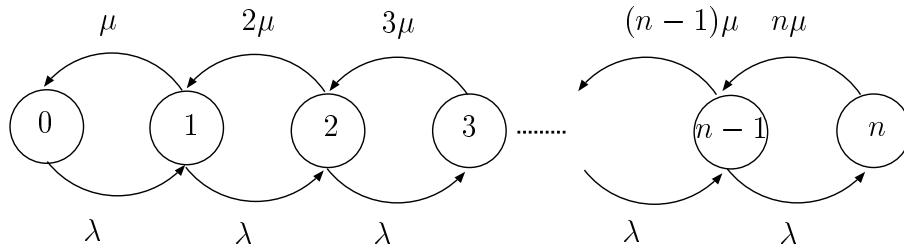
proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}(t), t \geq 0\}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Stav systému interpretujeme takto:

- 0 - prázdny systém,
- 1 - v systéme je jeden obsluhovaný zákazník,
- 2 - v systéme sú dvaja obsluhovaní zákazníci,
- n - v systéme je n obsluhovaných zákazníkov.

Pri odvodení pravdepodobností prechodu postupujeme zhodne ako pri systéme $M / M / n / \infty$ len s konečnou množinou stavov reprezentujúcou stav liniek. Príslušný prechodový graf systému máme na obr.4.8.

Z praktického hľadiska je významný prípad, keď sa systém stabilizuje. Podľa vety 3.2.1 je reťazec ergodický, pretože pre ľubovoľnú dvojicu (u, v) vrcholov prechodového grafu existuje sled z u do v dĺžky n . Reťazec má jediné stacionárne rozdelenie, ktoré vmožno vypočítať napr. z príslušných krížových rezových rovníc rovnováhy dostaneme

$$\pi(j) = \begin{cases} \frac{\alpha^j}{j!} \pi(0) & \text{ak } 0 < j \leq n \\ \left(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} \right)^{-1} & \text{ak } j = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$



Obr. 4.8: Prechodový graf systému $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{n} / \mathbf{n}$

Aj vzorce (4.45) sú známe ako *Erlangove vzorce*.

Chinčín (1911) dokázal, že Erlangove vzorce možno použiť aj v prípade stabilizovaného systému s odmietaním $\mathbf{M} / \mathbf{G} / \mathbf{n} / \mathbf{n}$, kde doba obsluhy má ľubovoľné rozdelenie s konečnou strednou hodnotou, t.j. ak má hustotu $g(t)$, potom

$$\frac{1}{\mu} = \int_0^{\infty} x g(x) dx$$

Z charakteristík, označovaných v zhode s predchádzajúcimi modelmi, stabilizovaného systému uvedieme najvýznamnejšie.

$\boxed{P_Z}$ - pravdepodobnosť zamietnutia zákazníka, keď sú všetky linky blokované obsluhou zákazníkov.

$$P_Z = \pi(n) \quad (4.46)$$

$\boxed{E(\mathbf{N})}$ - stredný počet zákazníkov v systéme, ktorý je aj $\boxed{E(\mathbf{N}_S)}$ - stredný počet obsadených liniek v systéme.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{N}) = E(\mathbf{N}_S) &= \sum_{j=0}^n j \pi(j) = \sum_{j=1}^n \frac{j \pi(0) \alpha^j}{j!} = \alpha \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\pi(0) \alpha^j}{j!} \right) \\ &= \alpha(1 - \pi(n)) = \alpha(1 - P_Z) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$\boxed{\kappa}$ - využitie systému (linky obsluhy).

$$\kappa = \frac{E(\mathbf{N}_S)}{n} = \rho(1 - P_Z) \quad (4.48)$$

$\boxed{E(\mathbf{W})}$ - stredná doba pobytu v systéme je rovnaká ako $\boxed{E(\mathbf{W}_S)}$ - stredná doba obsluhy zákazníka.

Z exponenciálneho rozdelenia doby obsluhy máme

$$E(\mathbf{W}) = E(\mathbf{W}_S) = \frac{1}{\mu} \quad (4.49)$$

λ_Z - stredný počet zamietnutých zákazníkov za jednotku času. Z vlastnosti Poissonovho procesu vieme, že za jednotku času nám do systému príde λ zákazníkov. Do systému sa dostane priemerne $E(\mathbf{N})$ zákazníkov, ktorí nájdu aspoň jednu linku voľnú a jedna z liniek ich bude obsluhovať strednú dobu $E(\mathbf{W})$. Ostatní zákazníci budú odmietnutí. Využijúc Littlovu formulu dostaneme

$$\lambda_Z = \lambda - \frac{E(\mathbf{N})}{E(\mathbf{W})} = \lambda - \lambda(1 - P_Z) = \lambda P_Z \quad (4.50)$$

Príklad 4.8. Na parkovisko s maximálnou kapacitou 40 vozidiel prichádza v období ustálenej prevádzky priemerne 20 voz./hod. Stredná doba pobytu vozidla na parkovisku je 2.5 hod. Aké je využitie parkoviska, priemerný počet voľných parkovacích miest a priemerný počet odmietnutých vozidiel za hodinu prevádzky?

Budeme predpokladať, že vstupný tok vozidiel je elementárny s intenzitou $\lambda = 20$ voz./hod. Stredná doba obsluhy, vozidla stojaceho na parkovisku, je $\frac{1}{\mu} = \frac{5}{2}$ hod. Potom $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 50$ a $\rho = \frac{\alpha}{n} = 1.25$.

$$P_Z = \frac{\alpha^n}{n!(\sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!})} = \frac{50^{40}}{40! \sum_{j=0}^{40} \frac{50^j}{j!}} = 0.25 \quad (4.51)$$

Takže

$$\begin{aligned} \kappa &= \rho(1 - P_Z) = 0.938 \\ n - E(\mathbf{N}) &= n - \alpha(1 - P_Z) = 2.5 \\ \lambda_Z &= \lambda P_Z = 5 \end{aligned}$$

Parkovisko je využívané na 93.8%, pri priemernom počte 2.5 voľných parkovacích miest a piatich zamietnutých vozidlách za hodinu prevádzky.

Poznámka. V prechádzajúcom príklade sme využili skutočnosť, že vďaka Chinčinovmu výsledku, na chakatere doby obluhy nezáleží, stačí poznať jej strednú hodnotu. Častejšie však poznáme rozdelenie doby obsluhy.

Príklad 4.9. V systéme $\mathbf{M} / \mathbf{G} / 2 / 2$ s 20% stratami sa hľadá využitie stabilizovaného systému, keď je doba obsluhy τ definovaná takto

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tau = 10 \text{ min.}) &= \frac{1}{5} \\ \mathcal{P}(\tau = 5 \text{ min.}) &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Stredná hodnota doby obsluhy je

$$\frac{1}{\mu} = E(\tau) = 10\frac{1}{5} + 5\frac{4}{5} = 6 \text{ min} = \frac{1}{10} \text{ hod.}$$

Hľadáme využitie systému $\kappa = \frac{\alpha}{2}(1 - P_Z)$. Stačí nájsť α z požiadavky

$$\begin{aligned} P_Z &= \frac{2}{10} \\ \frac{\alpha^2}{2 + 2\alpha + \alpha^2} &= \frac{2}{10} \\ 2\alpha^2 - \alpha - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Jediné kladné riešenie vyššie uvedenej kvadratickej rovnice je $\alpha = 1$. A tak využitie systému je $\kappa = \frac{1}{2}(1 - 0,2) = 0,4 = 40\%$.

Cvičenie. V prípade, keď je počet liniek n veľmi veľký, má zmysel uvažovať limitný prípad $\mathbf{M}/\mathbf{M}/\infty$ s nekonečným počtom liniek. V takomto systéme k odmietaniu zákazníka nedochádza, pretože je vždy k dispozícii voľná linka. Odvoďte stacionárne rozdelenie modelujúceho reťaca a základné charakteristiky v tomto systéme.

4.1.4 Systém $\mathbf{M}/\mathbf{M}/n/m$ s konečným frontom

V tomto n -linkovom systéme sa pripúšťa čakanie v obmedzenom rade frontu maximálnej prípustnej dĺžky $m - n$. Parameter m systému sa niekedy nazýva *kapacita* systému. Vstupný tok je Poissonov s intenzitou $\lambda > 0$ a doba obsluhy každej z liniek má exponenciálne rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu} > 0$. Zákazník, ktorý nájde v čase príchodu aspoň jednu voľnú linku, začne byť okamžite obsluhovaný niektorou z nich. Zákazníci, ktorí nájdu všetkých n liniek obsluhy obsadených, sa postaví do radu, ak v čase príchodu nie je front plný. Obyčajne sa predpokladá sa, že zákazníci budú obsluhovaní v poradí príchodov, t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**. Takýto systém je príkladom systémov s konečným frontom.

Od systému $\mathbf{M}/\mathbf{M}/n/\infty$ sa líši len konečným frontom. Systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}(t)\}_{t \in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Stav systému interpretujeme takto:

- 0 - prázdny systém,
- 1 - v systéme je jeden obsluhovaný zákazník,
- 2 - v systéme sú dvaja obsluhovaní zákazníci,

- n - v systéme je n obsluhovaných zákazníkov.
- $n+1$ - v systéme je $n+1$ zákazníkov (n obsluhovaných a jeden čakajúci na obsluhu),
- $n+q$ - v systéme je $n+q$ zákazníkov (n obsluhovaných a q čakajúcich),
- m - v systéme je m zákazníkov (n obsluhovaných a $m-n$ čakajúcich).

Odvodenie pravdepodobností prechodu pre nejaký dostatočne malý časový interval dĺžky Δt je zhodný s odvodením pre systém $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{n} / \infty$. Jediná zmena sa týka výpočtu pravdepodobnosti prechodu zo stavu m do stavu m za čas Δt

$$p_{\Delta t}(m, m) = (\mathcal{P}(\tau > \Delta t))^n = 1 - n\mu\Delta t + o(\Delta t)$$

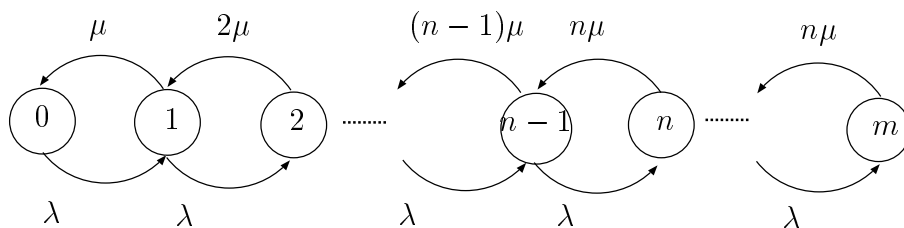
Dostaneme tak konečnorozmernú $(m+1) \times (m+1)$ maticu pravdepodobností prechodu za čas $\Delta t \rightarrow 0^+$ t.j. $\mathbb{P}(\Delta t) = (p_{\Delta t}(i, j), i, j \in S)$

$$p_{\Delta t}(i, j) = \begin{cases} \lambda\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = i + 1, 0 \leq i < m \\ i\mu\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = i - 1, 0 < i \leq n \\ n\mu\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = i - 1, n < i \leq m \\ 1 - (\lambda + i\mu)\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = i, 0 < i \leq n \\ 1 - (\lambda + n\mu)\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = i, n < i < m \\ 1 - n\mu\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = m, i = m \\ 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ o(\Delta t) & \text{ak } |i - j| \geq 2 \end{cases}$$

Ľahko z nej odvodíme maticu intenzít $\mathbb{Q} = (q(i, j), i, j \in S)$

$$q(i, j) = \begin{cases} \lambda & \text{ak } j = i + 1, 0 \leq i < m \\ i\mu & \text{ak } j = i - 1, 0 < i \leq n \\ n\mu & \text{ak } j = i - 1, n < i \leq m \\ -\lambda - i\mu & \text{ak } j = i, 0 < i \leq n \\ -\lambda - n\mu & \text{ak } j = i, n < i < m \\ -n\mu & \text{ak } j = m, i = m \\ -\lambda & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ 0 & \text{ak } |i - j| \geq 2 \end{cases}$$

Vidíme, že systém môžeme popísať ako špeciálny prípad konečného procesu vzniku a zániku s nasledujúcim prechodovým grafom 4.9.



Obr. 4.9: Prechodový graf systému $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{n} / \mathbf{m}$

Systém má jediné stacionárne rozdelenie, a tak z rezových rovníc rovnováhy dostávame Erlangove vzorce

$$\pi(j) = \begin{cases} \frac{\alpha^j}{j!} \pi(0) & \text{ak } 0 < j \leq n \\ \frac{n^n}{n!} \rho^j \pi(0) & \text{ak } n < j \leq m \\ \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^m \rho^j \right)^{-1} & \text{ak } j = 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

kde $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ a $\rho = \frac{\alpha}{n}$

Cvičenie. Overte, že z Erlangových vzorcov (4.52) dostaneme príslušné Erlangove vzorce pre systémy:

- $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{n} / \infty$ ak $m \rightarrow \infty$,
- $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{n} / \mathbf{n}$ ak $m = n$,
- $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \infty$ ak $n \rightarrow \infty$.

Erlangove vzorce síce umožňujú vypočítať *základné charakteristiky* stabilizovaného systému, ale vedú k zložitým vzorcom, a tak sa pri riešení praktických úloh uprednostňuje ich *numerický* výpočet.

$\boxed{P_Z}$ pravdepodobnosť, že prichádzajúci zákazník bude zamietnutý.

$$P_Z = \pi(m) \quad (4.53)$$

$\boxed{P_Q}$ – pravdepodobnosť, že prichádzajúci zákazník bude čakať vo fronte.

$$\begin{aligned} P_Q &= \sum_{j=n}^{m-1} \pi(j) = \sum_{j=n}^{m-1} \frac{n^n}{n!} \rho^j \pi(0) = \frac{\alpha^n}{n!} \pi(0) \sum_{j=0}^{m-n-1} \rho^j \\ &= \begin{cases} \pi_n \frac{1 - \rho^{m-n}}{1 - \rho} & \text{ak } \rho \neq 1 \\ \pi_n(m-n) & \text{ak } \rho = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$\boxed{E(\mathbf{N}_Q)}$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte.

$$E(\mathbf{N}_Q) = \sum_{j=n+1}^m (j-n)\pi(j) = \frac{\alpha^n \pi_0}{n!} \sum_{j=1}^{m-n} j \rho^j = \pi(n) \sum_{j=1}^{m-n} j \rho^j \quad (4.55)$$

$\boxed{E(\mathbf{N}_S)}$ – stredný počet obsadených liniek v systéme. Využijeme rekurentný prepis Erlangových vzorcov (4.52)

$$\pi(j) = \begin{cases} \frac{\alpha}{j} \pi(j-1) & \text{ak } 0 < j \leq n \\ \rho \pi(j-1) & \text{ak } n < j \leq m \end{cases} \quad (4.56)$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} E(\mathbf{N}_S) &= \sum_{j=0}^n j \pi(j) + n \sum_{j=n+1}^m \pi(j) = \sum_{j=1}^n \alpha \pi(j-1) + n \sum_{j=n+1}^m \rho \pi(j-1) \\ &= \alpha(\pi(0) + \pi(1) + \dots + \pi(n) + \pi(n+1) + \dots + \pi(m-1)) \\ &= \alpha(1 - \pi(m)) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$\boxed{\kappa}$ – využitie systému (linky obsluhy).

$$\kappa = \frac{E(\mathbf{N}_S)}{n} = \rho(1 - \pi(m)) \quad (4.58)$$

Ďalšie významné charakteristiky systému vypočítame pomocou Littlovej formuly.

$\boxed{\lambda_P}$ – stredný počet prijatých zákazníkov za jednotku času je rovný strednému počtu odchádzajúcich zákazníkov za jednotku času. Z Littlovej formuly aplikovanej na výstupný tok zákazníkov (neskôr zdôvodníme prečo je to možné) dostávame

$$\lambda_P = \frac{E(\mathbf{N}_S)}{\frac{1}{\mu}} = \mu \alpha (1 - \pi(m)) = \lambda(1 - P_Z) \quad (4.59)$$

λ_Z - stredný počet zamietnutých zákazníkov za jednotku času. Z vlastnosti elementárneho vstupného toku zákazníkov vieme, že za jednotku času nám do systému príde λ zákazníkov. Do systému sa dostane za jednotku času λ_P zákazníkov, ostatní zákazníci budú odmietnutí.

$$\lambda_Z = \lambda - \lambda_P = \lambda - \lambda(1 - P_Z) = \lambda P_Z \quad (4.60)$$

$E(\mathbf{W}_Q)$ - stredná doba čakania vo fronte

$$E(\mathbf{W}_Q) = \frac{E(\mathbf{N}_Q)}{\lambda_P} \quad (4.61)$$

$E(\mathbf{W}_S)$ - stredná doba obsluhy v systéme. Z exponenciálneho rozdelenia doby obsluhy máme

$$E(\mathbf{W}_S) = \frac{1}{\mu} \quad (4.62)$$

$E(\mathbf{W})$ - stredná doba pobytu v systéme. Doba pobytu sa skladá z doby čakania a z doby obsluhy

$$E(\mathbf{W}) = E(\mathbf{W}_Q) + E(\mathbf{W}_S) \quad (4.63)$$

$E(\mathbf{N})$ - stredný počet zákazníkov v systéme

$$E(\mathbf{N}) = \lambda_P E(\mathbf{W}) = \lambda_P E(\mathbf{W}_Q) + \lambda_P E(\mathbf{W}_S) = E(\mathbf{N}_Q) + E(\mathbf{N}_S) \quad (4.64)$$

Príklad 4.10. Dvojlinkový stabilizovaný systém $\mathbf{M} / \mathbf{M} / 2 / 5$ je využívaný na 68.6%. Aký je priemerný počet čakajúcich zákazníkov a koľko percent z prichádzajúcich zákazníkov bude odmietnutých?

Poznáme počet liniek $n = 2$ a využitie systému $\kappa = \frac{\alpha}{2}(1 - P_Z) = 0.686$. Hľadá sa $N_Q = \pi_3 + 2\pi_4 + 3\pi_5$ a pravdepodobnosť odmietnutia zákazníka $P_Z = \pi_5$. Najskôr vypočítame zaťaženie systému α zo známeho využitia systému κ a vzťahov (4.58), (4.53) a (4.52) ako riešenie polynomickej rovnice

$$0.686 = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\frac{\alpha^5}{2^4}}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^3}{2^3} \right)} \right)$$

vhodnou numerickou metódou alebo využitím optimalizačnej funkcie *Solver* napr. v tabuľkových procesoroch *Excel* alebo *Gnumeric*, odkiaľ dostaneme $\alpha = \frac{3}{2}$. Potom

$$E(\mathbf{N}_Q) = \frac{\frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{\alpha}{2} + 2 \frac{\alpha^2}{2^2} + 3 \frac{\alpha^3}{2^3} \right)}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^3}{2^3} \right)} = 0.63$$

$$P_Z = \frac{\frac{\alpha^5}{2^4}}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^3}{2^3} \right)} = 0.085 = 8.5\%$$

Pri praktických výpočtoch sa uprednostňuje výpočet v tabuľke pomocou substitúcie

$$q_j = \frac{\pi(j)}{\pi(0)} \quad (4.65)$$

ako sme ju poznali v predchádzajúcich modeloch (4.35).

Cvičenie. Realizujte výpočet stacionárneho rozdelenia reťazca v príklade 4.10 a charakteristik P_Q , P_Z , $E(\mathbf{N}_Q)$, $E(\mathbf{N}_S)$, pomocou substitúcie (4.65) a príslušnej tabuľky.

Praktickou optimalizačnou úlohou vo viaclinkových systémoch s odmietaním je úloha *optimalizácie počtu liniek s konštantnou čakárňou*. Základný model vychádza zo známych príjmov od zákazníkov, nákladov za čakanie zákazníkov v systéme a za počet liniek. Nech sú známe tieto náklady na prevádzku stabilizovaného systému

- c_1 - priemerný príjem za obsluhu jedného zákazníka,
- c_2 - priemerná zľava za čakanie zákazníka za jednotku času,
- c_3 - fixné náklady na prevádzku linky obsluhy za jednotku času,
- K_{\max} - konštantný maximálny počet čakajúcich zákazníkov.

Cieľom je nájsť taký počet liniek systému n , s kapacitou systému m , že $0 \leq m - n = K_{\max}$, pri ktorom je celkový priemerný zisk, vyprodukovaný systémom za jednotku času, maximálny. Potom *kriteriálna funkcia* $Z(n)$

$$Z(n) = c_1 \lambda_P - c_2 E(\mathbf{N}_Q) - c_3 n \quad (4.66)$$

je zložená z troch častí. Priemerný príjem za obslužených zákazníkov $c_1\lambda_P$ je úmerný priemernému počtu obslužených zákazníkov. Priemerné náklady za zľavy čakajúcim zákazníkom c_2N_Q sú úmerné priemernému počtu čakajúcich zákazníkov. Fixné náklady na prevádzku liniek c_3n sú úmerné počtu liniek v systéme. Takže hľadáme systém $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{n} / \mathbf{m}$ s parametrom $m = n + K_{\max}$, produkujúci maximálny zisk pri danom maximálnom počtom čakajúcich zákazníkov K_{\max} . Po dosadení príslušných charakteristík systému do (4.66) dostaneme

$$Z(n) = c_1\lambda(1 - \pi(m)) - c_2E(\mathbf{N}_Q) - c_3n \quad (4.67)$$

Cieľom je potom nájsť n^* pri ktorom je

$$Z(n^*) = \max\{Z(n) : n \geq 1, n \text{ je prirodzené číslo}\} \quad (4.68)$$

Príklad 4.11. *Do opravovne traktorov prichádza priemerne za mesiac 5 pokazených traktorov. Jeden opravár za mesiac opraví priemerne dva traktory. Cena jednej opravy v bežnom mesiaci je priemerne 100 tis.Sk. Ak nemožno začať s opravou okamžite po prebratí pokazeného traktora, je zákazníkovi priznaná zľava vo výške 10 tis.Sk. Hrubá mesačná mzda opravára je priemerne 20 tis.Sk. Zákazník je ochotný čakať na opravu len v prípade, ak je nanajvyšš piatym čakajúcim zákazníkom. Pri akom počte opravárov dosiahne opravovňa, pri stabilizovanej prevádzke, maximálny priemerný mesačný zisk?*

Budeme predpokladať, že vstupný tok zákazníkov je Poissonov s parametrom $\lambda = 5$ zák./mes. Doba obsluhy každého opravára má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\mu = 2$ zák./mes. Zataženie systému je $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 2.5$. Priemerný príjem opravovne za opravu traktora je $c_1 = 100000$ Sk, priemerné náklady za zľavu čakajúceho zákazníka sú $c_2 = 10000$ Sk/mes. a priemerné náklady na mesačnú mzdu opravárovi sú $c_3 = 20000$ Sk/mes. Maximálny počet čakajúcich zákazníkov je $K_{\max} = 5$, takže pri počte opravárov n môže byť v opravovni $m = n + 5$ pokazených traktorov.

Pri výpočte kriteriálnej funkcie $Z(n)$ využijeme substitúciu (4.65) takto

$$\pi(m) = \pi(n + 5) = \frac{q_n \rho^5}{\sum_{j=0}^n q_j + q_n(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \rho^5)} \quad (4.69)$$

$$E(\mathbf{N}_Q) = \frac{q_n(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + 4\rho^4 + 5\rho^5)}{\sum_{j=0}^n q_j + q_n(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \rho^5)} \quad (4.70)$$

Výsledky výpočtu môžeme opäť zapísať do tabuľky 4.5. Vidíme, že maximálny mesačný zisk dosiahne opravovňa traktorov pri štyroch opravároch, zisk bude $Z(4) = 389062$ Sk.

