Otimalizácia v tabul'kovom procesore Gnumeric

doc. RNDr. Štefan PEŠKO, CSc,

pesko@frcatel.fri.uniza.sk

Katedra matematických metód, Fakulta riadenia a informatiky,
Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Obsah

- Od Excelu ku Gnumericu

Obsah

- Od Excelu ku Gnumericu
- Neprocedurálne programovanie v spreadsheetoch

Obsah

- Od Excelu ku Gnumericu
- Neprocedurálne programovanie v spreadsheetoch
- Solver - Riešič pre úlohy (i zmiešaného) LP

Obsah

- Od Excelu ku Gnumericu
- Neprocedurálne programovanie v spreadsheetoch
- Solver - Riešič pre úlohy (i zmiešaného) LP
- Dopravné a priraďovacie úlohy

Obsah

- Od Excelu ku Gnumericu
- Neprocedurálne programovanie v spreadsheetoch
- Solver - Riešič pre úlohy (i zmiešaného) LP
- Dopravné a priraďovacie úlohy
- Hra puzzle – Sudoku

Obsah

- Od Excelu ku Gnumericu
- Neprocedurálne programovanie v spreadsheetoch
- Solver - Riešič pre úlohy (i zmiešaného) LP
- Dopravné a priraďovacie úlohy
- Hra puzzle – Sudoku
- Výpočet matice vzdialeností

Obsah

- Od Excelu ku Gnumericu
- Neprocedurálne programovanie v spreadsheetoch
- Solver - Riešič pre úlohy (i zmiešaného) LP
- Dopravné a priraďovacie úlohy
- Hra puzzle – Sudoku
- Výpočet matice vzdialeností
- Problémy obchodného cestujúceho

Obsah

- Od Excelu ku Gnumericu
- Neprocedurálne programovanie v spreadsheetoch
- Solver - Riešič pre úlohy (i zmiešaného) LP
- Dopravné a priraďovacie úlohy
- Hra puzzle – Sudoku
- Výpočet matice vzdialeností
- Problémy obchodného cestujúceho
- Problémy rovnomerných rozvrhov

Obsah

- Od Excelu ku Gnumericu
- Neprocedurálne programovanie v spreadsheetoch
- Solver - Riešič pre úlohy (i zmiešaného) LP
- Dopravné a priraďovacie úlohy
- Hra puzzle – Sudoku
- Výpočet matice vzdialeností
- Problémy obchodného cestujúceho
- Problémy rovnomerných rozvrhov
- Graf dopravnej siete

Obsah

- Od Excelu ku Gnumericu
- Neprocedurálne programovanie v spreadsheetoch
- Solver - Riešič pre úlohy (i zmiešaného) LP
- Dopravné a priraďovacie úlohy
- Hra puzzle – Sudoku
- Výpočet matice vzdialeností
- Problémy obchodného cestujúceho
- Problémy rovnomerných rozvrhov
- Graf dopravnej siete
- Metóda CPM a jej zovšeobecnenia

Od Excelu ku Gnumericu

- Výhody otvoreného softvéru – OSS
- Skoro plnohodnotná konverzia
  Gnumeric $\rightarrow$ Excel
- Pohodlná tvorba a ladenie optimalizačných modelov
- Variabilita OSS Solverov matematického programovania
- Riešenie testujúcich inštancií reálnych optimalizačných úloh
- Priateľské vstupno–výstupné rozhranie
  pre praktikov i riešiteľov

Gnumeric user manual,
http://www.gnome.org/projects/gnumeric/doc

Neprocedurálne programovanie

Bunky tabuľky sa na seba odkazujú pomocou spredsheetovských formúl:

$$Y_{ij} := \mathcal{F}(\cdots, X_{kl}, \cdots),$$

- $\mathcal{F}()$ - [zložená] funkcia buniek tabuľky alebo konštánt,
- Y_{ij} - bunka v i-tom riadku a j-tom stĺpci tabuľky,
- X_{kl} - bunka v k-tom riadku a l-tom stĺpci tabuľky alebo nejaká funkcia buniek.

Pripúšťajú sa, no moc neodporúčajú, aj cyklické odkazy keď $X_{kl} = Y_{ij}$.

Príklad:
$A6 := sum(G4 : C4)$, $A7 := sumproduct(B3 : G3; B4 : G4)$, $F6 := F6 + F4$.

Solver pre úlohy LP [1]

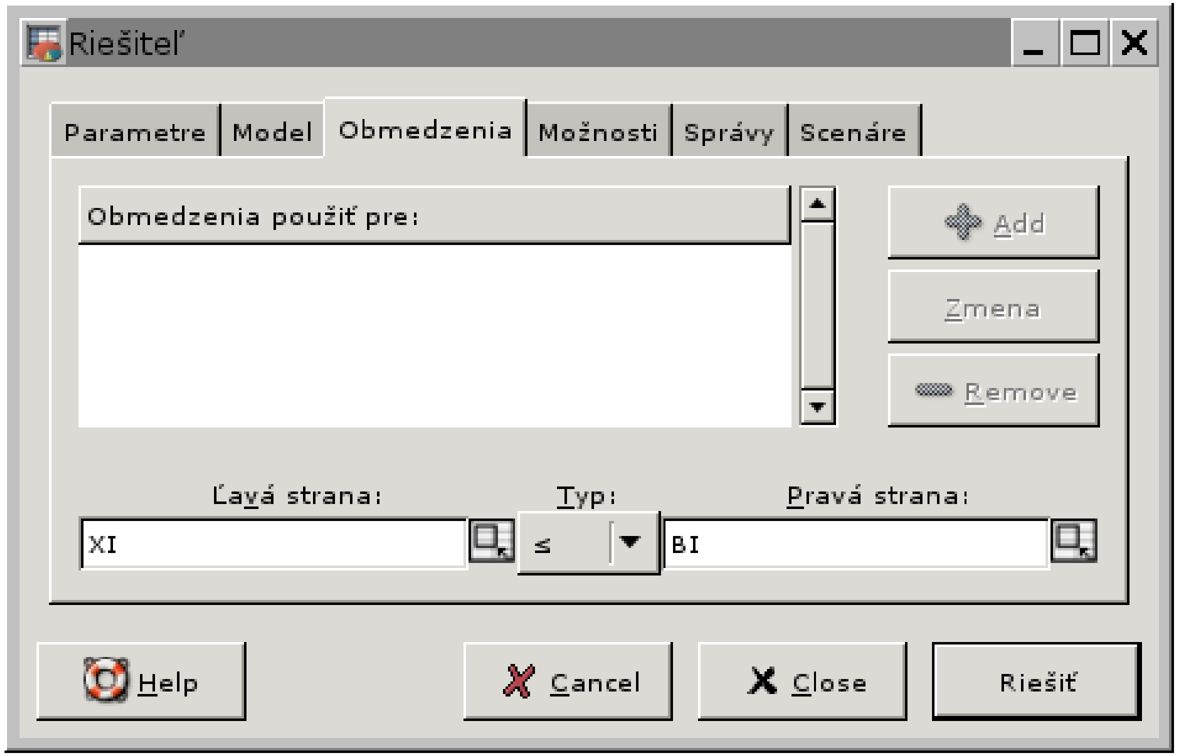
Simplex (LP solver), Revised Simplex (GLPK 4.5)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\,[\max], \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq [\ \geq,\ =\ ]\ b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0,\ \left[\text{celé}, \{0, 1\}\right], \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Solver pre úlohy LP [2]



Obrázok 1: Blokové štrukturálne obmedzenia LP

Miesto $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, m$ stačí $XI \leq BI$.

Dopravné a priraďovacie úlohy [1]

Klasická dopravná úloha s previsom ponuky:
$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Ak $m = n, a_i = b_j = 1$ – (symetrická) priraďovacia úloha.

Dopravné a priraďovacie úlohy [2]

H15 = =sumproduct(B3:F6,B11:F14)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	CCC	1	2	3	4	5	a_i		
3	1	2	5	4	5	3	10		
4	2	4	5	2	7	8	20		
5	3	3	4	7	2	1	20		
6	4	4	6	3	3	2	10		
7	b_j	5	15	10	15	10		55	
8							60		
9									
10	XXX	1	2	3	4	5	sum_i		
11	1	5	5	0	0	0	10		
12	2	0	5	10	0	0	15		
13	3	0	5	0	15	0	20		
14	4	0	0	0	0	10	10		
15	sum_j	5	15	10	15	10		150	
16									

DopravnaUloha PriradovaciaUloha

Obrázok 2: Nevybilancovaná dopravná úloha

Pre štrukturálne obmedzenia stačí rozkopírovať bunky $G11 = sum(B11 : F11); B15 = sum(B11 : F11)$

Puzzle Sudoku [1]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1			4	8					
2		9		4	6			7	
3		5					6		4
4	2	1		6			5		
5	5	8		7		9		4	1
6			7			8		6	9
7	3	4	5					9	
8		6			3	7		2	
9						4	1		

Obrázok 3: Zadanie ľahkého Sudoku

Puzzle Sudoku [2]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6	2	**4**	**8**	7	1	9	5	3
2	1	**9**	3	**4**	**6**	5	8	**7**	2
3	7	**5**	9	3	9	2	**6**	1	**4**
4	**2**	**1**	9	**6**	4	3	**5**	8	7
5	**5**	**8**	6	**7**	2	**9**	3	**4**	**1**
6	4	3	**7**	1	5	**8**	2	**6**	**9**
7	**3**	**4**	**5**	2	1	6	7	**9**	8
8	8	**6**	1	9	**3**	**7**	4	**2**	5
9	9	7	2	5	8	**4**	**1**	3	6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
3	1	1	1	2	2	2	3	3	3
4	4	4	4	5	5	5	6	6	6
5	4	4	4	5	5	5	6	6	6
6	4	4	4	5	5	5	6	6	6
7	7	7	7	8	8	8	9	9	9
8	7	7	7	8	8	8	9	9	9
9	7	7	7	8	8	8	9	9	9

Obrázok 4: Riešenie Sudoku a čísla boxov

Do hracieho poľa 9×9 sa dopĺňajú čísla od 1 do 9. Každý z 9 boxov po 3×3 políčka, každý riadok aj každý stĺpec musí každé z čísel $1 - 9$ obsahovať iba raz.