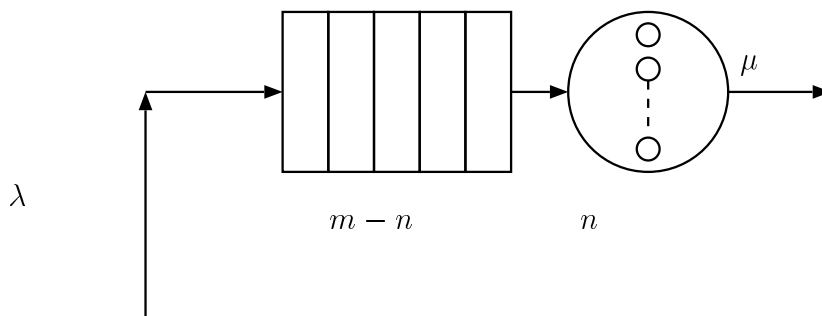
n	ρ	q_n	m	$\sum_j q_j$	q_m	N_Q	$Z(n)$
0		1					
1	2.50	2.50	6	406.23	244.1406	4.3473	136035
2	1.25	4.94	7	59.13	15.0789	2.9463	303031
3	0.83	18.09	8	80.63	7.2698	1.7717	377202
4	0.63	347.95	9	899.08	33.1827	1.2484	389062
5	0.6	451658.39	10	889576.93	14114.3247	0.9044	383023

Tabuľka 4.5: Výpočet kritériálnej funkcie $Z(n)$

4.1.5 Uzavretý systém $M / M / n / m$

V tomto n -linkovom systéme cirkuluje m zákazníkov, pričom môžu čakať v obmedzenom rade frontu maximálnej dĺžky $m - n \geq 0$ na uvoľnenie niektorej linky. Zákazníci po ukončení obsluhy opúšťajú systém, ale neskôr sa do neho vracajú s opätovnou požiadavkou na obsluhu.

Prípád $m = n$ je triviálny, pretože stačí priradiť každému zákazníkovi práve jednu linku obsluhy a dostaneme tak n jednolinkových systémov s jedným cirkulujúcim zákazníkom. Ďalej sa budeme zaoberať len prípadom, keď $m > n$.



Obr. 4.10: Uzavretý systému $M / M / n / m$

Doba pobytu každého zákazníka mimo systém má exponenciálne rozdelenie s tou istou strednou hodnotou $\frac{1}{\lambda} > 0$. Doba obsluhy každej z liniek má tiež exponenciálne rozdelenie s rovnakou strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu} > 0$. Zákazník, ktorý nájde v čase príchodu aspoň jednu voľnú linku, začne byť okamžite obsluhovaný niektorou z nich. Zákazníci, ktorí nájdu všetkých n liniek obsluhy obsadených, sa postavia do radu. Na takto vzniknutý front sa opäť nekladú

žiadne obmedzenia. Opäť môžeme predpokladať, že zákazníci sú obsluhovaní v poradí príchodov, t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**. Takýto systém je príkladom uzavretých systémov.

Ukážeme, že systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbf{N}(t)\}_{t \in T}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Stav systému interpretujeme takto:

- 0 - prázdny systém (všetkých m zákazníkov je mimo systém),
- 1 - v systéme je jeden obsluhovaný zákazník, ostatných $m - 1$ je mimo systém,
- n - v systéme je n obsluhovaných zákazníkov (ostatných $m - n$ je mimo systém),
- $n+1$ - v systéme je $n+1$ zákazníkov (n obsluhovaných a jeden čakajúci na obsluhu a $m - n - 1$ mimo systém),
- $n+q$ - v systéme je $n+q$ zákazníkov (n obsluhovaných a q čakajúcich a $m - n - q$ mimo systém),
- m - v systéme je m zákazníkov (n obsluhovaných a $m - n$ čakajúcich).

Vypočítame pravdepodobnosti prechodu pre nejaký dostatočne malý časový interval dĺžky Δt . Využijeme bezpamäťovú vlastnosť exponenciálneho rozdelenia. Doba pobytu aj zvyšková doba pobytu zákazníka má exponenciálne rozdelenie s parametrom λ a tak pravdepodobnosť, že jeden zákazník mimo systém za čas Δt príde do systému je $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ a že zotrvá mimo systém je $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Podobne doba obsluhy aj zvyšková doba obsluhy má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ a tak pravdepodobnosť, že jeden zákazník v systéme za čas Δt odíde zo systému je $\mu\Delta t + o(\Delta t)$ a že zotrvá v systéme je $1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)$.

Ak je v systéme v stave i , ($0 \leq i < m$), t.j. i je počet obsluhovaných a čakajúcich zákazníkov (z toho $\min\{i, n\}$ je obsluhovaných), zostáva mimo systém $m - i$ zákazníkov. Pravdepodobnosť, že práve jeden z nich príde a ostani ani neprídu ani neodídu je

$$p_{\Delta t}(i, i+1) = (m-i)(\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))^{m-i-1} \\ (1 - \mu\Delta t + o(\Delta t))^{\min\{i, n\}} = (m-i)\lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

Ak je systém v stave i , ($1 \leq i \leq m$) potom pravdepodobnosť, že práve jedna linka z $\min\{i, n\}$ aktívnych liniek ukončí obsluhu zákazníka a ostatní ani neprídu ani neodídu je

$$p_{\Delta t}(i, i-1) = \min\{i, n\}(\mu\Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t + o(\Delta t))^{\min\{i, n\}-1} \\ (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))^{m-i} = \min\{i, n\}\mu\Delta t + o(\Delta t)$$

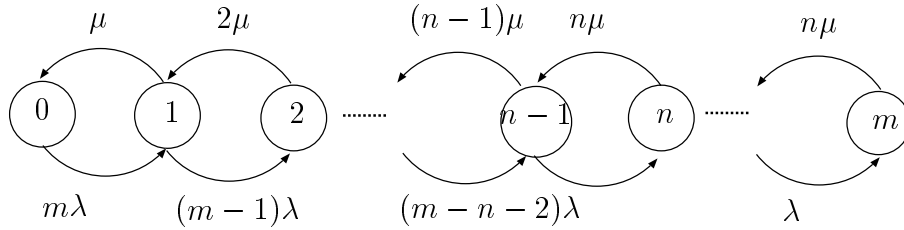
Dostaneme tak konečnorozmernú $(m+1) \times (m+1)$ maticu pravdepodobností prechodu za čas $\Delta t \rightarrow 0^+$ t.j. $\mathbb{P}(\Delta t) = (p_{\Delta t}(i, j))_{i, j \in S}$

$$p_{\Delta t}(i, j) = \begin{cases} (m-i)\lambda\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = i+1, 0 \leq i < m \\ i\mu\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = i-1, 0 < i \leq n \\ n\mu\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = i-1, n < i \leq m \\ 1 - ((m-i)\lambda + i\mu)\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = i, 0 < i \leq n \\ 1 - ((m-i)\lambda + n\mu)\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = i, n < i < m \\ 1 - n\mu\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = m, i = m \\ 1 - m\lambda\Delta t + o(\Delta t) & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ o(\Delta t) & \text{ak } |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

Ľahko z nej odvodíme maticu intenzít $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i, j \in S}$

$$q(i, j) = \begin{cases} (m-i)\lambda & \text{ak } j = i+1, 0 \leq i < m \\ i\mu & \text{ak } j = i-1, 0 < i \leq n \\ n\mu & \text{ak } j = i-1, n < i \leq m \\ -((m-i)\lambda + i\mu) & \text{ak } j = i, 0 < i \leq n \\ -((m-i)\lambda + n\mu) & \text{ak } j = i, n < i < m \\ -n\mu & \text{ak } j = m, i = m \\ -m\lambda & \text{ak } j = 0, i = 0 \\ 0 & \text{ak } |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

Vidíme, že systém môžeme popísať ako špeciálny prípad konečného procesu vzniku a zániku s nasledujúcim prechodovým grafom na obr.4.12. Má



Obr. 4.11: Prechodový graf uzavretého systému $\mathbf{M} / \mathbf{M} / \mathbf{n} / \mathbf{m}$

jediné stacionárne rozdelenie, a tak z rezových rovníc rovnováhy dostávame vzorce v rekurentnom tvare

$$\pi(j) = \begin{cases} \frac{m-j+1}{j} \alpha \pi(j-1) & \text{ak } 0 < j \leq n \\ (m-j+1) \frac{\rho}{m} \pi(j-1) & \text{ak } n < j \leq m \\ 1 - \sum_{j=1}^m \pi(j) & \text{ak } j = 0 \end{cases} \quad (4.71)$$

kde $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ a $\rho = \frac{\alpha}{n}$

Vzorce (4.71) umožňujú vypočítať základné charakteristiky stabilizovaného systému numericky, ich explicitný tvar je však pomerne zložitý. Opäť sa výhodne využíva substitúcia pre výpočet stacionárnych pravdepodobností $\pi(j) = q_j \pi(0)$, kde

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } j = 0 \\ \frac{m-j+1}{j} \alpha q_{j-1} & \text{ak } 0 < j \leq n \\ (m-j+1) \rho q_{j-1} & \text{ak } n < j \leq m \end{cases} \quad (4.72)$$

$E(\mathbf{N})$ - stredný počet zákazníkov v systéme.

$$E(\mathbf{N}) = \sum_{j=0}^m j \pi(j) = \frac{\sum_{j=1}^m j q_j}{\sum_{j=0}^m q_j} \quad (4.73)$$

$E(\mathbf{N}_S)$ - stredný počet obsadených liniek v systéme.

$$E(\mathbf{N}_S) = \sum_{j=1}^{n-1} j \pi(j) + n \sum_{j=n}^m \pi(j) = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} j q_j + n \sum_{j=n}^m q_j}{\sum_{j=0}^m q_j} \quad (4.74)$$

$E(\mathbf{N}_Q)$ - stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte.

$$E(\mathbf{N}_Q) = \sum_{j=n+1}^m (j-n) \pi(j) = \frac{\sum_{j=n+1}^m (j-n) q_j}{\sum_{j=0}^m q_j} = E(\mathbf{N}) - E(\mathbf{N}_S) \quad (4.75)$$

$E(\mathbf{N}_R)$ - stredný počet zákazníkov mimo systém.

$$E(\mathbf{N}_R) = \sum_{j=1}^m j \pi(m-j) = \frac{\sum_{j=1}^m j q_{m-j}}{\sum_{j=0}^m q_j} = m - E(\mathbf{N}_S) - E(\mathbf{N}_Q) \quad (4.76)$$

λ_R - stredný počet prichádzajúcich zákazníkov za jednotku času (intenzita vstupného toku zákazníkov). V uzavretom systéme je stredný počet prichádzajúcich zákazníkov za jednotku času rovný strednému počtu odchádzajúcich zákazníkov za jednotku času. Littlovú formulu možno aplikovať aj na

j	q_j	$\pi(j)$	$E(\mathbf{N})$	$E(\mathbf{N}_S)$	$E(\mathbf{N}_Q)$	$E(\mathbf{N}_R)$
0	1	2/17	0	0	0	2
1	3	6/17	1	1	0	1
2	9/2	9/17	2	1	1	0
Σ	17/2	1	24/17	15/17	9/17	10/17

Tabuľka 4.6: Charakteristiky systému $\mathbf{M}/\mathbf{M}/1/2$

výstupný tok zákazníkov (neskôr ukážeme kedy) a tak dostávame

$$\begin{aligned}
\lambda_R &= \frac{E(\mathbf{N}_S)}{\frac{1}{\mu}} = \mu \left(\sum_{j=1}^n j\pi(j) + n \sum_{j=n+1}^m \pi(j) \right) \\
&= \mu \left(\alpha \sum_{j=1}^n (m-j+1)\pi(j-1) + n\rho \sum_{j=n+1}^m (m-j+1)\pi(j-1) \right) \\
&= \mu \alpha \sum_{j=1}^m (m-j+1)\pi(j-1) = \lambda(m\pi(0) + (m-1)\pi(1) + \dots + \pi(m-1)) \\
&= \lambda E(\mathbf{N}_R)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$\boxed{\kappa}$ využitie systému (linky obsluhy). Z (4.77) dostávame $\lambda E(\mathbf{N}_R) = \mu E(\mathbf{N}_S)$, čo vedie na neočakávaný vzťah

$$\kappa = \frac{E(\mathbf{N}_S)}{n} = \rho E(\mathbf{N}_R) \tag{4.78}$$

Príklad 4.12. V uzavretom stabilizovanom systéme $\mathbf{M} / \mathbf{M} / 1 / 2$, kde $\lambda = 3, \mu = 2$, vypočítajte stacionárne pravdepodobnosti stavov systému a základné charakteristiky.

Máme jednolinkový uzavretý systém v ktorom cirkulujú dvaja zákazníci so zaťažením systému $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 1.5$. Základné charakteristiky máme v tabuľke 4.6 s využitím systému $\kappa = \frac{15}{17} = 0.882 = 88.2\%$.

Z Littlovej formule dostaneme dve časové charakteristiky systému:

$\boxed{E(\mathbf{W}_Q)}$ - stredná doba čakania zákazníka vo fronte.

$$E(\mathbf{W}_Q) = \frac{E(\mathbf{N}_Q)}{\lambda_R} = \frac{E(\mathbf{N}_Q)}{\lambda E(\mathbf{N}_R)} \tag{4.79}$$

$E(\mathbf{W}_R)$ - stredná doba obehu zákazníka. Doba obehu zákazníka je zložená z doby čakania, z doby obsluhy a z doby pobytu mimo systém.

$$E(\mathbf{W}_R) = E(\mathbf{W}_Q) + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \quad (4.80)$$

Príklad 4.13. V kameňolome cirkulujú vodiči nákladných vozidiel TATRA, medzi drtičkou a bágroviskom. Stredná doba nakládky kamenia má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou $\frac{1}{\mu}$. Tiež stredná doba strávená jazdou vozidla k drtičke, vykládkou kamenia a návratom na bágrovisko má exponenciálne rozdelenia so strednou hodnotou $\frac{1}{\lambda}$. Priemerný mesačný výkon vodičov vozidla je m_v obehov. Drtička vyžaduje na svoju efektívnu mesačnú prevádzku priemerne aspoň m_d vykládok vozidla. Mesačná mzda bágristu je c_b Sk a vodiča vozidla je c_v Sk. Treba určiť optimálny počet bágristov a vodičov tak, aby sa minimalizovali priemerné straty z prestojov vodičov i bágritov.

Úlohu možno modelovať ako markovov uzavretý systém $\mathbf{M}/\mathbf{M}/n/m$, kde n je počet bágristov a m je počet vodičov vozidiel. Dolný odhad počtu vodičov je daný minimálnou potrebou priemerného počtu vykládok t.j. počet vodičov m musí byť $m \geq \frac{m_d}{m_v}$. Priemerný počet nevyužitých bágristov je $n - E(\mathbf{N}_S)$. Pri mesačnej mzde vo výške c_b môžeme priemerné straty z prestojov bágristov odhadnúť vo výške $c_b \cdot (n - E(\mathbf{N}_S))$. Vodiči vozidiel stoja, ak čakajú na nakládku bágra. Priemerné straty z prestojov vodičov môžeme odhadnúť vo výške $c_v \cdot E(\mathbf{N}_Q)$. Potom celkové priemerné straty kameňolomu na mzdách n bágristov a m vodičov vozidiel pri zaťažení bágrov $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ sú

$$C(n, m) = c_b(n - E(\mathbf{N}_S)) + c_v E(\mathbf{N}_Q)$$

Cieľom je nájsť také n^* a m^* , pri ktorých je

$$C(n^*, m^*) = \min\{C(n, m) : m \geq \frac{m_d}{m_v}, n, m \text{ sú prirodzené čísla}\}$$

Zo vzťahov (4.74), (4.75) a (4.72) tak dostávame diskrétnu optimalizačnú úlohu:

$$\frac{c_b \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)q_j - c_v \sum_{j=n+1}^m (j-n)q_j}{\sum_{j=0}^m q_j} \rightarrow \min$$

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } j = 0 \\ \frac{m-j+1}{j} \alpha q_{j-1} & \text{ak } 0 < j \leq n \\ (m-j+1) \rho q_{j-1} & \text{ak } n < j \leq m \end{cases}$$

$$m \geq \frac{m_d}{m_v}, m, n - \text{prirodzené čísla}$$

Poznámka. Vyššie uvedená optimalizačná úloha bola jednou z praktických úloh riešených VÚD Žilina v rokoch 1991/92 pre Kameňolom Ladce.

4.2 Markovove systémy s prioritami

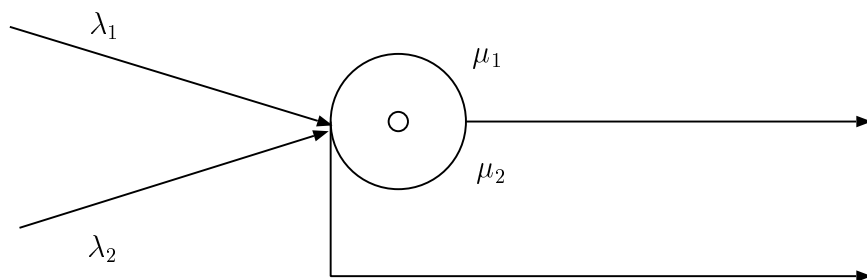
Ak prichádzajúci zákazníci vytvárajú rôzne triedy požiadaviek, pričom sú niektorí uprednostňovaní, hovoríme o *systéme s prioritnými zákazníkmi*. Rozoznávajú sa nasledujúce základné triedy priorít zákazníka:

- *absolútna s odmietaním* - prioritný zákazník ukončí obsluhu neprioritného zákazníka, ktorý musí opustiť systém,
- *absolútna s opakovaním* - prioritný zákazník preruší obsluhu neprioritného zákazníka, ktorý je neskôr buď doobsluhovaný alebo začne jeho obsluhu od začiatku,
- *relatívna* - prioritný zákazník čaká na ukončenie obsluhy neprioritného zákazníka.

Prichádzajúci prioritní zákazníci môžu vytvárať rad čakajúcich prioritných zákazníkov pokiaľ to charakter systému umožňuje. Prichádzajúci neprioritní zákazníci sú okamžite obsluhovaní len ak nájdu voľnú linku, inak ak je to možné vytvárajú rad neprioritných zákazníkov. Uvedené triedy prioritných zákazníkov budeme demonštrovať na jednoduchých *markovových systémoch*.

4.2.1 M/M/1/1 s absolútnou prioritou a odmietaním

Do jednolinkového systému s odmietaním prichádzajú dva Poissonove toky zákazníkov. Vstupný tok zákazníkov s absolútnou prioritou má intenzitu λ_1 a tok neprioritných zákazníkov má intenzitu λ_2 . Doba obsluhy prioritných zákazníkov má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1 . Doba obsluhy neprioritných zákazníkov má tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_2 .



Obr. 4.12: Systém M / M / 1 / 1 s absolútnou prioritou a odmietaním

Ak príde do systému prioritný zákazník a nájde linku prázdnu, začne jeho obsluhu, ktorá bude ukončená priemerne za čas $\frac{1}{\mu_1}$. Ak nájde v systéme iného

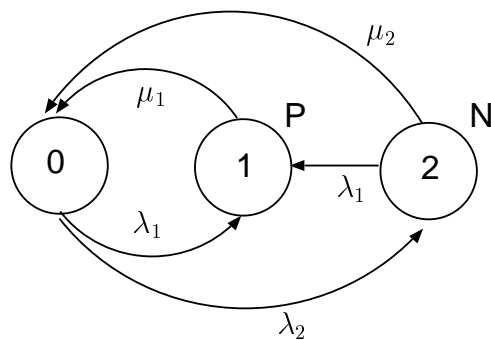
prioritného zákazníka, bude prichádzajúci prioritný zákazník odmietnutý. Ak však nájde v systéme neprioritného zákazníka, uplatní sa absolútna priorita prichádzajúceho zákazníka, ktorý ukončí obsluhu neprioritného zákazníka. Tento neprioritný zákazník opúšťa nielen linku, ale aj systém.

Ak príde do systému neprioritný zákazník a nájde linku prázdnu, začne jeho obsluha, ktorá bude ukončená priemerne za čas $\frac{1}{\mu_2}$. Ak nájde v systéme zákazníka, bude systémom odmietnutý.

Systém modelujeme ako homogénny Markovov reťazec $\{N(t), t \geq 0\}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2\}$, ktorého stavy interpretujeme takto:

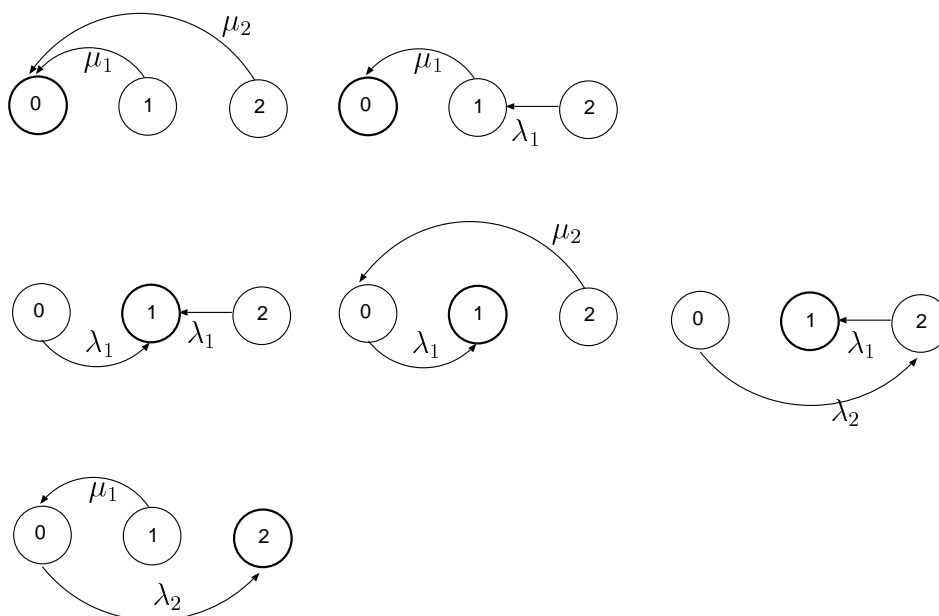
- 0 - systém je prázdny,
- 1 (P) - linka obsluhuje prioritného zákazníka,
- 2 (N) - linka obsluhuje neprioritného zákazníka.

Markovovú vlastnosť reťazca zabezpečuje bezpamäťová vlastnosť exponenciálneho rozdelenia. Dĺžky medzier medzi príchodmi prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrami λ_1 a λ_2 . Dĺžky dôb ale aj zvyškových dôb obslúh prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1 a μ_2 . Prechodový graf systému máme na obr.4.13.



Obr. 4.13: Prechodový graf jednolinkového systému s absolútnou prioritou a odmietaním zákazníkov

Reťazec je ergodický a jeho jediné stacionárne rozdelenie môžeme hľadať grafovou metódou. Príslušné ohodnotené orientované kostry s koreňmi vo vrcholoch prechodového digrafu máme na obr.4.14. Dostávame tak vzorce



Obr. 4.14: Ohodnotené orientované kostry grafovej metódy

pre výpočet stacionárneho rozdelenia $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \pi(1), \pi(2))$

$$\pi(0) = \frac{B_0}{B_0 + B_1 + B_2} = \frac{\mu_1(\lambda_1 + \mu_2)}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)} \quad (4.81)$$

$$\pi(1) = \frac{B_1}{B_0 + B_1 + B_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \quad (4.82)$$

$$\pi(2) = \frac{B_2}{B_0 + B_1 + B_2} = \frac{\lambda_2\mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)} \quad (4.83)$$

Poznámka. Pravdepodobnosť obsluhy prioritného zákazníka $\pi(1)$ nezávisí od parametrov λ_2, μ_2 neprioritného zákazníka, čo je v zhode so správaním zákazníka s absolútnou prioritou.

Z charakteristík stabilizovaného systému sú významné

$\boxed{\kappa}$ – využitie systému (linky obsluhy). Linka je využívaná pokiaľ nie je prázdna, a tak

$$\kappa = 1 - \pi(0) \quad (4.84)$$

$\boxed{P_{O1}}$ – pravdepodobnosť odmietnutia prioritného zákazníka. Prioritný zákazník bude odmietnutý len ak nájde v systéme iného prioritného zákazníka, a tak

$$P_{O1} = \pi(1) \quad (4.85)$$

P_{O_2} pravdepodobnosť odmietnutia neprioritného zákazníka. Neprioritný zákazník bude odmietnutý ak nastane jav A - nájde linku obsadenú alebo ak nastane jav B - počas obsluhy neprioritného zákazníka príde zákazník s absolútnou prioritou

$$P_{O_2} = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$$

Jav A nastane, ak neprioritný zákazník nájde linku obsadenú nejakým prioritným alebo neprioritným zákazníkom

$$\mathcal{P}(A) = 1 - \pi(0)$$

Jav B je však zjednotením dvoch disjunktných javov $B \cap A$ a $B \cap \bar{A}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B) &= \mathcal{P}(B \cap A) + \mathcal{P}(B \cap \bar{A}) = \mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B|\bar{A})\mathcal{P}(\bar{A}) \\ &= 0 \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B|\bar{A})\mathcal{P}(\bar{A}) = \mathcal{P}(\bar{A}) \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-\mu_2 t} dt \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_2} \pi(0) \end{aligned} \quad (4.86)$$

A tak dostávame

$$\begin{aligned} P_{O_2} &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) = 1 - \pi(0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_2} \pi(0) \\ &= 1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \mu_2} \pi(0) = 1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Príklad 4.14. Do stabilizovaného jednolinkového Markovovho systému s odmietaním prichádzajú dva vstupné toky zákazníkov s absolútnou prioritou a bez priority. Systém je využívaný na 80% pričom bolo zistené, že 20% prichádzajúcich zákazníkov nájdu v systéme neprioritného zákazníka. Koľko percent prioritných zákazníkov bude odmietnutých?

Sú známe $\kappa = 0.8$, $\pi_2 = 0.2$. Hľadá sa $P_{O_1} = \pi_1$.

Zo vzťahu (4.84) a po substitúcii $\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$ z (4.82) máme

$$\kappa = 1 - \pi(0) = \pi(1) + \pi(2) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 1} + \pi(2)$$

A tak po dosadení dostaneme $\alpha_1 = \frac{3}{2}$. Z (4.85) máme

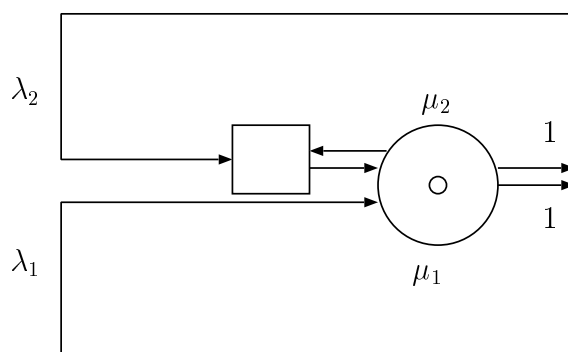
$$P_{O_1} = \pi(1) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 1} = 0.6$$

A tak 60% prichádzajúcich prioritných zákazníkov bude odmietnutých.

Cvičenie. Výsledky zovšeobecnite na jednolinkový systém $M/M/1/2$ a dvojlínkový systém $M/M/2/2$ s absolútnou prioritou a odmietaním.

4.2.2 Uzavretý M/M/1/2 s absolútnou prioritou a opakovanou obsluhou

V jednolinkovom uzavretom systéme cirkulujú dvaja zákazníci, jeden zákazník z absolútnou prioritou a jeden neprioritný zákazník. Doba pobytu prioritného zákazníka mimo systém má exponenciálne rozdelenie s parametrom λ_1 a podobne doba pobytu neprioritného zákazníka má exponenciálne rozdelenie s parametrom λ_2 . Doba obsluhy prioritného resp. neprioritného zákazníka má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1 resp μ_2 .



Obr. 4.15: Uzavretý M/M/1/2 s absolútnou prioritou a opakovanou obsluhou

Ak príde do systému prioritný zákazník a nájde linku prázdnu, začne jeho obsluha, ktorá bude ukončená priemerne za čas $\frac{1}{\mu_1}$. Ak nájde v systéme neprioritného zákazníka, uplatní sa absolútna priorita prichádzajúceho zákazníka, ktorý preruší obsluhu neprioritného zákazníka. Tento neprioritný zákazník opúšťa linku a vracia sa do frontu. Keď príde neskôr na rad, vykoná sa zvyšková doba obsluhy zákazníka (môže byť opäť prerušovaná príchodom prioritného zákazníka). Zvyšková doba obsluhy neprioritného zákazníka má to isté rozdelenie ako jeho doba obsluhy. Keď prioritný zákazník ukončí obsluhu, pobudne mimo systém priemerne dobu $\frac{1}{\lambda_1}$, a opäť požaduje obsluhu.

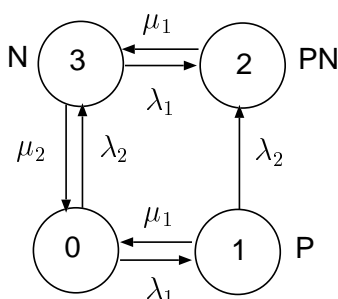
Ak príde do systému neprioritný zákazník a nájde linku prázdnu, začne jeho obsluha, ktorá bude ukončená priemerne za čas $\frac{1}{\mu_2}$. Ak nájde v systéme prioritného zákazníka, zaradí sa do frontu. Po ukončení obsluhy pobudne mimo systém priemerne dobu $\frac{1}{\lambda_2}$ a opäť požaduje obsluhu.

Systém modelujeme ako homogénny Markovov reťazec $\{N(t), t \geq 0\}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, ktorého stavy interpretujeme takto:

- 0 - systém je prázdny (obaja zákazníci sú mimo systém),
- 1 (P) - linka obsluhuje prioritného zákazníka a neprioritný zákazník je mimo systém,

- 2 (PN) - linka obsluhuje prioritného zákazníka a neprioritný zákazník čaká,
- 3 (N) - linka obsluhuje neprioritného zákazníka a prioritný zákazník je mimo systém.

Markovovú vlastnosť reťazca zabezpečuje bezpamäťová vlastnosť exponenciálneho rozdelenia. Dĺžky dôb pobytu aj zvyškových dôb pobytu prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrami λ_1 a λ_2 . Dĺžky dôb aj zvyškových dôb obslúh prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1 a μ_2 . Prechodový graf systému máme na obr.4.16.



Obr. 4.16: Prechodový graf jedolinkového uzavretého systému s absolútnou prioritou a opakovanou obsluhou

Reťazec je opäť ergodický a jeho stacionárne rozdelenie $\pi = (\frac{B_0}{B}, \frac{B_1}{B}, \frac{B_2}{B}, \frac{B_3}{B})$,

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \mu_1 \mu_2 (\lambda_2 + \mu_1) \\
 B_1 &= \mu_1 \mu_2 \lambda_1 \\
 B_2 &= \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) \\
 B_3 &= \mu_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) \\
 B &= B_0 + B_1 + B_2 + B_3
 \end{aligned}$$

ľahko nájdeme grafovou metódou. Platí

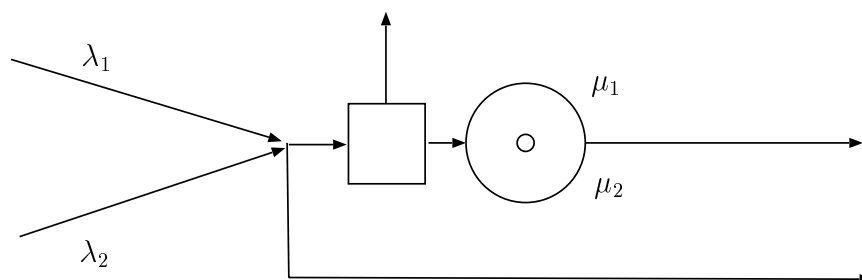
$$\begin{aligned}
 B_1 + B_2 &= \lambda_1 ((\lambda_2 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) + \lambda_1 \lambda_2) \\
 B_0 + B_3 &= \mu_1 ((\lambda_2 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) + \lambda_1 \lambda_2)
 \end{aligned}$$

Opäť vidíme, že pravdepodobnosť $\pi(1) + \pi(2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}$, obsluhy prioritného zákazníka, nezávisí od parametrov λ_2, μ_2 neprioritého zákazníka.

Cvičenie. Odvodte základné charakteristiky stabilizovaného systému.

4.2.3 M/M/1/2 s relatívnou prioritou a čakaním

Do jednolinkového systému s jedným čakacím miestom prichádzajú dva elementárne toky zákazníkov. Vstupný tok zákazníkov s relatívnou prioritou má intenzitu λ_1 a tok neprioritných zákazníkov má intenzitu λ_2 . Doba obsluhy prioritných resp. neprioritných zákazníkov má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1 resp. μ_2 .



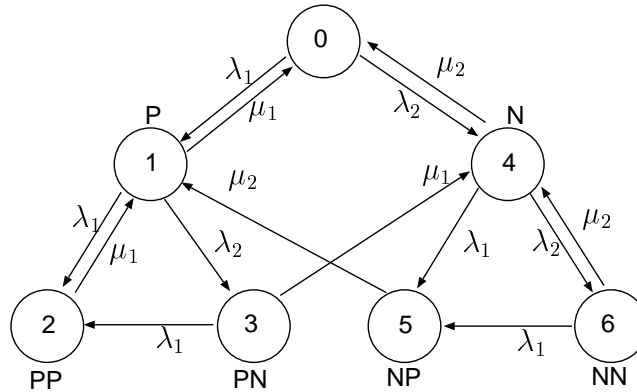
Obr. 4.17: Systém M / M / 1 / 2 s relatívnou prioritou a čakaním

Neprioritný zákazník v tomto systéme môže byť odmietnutý jednak, ak pri príchode nájde systém plný jednak, ak počas čakania na obsluhu príde prioritný zákazník. Ak však počas jeho obsluhy príde prioritný zákazník a nie je odmietnutý, potom čaká na ukončenie jeho obsluhy.

Systém modelujeme ako homogénny Markovov reťazec $\{N(t), t \geq 0\}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$, ktorého stavy interpretujeme takto:

- 0 - systém je prázdny,
- 1 (P) - linka obsluhuje prioritného zákazníka a žiaden zákazník nečaká,
- 2 (PP) - linka obsluhuje prioritného zákazníka a jeden prioritný zákazník čaká,
- 3 (PN) - linka obsluhuje prioritného zákazníka a jeden neprioritný zákazník čaká,
- 4 (N) - linka obsluhuje neprioritného zákazníka a žiaden zákazník čaká,
- 5 (NP) - linka obsluhuje neprioritného zákazníka a jeden prioritný zákazník čaká,
- 6 (NN) - linka obsluhuje neprioritného zákazníka a jeden neprioritný zákazník čaká.

Markovovú vlastnosť reťazca zabezpečuje bezpamäťová vlastnosť exponenciálneho rozdelenia. Dĺžky medzier medzi príchodmi prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrami λ_1 a λ_2 . Dĺžky dôb aj zvyškových dôb obslúh prioritných a neprioritných zákazníkov majú exponenciálne rozdelenie s parametrami μ_1 a μ_2 . Prechodový graf systému máme na obr.4.18.



Obr. 4.18: Prechodový graf jednolinkového systému s relatívnou prioritou a čakaním

Prechodový graf má pomerne zložitú štruktúru. Vrcholy 1, 2, 3 reprezentujú stavy systému, keď je obsluhovaný prioritný zákazník a vrcholy 4, 5, 6, keď je obsluhovaný neprioritný zákazník. Relatívna priorita zákazníka sa uplatňuje v prechodoch $6 \rightarrow 5$ a $3 \rightarrow 2$, keď prioritný zákazník "vytlačí" z jednomiestneho frontu neprioritného zákazníka, ktorý musí opustiť systém neobslužený.

Reťazec je ergodický a stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(6))$ už nie je, vzhľadom k počtu orientovaných kostier, výhodné hľadať grafovou metódou ale ani z rezových rovníc rovnováhy. Výhodnejšie je hľadať ho numericky ako kladné riešenie systému lineárnych rovníc:

$$0 = -(\lambda_1 + \lambda_2)\pi(0) + \mu_1\pi(1) + \mu_2\pi(4) \quad (4.88)$$

$$0 = \lambda_1\pi(0) - (\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2)\pi(1) + \mu_2\pi(2) + \mu_2\pi(5) \quad (4.89)$$

$$0 = \lambda_1\pi(1) - \mu_1\pi(2) + \lambda_1\pi(3) \quad (4.90)$$

$$0 = \lambda_2\pi(1) - (\lambda_1 + \mu_1)\pi(3) \quad (4.91)$$

$$0 = \lambda_2\pi(0) + \mu_1\pi(3) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)\pi(4) + \mu_2\pi(6) \quad (4.92)$$

$$0 = \lambda_1\pi(4) - \mu_2\pi(5) + \lambda_1\pi(6) \quad (4.93)$$

$$1 = \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4) + \pi(5) + \pi(6) \quad (4.94)$$

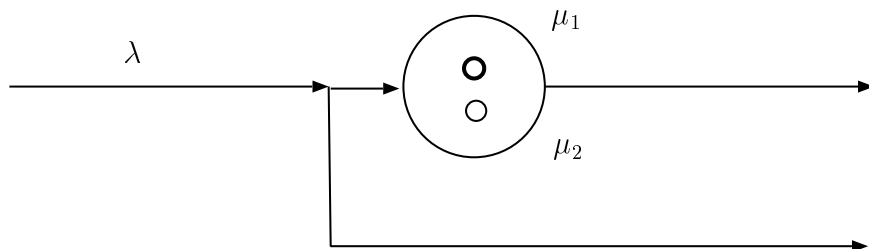
Poznámka. V prípade systémov s nekonečným frontom sa relatívna priorita zákazníka uplatňuje len jeho predbiehaním všetkých neprioritných zákazníkov vo fronte. V prípade systémov s konečnými frontami dochádza navyše aj k odmietnutiu posledného čakajúceho neprioritného zákazníka radu.

Cvičenie. Navrhните optimalizačnú úlohu a jej riešenie v systéme $M/M/1/3$ s relatívnou prioritou a čakaním.

4.2.4 $M/M/2/2$ s jednou absolútne prioritnou linkou

V prípade obslužných liniek sa v praxi uplatňuje najmä *absolútna priorita linky*, ktorá spočíva v tom, že prichádzajúci zákazník uprednostňuje, ak je to možné, prioritnú linku. Ak začne jeho obsluhu neprioritná linka, potom obsluhu dokončí tá istá linka aj v prípade, že sa počas jeho obsluhy uvoľní prioritná linka.

V našom prípade do dvojlínkového systému so zamietaním prichádza elementárny vstupný tok zákazníkov s parametrom λ . Doba obsluhy na prvej, prioritnej linke má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_1 a na druhej, neprioritnej linke tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ_2 . Zákazníci si prednostne vyberajú prioritnú linku. Zákazníci, ktorí nájdu linky obsadené sú odmietnutí.

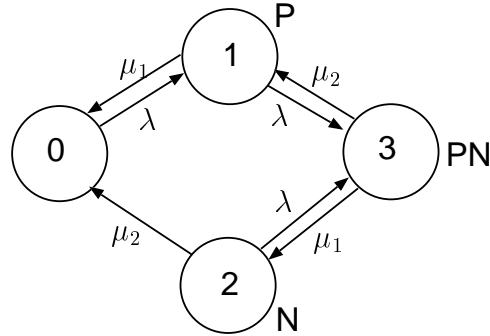


Obr. 4.19: Systém $M / M / 2 / 2$ s jednou absolútne prioritnou linkou

Systém môžeme modelovať, ako homogénny Markovov reťazec $\{N(t)\}_{t \in T}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- 0 - systém je prázdny,
- 1 (P) - len prioritná linka obsluhuje zákazníka,
- 2 (N) - len neprioritná linka obsluhuje zákazníka,
- 3 (PN) - obe linky sú obsadené.

Markovovú vlastnosť reťazca zabezpečuje bezpamäťová vlastnosť exponenciálneho rozdelenia medzier medzi príchodmi zákazníkov a doby obsluhy prioritnej a neprioritnej linky. Prechodový graf systému máme na obr.4.20.



Obr. 4.20: Prechodový graf dvojlínkového systému s odmietaním a s jednou absolútne prioritnou linkou

Reťazec je ergodický a jeho jediné stacionárne rozdelenie je výhodné hľadať grafovou metódou. Príslušné ohodnotené orientované kostry s koreňami vo vrcholoch prechodového digrafu máme na obr.4.21.

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \mu_1 \mu_2 (2\lambda + \mu_1 + \mu_2) \\
 B_1 &= \lambda \mu_2 (\lambda + \mu_1 + \mu_2) \\
 B_2 &= \lambda^2 \mu_1 \\
 B_3 &= \lambda^2 (\lambda + \mu_2) \\
 B &= B_0 + B_1 + B_2 + B_3
 \end{aligned}$$

Dostaneme stacionárne rozdelenie $\pi = (\frac{B_0}{B}, \frac{B_1}{B}, \frac{B_2}{B}, \frac{B_3}{B})$

$$\pi(0) = \frac{\beta_1 \beta_2 (2 + \beta_1 + \beta_2)}{\beta} \quad (4.95)$$

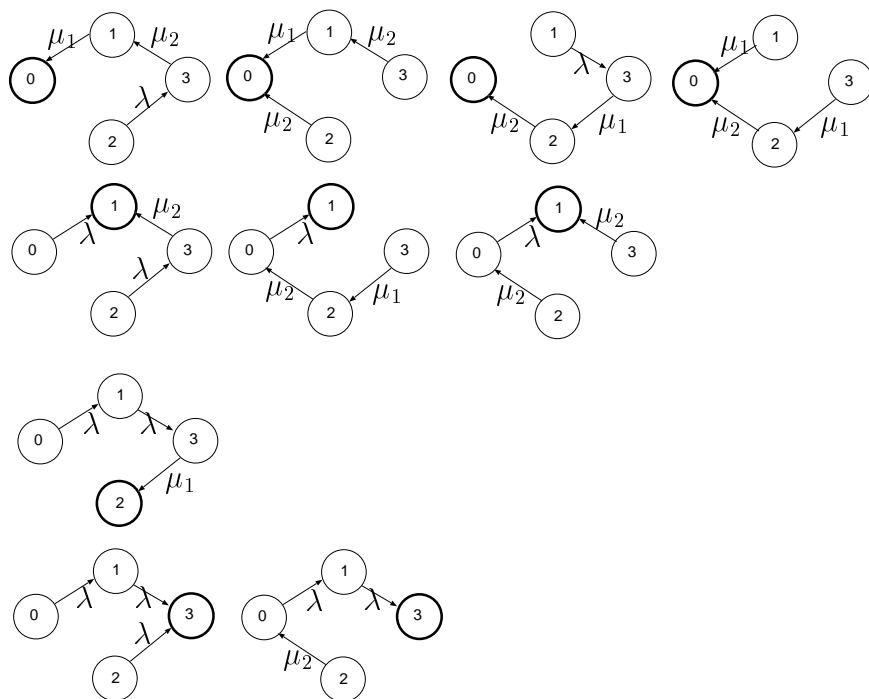
$$\pi(1) = \frac{\beta_2 (1 + \beta_1 + \beta_2)}{\beta} \quad (4.96)$$

$$\pi(2) = \frac{\beta_1}{\beta} \quad (4.97)$$

$$\pi(3) = \frac{1 + \beta_2}{\beta} \quad (4.98)$$

kde $\beta_1 = \frac{\mu_1}{\lambda}$, $\beta_2 = \frac{\mu_2}{\lambda}$ a $\beta = (1 + \beta_1 + \beta_2)(1 + \beta_2 + \beta_1 \beta_2) + \beta_1 \beta_2$.

Cvičenie. Odvodte stacionárne rozdelenie a charakteristiky pre systém **M/M/2/m** s jednou absolútne prioritnou linkou.



Obr. 4.21: Ohodnotené orientované kostry grafovej metódy

Z charakteristík stabilizovaného systému sú najpoužívanejšie P_Z – pravdepodobnosť zamietnutia zákazníka.

$$P_Z = \pi(3) \quad (4.99)$$

κ_1 – využitie prioritnej linky.

$$\kappa_1 = \pi(1) + \pi(3) \quad (4.100)$$

κ_2 – využitie neprioritnej linky.

$$\kappa_2 = \pi(2) + \pi(3) \quad (4.101)$$

κ – využitie systému.

$$\kappa = \frac{\pi(1) + \pi(2) + 2\pi(3)}{2} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad (4.102)$$

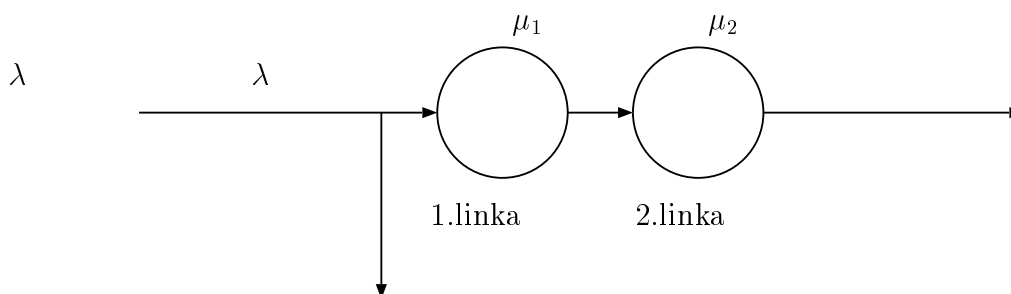
Cvičenie. Do stabilizovaného systému $\mathbf{M}/\mathbf{M}/2/2$ s jednou prioritnou linkou prichádzajú zákazníci s intenzitou $\lambda = 18$ zák./hod. pri intenzite prioritnej linky $\mu_1 = 12$ zák./hod. a neprioritnej linky $\mu_2 = 6$ zák./hod. Pri akej intenzite obslúh μ stabilizovaného systému $\mathbf{M}/\mathbf{M}/2/2$ s neprioritnými linkami budú mať oba systémy zhodné využitie? Porovnajtie pravdepodobnosti zamietnutia zákazníka v takýchto systémoch.

4.3 Sériové Markovove systémy

Ak sú viaceré fronty zapojené *sériovo*, jedna za druhou, a zákazník po ukončení obsluhy v jednom frote požaduje okamžitú obsluhu ďalším frontom hovoríme o *sériových systémoch*. Takéto systémy sú typické pre montážne linky, kde sa výrobok kompletizuje postupne v danom poradí operácií. Najskôr sa budeme zaoberať najjednoduchším prípadom, keď sú oba fronty reprezentované len sériovo zapojenými linkami obsluhy.