Puzzle Sudoku [3]

Nech premenná $x_{ijk} = 1$ ak je číslo k umiestnené v i-tom riadku a j-tom stĺpci hracieho poľa – Y_{ij}. Nech b_{ij} udáva číslo boxu políčka (i, j). Nech $a_{ij} = 0$ ak políčko (i, j) je prázdne, ináč nejaké číslo $1, 2, \ldots, 9$. Uvažujme ocenenie políčka (i, j) číslom

$$c_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{ak } a_{ij} = 0 \\ 1 & \text{ak } a_{ij} = k > 0. \end{cases}$$

Riešenie: $Y_{ij} := \sum_{k=1}^{9} k \cdot x_{ijk}$

Puzzle Sudoku [4]

$$\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{9}\sum_{k=1}^{9} c_{ijk}\cdot x_{ijk} \to \max, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ijk} = 1, \sum_{i=1}^{9} x_{ijk} = 1 \qquad i,j,k \in \{1,\ldots,9\}, \tag{9}$$

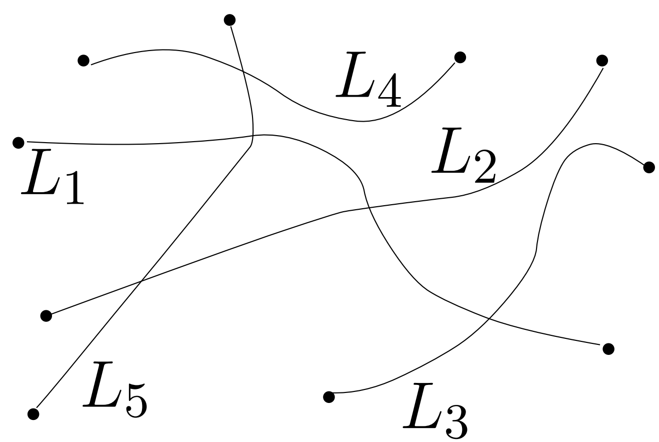
$$\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1|b_{ij}=l}^{9} x_{ijk} = 1, \qquad k,l \in \{1,\ldots,9\}, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{9} x_{ijk} = 1, \qquad i,j \in \{1,\ldots,9\}, \tag{11}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \qquad i,j,k \in \{1,\ldots,9\}. \tag{12}$$

Výpočet matice vzdialeností [1]

Aplikácia: Minimalizácia počtu prestupov medzi linkami. Nech je daná množina n liniek $\mathcal{L} = \{L_i : i \in N\}$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ a matica $\mathrm{A} = (a_{ij})$, kde prvok $a_{ij} = 1$, ak je možný prestup z linky $L_i \in \mathcal{L}$ na linku $L_j \in \mathcal{L}$ (t. j. linky majú aspoň jednu spoločnú zastávku) a $a_{ij} = n$ v opačnom prípade. Hľadá sa matica $\mathrm{D} = (d_{ij})$, kde prvok d_{ij} udáva minimálny počet prestupov z linky L_i na linku L_j.



Obrázok 5: Schématické vedenie liniek MHD

Výpočet matice vzdialeností [2]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

procedure FLOYD(A)

  $\mathrm{D} = \mathrm{A}$

  for $k \in N$ do

    for $i \in N$ do

      for $j \in N$ do

        if $d_{ij} > d_{ik} + d_{kj}$ then

          $d_{ij} = d_{ik} + d_{kj}$

Výpočet matice vzdialeností [3]

L4 = `=min(K4,index(K$4:K$28,($I4-1)*$F$3+L$3)+index(K$4:K$28,(L$3-1)*$F$3+$J4))`

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1				D[(i-1)*n+j]=min{D[(i-1)*n+j],D[(i-1)*n+k]+D[(k-1)*n+j]}													
2												k				DDD	
3	AAA	1	2	3	4	5	=n		i	j	0	1	2	3	4	5	
4	1	0	1	1	5	1			1	1	0	0	0	0	0	0	
5	2	1	0	5	5	1			1	2	1	1	1	1	1	1	
6	3	1	5	0	5	5			1	3	1	1	1	1	1	1	
7	4	5	5	5	0	1			1	4	5	5	5	5	5	2	
8	5	1	1	5	1	0			1	5	1	1	1	1	1	1	
9									2	1	1	1	1	1	1	1	
10	DDD	1	2	3	4	5			2	2	0	0	0	0	0	0	
11	1	0	1	1	2	1			2	3	5	2	2	2	2	2	
12	2	1	0	2	2	1			2	4	5	5	5	5	5	2	
13	3	1	2	0	3	2			2	5	1	1	1	1	1	1	
14	4	2	2	3	0	1			3	1	1	1	1	1	1	1	
15	5	1	1	2	1	0			3	2	5	2	2	2	2	2	
16									3	3	0	0	0	0	0	0	

Linky | List2

Obrázok 6: Floydov algoritmus

$$D[(i-1)*n+j] =$$
$$min\{D[(i-1)*n+j], D[(i-1)*n+k]+D[(k-1)*n+j]\}$$

Problém obchodného cestujúceho

Je daná matica nákladov medzi uzlami $N = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ dopravnej siete $\mathrm{D} = (d_{ij})$. Hľadá sa najlacnejší uzavretý sled obsahujúci všetky uzly. Označme $M = N - \{0\}$. Nech $x_{ij} = 1$ ak sled $TSP := 0 \to \cdots \to i \to j \to \cdots \to 0$.