4.3.1 Sériový systém M/M/2/2

Do dvojlínkového systému s odmietaním a dvoma sériovo usporiadanými linkami obsluhy, obr.4.22, prichádza Poissonov tok zákazníkov s intenzitou λ . Prvá linka obsluhy má dobu obsluhy s exponenciálnym rozdelením s parametrom μ_1 . Druhá linka obsluhy má tiež dobu obsluhy s exponenciálnym rozdelením s parametrom μ_2 . Ak príde do systému zákazník a nájde 1.linku



Obr. 4.22: Sériový systém M/M/2/2

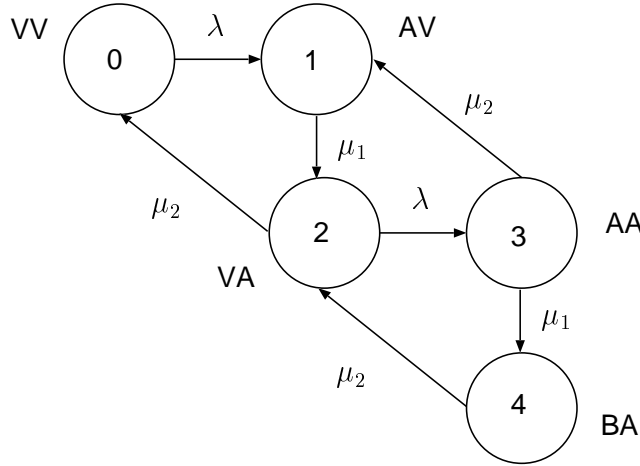
voľnú, začne jeho obsluhu, ktorá bude ukončená priemerne za čas $\frac{1}{\mu_1}$. Ak nájde v 1.linke iného zákazníka, linka je *aktívna*, bude prichádzajúci zákazník odmietnutý. Ak zákazník po ukončení obsluhy nájde 2.linku *voľnú*, začne jeho obsluhu, ktorá bude ukončená priemerne za čas $\frac{1}{\mu_2}$. Ak nájde v systéme zákazníka, bude 1.linka *blokovaná* až do uvoľnenia 2.linky.

Systém modelujeme ako homogénny Markovov reťazec $\{N(t), t \geq 0\}$ s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ktorého stavy interpretujeme takto:

- 0 (VV) - obe linky sú voľné (systém je prázdny),
- 1 (AV) - 1.linka je aktívna a 2.linka je voľná,
- 2 (VA) - 1.linka je voľná a 2.linka je aktívna,
- 3 (AA) - obe linky sú aktívne,

- 4 (BA) - 1.linka je blokovaná a 2.linka je aktívna.

Markovovú vlastnosť reťazca zabezpečuje opäť bezpamätová vlastnosť exponenciálnych rozdelení medzier a obslúh. Prechodový graf systému máme na obr.4.23. Reťazec je ergodický a jeho stacionárne rozdelenie môžeme hľadať



Obr. 4.23: Prechodový graf sériového systému M/M/2/2

vhodnou voľbou rezov. Označíme $\alpha_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}$, $\alpha_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}$ a postupne dostaneme v tvare $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(4))$

$$\pi(2) = \alpha_2 \pi(0) \quad (4.103)$$

$$\pi(3) = \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \pi(0) \quad (4.104)$$

$$\pi(4) = \frac{\alpha_2^3}{\alpha_1 + \alpha_2} \pi(0) \quad (4.105)$$

$$\pi(1) = \alpha_1 \left(1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \pi(0) \quad (4.106)$$

$$\pi(0) = \left(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2^2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^{-1} \quad (4.107)$$

Z charakteristík stabilizovaného systému sú významné

$\boxed{\kappa}$ - využitie systému a $\boxed{\kappa_1, \kappa_2}$ - využitie 1. a 2. linky obsluhy. Linka je využívaná pokiaľ nie je prázdna, a tak

$$\kappa_1 = \pi(1) + \pi(3) \quad (4.108)$$

$$\kappa_2 = \pi(2) + \pi(3) + \pi(4) \quad (4.109)$$

$$\kappa = \frac{\pi(1) + \pi(2) + 2\pi(3) + \pi(4)}{2} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad (4.110)$$

Poznámka. V prípade, že je stredná doba obsluhy na oboch linkách rovnaká $\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_2}$ potom $\alpha_1 = \alpha_2$ a po dosadení do vzťahov (4.103)-(4.106) máme prekvapujúci výsledok

$$\kappa_1 = \alpha_1 + \alpha_1^2 = \kappa_2$$

aj napriek možnosti blokovania 1.linky aktívnou 2.linkou.

P_Z - pravdepodobnosť odmietnutia zákazníka. Zákazník bude odmietnutý len ak nájde 1. linku aktívnu

$$P_Z = \pi(1) + \pi(3) + \pi(4) \quad (4.111)$$

P_B - pravdepodobnosť blokovania zákazníka. Zákazník bude blokovaný ak nájde po ukončení obsluhy 1. linkou 2. linku aktívnu.

$$P_B = \pi(4) \quad (4.112)$$

λ_P - stredný počet prijatých (neodmietnutých) zákazníkov za jednotku času. Zákazník bude prijatý s pravdepodobnosťou $1 - P_Z$ keď nájde 1.linkou voľnú, a tak

$$\lambda_P = \lambda(1 - P_Z) \quad (4.113)$$

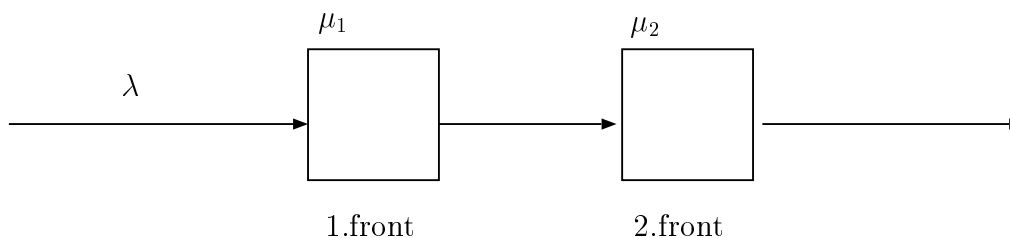
$E(\mathbf{W})$ - priemerná doba čakania zákazníka v zablokovej linke. Priemerná doba, ktorú zákazník stráví navyše v 1. linke v dôsledku zablokovania aktívnou 2. linkou je podľa Littleovej formuly

$$E(\mathbf{W}) = \frac{P_B}{\lambda(1 - P_Z)} \quad (4.114)$$

Cvičenie. Zovšeobecnite výsledky systému $\mathbf{M}/\mathbf{M}/2/2$ na konečné systémy $\mathbf{M}/\mathbf{M}/2/m$ a systém bez čakania v rade $\mathbf{M}/\mathbf{M}/2/\infty$. Navrhňte vhodnú optimalizačnú úlohu hľadajúcu kapacitu skladu polotovarov pre montážnu linku s cieľom maximalizovať priemerný zisk montážnej linky za jednotku času.

4.3.2 Tandem dvoch frontov $\mathbf{M}/\mathbf{M}/1/\infty$

Do systému s dvoma sériovo usporiadanými frontami $\mathbf{M}/\mathbf{M}/1/\infty$, obr.5.1, prichádza Poissonov tok zákazníkov s intenzitou λ . Ak nájde linku obsluhy 1, frontu voľnú začne jeho obsluha, v opačnom prípade sa zaradí do jeho radu. Prvá linka obsluhy má dobu obsluhy s exponenciálnym rozdelením s parametrom μ_1 . Po ukončení obsluhy prvou linkou prichádza zákazník hneď do



Obr. 4.24: Tandem dvoch systémov $\mathbf{M}/\mathbf{M}/\mathbf{1}/\infty$

2.frontu. Ak nájde linku obsluhy 2.frontu voľnú začne jeho obsluha, v opačnom prípade sa zaradí do jeho radu. Druhá linka obsluhy má tiež dobu obsluhy s exponenciálnym rozdelením s parametrom μ_2 .

Systém modelujeme ako homogénny Markovov reťazec $\{N(t), t \geq 0\}$ s množinou stavov $S = \{(i, j) : i, j = 0, 1, 2, \dots\}$, jeho stav (i, j) interpretujeme takto:

- i - počet zákazníkov v 1.fronte,
- j - počet zákazníkov v 2.fronte.

Markovovú vlastnosť reťazca zabezpečuje opäť bezpamäťová vlastnosť exponenciálnych rozdelení medzier a obslúh. Časť prechodového grafu systému pre stav (i, j) máme na obr.4.25.

Reťazec je ergodický a jeho jediné stacionárne rozdelenie je výhodné vypočítať z globálnych rovníc rovnováhy

$$\begin{aligned} \pi(i, j)\mu_1\chi(i \geq 1) + \pi(i, j)\mu_2\chi(j \geq 1) + \pi(i, j)\lambda \\ = \pi(i-1, j)\lambda\chi(i \geq 1) + \pi(i+1, j-1)\mu_1\chi(j \geq 1) \\ + \pi(i, j+1)\mu_2 \end{aligned} \quad (4.115)$$

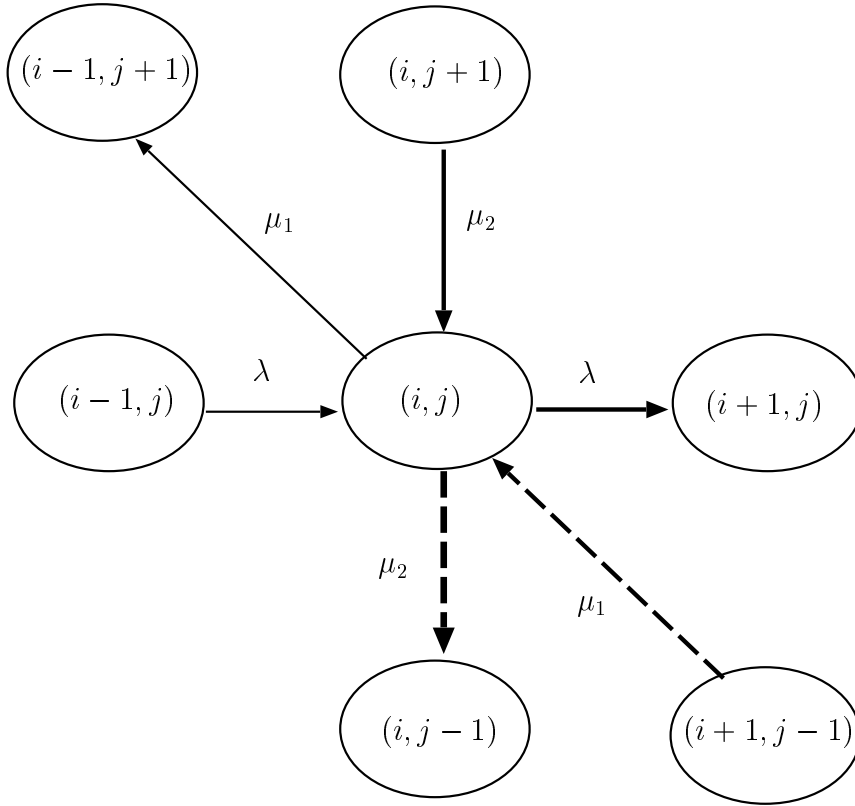
kde $\chi()$ je charakteristická funkcia. Globálne rovnice rovnováhy budú splnené, ak platia

$$\pi(i, j)\mu_1\chi(i \geq 1) = \pi(i-1, j)\lambda\chi(i \geq 1) \quad (4.116)$$

$$\pi(i, j)\mu_2\chi(j \geq 1) = \pi(i+1, j-1)\mu_1\chi(j \geq 1) \quad (4.117)$$

$$\pi(i, j)\lambda = \pi(i, j+1)\mu_2 \quad (4.118)$$

tzv. *lokálne rovnice rovnováhy*. Formálne sú znázornené hrúbkou šípok na obrázku obr.4.25. Rovnice (4.116) zabezpečujú stabilitu 1.frontu, rovnice stability (4.117) prechodu z 1. do 2.frontu a rovnice (4.118) stabilitu 2.frontu.



Obr. 4.25: Prechodový graf pre stav (i, j)

Po substitúcii $\alpha_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}$, $\alpha_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}$ z rovníc (4.116) dostaneme

$$\pi(i, j)\mu_1\chi(i \geq 1) = \alpha_1^i \pi(0, j) \quad (4.119)$$

z rovníc (4.117) a (4.119) máme

$$\pi(i, j)\mu_1\chi(i \geq 1) = \alpha_1^i \alpha_1^j \pi(0, 0) \quad (4.120)$$

Z normalizačnej podmienky dostaneme

$$\pi(0, 0) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \quad (4.121)$$

Takže rozdelenie reťazca má tvar

$$\pi(i, j) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\alpha_1^i \alpha_2^j \quad (4.122)$$

Ľahko overíme, že rovnica (4.118) je tiež splnená.

Cvičenie. Odvoďte základné charakteristiky stabilizovaného systému.

Poznámka. Tandem dvoch frontov predtásuje jednouchý prípad siete, ktorým sa budeme venovať podrobne neskôr.

4.4 Semimarkovove systémy

Mnohé praktické obslužné systémy nespĺňajú niektoré požiadavky Markovových modelov. Medzery medzi príchodmi zákazníkov nemajú to isté exponenciálne rozdelenie alebo doby trvania obslúh nemajú exponenciálne rozdelenie. Exponenciálne rozdelenie týchto veličín je nahradené Erlangovým rozdelením $E(n, \gamma)$ s vhodnými parametrami n, γ (n -prirodzené číslo, $\gamma > 0$), definované hustotou

$$f_{n,\gamma}(t) = \frac{\gamma^n t^{n-1} e^{-\gamma t}}{(n-1)!} \text{ pre } t \in \langle 0, \infty \rangle \quad (4.123)$$

Poznámka. Erlangovo rozdelenie $E(n, \gamma)$ je špeciálnym prípadom gama rozdelenia $\Gamma(a, \gamma)$, kde parameter a je prirodzené číslo. Parameter γ je výhodné voliť tak, aby stredná hodnota náhodnej veličiny s týmto rozdelením nezávisela od parametra n .

Semimarkovove systémy sú systémy typu $\mathbf{E}_r / \mathbf{E}_s / \mathbf{n}$, kde

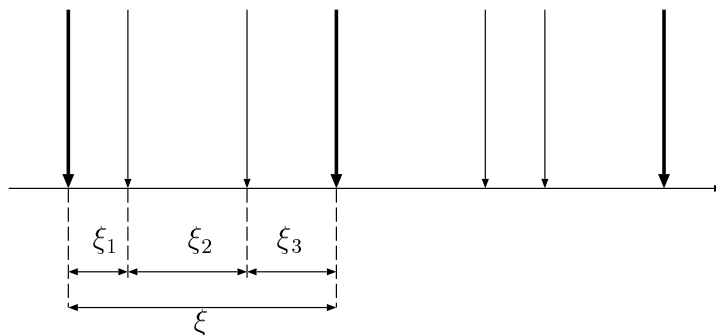
- *vstupný tok zákazníkov* má medzery medzi príchodmi zákazníkov $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ tvorené nezávislými náhodnými veličinami τ_k s tým istým Erlangovým rozdelením s parametrami $r, r\lambda$, ($\tau_k \sim E(r, r\lambda)$). Takýto vstupný tok sa nazýva *Erlangov vstupný tok* \mathbf{E}_r .
- *doba obsluhy* liniek obsluhy τ má Erlangovo rozdelenie s parametrami $s, s\mu$, ($\tau \sim E(s, s\mu)$).

Náhodnú veličinu $\xi \sim E(n, n\beta)$ možno chápať aj ako súčet n nezávislých náhodných veličín s tým istým exponenciálnym rozdelením $Exp(n\beta)$ t.j.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \quad (4.124)$$

kde $\xi_i \sim Exp(n\beta)$. Výhodou modelovania pomocou náhodnej veličiny ξ sú práve jej dva parametre umožňujúce jednoduchú interpretáciu pomocou známych charakteristík $E(\xi) = \frac{1}{\beta}$ a $D(\xi) = \frac{1}{n\beta^2}$.

Erlangov tok zákazníkov \mathbf{E}_r môžeme získať *riedením* elementárneho toku zákazníkov takto: Z elementárneho toku s intenzitou $r\lambda$ vyberieme vždy $r-1$ zákazníkov vniknuté medzery sú potom súčtom r nezávislých medzier elementárneho toku. Elementárny tok však má medzery s exponenciálnym rozdelením s parametrom $r\lambda$ a tak nový tok má medzery s Erlangovým rozdelením s parametrom λ . Stredná dĺžka medzery Erlangovho toku je rovná $\frac{1}{\lambda}$, pretože je súčtom r stredných medzier elementárneho toku $\frac{1}{r\lambda}$. Intenzita Erlangovho toku udávajúca stredný počet zákazníkov za jednotku času je potom rovný λ .



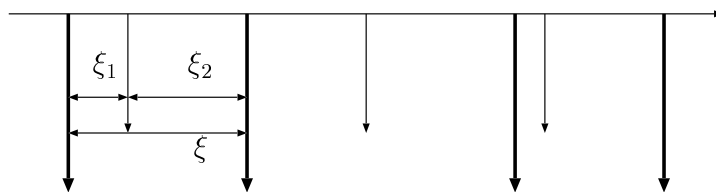
Obr. 4.26: Vznik Erlangovho toku \mathbf{E}_3 riedením elemetárneho toku

Uvedený postup však prirodzene neznamená, že Erlangov tok musí vzniknúť riedením elementárneho toku.

Na obr.4.26 máme príklad vzniku Erlangovho toku \mathbf{E}_3 , ktorý vznikne riedením elementárneho toku vybratím dvojíc zákazníkov, prichádzajúci zákazníci v Erlangovom toku zákazníkov sú zobrazení hrubými čiarami.

Vstup zákazníka v Erlangovom toku \mathbf{E}_r , si môžeme predstaviť tak, že jeho príchod je zložený z r fáz vstupu zákazníka, pričom zákazník príde do systému až v okamihu ukončania r -tej fázy vstupu. Intenzita jednej fázy vstupu je potom $r\lambda$. Takýto tok sa preto tiež nazýva r -fázový Erlangov tok.

Aj Erlangovu dobu obsluhy \mathbf{E}_s so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu}$ si môžeme obdobne rozfázovať. Namiesto vykonania jednej Erlangovej doby obsluhy zákazníka sa vykoná s fáz obsluhy zákazníka (s nezávislých obslúh s exponenciálnym rozdelením so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{s\mu}$), pričom zákazník je obslužený až v okamihu ukončenia s -tej fázy obsluhy. Na obr.4.27 máme príklad rozfázovania doby obsluhy \mathbf{E}_2 . Intenzita jednej fázy obsluhy je potom $s\mu$. Takáto doba obsluhy sa preto tiež nazýva s -fázová Erlangova doba obsluhy.



Obr. 4.27: Fázy Erlagovej doby obsluhy \mathbf{E}_2

Ak teda vstup a obsluhu zákazníka rozfázujeme a za udalosti považujeme príchod fázy vstupu a vykonanie fázy obsluhy dostávame Markovov model. To je tiež dôvod prečo hovoríme o semimarkovových systémoch. Analýza takýchto modelov je pomerne zložitá, preto sa ďalej obmedzíme len na jednoduché jednolinkové modely.

Poznámka. Môžeme písať $\mathbf{E}_1 = \mathbf{M}$ pretože $E(1, \gamma) = \text{Exp}(\gamma)$.

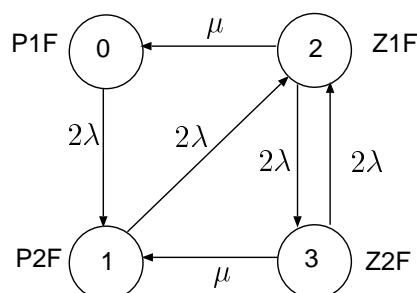
4.4.1 $\mathbf{E}_2/\mathbf{M}/1/1$

Do tohto jednolinkovového semimarkovovho systému s odmietaním prichádza dvojfázový Erlangov vstupný tok zákazníkov s intenzitou λ a doba obsluhy má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ .

Systém možno modelovať, ako homogénny Markovov reťazec $\{N(t), t \geq 0\}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- 0 (P1F) - systém je prázdny pred prvou fázou príchodu zákazníka,
- 1 (P2F) - systém je prázdny pred druhou fázou príchodu zákazníka,
- 2 (Z1F) - linka obsluhuje zákazníka pred prvou fázou príchodu ďalšieho zákazníka,
- 3 (Z2F) - linka obsluhuje zákazníka pred druhou fázou príchodu ďalšieho zákazníka.

Prechodový graf systému máme na obr.4.28.



Obr. 4.28: Prechodový graf systému $\mathbf{E}_2/\mathbf{M}/1/1$

Poznámka. Pravdepodobnosť prechodu $p_{\Delta t 32}(3, 2) = 2\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ zodpovedá situácii, keď sa v časovom intervale dĺžky Δt nestihne uvoľniť linka a dôjde k ukončeniu druhej fázy príchodu zákazníka, ktorý musí byť odmietnutý.

Reťazec je ergodický a stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \pi(1), \pi(2), \pi(3))$ môžeme hľadať riešením systému rovníc

$$\begin{aligned} 0 &= -2\lambda\pi(0) + \mu\pi(2) \\ 0 &= 2\lambda\pi(0) - 2\lambda\pi(1) + \mu\pi(3) \\ 0 &= -(2\lambda + \mu)\pi(3) + 2\lambda\pi(2) \\ 1 &= \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) \end{aligned}$$

odkiaľ pri zaťažení systému $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ máme

$$\pi(0) = \frac{1}{2(1+2\alpha)} \quad (4.125)$$

$$\pi(1) = \frac{1+4\alpha}{2(1+2\alpha)^2} \quad (4.126)$$

$$\pi(2) = \frac{\alpha}{1+2\alpha} \quad (4.127)$$

$$\pi(3) = \frac{2\alpha^2}{(1+2\alpha)^2} \quad (4.128)$$

$$(4.129)$$

Z charakteristík stabilizovaného systému uvedieme aspoň niektoré

$\boxed{P_{0Z}}$ - pravdepodobnosť, že systém je prázdny.

$$P_{0Z} = \pi(0) + \pi(1) \quad (4.130)$$

$\boxed{P_{1Z}}$ - pravdepodobnosť, že linka obsluhuje zákazníka je súčasne aj pravdepodobnosťou, že zákazník bude odmietnutý.

$$P_{1Z} = \pi(2) + \pi(3) \quad (4.131)$$

$\boxed{\kappa}$ - využitie systému (linky obsluhy). Linka je využívaná pokiaľ systém nie je prázdny, a tak

$$\kappa = 1 - P_{0Z} = P_{1Z} \quad (4.132)$$

4.4.2 $E_2/M/1/\infty$

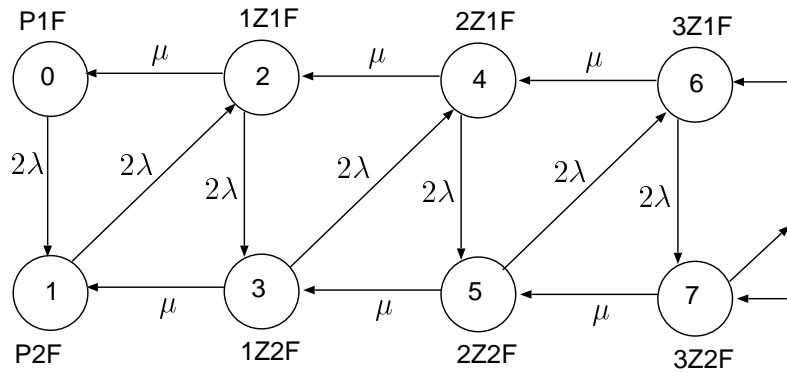
Do tohto jednolinkového semimarkovovho systému s nekonečným frontom prichádza dvojfázový Erlangov vstupný tok zákazníkov s intenzitou λ a doba obsluhy má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ .

Systém možno modelovať, ako homogénny Markovov reťazec $\{N(t), t \geq 0\}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- 0 ($P1F$) - systém je prázdny pred prvou fázou príchodu zákazníka,
- 1 ($P2F$) - systém je prázdny pred druhou fázou príchodu zákazníka,
- 2 ($1Z1F$) - linka obsluhuje 1. zákazníka pred prvou fázou príchodu ďalšieho zákazníka,

- 3 ($1Z2F$) - linka obsluhuje 1.zákazníka pred druhou fázou príchodu ďalšieho zákazníka,
- $2k$ ($kZ1F$) - linka obsluhuje k -teho zákazníka pred prvou fázou príchodu ďalšieho zákazníka,
- $2k+1$ ($kZ2F$) - linka obsluhuje k -teho zákazníka pred druhou fázou príchodu ďalšieho zákazníka.

Prechodový graf systému máme na obr.4.29.



Obr. 4.29: Prechodový graf systému $\mathbf{E}_2/\mathbf{M}/1/\infty$

Reťazec je ergodický a jeho stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \pi(1), \dots)$ môžeme hľadať riešením systému rovníc

$$0 = -2\lambda\pi(0) + \mu\pi(2) \quad (4.133)$$

$$0 = 2\lambda\pi(0) - 2\lambda\pi(1) + \mu\pi(3) \quad (4.134)$$

$$0 = -(2\lambda + \mu)\pi(2k) + 2\lambda\pi(2k - 1) + \mu\pi(2k + 2) \quad (4.135)$$

$$0 = -(2\lambda + \mu)\pi(2k) + 2\lambda\pi(2k) + \mu\pi(2k + 3) \quad (4.136)$$

$$1 = \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \dots \quad (4.137)$$

Morse riešil tento systém tak, že predpokladal, že pravdepodobnosti $\pi(2k)$ a $\pi(2k + 1)$ pre $k = 0, 1, \dots$ sú geometrické t.j.

$$\pi(2k) = Q\pi(2k - 2), \quad k = 2, 3, \dots \quad (4.138)$$

$$\pi(2k + 1) = Q\pi(2k - 1), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.139)$$

Označme zaťaženie systému $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$. Z rovníc (4.135) a (4.136) po substitúcii (4.138) a (4.139) dostaneme

$$Q\pi(2) + 2\alpha\pi(1) = (2\alpha + 1)\pi(2) \quad (4.140)$$

$$2\alpha\pi(2) + Q^2\pi(1) = (2\alpha + 1)Q\pi(1) \quad (4.141)$$

a po úpravách dostaneme algebraickú rovnicu s kvocientom Q

$$Q^3 - 2(2\alpha + 1)Q^2 + (2\alpha + a)^2Q - 4\alpha^2 = 0$$

s jediným koreňom v intervale $(0, 1)$

$$Q = \frac{1 + 4\alpha - \sqrt{(1 + 8\alpha)}}{2} \quad (4.142)$$

Zo vzťahov (4.133),(4.137) a (4.142) dostaneme

$$\pi(0) = \frac{3 - \sqrt{(1 + 8\alpha)}}{4} \quad (4.143)$$

$$\pi(1) = \frac{\alpha(1 - \sqrt{(1 + 8\alpha)})}{2} \quad (4.144)$$

$$\pi(2k) = Q\pi(2k - 2), \quad k = 2, 3, \dots \quad (4.145)$$

$$\pi(2k + 1) = Q\pi(2k - 1), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.146)$$

Z charakteristík stabilizovaného systému uvedieme základné:

$E(\mathbf{N})$ - *stredný počet zákazníkov v systéme*. Využijeme rezovú rovnicu rovnováhy s množinou stavov $A = \{0, 1, \dots, 2k - 2\}$ a po úpravách máme

$$\pi(2k) + \pi(2k + 1) = 2\alpha\pi(2k - 1) = 2\alpha\pi(1)Q^{k-1}$$

a tak

$$\begin{aligned} E(\mathbf{N}) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(\pi(2k) + \pi(2k + 1)) = 2\alpha\pi(1) \sum_{k=1}^{\infty} kQ^{k-1} \\ &= \frac{2\alpha\pi(1)}{(1 - Q)^2} \end{aligned} \quad (4.147)$$

κ - *využitie systému (linky obsluhy)*. Linka je využívaná pokiaľ systém nie je prázdny, a tak

$$\kappa = 1 - \pi(0) - \pi(1) = \alpha \quad (4.148)$$

$E(\mathbf{N}_Q)$ - *stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte*.

$$E(\mathbf{N}_Q) = E(\mathbf{N}) - \alpha \quad (4.149)$$

$E(\mathbf{W}_Q)$ - *stredná doba čakania zákazníkov vo fronte*.

$$E(\mathbf{W}_Q) = \frac{E(\mathbf{N}_Q)}{\lambda} = \frac{E(\mathbf{N})}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \quad (4.150)$$

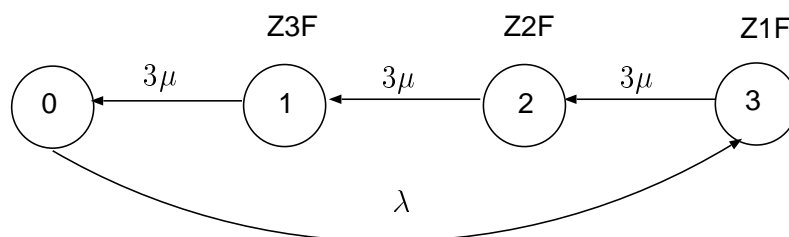
4.4.3 M/E₃/1/1

Do tohto jednolinkovového semimarkovovho systému prichádza elementárny tok zákazníkov s intenzitou λ a doba obsluhy má trojfázové Erlangovo rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu}$.

Systém možno modelovať, ako homogénny Markovov reťazec $\{N(t)\}_{t \in T}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2, 3\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- 0 - systém je prázdny,
- 1 (Z3F) - linka je v tretej fáze obsluhy zákazníka,
- 2 (Z2F) - linka je v druhej fáze obsluhy zákazníka,
- 3 (Z1F) - linka je v prvej fáze obsluhy zákazníka.

Prechodový graf systému máme na obr.4.30.



Obr. 4.30: Prechodový graf systému M/E₃/1/1

Reťazec je ergodický a jeho jediné stacionárne rozdelenie $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ môžeme výhodne hľadať grafovou metódou, a tak dostaneme

$$\pi(0) = \frac{1}{1 + \alpha} \quad (4.151)$$

$$\pi(1) = \frac{\alpha}{3(1 + \alpha)} \quad (4.152)$$

$$\pi(2) = \frac{\alpha}{3(1 + \alpha)} \quad (4.153)$$

$$\pi(3) = \frac{\alpha}{3(1 + \alpha)} \quad (4.154)$$

Z charakteristík stabilizovaného systému uvedieme aspoň niektoré

P_{0Z} - pravdepodobnosť, že systém je prázdny.

$$P_{0Z} = \pi(0) = \frac{1}{1 + \alpha} \quad (4.155)$$

P_{1Z} pravdepodobnosť, že linka obsluhuje zákazníka je súčasne aj pravdepodobnosťou, že zákazník bude odmietnutý.

$$P_{1Z} = \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (4.156)$$

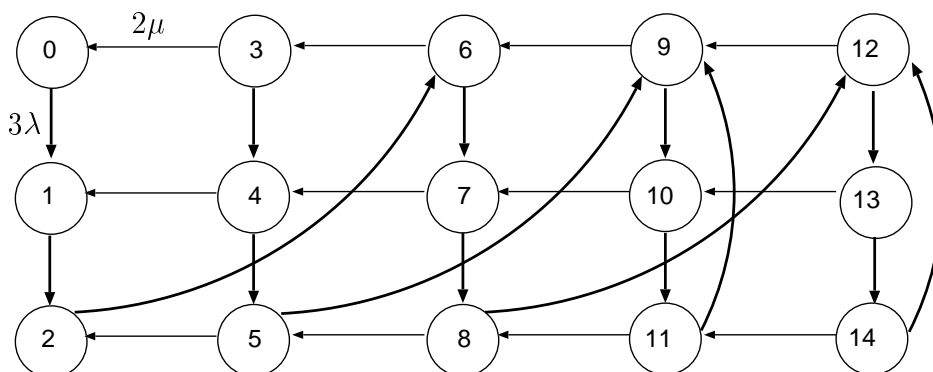
Poznámka. Vypočítané vzťahy (4.155,4.156) sú v zhode s Chinčinovým výsledkom, že pravdepodobnosti P_{0Z} a P_{1Z} možno hľadať ako riešenie v systéme $\mathbf{M}/\mathbf{M}/\mathbf{1}/\mathbf{1}$.

κ využitie systému (linky obsluhy). Linka je využívaná pokiaľ systém nie je prázdny, a tak

$$\kappa = 1 - P_{0Z} = P_{1Z} \quad (4.157)$$

4.4.4 $\mathbf{E}_3/\mathbf{E}_2/\mathbf{1}/\mathbf{2}$

Do tohto jednolinkového semimarkovovho systému prichádza trojfázový Erlangov tok zákazníkov s intenzitou λ a doba obsluhy má dvojfázové Erlangovo rozdelenie so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu}$.



Obr. 4.31: Prechodový graf systému $\mathbf{E}_3/\mathbf{E}_2/\mathbf{1}/\mathbf{2}$

Systém možno modelovať, ako homogénny Markovov reťazec $\{N(t)\}_{t \in T}$, kde množina stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, 14\}$, ktorej stavy interpretujeme takto:

- 0 pred 1. fázou vstupu a linka je prázdna,
- 1 pred 2. fázou vstupu a linka je prázdna,
- 2 pred 3. fázou vstupu a linka je prázdna,
- 3 pred 1. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy,

- 4 pred 2. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy,
- 5 pred 3. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy,
- 6 pred 1. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy,
- 7 pred 2. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy,
- 8 pred 3. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy,
- 9 pred 1. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,
- 10 pred 2. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,
- 11 pred 3. fázou vstupu a linka je pred 2. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,
- 12 pred 1. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,
- 13 pred 2. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,
- 14 pred 3. fázou vstupu a linka je pred 1. fázou obsluhy s jedným čakajúcim zákazníkom,

Prechodový graf systému máme na obr.4.31. Reťazec je ergodický a jeho jediné stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(14))$ môžeme nájsť numericky, riešením príslušných lineárnych rovníc.

Z charakteristík stabilizovaného systému uvedieme aspoň niektoré

$\boxed{P_{0Z}}$ pravdepodobnosť, že systém je prázdny.

$$P_{0Z} = \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) \quad (4.158)$$

$\boxed{P_{1Z}}$ pravdepodobnosť, že v systéme je práve jeden zákazník.

$$P_{1Z} = \pi(3) + \pi(4) + \dots + \pi(8) \quad (4.159)$$

$\boxed{P_{2Z}}$ pravdepodobnosť, že v systéme sú práve dvaja zákazníci.

$$P_{2Z} = \pi(9) + \pi(10) + \dots + \pi(14) \quad (4.160)$$

$E(\mathbf{N})_Q$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte.

$$E(\mathbf{N})_Q = P_{2Z} \quad (4.161)$$

$E(\mathbf{W})_Q$ – stredná doba čakania zákazníkov vo fronte.

$$E(\mathbf{W})_Q = \frac{N_Q}{\lambda(1 - P_{2Z})} \quad (4.162)$$

4.4.5 Hypererlangove systémy

Niekedy sa medzi semimarkovove modely zaraďujú aj modely typu $\mathbf{H}_r/\mathbf{H}_s/n$ kde medzery medzi príchodmi a doby obslúh sú modelované hypererlangovým rozdelením. Hypererlangove rozdelením $\mathbf{H}(n, \gamma, \mathbf{c})$, stručne len \mathbf{H}_n , s počtom fáz n (prirodzené číslo), intenzitou γ (kladné reálne číslo) a pravdepodobnostné rozdelenie fáz $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, je definované hustotou

$$f_{n,n\gamma,\mathbf{c}}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \frac{(k\gamma)^k t^{k-1} e^{-k\gamma t}}{(k-1)!} \quad t \in \langle 0, \infty \rangle \quad (4.163)$$

$$\sum_{k=1}^n c_k = 1, \quad c_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.164)$$

Hypererlangovo rozdelenie možno chápať ako zmesou n Erlangových rozdelení $\mathbf{E}(k, k\gamma)$, $k = 1, 2, \dots, n$. A tak napr. hypererlangov vstupný tok \mathbf{H}_3 má tri fázy, pričom s pravdepodobnosťou c_1 je to Poissonov tok $\mathbf{Po}(\lambda)$, s pravdepodobnosťou c_2 je to dvojfázový Erlangov tok $\mathbf{E}(2, 2\lambda)$ a s pravdepodobnosťou c_3 je to trojfázový Erlangov tok $\mathbf{E}(3, 3\lambda)$. Analogicky pre hypererlangovu dobu obsluhy \mathbf{H}_3 .

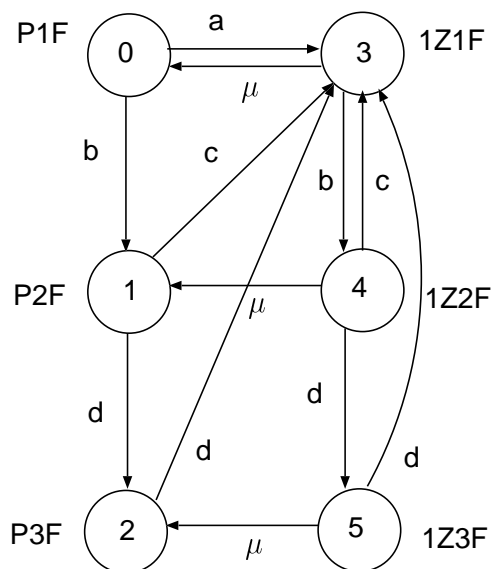
Význam modelovania toku a doby obsluhy pomocou hypererlangovho rozdelenia je že umožňuje znížiť počet fáz klasicky zvoleného Erlangovho rozdelenia ale presnejšie aproximovať rozptyl medzier alebo doby obsluhy. Ak je totiž τ dĺžka medzery medzi prichádzajúcimi zákazníkmi s priemernou dĺžkou $\frac{1}{\lambda}$, potom

$$E(\tau) = \sum_{k=1}^n c_k \frac{k}{k\lambda} = \frac{1}{\lambda} \quad (4.165)$$

$$D(\tau) = \sum_{k=1}^n \frac{k c_k^2}{(k\lambda)^2} = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^n \frac{c_k^2}{k} \quad (4.166)$$

Analogické úvahy sa týkajú aj doby obsluhy modelovanej hypererlangovým rozdelením.

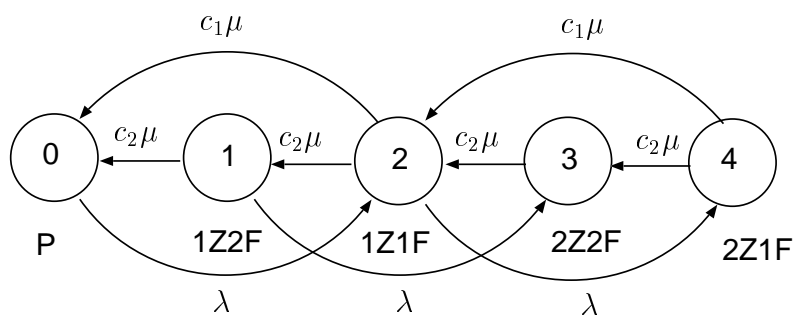
Prechodové grafy hypererlangových systémov sa tvoria ako pre klasické semimarkovove systémy. Prechodový graf systému $\mathbf{H}_3/\mathbf{M}/1/1$ je na obr.4.32. Interpretácia stavov ako aj charakteristík systému je ako v systéme $\mathbf{E}_3/\mathbf{M}/1/1$.



Obr. 4.32: Prechodový graf systému $\mathbf{H}_3/\mathbf{M}/1/1$

$$a = c_1\lambda, \quad b = 2c_2\lambda + 3c_3\lambda, \quad c = 2c_2\lambda, \quad d = 3c_3\lambda$$

Prechodový graf systému $\mathbf{M}/\mathbf{H}_2/\mathbf{M}/1/2$ je na obr.4.33. Interpretácia stavov ako aj charakteristík systému je ako v systéme $\mathbf{E}_3/\mathbf{M}/1/1$.



Obr. 4.33: Prechodový graf systému $\mathbf{M}/\mathbf{H}_2/\mathbf{M}/1/2$

4.5 Nemarkovove systémy

Niektoré praktické obslužné systémy možno modelovať ako systémy $\mathbf{G}/\mathbf{G}/\mathbf{n}$, kde nie je zabezpečená bezpamäťová vlastnosť dĺžky medzier medzi príchodmi zákazníkov ani doby a zvyškovej doby obsluhy zákazníka. V inžinierskej praxi sa takéto *nemarkovove systémy* riešia *simulačnými modelmi*, keď sa štatisticky spracujú realizácie príslušných náhodných procesov príchodov $\{A(t)\}_{t \in T}$ a odchodov $\{B(t)\}_{t \in T}$ zákazníkov. Výsledkom sú číselné charakteristiky (tabuľky, nie vzorce), ktoré môžu sťažiť hlavne následnú optimalizáciu niektorých parametrov obslužných modelov.

Analýza takýchto systémov je z matematickej stránky veľmi náročná. Obmedzíme sa preto na niektoré jednodukové nemarkovove systémy, ktoré však možno modelovať vloženými Markovovými reťazcami.

4.5.1 $\mathbf{M}/\mathbf{G}/1/\infty$

V tomto jednodukovom systéme s neohraničeným frontom sa predpokladá, že vstupný tok opäť Poissonov s parametrom λ ale doba obsluhy linky má všeobecné rozdelenie určené distribučnou funkciou $G(t)$ s konečnou strednou dobou obsluhy τ a konečným rozptylom σ^2 , t.j. v prípade spojitej náhodnej veličiny určenej hustotou $g(t)$

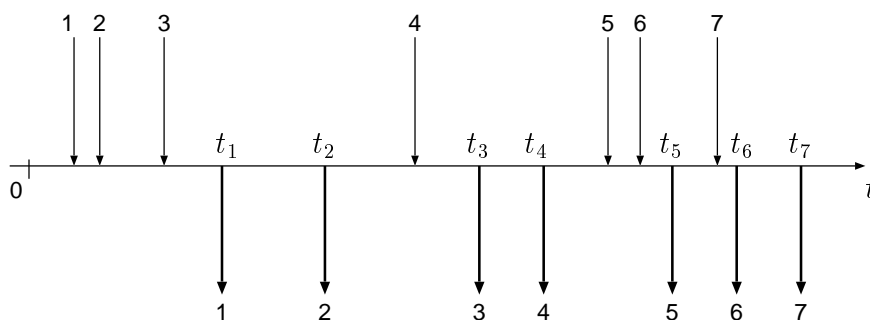
$$\tau = \int_0^{\infty} t g(t) dt$$
$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (t - \tau)^2 g(t) dt$$

Predpokladá sa, že zákazníci sú obsluhovaní v poradí príchodov t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**.

Problémom tohto modelu je, že nakoľko doba obsluhy a teda ani zvyšková doba obsluhy nemá bezpamäťovú vlastnosť, nemožno tento systém modelovať ako homogénny Markovov reťazec. Využijeme sa predpoklad, že Poissonovho vstupného toku, keď medzery medzi príchodmi zákazníkov majú bezpamäťové exponenciálne rozdelenie.

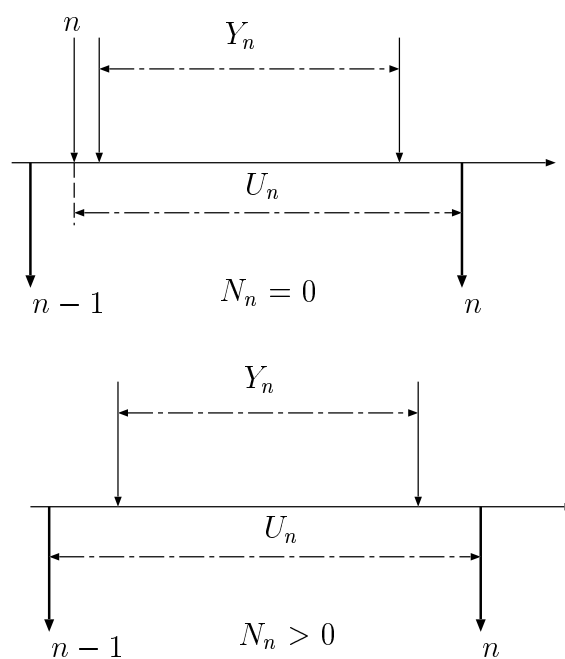
Ukážeme, že systém môžeme modelovať, ako *vložený homogénny Markovov reťazec s diskretným časom* $\{\mathbf{N}_n\}_{n=1}^{\infty}$ a množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, ktorej stavy interpretujeme ako počet zákazníkov v systéme v čase $\mathbf{t}_n \in T$ odchodu n -tého zákazníka zo systému.

Na obr.4.34 máme príklad simulácie takého systému, pričom sa pri popise systému obmedzujeme na udalosti odchodov zákazníkov zo systému v čase \mathbf{t}_n . Maticu pravdepodobnosti prechodu \mathbb{P} tohto reťazca možno popísať pomocou



Obr. 4.34: Simulácia systému $M/G/1/\infty$

náhodnej veličiny Y_n udávajúcej počet príchodov zákazníkov počas obsluhy n -tého zákazníka, a náhodnej veličiny U_n udávajúcej dobu obsluhy n -tého zákazníka. Vzťah medzi veličinami Y_n a N_n je potom



Obr. 4.35: Príchody počas obsluhy n -tého zákazníka

$$N_n = \begin{cases} N_{n-1} + Y_n - 1 & \text{ak } N_{n-1} > 0 \\ Y_n & \text{ak } N_{n-1} = 0 \end{cases} \quad (4.167)$$

Z obr.4.35 tiež vidíme, že reťazec $\{N_n\}$ nezávisí od minulosti a tak dostávame Markovov reťazec.