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij} \to \min \tag{13}$$

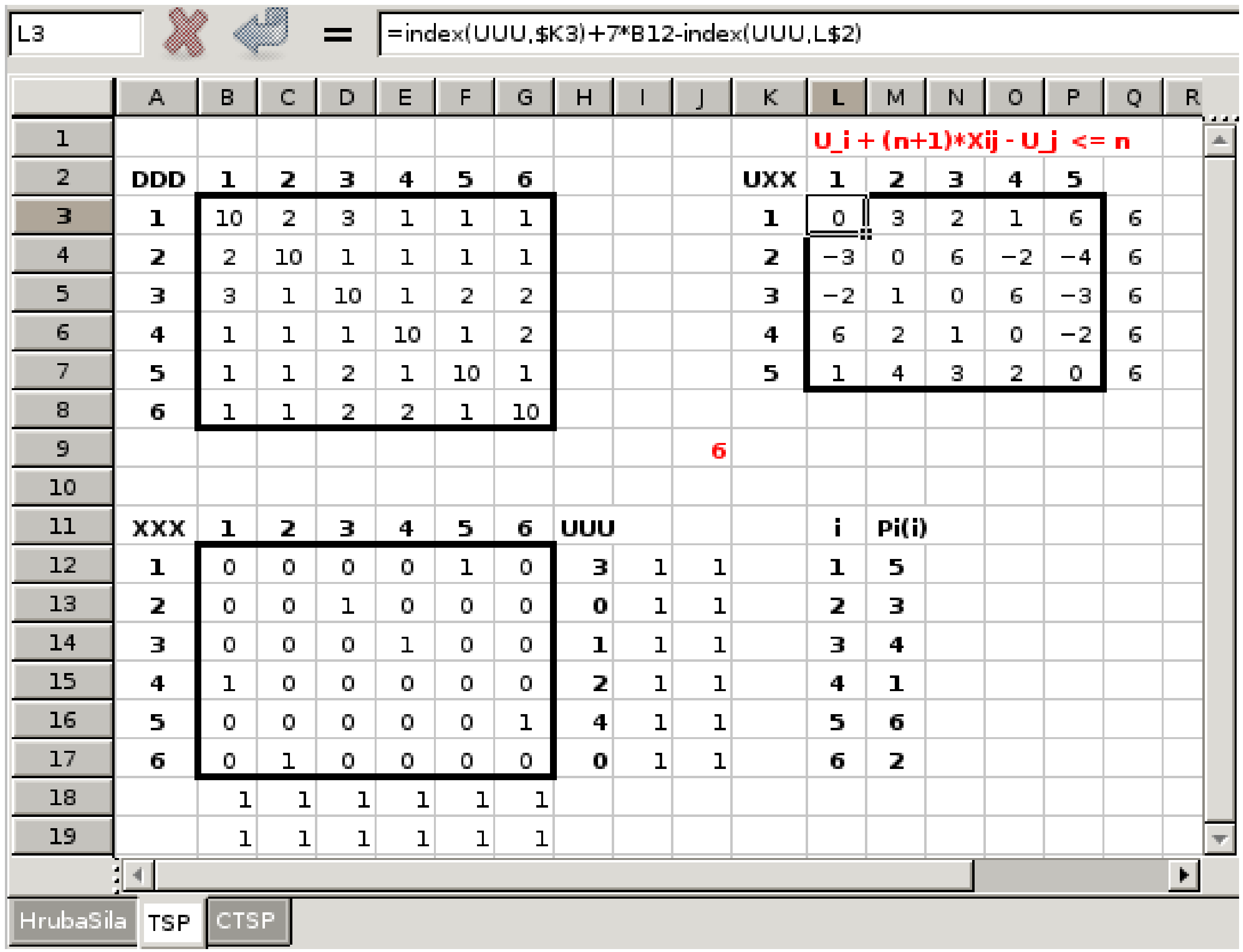
$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \qquad i, j \in N, \tag{14}$$

$$u_i + (n+1) x_{ij} - u_j \leq n \qquad i, j \in M,\ i \neq j, \tag{15}$$

$$u_i \geq 0 \qquad i \in M, \tag{16}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i, j \in N. \tag{17}$$

Problém tSP [2]

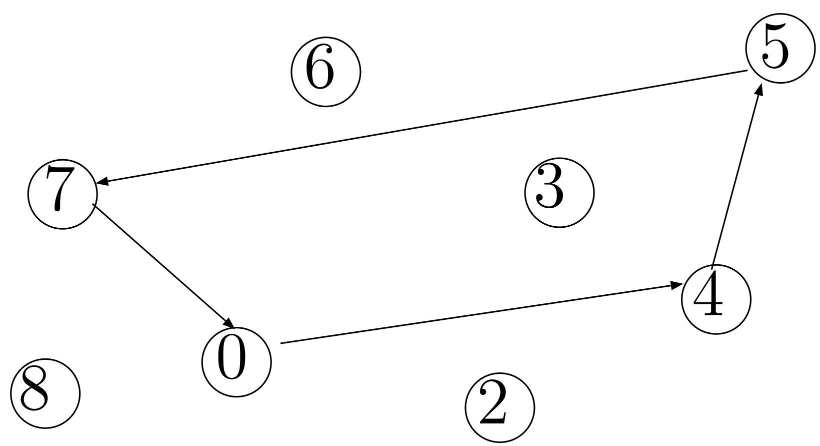


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1												U_i + (n+1)*Xij - U_j <= n						
2	DDD	1	2	3	4	5	6				UXX	1	2	3	4	5		
3	1	10	2	3	1	1	1				1	0	3	2	1	6	6	
4	2	2	10	1	1	1	1				2	−3	0	6	−2	−4	6	
5	3	3	1	10	1	2	2				3	−2	1	0	6	−3	6	
6	4	1	1	1	10	1	2				4	6	2	1	0	−2	6	
7	5	1	1	2	1	10	1				5	1	4	3	2	0	6	
8	6	1	1	2	2	1	10											
9										6								
10																		
11	XXX	1	2	3	4	5	6	UUU				i	Pi(i)					
12	1	0	0	0	0	1	0	3	1	1		1	5					
13	2	0	0	1	0	0	0	0	1	1		2	3					
14	3	0	0	0	1	0	0	1	1	1		3	4					
15	4	1	0	0	0	0	0	2	1	1		4	1					
16	5	0	0	0	0	0	1	4	1	1		5	6					
17	6	0	1	0	0	0	0	0	1	1		6	2					
18		1	1	1	1	1	1											
19		1	1	1	1	1	1											

Obrázok 7: Polia pre ILP Solver v TSPs.gnumeric

Problém nakupujúceho TSP [1]

Podobne ako TSP ale 0 reprezentujúci východiskové miesto ale BTSP cestujúci nemusí navštíviť všetky uzly lebo hodlá nakúpiť sortiment p druhov tovaru, $K = \{1, 2, \ldots, p\}$, v množstvách $b_k, k \in K$ v niektorých predajniach, ktoré sú umiestnené v ostatných uzloch $i \in M = N - \{0\}$, a ponúkajú sortiment v množstvách a_{ik} za jednotkovú cenu c_{ik}.



Obrázok 8: Pochôdzka $BTSP := 0 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 0$

Problém nakupujúceho TSP [2]

BTSP nakupuje dostatočné množstvá k-teho druhu tovaru y_{ik}. Tu $x_{ii} = 1$ znamená, že predajňa i nebola navštívená.

$$\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} d_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in M}\sum_{k\in K} c_{ik}y_{ik} \rightarrow \min \tag{18}$$

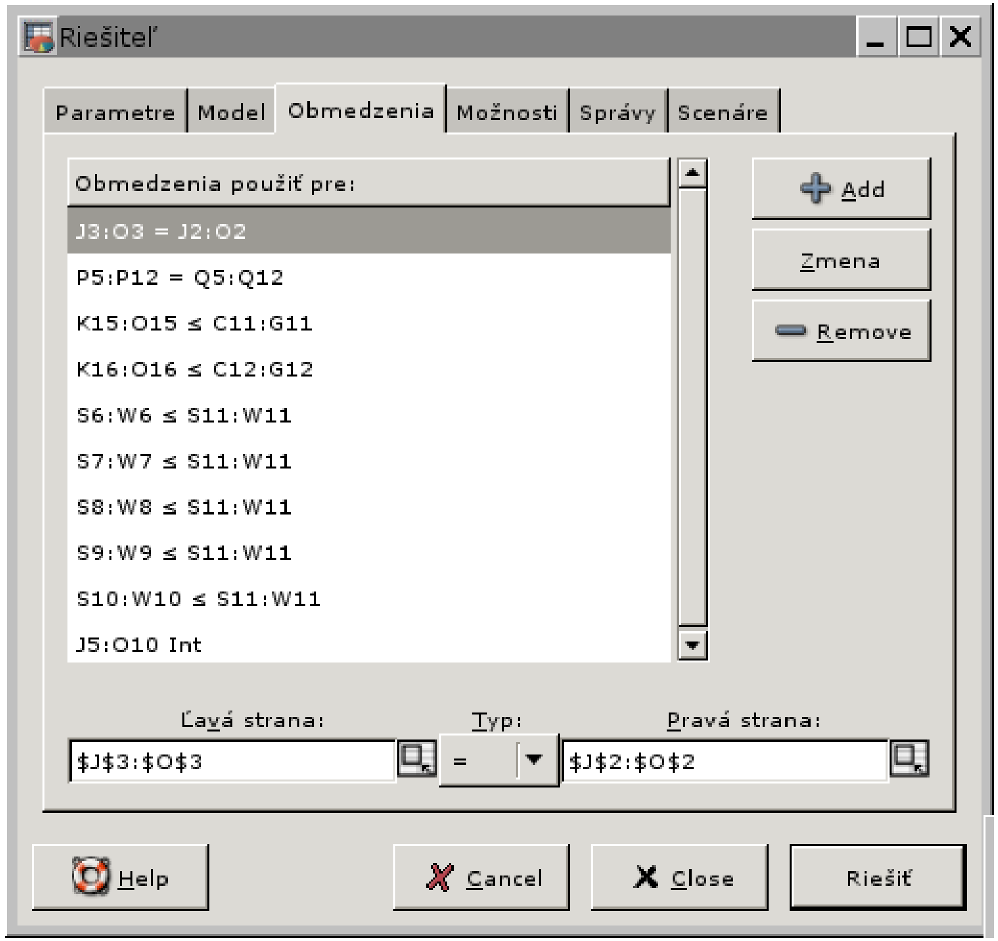
$$y_{ik} + a_{ik}x_{ii} \leq a_{ik}, \qquad i \in M,\ k \in K, \tag{19}$$

$$\sum_{i\in M} y_{ik} = b_k, \qquad k \in K, \tag{20}$$

$$y_{ik} \geq 0, \qquad i \in M,\ k \in K, \tag{21}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ \text{vyhovuje (14)}. \tag{22}$$

Problém nakupujúceho TSP [3]



Obrázok 9: Obmedzujúce podmienky $(19) - (22)$ pre riešenie dvojsortimentovej BTSP

Problém prieberčivého TSP [1]

Podobne ako TSP ale je daný rozklad množiny uzlov N do tried rozkladu $N_1, N_2, \ldots, N_p$. Prieberčivý CTSP si na svojej pochôdzke vyberá z každej triedy rozkladu práve jeden uzol.

Tu $x_{ij} = 1$ znamená, že $CTSP := \rightarrow \cdots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \cdots \rightarrow$ ak $x_{ii} = 1$, že uzol i nebude navštívený.