Pravdepodobnosť, že počas obsluhy n -tého zákazníka príde do systému k zákazníkov je

$$\begin{aligned} f_k &= \mathcal{P}(\mathbf{Y}_n = k) = \int_0^\infty \mathcal{P}(\mathbf{Y}_n = k | \mathbf{U}_n = t) g(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} g(t) dt \end{aligned} \quad (4.168)$$

Zákazníci majú rovnaké správanie nezávisle na poradí príchodu a tak

$$p(i, j) = \mathcal{P}(\mathbf{N}_{n+1} = j | \mathbf{N}_n = i) \quad (4.169)$$

Možné prechody medzi stavmi reťazca sú na obr.4.36.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \dots \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \dots \\ 0 & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & \dots \\ 0 & 0 & f_0 & f_1 & f_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & f_0 & f_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

Možno dokázať, že ak $\rho = \lambda\tau < 1$ je reťazec ergodický a jeho jediné stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \pi(1), \dots)$ možno hľadať riešením nekonečného systému lineárnych rovníc

$$\pi(0) = (\pi(0) + \pi(1))f_0 \quad (4.170)$$

$$\pi(1) = (\pi(0) + \pi(1))f_1 + \pi(2)f_0 \quad (4.171)$$

$$\pi(2) = (\pi(0) + \pi(1))f_2 + \pi(2)f_1 + \pi(3)f_0 \quad (4.172)$$

:

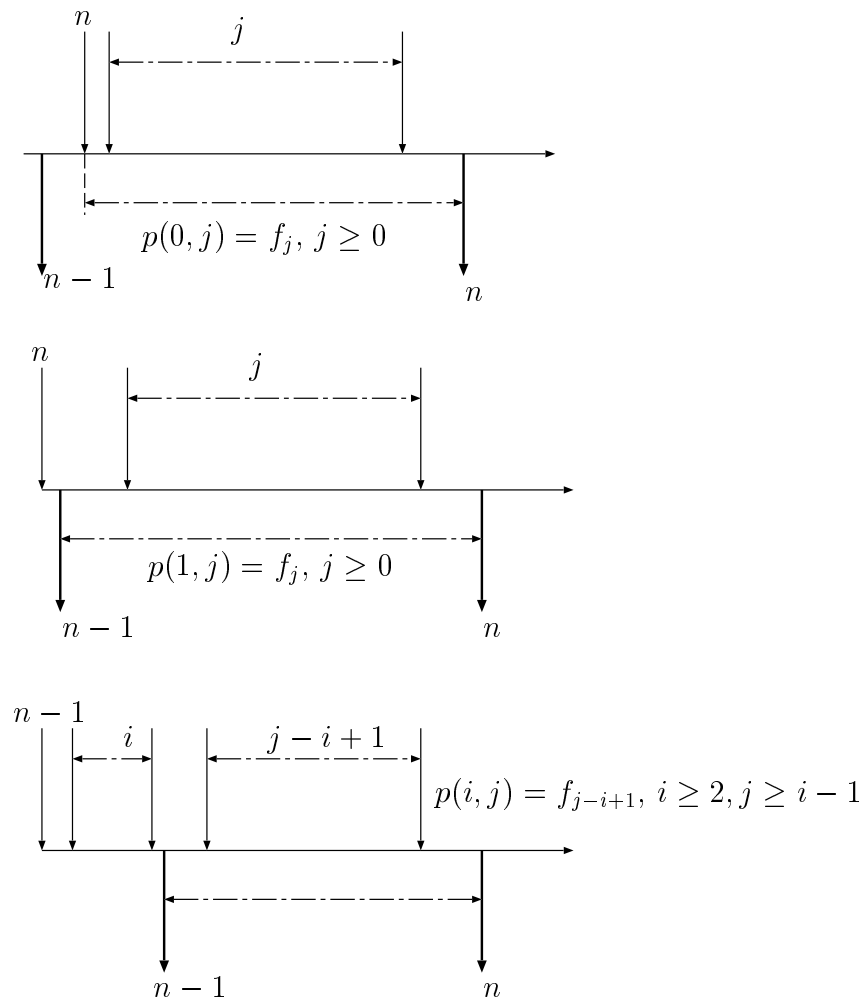
$$\pi(k) = (\pi(0) + \pi(1))f_k + \sum_{i=1}^k \pi(i+1)f_{k-i} \quad (4.173)$$

:

doplneného štandardnými podmienkami

$$\pi(0) = 1 - \rho \quad (4.174)$$

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi(j) \quad (4.175)$$



Obr. 4.36: Prípady prechodov medzi stavmi reťazca

Pre výpočet charakteristík stabilizovaného systému je výhodné použiť metódu vytvárajúcich funkcií. Definujeme funkcie v tvare konvergentného radu pre $|z| < 1$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \pi(k), \quad P(1) = 1 \quad (4.176)$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k, \quad F(1) = 1 \quad (4.177)$$

Z rovníc (4.173) po vynásobení a úpravách dostaneme

$$P(z) = \pi(0) \frac{(1-z)F(z)}{F(z)-z} \quad (4.178)$$

$$\pi(0) = 1 - F'(1) \quad (4.179)$$

Z definície (4.177) po úpravách dostaneme

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t(1-z)} g(t) dt \quad (4.180)$$

$$F'(1) = \rho \quad (4.181)$$

Vzorec pre výpočet charakteristiky $\boxed{E(\mathbf{N})}$ - *stredného počtu zákazníkov v systéme* je známy ako *Chinčín-Polatzekova formula*. Najskôr ju vyjadríme pomocou funkcie $F(z)$

$$\begin{aligned} E(\mathbf{N}) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\pi(k) = P'(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-\rho) \frac{(1-z)F(z)}{F(z)-z} = \dots \\ &= \frac{1-\rho}{2} \frac{F''(1) + 2F'(1) - F^2(z) + F(z)}{(1-F'(1))^2} \end{aligned} \quad (4.182)$$

Z (4.180) vypočítame

$$F''(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \int_0^\infty (\lambda t)^2 e^{\lambda t(z-1)} g(t) dt = \lambda^2 \int_0^\infty t^2 g(t) dt \quad (4.183)$$

$$= \lambda^2(\sigma^2 + \tau^2) \quad (4.184)$$

Zo vzťahov (4.182), (4.184)(4.181) dostaneme formulu

$$E(\mathbf{N}) = \frac{\lambda^2(\tau^2 + \sigma^2)}{2(1-\rho)} + \rho \quad (4.185)$$

Potom pre $\boxed{E(\mathbf{N}_Q)}$ - *stredný počet zákazníkov čakajúcich vo fronte* máme

$$E(\mathbf{N}_Q) = E(\mathbf{N}) - \rho = \frac{\lambda^2(\tau^2 + \sigma^2)}{2(1-\rho)} \quad (4.186)$$

Všetci prichádzajúci zákazníci budú obslužený a takz Littlovej formuly je

$\boxed{E(\mathbf{W}_Q)}$ - *stredná doba čakania zákazníka vo fronte*

$$E(\mathbf{W}_Q) = \frac{E(\mathbf{N}_Q)}{\lambda} = \frac{\lambda(\tau^2 + \sigma^2)}{2(1-\rho)} \quad (4.187)$$

Poznámka. V prípade systému $\mathbf{M}/\mathbf{D}/1/\infty$ s deterministickou dobou obsluhy dĺžky τ dostávame nasledujúce charakteristiky

$$E(\mathbf{N}) = \frac{\lambda^2 \tau^2}{2(1-\rho)} + \rho = \frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)} \quad (4.188)$$

$$E(\mathbf{N}_Q) = \frac{\lambda^2 \tau^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \quad (4.189)$$

$$E(\mathbf{W}_Q) = \frac{\lambda \tau^2}{2(1-\rho)} = \frac{\tau \rho}{2(1-\rho)} \quad (4.190)$$

Príklad 4.15. (Model zásob I.) Zásoby sú suroviny určené na neskoršiu spotrebu, ktoré sú dočasne umiestnené v sklade. Hľadá sa priemerná výška zásob, pri ktorej sú celkové priemerné náklady na skladovanie a a deficit (nedostatok) zásob minimálne.

Tok zákazníkov reprezentuje jednotky dodávky na sklad modelovaný neobmedzeným frontom. Operácia obsluhy zákazníka predstavuje uspokojenie jednotky spotreby. V systéme $\mathbf{M}/\mathbf{G}/1/\infty$ je priemerná doba medzi príchodmi dodávok na sklad rovná $\frac{1}{\lambda}$. Doba obsluhy je určená hustotou $g(t)$, reprezentuje dobu uspokojenia spotreby, so strednou dobou obsluhy τ a rozptylom doby obsluhy σ^2 . Množina stavov $S = \{0, 1, 2, \dots$ predstavuje počet jednotiek zásob v sklade. Stav 0 reprezentuje stav deficitu zásob, keď nemôže byť žiadna jednotka spotreby uspokojená. Systém je zaujímavý po stabilizácii, keď $\rho < 1$.

Veľkosť zásoby \mathbf{Q} je náhodná veličina meniac sa v závislosti od príchodov dodávok a odchodov uspokojených spotrieb. Priemerná výška zásob $E(\mathbf{Q})$ v sklade je rovná, podľa Chinčin-Polatzekova formula (4.189), strednému počtu zákazníkov v systéme.

$$E(\mathbf{Q}) = \frac{\lambda^2(\tau^2 + \sigma^2)}{2(1-\rho)}$$

Optimalizácia sa v tomto modeli môže realizovať hľadaním minima nákladovej funkcie $H(\rho)$ zloženej z priemerných nákladov skladovania a z priemerných nákladov deficitu pri známych jednotkových sadzbách c_s a c_u .

$$H(\rho) = c_s E(\mathbf{Q}) + c_u \pi(0) = c_s \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1-\rho)} + c_u (1-\rho)$$

Po položení nule derivácie nákladovej funkcie dostaneme kvadratickú rovnicu premennej ρ , ktorej koreň v intervale $(0, 1)$ je optimálnym riešením úlohy.

Nevýhodou optimalizácie nákladovej funkcie $H(\rho)$ je, že neoptimalizuje priemerný stav zásob, ktorý tak môže nadobudnúť neprijateľné hodnoty. Niekedy môžeme však vypočítať pravdepodobnosť, že stav zásob prekročí určitú kritickú hodnotu q

$$\mathcal{P}(\mathbf{Q} > q) = \sum_{j=q+1}^{\infty} \pi(j) = 1 - \sum_{j=0}^q \pi(j)$$

Potom dostávame optimalizačnú úlohu, pri daných kritických pravdepodobnostiach $p(q)$ prekročenia kapacity skladu q pre nejakú kritickú množinu kapacít \mathcal{Q}

$$H(\rho^*) = \min\{H(\rho) : 0 < \rho < 1, \sum_{j=0}^q \pi(j) \leq p(q), q \in \mathcal{Q}\}$$

Cvičenie. Modelujte vyššie formulovaný problém zásob ako systém $\mathbf{M}/\mathbf{D}/1/\infty$.

4.5.2 $\mathbf{M}/\mathbf{G}/1/m$

Tento jednolinký systém s konečným frontom sa líši od systému $\mathbf{M}/\mathbf{G}/1/\infty$ len obmedzeným maximálnym počtom zákazníkov, ktorí môžu čakať v rade. Takže vstupný tok zákazníkov je Poissonov s parametrom λ a doba obsluhy linky má všeobecné rozdelenie určené distribučnou funkciou $G(t)$ s konečnou strednou dobou obsluhy τ a konečným rozptylom σ^2 , t.j. v prípade spojitaj náhodnej veličiny určenej hustotou $g(t)$

$$\tau = \int_0^{\infty} t g(t) dt$$

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (t - \tau)^2 g(t) dt$$

Budeme tiež predpokladať, že sú zákazníci obluhovaní v poradí príchodov t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**.

Tento systém sa modeluje pomocou *vloženého homogénneho Markovovho reťazca s diskretným časom* $\{\mathbf{N}_n\}_{n=1}^{\infty}$ a množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, m\}$, ktorej stavy interpretujeme ako počet zákazníkov v systéme v čase $\mathbf{t}_n \in T$ odchodu n -tého *prijatého* zákazníka zo systému.

Konečná matica pravdepodobnosti prechodu \mathbb{P} tohto reťazca sa odvodí analogicky ako pre systém bez čakania, jediný rozdiel je v definícii pravdepodobnosti f_k^*

$$f_k = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} g(t) dt \quad \text{pre } k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.191)$$

$$f_k^* = 1 - f_0 - f_1 - f_2 - \dots - f_{k-1} \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots, m \quad (4.192)$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \cdots & f_{m-1} & f_m^* \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \cdots & f_{m-1} & f_m^* \\ 0 & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_{m-2} & f_{m-1}^* \\ 0 & 0 & f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{m-3} & f_{m-2}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_0 & f_1^* \end{pmatrix}$$

Vďaka definícii (4.192) je matica \mathbb{P} stochastická.

Reťazec je ergodický a jeho stacionárne rozdelenie $\boldsymbol{\pi} = (\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(m))$ možno hľadať numericky riešením systému lineárnych rovníc

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbb{P} \quad (4.193)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}\boldsymbol{\pi} \quad (4.194)$$

Základné charakteristiky stabilizovaného systému, ako ich poznáme pre systém $\mathbf{M}/\mathbf{M}/\mathbf{1}/\mathbf{m}$, treba počítať numericky nakoľko explicitné riešenie systému (4.193) a (4.194) nie je známe.

$\boxed{P_Z}$ – pravdepodobnosť zamietnutia zákazníka, keď sú všetky linky blokovanej obsluhou zákazníkov.

$$P_Z = \pi(m) \quad (4.195)$$

$\boxed{P_Q}$ – pravdepodobnosť, že prichádzajúci zákazník bude čakať vo fronte.

$$P_Q = \sum_{j=1}^{m-1} \pi(j) = 1 - \pi(0) - \pi(m) \quad (4.196)$$

$\boxed{E(\mathbf{N})}$ – stredný počet zákazníkov v systéme

$$E(\mathbf{N}) = \sum_{j=1}^m j\pi(j)$$

$\boxed{E(\mathbf{N}_Q)}$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov vo fronte.

$$E(\mathbf{N}_Q) = \sum_{j=2}^m (j-1)\pi(j)$$

$\boxed{\kappa}$ – využitie systému (linky obsluhy).

$$\kappa = \sum_{j=1}^m \pi(j) = 1 - \pi(0)$$

λ_P - stredný počet prijatých zákazníkov za jednotku času

$$\lambda_P = \lambda(1 - \pi(m))$$

$E(\mathbf{W}_Q)$ - stredná doba čakania vo fronte

$$E(\mathbf{W}_Q) = \frac{E(\mathbf{N}_Q)}{\lambda_P}$$

$E(\mathbf{W})$ - stredná doba pobytu v systéme.

$$E(\mathbf{W}) = \frac{E(\mathbf{N})}{\lambda_P}$$

Cvičenie. Porovnajte charakteristiky systému $\mathbf{M}/\mathbf{E}_2/1/2$ vypočítané zo semimarkovho modelu a zo systému $\mathbf{M}/\mathbf{G}/1/2$.

Príklad 4.16. (Model zásob II.) Modelujte problém zásob systémom konečným jednolinkovým systémom s dobou uspokojenia spotreby určenou hustotou. Hľadá sa kapacita skladu, pri ktorej sú celkové priemerné náklady na skladovanie, deficit zásob a odmietnutú dodávku minimálne.

Konečná množina stavov $S = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ predstavuje počet jednotiek zásob v sklade. Stav 0 reprezentuje stav deficitu zásob a stav M reprezentuje maximálnu kapacitu skladu.

Optimalizácia sa v tomto modeli môže realizovať hľadaním minima nákladovej funkcie $H(m)$ zloženej z priemerných nákladov skladovania, z priemerných nákladov deficitu a z priemerných nákladov za odmietnutie dodávky pri známych jednotkových sadzbách c_s , c_u a c_z .

$$H(m) = c_s E(\mathbf{N}_Q) + c_u \pi(0) + c_z \pi(m) = c_s \sum_{j=2}^m (j-1)\pi(j) + c_u \pi(0) + c_z \pi(m)$$

Úlohu možno formulovať takto

$$H(m^*) = \min\{H(m) : m \geq 1\}$$

a riešiť len numericky.

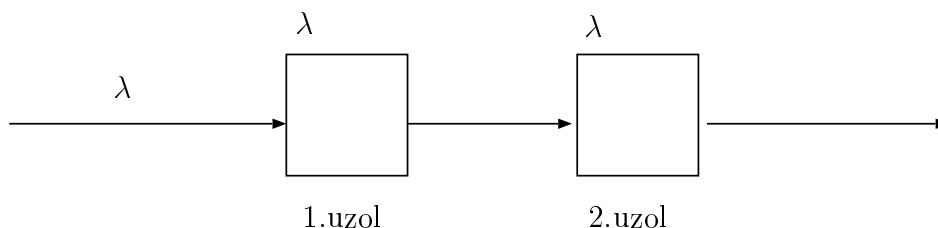
Cvičenie. Formulujte a riešte problém zásob ak je známa deterministická doba uspokojenia spotreby.

Kapitola 5

Obslužné siete

Doteraz sme sa zaoberali hlavne frontami, v ktorých zákazníci požadovali obsluhu na jednej obslužnej linke. V prípade systémov $\mathbf{G}/\mathbf{G}/n$ bolo síce k dispozícii viac liniek obsluhy, ale všetky boli spravidla rovnocenné a samotná obsluha zákazníka sa vyžadovala len na jednej z nich. V kapitole venovanej *Sériovým Markovovým systémom* sme sa zaoberali systémami, v ktorých zákazníci po ukončení obsluhy na jednej linke požadujú obsluhu na ďalšej linke. Tieto systémy môžeme považovať za jednoduché *obslužné siete*. Všeobecne sú obslužné siete modelované *sieťou frontov*. Ak požiadavky vyžadujú obsluhu od uzlu (frontu) v ktorom už boli obslužené, hovoríme o *sieti so slučkami*. Siete, do ktorých požiadavky prichádzajú z okolia a po čase z nich odchádzajú nazývame *otvorené siete*, opačnom prípade, keď zákazníci cirkulujú v sieti hovoríme im *uzavreté siete*.

Príklad 5.1. Tandem dvoch frontov $\mathbf{M}/\mathbf{M}/\mathbf{1}/\infty$ je príkladom otvorenej siete bez slučiek. Takáto sieť s dvoma uzlami je zobrazená na Obr.5.1.



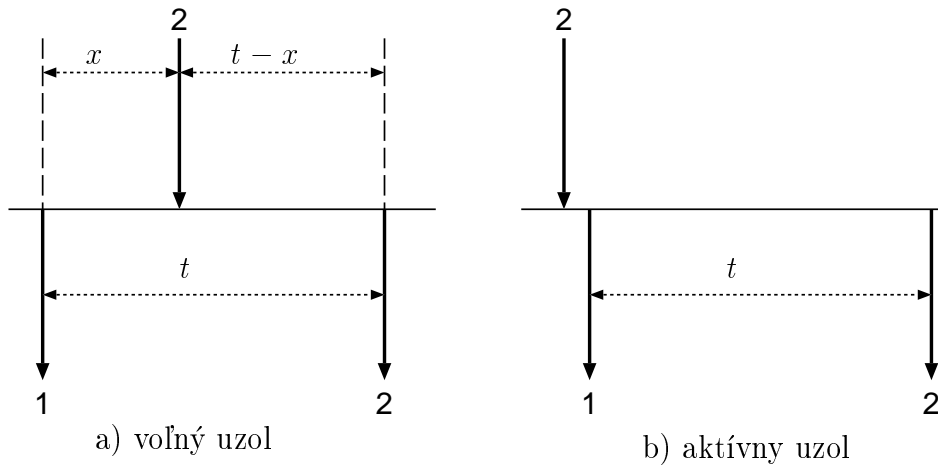
Obr. 5.1: Sieť s dvoma uzlami

Vzniká otázka, či sú skutočne intenzity odchodov zákazníkov zo stabilizovaných frontov rovné λ . Stačí nájsť rozdelenie odchodov z 1.uzla siete, po stabilizácii 1.frontu ($\lambda < \mu$), ak do 1.uzla zákazníci prichádzajú s intenzitou λ a sú obsluhovaní s priemernou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu}$. S pravdepodobnosťou

$1 - \pi(0) = \rho$ sa v 1.uzle siete nachadzajú ďalší zákazníci (aktívny uzol na Obr.5.2b) a čas do najbližšieho odchodu má rozdelenie ako doba obsluhy, ktorej hustota je $\mu e^{-\mu t}$. S pravdepodobnosťou $\pi(0) = 1 - \rho$ je systém prázdny (pasívny uzol na Obr.5.2a) a odchod ďalšieho zákazníka nastane až po jeho príchode a obslužení. Teda čas do nasledujúceho odchodu z 1.uzlu siete je súčtom dvoch nezávislých náhodných veličín. Jeho rozdelenie je tak dané konvolúciou rozdelenia týchto veličín, čo je

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(t-x)} dx = \lambda \mu e^{-\mu t} \int_0^t e^{(\mu-\lambda)x} dx = \frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\mu t})$$

Potom je hustota rozdelenia intervalov medzi odchodmi zákazníka z frontu



Obr. 5.2: Rozdelenie medzier medzi odchodmi z 1.uzlu siete

rovná

$$v(t) = (1 - \rho) \frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}) + \rho \mu^{-\mu t} = \lambda e^{-\lambda t}$$

To znamená, že rozdelenie medzier medzi odchodmi z 1.uzla je exponenciálne s tým istým parametrom λ ako má rozdelenie medzier medzi príchodmi do 1.uzla. Analogicky sa postupuje pre 2.uzol siete.

Poznámka. Aj v sieťach bez slučiek s uzlami modelovanými $\mathbf{M}/\mathbf{M}/\mathbf{n}/\infty$ sú výstupné toky z uzlov Poissonovými procesom ak vstupné toky do uzlov z okolia sú Poissonovými procesmi. To však nemusí platiť v sieťach so slučkami. Ďalej sa obmedzíme len na siete bez slučiek.

5.1 Jacksonove siete

Uvažujme ďalej sieť z N uzlov, pričom j -tý uzol je tvorený frontom $\mathbf{M}/\mathbf{M}/1/\infty$ t.j. zákazníci prichádzajú do uzla j z okolia s intenzitou λ_j a pričom doba obsluhy je exponenciálne s intenzitou μ_j . Po obsluhu zákazník opúšťa uzol j a odchádza do iného uzlu k na ďalšie spracovanie s pravdepodobnosťou r_{jk} alebo opúšťa sieť s pravdepodobnosťou r_{j0} takže platí

$$\sum_{k=0}^N r_{jk} = 1, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.1)$$

Predpokladá sa režim frontov **FIFO**.

Stav uzlov popíšeme náhodnými premennými $\mathbf{X}_j(t)$ udávajúcimi počet zákazníkov v uzle j v čase t a *stav siete* stavmi jednotlivých uzlov, teda vektorom

$$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_N(t)) \quad (5.2)$$

Označme $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ a $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ je N dimenzionálny vektor s jednotkou v j -tej zložke.

Vidíme, že $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ je Markovov reťazec so spojitým časom s množinou stavov $S = \{\mathbf{n} : \mathbf{n} \geq \mathbf{0}\}$ a maticou intenzít \mathbb{Q} s kladne definovanými prvkami

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_j) = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.3)$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k) = \mu_j r_{jk}, \quad n_j > 0, j, k = 1, \dots, N \quad (5.4)$$

$$q(\mathbf{n}, \mathbf{n} - \mathbf{e}_j) = \mu_j r_{j0}, \quad n_j > 0, j = 1, \dots, N \quad (5.5)$$

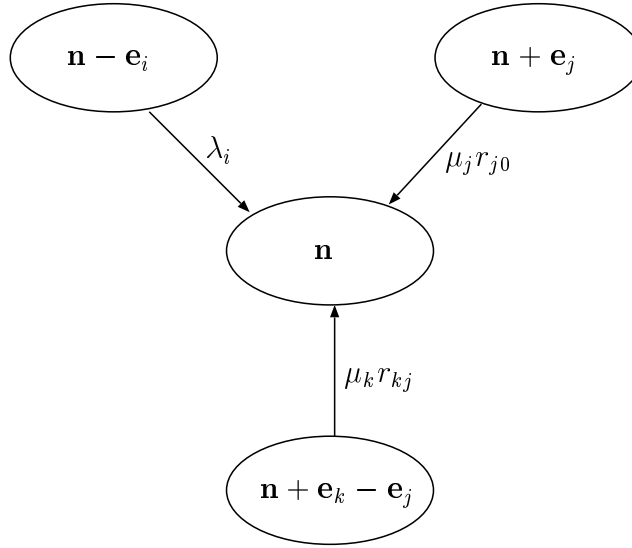
ostatné nediagonálne prvky matice sú nulové. Takáto sieť sa nazýva *Jacksonova sieť*.