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \tag{23}$$

$$\sum_{k \in N_k} x_{kk} = |N_k| - 1, \qquad k \in \{1, \ldots, p\}, \tag{24}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \text{ vyhovuje (14)–(16).} \tag{25}$$

Problém rovnomerných rozvrhov 1

Problém permutácii matice [Černý, Vašek, Peško,1990] $\mathcal{MPP}$ *(tzv. úloha o stonožke)*:

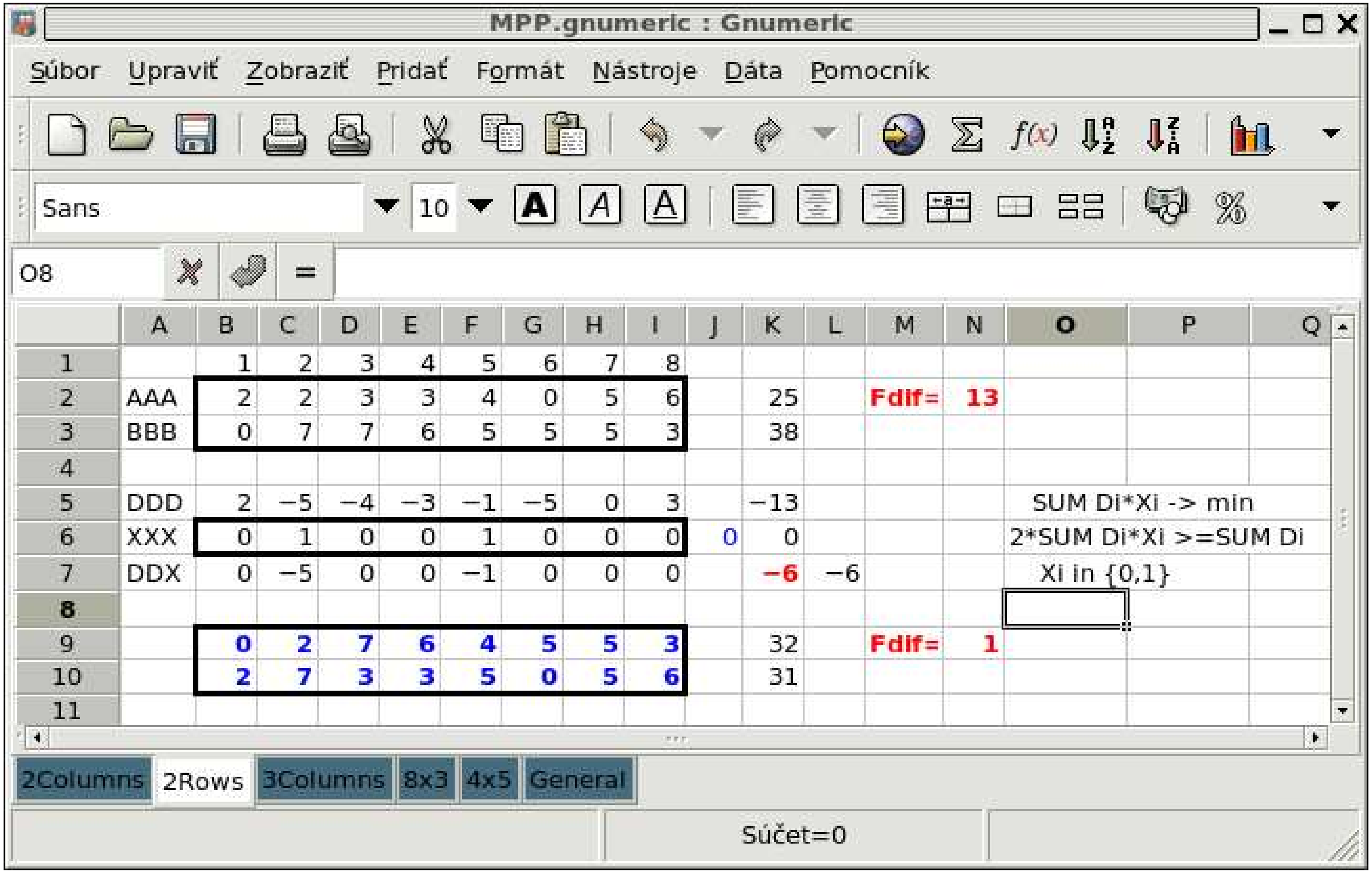
Preusporiadať prvky v stĺpcoch matice $\mathbb{A} \in \Re^{m\times n}$ pri minimálnej miere nerovnomernosti riadkových súčtov $F(s_1,\ldots,s_m)$ napr. $F_{dif}(s_1,\ldots,s_m) = max_{i\in M} s_i - min_{i\in M} s_i$.

Riešením je matica $\mathbb{A}_\psi = (a_{\psi_{ij},j})$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_\psi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Optimálne riešenie pre 3 vozidlá (riadky) na týždeň (stĺpce) s $F_{dif}(17,17,18) = 1$.

Problém rovnomerných rozvrhov 2



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		1	2	3	4	5	6	7	8						
2	AAA	2	2	3	3	4	0	5	6		25		Fdif=	13	
3	BBB	0	7	7	6	5	5	5	3		38				
4															
5	DDD	2	−5	−4	−3	−1	−5	0	3		−13				SUM Di*Xi -> min
6	XXX	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0				2*SUM Di*Xi >=SUM Di
7	DDX	0	−5	0	0	−1	0	0	0		−6	−6			Xi in {0,1}
8															
9		0	2	7	6	4	5	5	3		32		Fdif=	1	
10		2	7	3	3	5	0	5	6		31				
11															

Obrázok 10: Problém $\mathcal{MPP}_{2\times n} \in \mathcal{NP} - hard$ ako úloha BLP

Problém rovnomerných rozvrhov 3

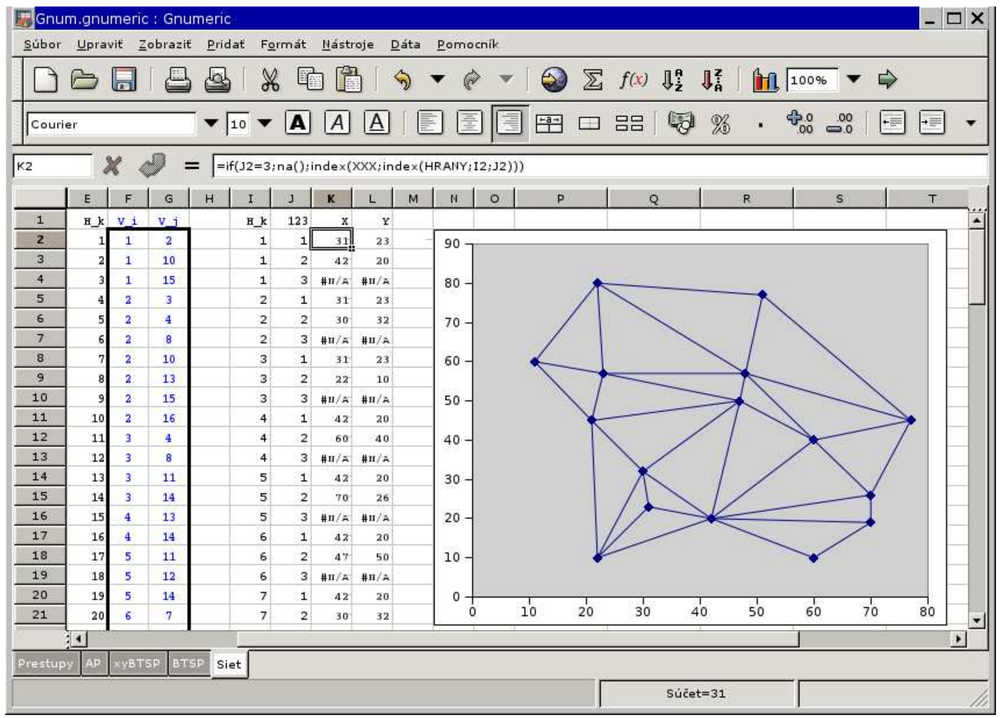
P3 = =if(C$10=1,index(Q_2,$J3),index(Q_2,$L3))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5									Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5		
2	1	1	3	0	5	3	12		7	2	−5	8		1	2	2	6	10	2	22	
3	2	2	2	2	3	2	11		6	1	−5	7		2	1	3	5	4	3	16	
4	3	3	4	3	3	1	14		8	4	−6	4		3	4	3	4	3	0	14	
5	4	4	3	4	3	0	14		7	3	−7	6		4	3	4	4	3	1	15	
6	5	5	2	2	1	10	20		17	6	−3	3		5	6	2	3	3	2	16	
7	6	6	2	4	3	2	17		10	7	−7	1		6	4	4	0	5	3	16	
8	7	4	4	5	4	3	20		11	8	−9	2		7	3	5	2	3	6	19	
9	8	3	5	6	10	6	30		14	5	−16	5		8	5	2	2	1	10	20	
10		1	1	0	0	1			1		0										
11																					
12					Fmax =		30											Fmax =		22	
13					Fdif =		19											Fdif =		8	
14					Fsqr =		2646											Fsqr =		2434	

Obrázok 11: Heuristika pre $\mathcal{MPP}_{m\times n} \in \mathcal{NP} - hard$ stochastickou dekompozíciou na kumulované dvojstĺpcové $\mathcal{MPP}_{m\times 2} \in \mathcal{P}$

Graf dopravnej siete

Graf (diagram) dopravnej siete môžeme pohodlne reprezentovať množinou úsečiek nakreslením sledu úsečiek ako prerušovanej lomenej čiary.