Externé príchody do uzlu j sú Poissonovské, ako vidieť zo vzťahu

$$A_j = \{(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_j) : \mathbf{n} \geq \mathbf{0}\} \\ \sum_{(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \in A_j} q(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \lambda_j \quad \mathbf{n} \in S$$

Nech $\boldsymbol{\pi} = (\pi(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in S)$ je stacionárne roxdelenie reťazca, ak existuje. Potom ho možno vypočítať z globálnych rovníc rovnováhy pre stav $\mathbf{n} \in S$

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{n}) \sum_{j=1}^N (\lambda_j + \mu_j \chi(n_j > 0)) &= \sum_{j=1}^N \pi(\mathbf{n} - \mathbf{e}_j) \lambda_j + \sum_{j=1}^N \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j) \mu_j r_{j0} \\ &+ \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j) \mu_k r_{kj} \end{aligned} \quad (5.6)$$



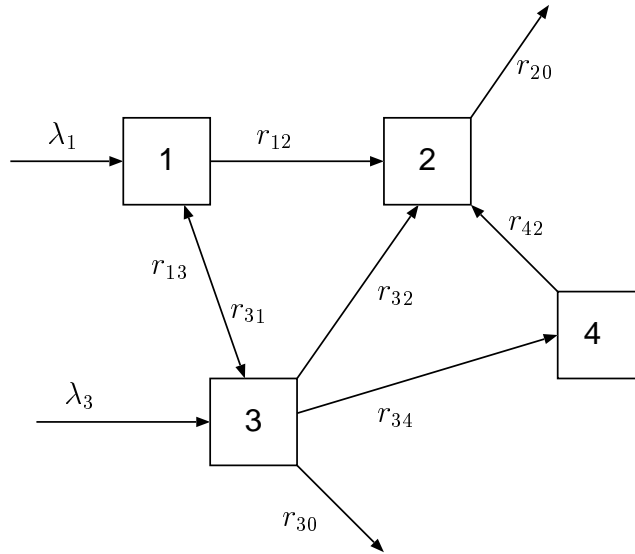
Obr. 5.3: Príchody v prechodovému grafu Jacksonovej siete pre stav \mathbf{n}

Príklad 5.2. Lokálna sieť štyroch počítačov je zobrazená na Obr.5.4 Počítače 1 a 3 prijímajú úlohy (jobs) a počítače 2 a 3 odosiľajú výsledku spracovania úloh. Obojsmerná komunikácia je len medzi počítačmi 1 a 3. Priemerná dĺžka medzier medzi príchodmi úloh do počítača 1 je $\frac{1}{\lambda_1}$ a do počítača 2 je $\frac{1}{\lambda_3}$. Priemerná doba spracovania úlohy na počítači j je $\frac{1}{\mu_j}$. Pre pravdepodobnosti prechodu úloh medzi počítačmi platia podľa (5.1) vzťahy

$$\begin{aligned} r_{12} + r_{13} &= 1 \\ r_{20} &= 1 \\ r_{30} + r_{31} + r_{32} + r_{34} &= 1 \\ r_{42} &= 1 \end{aligned}$$

Sieť je modelovaná Markovovým reťazcom $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ s množinou stavov $S = \{(n_1, n_2, n_3, n_4) : n_j \geq 0, j = 1, \dots, 4\}$. Globálne rovnice rovnováhy (5.6) pre stav $\mathbf{n} \in S$ sú v tvare

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{n})(\lambda_1 + \lambda_3 + \sum_{j=1}^4 \mu_j \chi(n_j > 0)) &= \pi(\mathbf{n} - \mathbf{e}_1)\lambda_1 + \pi(\mathbf{n} - \mathbf{e}_3)\lambda_3 \\ &+ \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_2)\mu_2 r_{20} + \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_3)\mu_3 r_{30} \\ &+ \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j)\mu_k r_{kj} \end{aligned}$$



Obr. 5.4: Sieť štyroch počítačov

Cvičenie. Nakreslite časť prechodového grafu v príklade 5.2 pre stavy $(0, 0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1, 1)$.

Odvodíme stacionárne rozdelenie $\pi(\mathbf{n})$ pre Jacksonovu sieť pomocou vhodne definovaných *lokálnych rovníc rovnováhy* zo splnenie ktorých už plynú globálne rovnice rovnováhy. Nech β_j je priemerný počet návštev uzla j stabilizovanej siete za jednotku času, $j = 1, 2, \dots, N$. Potom je riešením rovníc

$$\beta_j = \lambda_j + \sum_{k=1}^N \beta_k r_{kj}, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.7)$$

Na druhej strane po súčte (5.7) cez $j = 1, \dots, N$ a použitím (5.1) dostaneme

$$\sum_{j=1}^N \beta_j r_{j0} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \quad (5.8)$$

Podobne ako pre tandem frontov, dekomponujeme globálne rovnice rovnováhy na rovnice popisujúce externý príchod a odchod do okolia do k uzlom siete a rovnice popisujúce prechody medzi uzlami siete

$$\pi(\mathbf{n}) \sum_{j=1}^N \lambda_j = \sum_{j=1}^N \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j) \mu_j r_{j0} \quad (5.9)$$

$$\pi(\mathbf{n}) \mu_j = \pi(\mathbf{n} - \mathbf{e}_j) \lambda_j + \sum_{k=1}^N \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j) \mu_k r_{kj}, \quad n_j > 0 \quad (5.10)$$

Z rovníc (5.7) a (5.10) dostávame po úpravach

$$\pi(\mathbf{n}) = \pi(\mathbf{0}) \prod_{j=1}^N \left(\frac{\beta_j}{\mu_j} \right)^{n_j} \quad (5.11)$$

Možno sa presvedčiť, že vzťahy (5.7) a (5.11) sa redukujú na (5.8). Konečne $\boldsymbol{\pi}$ je stacionárne rozdelenie reťazca práve vtedy keď súčet jeho zložiek je jednotkový, čo je ekvivalentné

$$\beta_j < \mu_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.12)$$

Poznámka. Vo viacerých praktických modeloch obslužných sietí, napríklad sietí so signálmi, však takáto priama možnosť riešenia globálnych rovníc rovnováhy pomocou lokálnych rovníc rovnováhy nie je.

Príklad 5.3. Nájdeme stacionárne rozdelenie stavov siete z príkladu 5.2 pomocou lokálnych rovníc rovnováhy. Rovnice majú, podľa (5.9) a (5.10), tvar

$$\pi(\mathbf{n})(\lambda_1 + \lambda_3) = \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_2)\mu_2 r_{20} + \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_3)\mu_3 r_{30} \quad (5.13)$$

$$\pi(\mathbf{n})\mu_1 = \pi(\mathbf{n} - \mathbf{e}_1)\lambda_1 + \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1)\mu_3 r_{31} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{n})\mu_2 &= \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)\mu_1 r_{12} + \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2)\mu_3 r_{32} \\ &\quad + \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_2)\mu_4 r_{42} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\pi(\mathbf{n})\mu_3 = \pi(\mathbf{n} - \mathbf{e}_3)\lambda_3 + \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)\mu_1 r_{13} \quad (5.16)$$

$$\pi(\mathbf{n})\mu_4 = \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)\mu_3 r_{34} \quad (5.17)$$

Priemerný počet návštev uzla j siete za jednotku času, $\beta_j, j = 1, \dots, 4$ dostaneme z riešenia (5.7) systému lineárnych rovníc

$$\beta_1 = \lambda_1 + \beta_3 r_{31} \quad (5.18)$$

$$\beta_2 = \beta_1 r_{12} + \beta_3 r_{32} + \beta_4 r_{42} \quad (5.19)$$

$$\beta_3 = \lambda_3 + \beta_1 r_{13} \quad (5.20)$$

$$\beta_4 = \beta_3 r_{34} \quad (5.21)$$

Po vynásobení j -tej rovnice systému rovníc (5.18)-(5.21) výrazom

$$\left(\frac{\beta_j}{\mu_j} \right)^{-1} \prod_{j=1}^4 \left(\frac{\beta_j}{\mu_j} \right)^{n_j}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \mu_1 \prod_{j=1}^4 \left(\frac{\beta_j}{\mu_j} \right)^{n_j} &= \lambda_1 \frac{\mu_1}{\beta_1} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} \right)^{n_1-1} \left(\frac{\beta_2}{\mu_2} \right)^{n_2} \left(\frac{\beta_3}{\mu_3} \right)^{n_3} \left(\frac{\beta_4}{\mu_4} \right)^{n_4} \\ &\quad + \mu_3 r_{31} \frac{\mu_1}{\beta_1} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} \right)^{n_1-1} \left(\frac{\beta_2}{\mu_2} \right)^{n_2} \left(\frac{\beta_3}{\mu_3} \right)^{n_3+1} \left(\frac{\beta_4}{\mu_4} \right)^{n_4} \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 \prod_{j=1}^4 \left(\frac{\beta_j}{\mu_j} \right)^{n_j} &= \mu_1 r_{12} \frac{\mu_1}{\beta_1} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} \right)^{n_1-1} \left(\frac{\beta_2}{\mu_2} \right)^{n_2+1} \left(\frac{\beta_3}{\mu_3} \right)^{n_3} \left(\frac{\beta_4}{\mu_4} \right)^{n_4} \\ &\quad + \mu_3 r_{32} \frac{\mu_3}{\beta_3} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} \right)^{n_1} \left(\frac{\beta_2}{\mu_2} \right)^{n_2+1} \left(\frac{\beta_3}{\mu_3} \right)^{n_3-1} \left(\frac{\beta_4}{\mu_4} \right)^{n_4} \\ &\quad + \mu_4 r_{42} \frac{\mu_4}{\beta_4} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} \right)^{n_1} \left(\frac{\beta_2}{\mu_2} \right)^{n_2+1} \left(\frac{\beta_3}{\mu_3} \right)^{n_3} \left(\frac{\beta_4}{\mu_4} \right)^{n_4-1} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \mu_3 \prod_{j=1}^4 \left(\frac{\beta_j}{\mu_j} \right)^{n_j} &= \lambda_3 \frac{\mu_3}{\beta_3} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} \right)^{n_1} \left(\frac{\beta_2}{\mu_2} \right)^{n_2} \left(\frac{\beta_3}{\mu_3} \right)^{n_3+1} \left(\frac{\beta_4}{\mu_4} \right)^{n_4} \\ &\quad + \mu_1 r_{13} \frac{\mu_1}{\beta_1} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} \right)^{n_1+1} \left(\frac{\beta_2}{\mu_2} \right)^{n_2} \left(\frac{\beta_3}{\mu_3} \right)^{n_3-1} \left(\frac{\beta_4}{\mu_4} \right)^{n_4} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\mu_4 \prod_{j=1}^4 \frac{\mu_4}{\beta_4} \left(\frac{\beta_j}{\mu_j} \right)^{n_j} = \mu_3 r_{34} \frac{\mu_3}{\beta_3} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} \right)^{n_1} \left(\frac{\beta_2}{\mu_2} \right)^{n_2} \left(\frac{\beta_3}{\mu_3} \right)^{n_3+1} \left(\frac{\beta_4}{\mu_4} \right)^{n_4-1} \quad (5.25)$$

Rovnic (5.22)-(5.25) vidíme, že riešenie je v multiplikatívnom tvare

$$\pi((n_1, n_2, n_3, n_4)) = \pi((0, 0, 0, 0)) \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} \right)^{n_1} \left(\frac{\beta_2}{\mu_2} \right)^{n_2} \left(\frac{\beta_3}{\mu_3} \right)^{n_3} \left(\frac{\beta_4}{\mu_4} \right)^{n_4} \quad (5.26)$$

Poznámka. Jacksonovu sieť možno zovšeobecniť na sieť, kde v uzloch j je viaclinkový front $\mathbf{M}/\mathbf{M}/k_j/\infty$. Stav takej obslužnej siete je opäť definovaný vektorom (5.2). Aj v týchto *viaclinkových Jacksonových sieťach* možno analogicky odvodiť stacionárne rozdelenie, ak existuje v multiplikatívnom tvare

$$\boldsymbol{\pi}((n_1, n_2, \dots, n_N)) = \pi_1(n_1)\pi_2(n_2)\dots\pi_N(n_N) \quad (5.27)$$

kde $\pi_k(n_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\mathbf{X}_k = n_k)$. Analogický výsledok možno dostať aj pre otvorenú viaclinkovú Jacksonovu sieť. Používanéjšie sú však (jednolinkové) otvorené Jacksonové siete.

Prejdime ďalej k *uzavretej Jacksonovej sieti*, ktorá vznikne z otvorenej tak, že v sieti sa nachádza konštantný počet K zákazníkov, pričom žiadni zákazníci nemôžu do siete vstúpiť ani žiadni zákazníci nemôžu zo siete odísť. Použijeme predchádzajúcu interpretáciu označenia a v takejto sieti dostaneme

$$\sum_{k=1}^N r_{jk} = 1, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.28)$$

Výraz pre stacionárne rozdelenie $\pi((n_1, n_2, \dots, n_N))$ už nebude také jednoduché ako pre otvorenú sieť, pretože stavy n_j jednotlivých uzlov sú navzájom zviazané vzťahom

$$\sum_{j=1}^N n_j = K \quad (5.29)$$

Počet rôznych stavov siete, početnosť množiny S , sa rovná počtu možných rozmiestnení K zákazníkov do N uzlov t.j.

$$\binom{N+K-1}{N-1}$$

Pre priemerný počet návštev β_j uzla j stabilizovanej siete za jednotku času, $j = 1, 2, \dots, N$ platí

$$\beta_j = \sum_{k=1}^N \beta_k r_{kj}, \quad j = 1, \dots, N \quad (5.30)$$

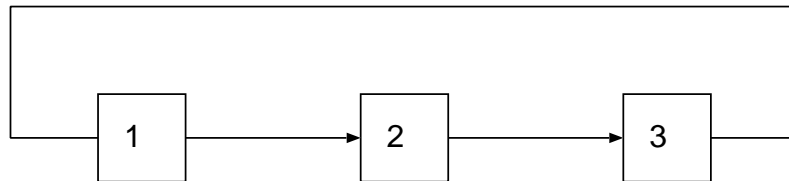
Po dekompozícii globálnych rovníc dostávame nasledujúce lokálne rovnice rovnováhy

$$\pi(\mathbf{n})\mu_j = \sum_{k=1}^N \pi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j)\mu_k r_{kj}, \quad n_j > 0 \quad (5.31)$$

Z rovníc (5.30) a (5.31) dostávame po úpravách riešenie $\pi(\mathbf{n})$ opäť v multiplikatívnom tvare

$$\pi(\mathbf{n}) = \frac{1}{G(K)} \prod_{j=1}^N \left(\frac{\beta_j}{\mu_j} \right)^{n_j} \quad (5.32)$$

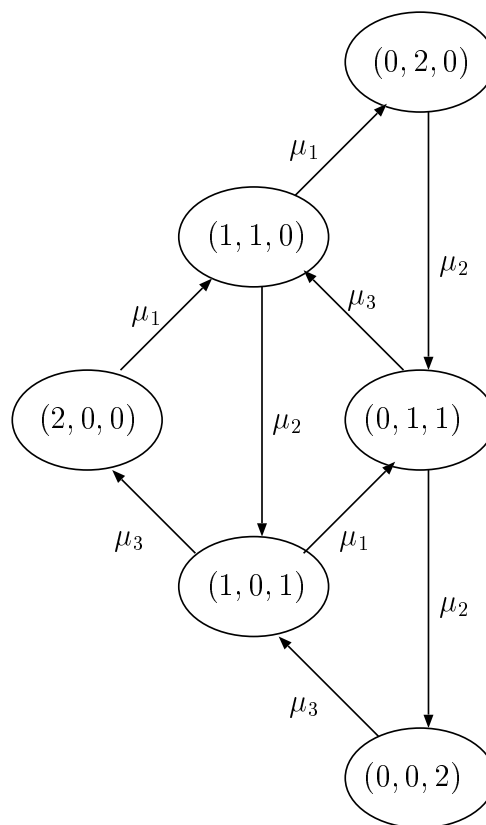
$$G(K) = \sum_{\mathbf{n} \in S} \prod_{j=1}^N \left(\frac{\beta_j}{\mu_j} \right)^{n_j} \quad (5.33)$$



Obr. 5.5: Cyklická sieť s tromi uzlami

Príklad 5.4. Nájďme stacionárne rozdelenie stavov cyklickej siete, Obr.5.5, s tromi uzlami, pričom intenzita obsluhy v j -tom uzle je μ_j v ktorej cyrkulujú $K = 2$ zákazníci. Zrejmä platí $r_{12} = r_{23} = r_{31} = 1$ a inak $r_{ij} = 0$. Počet stavov tejto siete je

$$\binom{N + K - 1}{N - 1} = \binom{4}{2} = 6$$



Obr. 5.6: Prechodový graf pre cyklická sieť s tromi uzlami

Lokálne rovnice rovnováhy dostaneme z Obr.5.6, majú podľa (5.31) tvar

$$\begin{aligned}
 \pi((2, 0, 0))\mu_1 &= \pi((1, 0, 1))\mu_3 \\
 \pi((0, 2, 0))\mu_2 &= \pi((1, 1, 0))\mu_1 \\
 \pi((0, 0, 2))\mu_3 &= \pi((0, 1, 1))\mu_2 \\
 \pi((1, 1, 0))(\mu_1 + \mu_2) &= \pi((2, 0, 0))\mu_1 + \pi((0, 1, 1))\mu_3 \\
 \pi((1, 0, 1))(\mu_1 + \mu_3) &= \pi((1, 1, 0))\mu_2 + \pi((0, 0, 2))\mu_3 \\
 \pi((0, 1, 1))(\mu_2 + \mu_3) &= \pi((1, 0, 1))\mu_1 + \pi((0, 2, 0))\mu_2
 \end{aligned}$$

Podľa (5.30) platí

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \beta_2 \\
 \beta_2 &= \beta_3 \\
 \beta_3 &= \beta_1
 \end{aligned}$$

s riešením $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ a tak dostaneme stacionárne rozdelenie $\pi((n_1, n_2, n_3))$ stavov $(n_1, n_2, n_3) \in S$

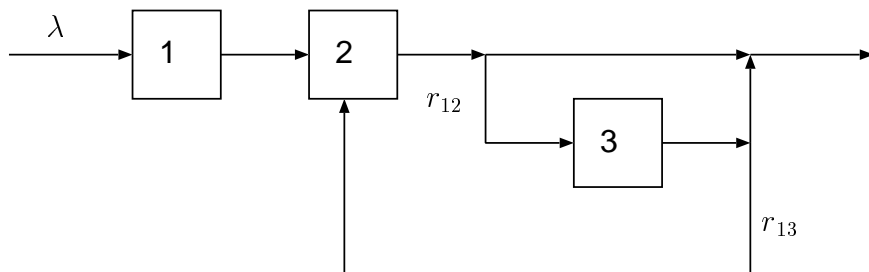
$$\begin{aligned}
 \pi((2, 0, 0)) &= \frac{1}{G(2)} \left(\frac{1}{\mu_1}\right)^2 \\
 \pi((0, 2, 0)) &= \frac{1}{G(2)} \left(\frac{1}{\mu_2}\right)^2 \\
 \pi((0, 0, 2)) &= \frac{1}{G(2)} \left(\frac{1}{\mu_3}\right)^2 \\
 \pi((1, 1, 0)) &= \frac{1}{G(2)} \frac{1}{\mu_1\mu_2} \\
 \pi((1, 0, 1)) &= \frac{1}{G(2)} \frac{1}{\mu_1\mu_3} \\
 \pi((0, 1, 1)) &= \frac{1}{G(2)} \frac{1}{\mu_2\mu_3} \\
 G(2) &= \left(\frac{1}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu_3}\right)^2 + \frac{1}{\mu_1\mu_2} + \frac{1}{\mu_1\mu_3} + \frac{1}{\mu_2\mu_3}
 \end{aligned}$$

Cvičenie. Modifikujte príklad 5.4 ak je navyše možný prechod s pravdepodobnosťou r_{21} .

5.2 Modely výpočtových systémov

Elementárne systémy hromadnej obsluhy umožňujú modelovať výpočtový systém ako celok. Takéto modely však umožňujú len pomerne hrubú analýzu. Nasledujúci príklad demonštruje použitie otvorenej obslužnej siete na analýzu výpočtového systému za predpokladu exponenciálne rozdelených medzier medzi príchodmi úloh požadujúcimi výpočet aj ich dŕob obsluhy.

Príklad 5.5. (Model otvorenej obslužnej siete) Uvažujme multiprogramový systém 5.7 do ktorého prichádzajú úlohy s intenzitou λ a čakajú v rade frontu 1. uzla na zavedenie do pamäti. Priemerná doba obsluhy $\frac{1}{\mu_1}$ 1. uzla je priemernou dobou zavedenia úlohy do pamäti, pričom v pamäti počítača môže byť uložených niekoľko úloh súčasne. Ďalej úlohy čakajú na pridelenie procesora, ktorý používajú bez prerušenia priemerne čas $\frac{1}{\mu_2}$. Úlohy pri prerušení pokračujú s pravdepodobnosťou r_{23} vstupno-výstupnou operáciou (I/O), pričom priemerná doba operácie je $\frac{1}{\mu_3}$ alebo s pravdepodobnosťou $1 - r_{23}$ sa ukončia t.j. uvoľňujú pamäť o opúšťajú systém. Po vykonaní I/O operácie s pravdepodobnosťou r_{32} opäť požadujú procesor alebo s pravdepodobnosťou $1 - r_{32}$ odchádzajú zo systému. Predpokladá sa, že hodnoty μ_i , r_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ sú rovnaké pre všetky úlohy.



Obr. 5.7: Multiprogramový výpočtový systém I.

Aj keď hlavná pamäť môže mať v tomto modeli pridelených niekoľko úloh, predpoklad o neobmedzenej dĺžke frontu 1. uzla zrejme nebude splnený. Uvažovanie vplyvu rozdelenia pamäti na dĺžky týchto radov by však veľmi zťažilo analýzu.

Najskôr odvodíme vzťah pre výpočet *priemernej doby výpočtu úlohy* $E(\mathbf{W})$. Z rovníc (5.7) pre relatívnu početnosť návštev uzlov siete $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ dostaneme

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \lambda \\ \beta_2 &= \beta_1 + \beta_3 r_{32} \\ \beta_3 &= \beta_2 r_{23}\end{aligned}$$

riešenie v tvare

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \lambda \\ \beta_2 &= \frac{\lambda}{1 - r_{23}r_{32}} \\ \beta_3 &= \frac{\lambda r_{23}}{1 - r_{23}r_{32}}\end{aligned}$$

a tak pravdepodobnosti stacionárneho rozdelenia stavov máme v tvare

$$\pi((n_1, n_2, n_3)) = \pi((0, 0, 0)) \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\lambda}{\mu_2(1 - r_{23}r_{32})}\right)^{n_2} \left(\frac{\lambda r_{23}}{\mu_3(1 - r_{23}r_{32})}\right)^{n_3} \quad (5.34)$$

Každý uzol siete považujeme za front $\mathbf{M}/\mathbf{M}/1/\infty$ a tak *koefficient využitia uzlov* je

$$\rho_j = \frac{\beta_j}{\mu_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

a tak priemerný počet úloh v jednotlivých uzloch je

$$E(\mathbf{N}_j) = \frac{\rho_j}{1 - \rho_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

Z Littlovej formuly potom pre priemernej doby výpočtu úlohy $E(\mathbf{W})$ t.j. *priemernú dobu pobytu v obslužnej sieti, dobu odozvy*

$$E(\mathbf{W}) = \frac{E(\mathbf{N})}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^3 \frac{\rho_j}{1 - \rho_j} \quad (5.35)$$

Zo vzťahu (5.35) možno určiť kritickú hodnotu intenzity vstupného toku úloh λ_{krit} pri ktorej sa už stáva *sieť nestabilnou*. Dôjde k tomu vtedy, keď koefficient využitia niektorého uzol bude rovné 1 t.j.

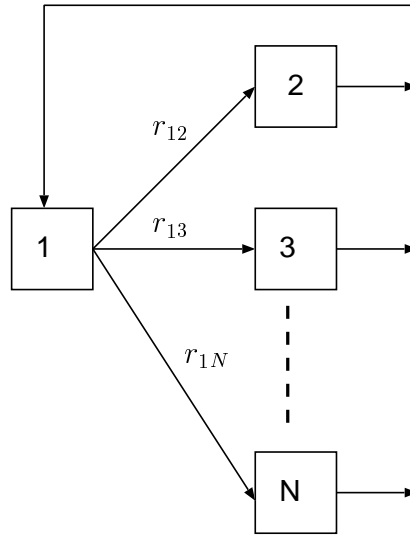
$$\begin{aligned}\lambda_{krit} &= \max_{\lambda > 0} \left\{ \frac{\lambda}{\mu_1} \leq 1, \frac{\lambda}{\mu_2(1 - r_{23}r_{32})} \leq 1, \frac{\lambda r_{23}}{\mu_3(1 - r_{23}r_{32})} \leq 1 \right\} \\ &= \min \left\{ \mu_1, \mu_2(1 - r_{23}r_{32}), \frac{\mu_3(1 - r_{23}r_{32})}{r_{23}} \right\}\end{aligned} \quad (5.36)$$

Sieť je stabilizovaná pre $0 \leq \lambda < \lambda_{krit}$. Ak je $\lambda = 0$ potom priemernú dobu odozvy $E(\mathbf{W})$ a vypočítame ju zo vzťahu

$$E(\mathbf{W}) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2(1 - r_{23}r_{32})} + \frac{r_{23}}{\mu_3(1 - r_{23}r_{32})}$$

Cvičenie. Znázornite závislosť doby odozvy $E(\mathbf{W}(\lambda))$ od intenzity príchodov pre $0 \leq \lambda < \lambda_{krit}$.