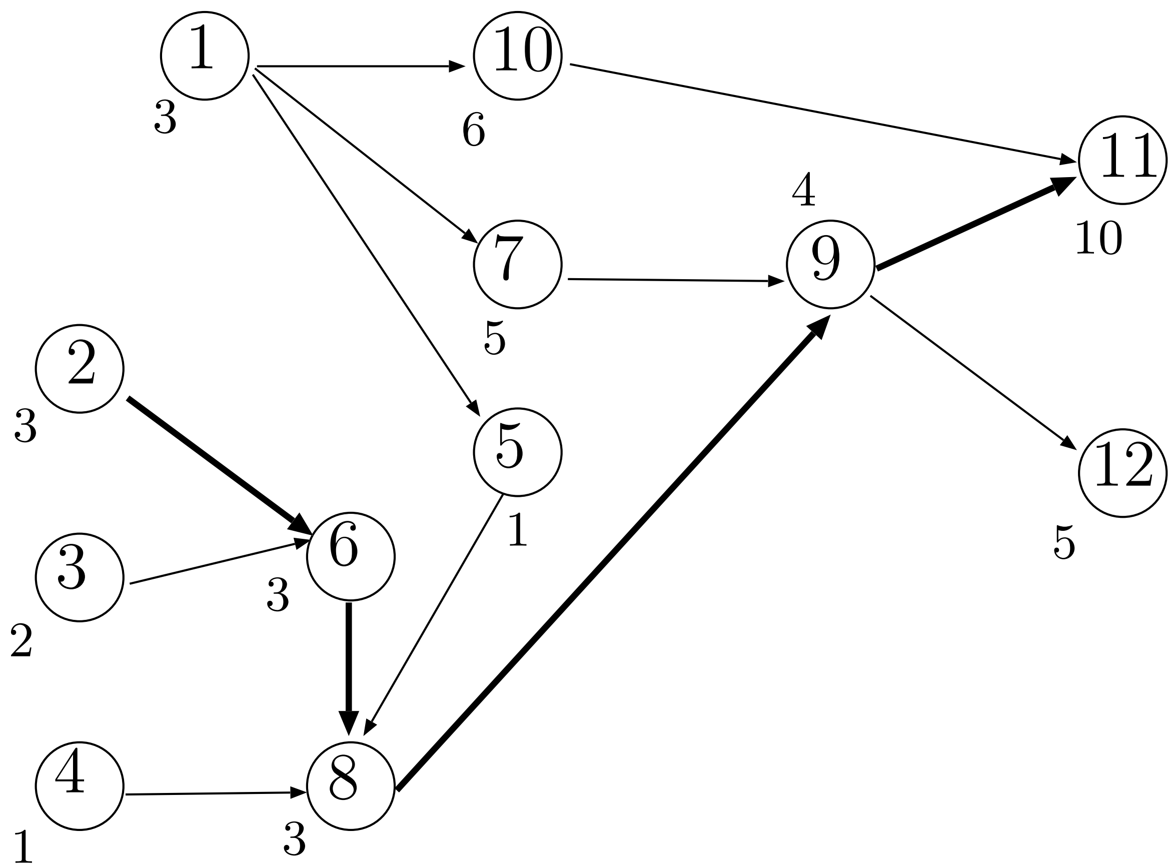


Obrázok 12: Diagram dopravnej siete

Metóda CPM [1]

Číslo	Činnosť	Doba	Predchádzajúce činnos
1	Prístrešok na materiál	3	-
2	Výkop základov	3	-
3	Dovoz dreva	2	-
4	Dovoz štrkopiesku	1	-
5	Dovoz cementu	1	1
6	Bednenie základov	3	2,3
7	Materiál na stavbu	5	1
8	Betónovanie základov	3	4,5,6
9	Hrubá stavba	4	7,8
10	Dovoz vybavenia	6	1
11	Vnútorné vybavenie	10	9,10
12	Upratovanie	5	9

Metóda CPM [2]



Obrázok 13: Graf preferencií činností $G_{\prec}$

Metóda CPM [3]

Q4 | =if(Q$3=$L4;index(ZAC;1;$K4)+index(DOBA;$K4);"-")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1		Doba trvania projektu:			23							ZAC	0	0	0	0	3	3	3	6	9	3	13	13
2													3	3	2	1	4	6	8	9	13	9	23	18
3		**Cinnost**	**Doba**	**Prechadzajuce**			**Zaciatok**	**Koniec**	**Rezerva**		**i**	**j**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
4		1	3				0				1	5	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-
5		2	3				0				2	6	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-
6		3	2				0				3	6	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-
7		4	1				0				1	7	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-
8		5	1	1			3				4	8	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-
9		6	3	2	3		3				5	8	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	-	-
10		7	5	1			3				6	8	-	-	-	-	-	-	-	6	-	-	-	-
11		8	3	4	5	6	6				7	9	-	-	-	-	-	-	-	-	8	-	-	-
12		9	4	7	8		9				8	9	-	-	-	-	-	-	-	-	9	-	-	-
13		10	6	1			3				1	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-
14		11	10	9	10		13				9	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	13	-
15		12	5	9			13				10	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9	-
16											9	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	13

Graf | LP | Sheet3

Obrázok 14: Výpočet najskôr možných začiatkov činností – najcenejšia cesta v preferenčnom digrafe $G_{\prec}$

Metóda CPM [4]

M23 = =if(M$22=$L23;index(KON;1;$K23)-index(DOBA;$K23);E1)

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
19																	
20			KON	4	3	3	6	6	6	9	9	13	13	23	23		
21																	
22		i	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
23		5	1	5	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23		
24		6	2	23	3	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23		
25		6	3	23	23	3	23	23	23	23	23	23	23	23	23		
26		7	1	4	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23		
27		8	4	23	23	23	6	23	23	23	23	23	23	23	23		
28		8	5	23	23	23	23	6	23	23	23	23	23	23	23		
29		8	6	23	23	23	23	23	6	23	23	23	23	23	23		
30		9	7	23	23	23	23	23	23	9	23	23	23	23	23		
31		9	8	23	23	23	23	23	23	23	9	23	23	23	23		
32		10	1	7	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23		
33		11	9	23	23	23	23	23	23	23	23	13	23	23	23		
34		11	10	23	23	23	23	23	23	23	23	23	13	23	23		
35		12	9	23	23	23	23	23	23	23	23	18	23	23	23		
36																	

Graf | LP | Sheet3

Obrázok 15: Výpočet najneskôr nutných koncov činností – najlacnejšia cesta v preferenčnom digrafe $G_{\prec}$

Metóda CPM [5]

I5 =H5-G5-C5

Doba trvania projektu: 23

Cinnost	Doba	Prechadzajuce			Zaciatok	Koniec	Rezerva
1	3				0	4	1
2	3				0	3	0
3	2				0	3	1
4	1				0	6	5
5	1	1			3	6	2
6	3	2	3		3	6	0
7	5	1			3	9	1
8	3	4	5	6	6	9	0
9	4	7	8		9	13	0
10	6	1			3	13	4
11	10	9	10		13	23	0
12	5	9			13	23	5

Graf LP Sheet3

Obrázok 16: Kritická cesta $2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 11$

http://frcatel.fri.uniza.sk/ pesko/

Ďakujem za pozornosť.