Príklad 5.6. (Model uzavretej obslužnej siete) V prípade multiprogramového systému budeme predpokladať, že hlavná pamäť je rozdelená na konštantný počet K úloh. Jednotlivé úlohy žiadajú o pridelenie procesora, niektorého I/O zariadenia, opäť procesora atď až do ich ukončenia, keď predpokladáme okamžité zavedenie ďalšej úlohy do pamäti a jej začatie. Ak procesor alebo I/O zariadenie sú obsadené, úloha čaká v rade. Model takéhoto systému je na Obr.5.8, kde uzol so strednou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu_1}$ reprezentuje procesor



Obr. 5.8: Multiprogramový výpočtový systém II.

a ostatné uzly reprezentujú I/O zariadenia. Pre stabilizovanú sieť dostávame

$$\pi((n_1, \dots, n_N)) = \frac{1}{G(K)} \prod_{j=1}^N \left(\frac{\beta_j}{\mu_j} \right)^{n_j} \quad (5.37)$$

$$G(K) = \sum_{n_1 + \dots + n_N = K} \prod_{j=1}^N \left(\frac{\beta_j}{\mu_j} \right)^{n_j} \quad (5.38)$$

$$\beta_j = \beta_1 r_{1j}, \quad j = 2, \dots, N \quad (5.39)$$

Riešením (5.39) je $\beta_1 = \mu_1, \beta_j = \mu_1 r_{1j}$. Z charakteristík siete je významné využitie procesora ρ_1 . V jednolinkových frontoch je rovné pravdepodobnosti,

že front je prázdny, teda

$$\rho_1 = \sum_{n_1 > 0} \pi((n_1, \dots, n_N)) = \frac{1}{G(K)} \sum_{n_1 > 0} \prod_{j=2}^N \left(\frac{\mu_1 r_{1j}}{\mu_j} \right)^{n_j} = \frac{G(K-1)}{G(K)} \quad (5.40)$$

Koeficienty využitia $\rho_j, j = 2, \dots, N$ v ostatných uzlov môžeme získať z podmienky, že intenzita príchodov úloh do uzla sa rovná intezite výstupného toku úloh čomu zodovedá riešenie $\beta_j = \rho_1 \mu_j$ rovníc (5.39), čo vedie na vzťah

$$\rho_j = \frac{\mu_1 r_{1j}}{\mu_j} \rho_1, \quad j = 2, \dots, N \quad (5.41)$$

V uzavretej sieti sa vo všeobecnosti o dobe pobytu v sieti nehovorí. Ak však vrátenie sa úlohy do 1.uzla napr. z 2.uzla znamená ukončenie jednej úlohy a okamžité zahájenie ďalšej, potom intenzita príchodov nových úloh γ do procesora je

$$\gamma = \mu_2 \rho_2 = \mu_1 \rho_1 r_{12}$$

a pre priemernú dobu pobytu úloh $E(\mathbf{W})$ v sieti dostaneme z Littlovej formuly

$$E(\mathbf{W}) = \frac{K}{\gamma} \quad (5.42)$$

pretože v sieti je konštantný počet úloh K .

Poznámka. Uvedené úvahy platia len ak doba obluhy v každom uzle má exponenciálne rozdelenie. V prípade zariadení s blokovým prenosom (napr. pri stránkovaní) tento predpoklad nebude splnený.

5.3 Reverzný reťazec a reverzibilita

Definícia 5.1. (Časovo) *revezným reťazcom* k (originálnemu) reťazcu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ rozumieme reťazec $\{\mathbf{X}^-(t), t \geq 0\}$ definovaný vzťahom

$$\mathbf{X}^-(-t) = \mathbf{X}(t) \quad (5.43)$$

Poznámka. Reverzný reťazec umožňuje rozšíriť definičný obor originálneho reťazca $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ na interval $(-\infty, \infty)$.

Veta 5.1. *Nech $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ je homogénny Markovov reťazec s množinou stavov S a maticou intenzít $\mathbf{Q} = (q(x, x'), x, x' \in S)$. Potom reverzný reťazec*

$\{\mathbf{X}^-(t), t \geq 0\}$ je tiež homogénny Markovov reťazec s množinou stavov S a maticou intenzít $\mathbb{Q}^- = (q^-(x, x'), x, x' \in S)$ definovanou

$$q^-(x, x') = \frac{\pi(x')q(x', x)}{\pi(x)} \quad (5.44)$$

kde π je stacionárne rozdelenie originálneho reťazca ktoré je i stacionárnym rozdelením reverzného reťazca.

Dôkaz. Predpokladajme, že $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ je homogénny Markovov reťazec so spojitým časom s intenzitami $q(x, x')$ definovanými na množine stavov S so stacionárnym rozdelením $\pi(x)$. Najkôr ukážeme, že reverzný reťazec je tiež Markovov t.j. pre $\forall s \geq 0$ platí markovova vlastnosť

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(\mathbf{X}^-(-t-s) = x' | \mathbf{X}^-(-t) = x, \mathbf{X}^-(-u) = x(u), 0 \leq u < t) \\ &= \mathcal{P}(\mathbf{X}(t+s) = x' | \mathbf{X}(t) = x, \mathbf{X}(u) = x(u), 0 \leq u < t) \\ &= \frac{\mathcal{P}(\mathbf{X}(t+s) = x', \mathbf{X}(t) = x)}{\mathcal{P}(\mathbf{X}(t) = x)} = \mathcal{P}(\mathbf{X}^-(-t-s) = x' | \mathbf{X}^-(-t) = x) \\ &= \mathcal{P}(\mathbf{X}^-(-t-s) = x' | \mathbf{X}^-(-t) = x) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Homogenita reverzného reťazca je zrejmá. Intenzita prechodu zo stavu x do stavu x' reverzného reťazca je

$$\begin{aligned} q^-(x, x') &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{P}(\mathbf{X}^-(-t-h) = x' | \mathbf{X}^-(-t) = x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{P}(\mathbf{X}(t+h) = x', \mathbf{X}(t) = x)}{h\mathcal{P}(\mathbf{X}(t) = x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{P}(\mathbf{X}(t+h) = x')\mathcal{P}(\mathbf{X}(t+h) = x' | \mathbf{X}(t) = x)}{h\mathcal{P}(\mathbf{X}(t) = x)} \\ &= \frac{\pi(x')q(x', x)}{\pi(x)} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Nech π je stacionárne rozdelenia reverzného reťazca vyhovujúce globálnym rovniciam rovnováhy $\mathbf{0} = \pi\mathbb{Q}^-$ t.j.

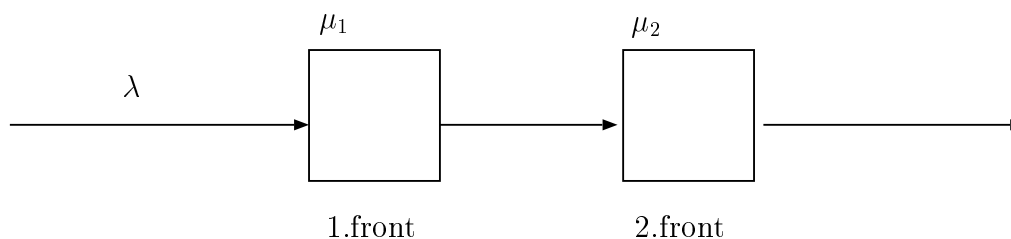
$$\pi(x) \sum_{x' \in S} q^-(x, x') = \sum_{x' \in S} \pi(x')q^-(x', x)$$

Po substitúcii so vzťahu (5.46) máme

$$\pi(x) \sum_{x' \in S} \frac{\pi(x')q(x', x)}{\pi(x)} = \sum_{x' \in S} \frac{\pi(x')\pi(x)q(x, x')}{\pi(x')}$$

a po úpravách dostaneme globálne rovnice rovnováhy $\mathbf{0} = \pi\mathbb{Q}$ pre originálny reťazec. \square

Príklad 5.7. (Reverzný model tandemu frontov) Uvažujme opäť otvorenú sieť, Obr.5.9, tvorenú tandemom dvoch frontov. Je modelovaná Markovovým reťazcom $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ s množinou stavov $S = \{(n_1, n_2) : n_1 \geq 0, n_2 \geq 0\}$. Jeho kladné intenzity prechodov v tejto otvorenej sieti sú



Obr. 5.9: Tandem dvoch frontov $M/M/1/\infty$

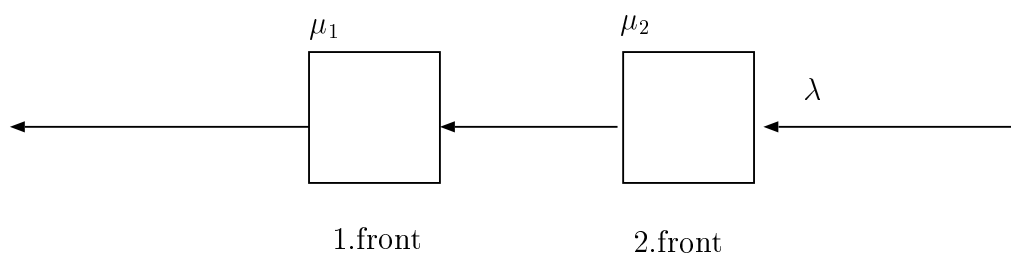
$$\begin{aligned} q((n_1, n_2), (n_1 + 1, n_2)) &= \lambda, & n_1 \geq 0, n_2 \geq 0 \\ q((n_1, n_2), (n_1 - 1, n_2 + 1)) &= \mu_1, & n_1 \geq 1, n_2 \geq 0 \\ q((n_1, n_2), (n_1, n_2 - 1)) &= \mu_2, & n_1 \geq 0, n_2 \geq 1 \end{aligned}$$

V (4.122) sme odvodili, že

$$\pi((n_1, n_2)) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2} \quad (5.47)$$

kde $\alpha_j = \frac{\lambda}{\mu_j}, j = 1, 2$.

Reverznému reťazcu $\{\mathbf{X}^-(t), t \geq 0\}$ k reťazcu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ s tou istou množinou stavov S zodpovedá, Obr.5.10 reverzný tandem dvoch frontov s dvoma uzlami v sérii. Intenzita príchodu do siete je λ a intenzity obslúh v



Obr. 5.10: Časovo reverzný tandem dvoch frontov $M/M/1/\infty$

uzlov 1 a 2 sú μ_1 a μ_2 .

Jeho kladné intenzity prechodov sú

$$\begin{aligned} q^-((n_1, n_2), (n_1, n_2 + 1)) &= \lambda, & n_1 \geq 0, n_2 \geq 0 \\ q^-((n_1, n_2), (n_1 + 1, n_2 - 1)) &= \mu_2, & n_1 \geq 0, n_2 \geq 1 \\ q^-((n_1, n_2), (n_1 - 1, n_2)) &= \mu_1, & n_1 \geq 1, n_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Táto skutočnosť však nemá vplyv na na stacionárne rozdelenie, ktoré je opäť v tvare (5.47) aj napriek tomu, že tandemové fronty majú v originálnom a reverznom modeli iné intenzity obsluhy.

Príklad 5.8. ($\mathbf{M}/\mathbf{M}(n)/1/\infty$) Uvažujme front $\mathbf{M}/\mathbf{M}/1/\infty$ so stavovo závislou intenzitou obsluhy. Proces príchodu je Poissonov s intenzitou λ a intenzita obsluhy je μ_n závislá od počtu zákazníkov n v systéme. V prípade, keď

$$\mu_n = \min\{n, C\}\mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

pre nejaké fixné prirodzené C a $\mu > 0$ dostávame systé $\mathbf{M}/\mathbf{M}/C/\infty$ s priemernou dobou obsluhy $\frac{1}{\mu}$.

Nech $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ je Markovov reťazec modelujúci v čase t počet zákazníkov vo fronte. Jedná s o špeciálny prípad procesu vzniku a zániku s kladnými intenzitami

$$\begin{aligned} q(n, n + 1) &= \lambda, & n \geq 0 \\ q(n, n - 1) &= \mu_n, & n \geq 1 \end{aligned}$$

Potom stacionárne rozdelenie reťazca $\boldsymbol{\pi}$ dostaneme v tvare

$$\begin{aligned} \pi(n) &= \pi(0) \frac{\lambda^n}{\prod_{k=1}^n \mu_k}, & n \geq 1 \\ \pi(0) &= \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\prod_{k=1}^n \mu_k} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Pre reverzný reťazec $\{\mathbf{X}^-(t), t \geq 0\}$ k reťazcu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ má kladné intenzity prechodu

$$\begin{aligned} q(n, n + 1) &= \lambda, & n \geq 0 \\ q(n, n - 1) &= \mu_n, & n \geq 1 \end{aligned}$$

A tak $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^-$ a stacionárne rozdelenia oboch reťazcov sú triviálne totožné. Reverzný reťazec je v tomto prípade je tiež front $\mathbf{M}/\mathbf{M}(n)/1/\infty$.

Veta 5.2. (Kellyho) Nech $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ je homogénny Markovov reťazec s maticou intenzít $\mathbb{Q} = (q(x, x'), x, x' \in S)$. Ak najdeme takú nezápornú maticu $\mathbb{Q}^- = (q^-(x, x'), x, x' \in S)$ a vektor kladných čísel $\boldsymbol{\pi} = (\pi(x), x \in S)$, že

$$\sum_{x' \in S} q(x, x') = \sum_{x' \in S} q^-(x, x'), \quad x \in S \quad (5.48)$$

a

$$\pi(x')q(x', x) = \pi(x)q^-(x, x'), \quad x, x' \in S \quad (5.49)$$

potom \mathbb{Q}^- je matica intenzít reverzného reťazca a $\boldsymbol{\pi}$ je stacionárne rozdelenie oboch reťazcov.

Dôkaz. Po použití (5.48) v súčte (5.49) cez $x' \in S$ dostaneme

$$\sum_{x' \in S} \pi(x')q(x', x) = \pi(x) \sum_{x' \in S} q^-(x, x') = \pi(x) \sum_{x' \in S} q(x, x')$$

čo sú globálne rovnice rovnováhy pre \mathbb{Q} . A tak je podľa predpokladu $\boldsymbol{\pi}$ stacionárnym rozdelením reťazca $\{\mathbf{X}(t)\}$. Z (5.49) zas máme

$$q^-(x, x') = \frac{\pi(x')q(x', x)}{\pi(x)}$$

čo je podľa vety 5.1 definícia intenzity reverzného reťazca $\{\mathbf{X}^-(-t)\}$ a oba reťazce majú to isté stacionárne rozdelenie. \square

Príklad 5.9. (Aplikácia na tandem frontov) Tandem dvoch frontov sa ukázal v príklade 5.7 ako prirodzený kandidát na reverzný model Obr.5.10. Ukázali sme, že stacionárne rozdelenie (5.47) originálneho reťazca je

$$\pi((n_1, n_2)) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{n_1} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^{n_2}$$

Ukážeme, že $\pi(n_1, n_2)$ je skutočne aj stacionárnym rozdelením reverzného reťazca charakterizovaného maticou intenzít \mathbb{Q}^- overením predpokladov Kellyho vety. Platí predpoklad (5.48)

$$\begin{aligned} \sum_{(n'_1, n'_2) \in S} q((n_1, n_2), (n'_1, n'_2)) &= \sum_{(n'_1, n'_2) \in S} q^-((n_1, n_2), (n'_1, n'_2)) \\ &= \lambda + \mu_1 \chi(n_1 \geq 1) + \mu_2 \chi(n_2 \geq 1) \end{aligned}$$

Predpoklad (5.49) overíme postupne. Pre $x = (n_1, n_2)$, $x' = (n_1 + 1, n_2)$ je

$$\begin{aligned} & \pi((n_1, n_2))q((n_1, n_2), (n_1 + 1, n_2)) \\ & = \pi((n_1 + 1, n_2))q^-((n_1 + 1, n_2), (n_1, n_2)) \end{aligned}$$

odkiaľ po dosadení a úpravách máme

$$\pi((n_1 + 1, n_2)) = \pi((n_1, n_2)) \frac{\lambda}{\mu_1}$$

Pre $x = (n_1, n_2)$, $x' = (n_1 - 1, n_2 + 1)$ je

$$\begin{aligned} & \pi((n_1, n_2))q((n_1, n_2), (n_1 - 1, n_2 + 1)) \\ & = \pi((n_1 - 1, n_2 + 1))q^-((n_1 - 1, n_2 + 1), (n_1, n_2)) \end{aligned}$$

odkiaľ zas

$$\pi((n_1 - 1, n_2 + 1)) = \pi((n_1, n_2)) \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Pre $x = (n_1, n_2)$, $x' = (n_1, n_2 - 1)$ je

$$\begin{aligned} & \pi((n_1, n_2))q((n_1, n_2), (n_1, n_2 - 1)) \\ & = \pi((n_1, n_2 - 1))q^-((n_1, n_2 - 1), (n_1, n_2)) \end{aligned}$$

odkiaľ tiež

$$\pi((n_1, n_2 - 1)) = \pi((n_1, n_2)) \frac{\mu_2}{\lambda}$$

Poznámka. Hlavnou výhodou tohto prístupu je, ako vidieť aj na príklade 5.8, že sa nepožaduje žiaden súčet na verifikáciu globálnych rovníc rovnováhy. Príklad 5.8, nám ukázal, že reverzný reťazec môže mať tú istú štruktúru ako originálny reťazec.

Definícia 5.2. Homogénny Markovov reťazec $\{\mathbf{X}(t)\}$ s maticou intenzít \mathbb{Q} nazveme *reverzibilný*, ak existuje reverzný reťazec $\{\mathbf{X}^-(-t)\}$ originálneho reťazca s maticou intenzít $\mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}$.

Z vlastnosti reverzibility reťazca $q(x, x') = q^-(x, x')$, $x, x' \in S$ možno odvodiť po dosadení z (5.44) rovnice

$$\pi(x)q(x, x') = \pi(x')q(x', x), \quad x, x' \in S \quad (5.50)$$

ktoré nazývame *detailné rovnice rovnováhy*. Detailné rovnice rovnováhy tak dávajú jednoduché kritérium pre zistenie reverzibility reťazca. Ak existuje dvojicu stavov (x, x') , $x, x' \in S$, že

$$q(x, x') \neq 0, \quad q(x', x) = 0 \quad (5.51)$$

potom reťazec *nie je reverzibilný*.

Príklad 5.10. (Nereverzibilita tandemu frontov) Uvažujme tandem frontov z príkladu 5.7. Zákazníci prichádzajú do 1.uzla s intenzitou λ a intenzita obsluhy v jeho dvoch uzloch je μ_1 a μ_2 . Reťazec nemôže byť reverzibilný, pretože pre $x = (0, 1)$ a $x' = (1, 1)$ je $q(x, x') = \lambda > 0$ ale $q(x', x) = 0$.

Poznámka. Keď nie je prechodový graf reťazca digraf ale graf, potom sa predpokladá, že pre každú jeho hranu existujú kladné intenzity v oboch smeroch.

Veta 5.3. *Nech je prechodový graf ergodického reťazca s množinou stavov S strom $G = (S, H)$, kde $\{x, x'\} \in H$ ak $q(x, x') > 0$ aj $q(x', x) > 0$. Potom je reťazec reverzibilný.*

Dôkaz. Predpokladajme, že prechodový graf $G = (S, H)$ je strom. Nech x a x' sú dva stavy reťazca. Ak $\{x, y\} \in H$, potom je mostom a jej vyňatím sa graf G rozpadne na dva komponenty (A, H_A) a $(S - A, H_{S-A})$. Krížové rovnice rovnováhy su detailnými rovnicami rovnováhy a reťazec je reverzibilný. \square

Príklad 5.11. (Proces vzniku a zániku) Tento reťazec s nanajvyš spočítateľnou množinou stavov S je reverzibilný, Jeho prechodový graf $G = (S, H)$, kde množina hrán $H = \{\{i, i+1\} : i \in S, q(i, i+1) = \lambda_i > 0, q(i+1, i) = \mu_i > 0\}$, je strom. A tak aj systém $\mathbf{M}/\mathbf{M}(n)/1$ z príkladu 5.8 je reverzibilný.

Významnou vlastnosťou reverzibilných reťazcov je, že ak je reťazec zúžený na podmnožinu stavov originálneho reťazca, možno jeho stacionárne rozdelenie vypočítať zo stacionárnych pravdepodobností originálneho reťazca na tejto podmnožine.

Definícia 5.3. Nech $\{\mathbf{X}(t)\}$ je homogénny Markovov reťazec s množinou stavov S a maticou intenzít \mathbb{Q} . *Zúžením* originálneho reťazca rozumieme homogénny Markovov reťazec $\{\mathbf{X}_A(t)\}$ s množinou stavov $A \subset S$ a maticou intenzít $\mathbb{Q}_A = (q(x, x'), x, x' \in A)$.

Príklad 5.12. Reťazec modelujúci systém $\mathbf{M}/\mathbf{M}/1/N$ s množinou stavov $A = \{0, 1, \dots, N\}$ vznikne zúžením reťazca s množinou stavov $S = \{0, 1, \dots\}$ modelujúceho systém $\mathbf{M}/\mathbf{M}/1/\infty$.

Veta 5.4. *Nech $\{\mathbf{X}(t)\}$ reverzibilný Markovov reťazec s množinou stavov S a stacionárnym rozdelením π a $A \subset S$. Potom $\{\mathbf{X}_A(t)\}$ je reverzibilný a má stacionárne rozdelenie $\pi_A = (\pi_A(x), x \in A)$, kde*

$$\pi_A(x) = \frac{\pi(x)}{\sum_{x' \in A} \pi(x')} \quad (5.52)$$

Dôkaz. Z reverzibility originálneho reťazca plynie platnosť detailných rovníc rovnováhy pre podmnožinu množinu $A \subset S$ platí

$$\pi(x)q(x, x') = \pi(x')q(x', x), \quad x, x' \in A$$

a zostáva v platnosti aj po vydelení $\sum_{x' \in A} \pi(x')$ t.j.

$$\pi_A(x)q(x, x') = \pi_A(x')q(x', x), \quad x, x' \in A$$

Zrejme platí normalizačná podmienka

$$\sum_{x \in A} \pi_A(x) = \sum_{x \in A} \frac{\pi(x)}{\sum_{x' \in A} \pi(x')} = 1$$

a tak dostávame, že π_A spĺňa detailné rovnice rovnováhy pre zúžený reťazec a je jeho stacionárnym rozdelením. \square

Reverzibilita je postačujúca podmienka pre existenciu stacionárneho rozdelenia jeho zúženého reťazca, ale nie je nutná. Nutnou a postačujúcou podmienkou je splnenie lokálnych rovníc rovnováhy.

Veta 5.5. *Nech je homogénny Markovov reťazec so stacionárnym rozdelením π a množinou stavov S zúžený na podmnožinu A . Potom stacionárne rozdelenie pre zúžený reťazec je určené vzťahom (5.52) práve vtedy, keď sú splnené lokálne rovnice rovnováhy*

$$\pi(x) \sum_{x' \in A} q(x, x') = \sum_{x' \in A} \pi(x')q(x', x), \quad x \in A \quad (5.53)$$

Dôkaz. Ak je π_A stacionárne rozdelenie pre zúžený reťazec potom sú splnené globálne rovnice rovnováhy

$$\pi_A(x) \sum_{x' \in A} q(x, x') = \sum_{x' \in A} \pi_A(x')q(x', x), \quad x \in A \quad (5.54)$$

Po substitúcii (5.52) do (5.54) dostaneme (5.53). Na druhej strane, ak je splnené (5.54) potom (5.52) bude platiť a podľa vety 5.4 je π_A stacionárnym rozdelením zúženého reťazca. \square