CHAPTER VII

MODEL CPM A JEHO ZOVŠEOBECNENIA

Rekapitulácia metódy CPM z hľadiska teórie rozvrhov

Rozvrhovací problém, ktorý rieši metóda CPM možno charakterizovať nasledovne: Je daná množina úloh $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ a množina rovnakých paralelných strojov $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$. Každá z úloh J_i pozostáva z jedinej operácie o_i, ktorá sa vykoná na ľubovoľnom stroji stroji M_j s časom spracovania p_i. Predpokladajme, že počet strojov m je dostatočne veľký na to, aby žiadna úloha pripravená na spracovanie nestála len preto, že pre ňu niet voľného stroja. (Na to stačí, aby $m \geq n$.) Na množine $\mathcal{J}$ je daná precedenčná relácia $\prec$. Úlohou je nájsť optimálny rozvrh z hľadiska minimalizácie kritéria $C_{\max}$ pri dodržaní relácie $\prec$.

Z hľadiska klasifikácie LLRK možno tento problém považovať za systém $P\infty|prec|C_{\max}$ s precedenčnou reláciou na množine úloha $\mathcal{J}$.

Náväznosť úloh sa pre tento prípad modeluje tzv. sieťovým digrafom, v ktorom je každej úlohe J_i pridelená práve jedna hrana ohodnotená dĺžkou spracovania p_i úlohy J_i, vrcholy – začiatky a konce hrán predstavujú časové začiatky a konce spracovania úloh (reprezentovaných s nimi incidentnými hranami). Sieťový digraf obsahuje dva špeciálne vrcholy z – začiatok vykonávania projektu – jediný vrchol s nulovým vstupným stupňom a k – koniec vykonávania projektu – jediný vrchol s nulovým výstupným stupňom. Sieťový digraf je neorientovane súvislý acyklický digraf, v ktorom pre každý vrchol x existuje $(z-x)$ dráha i $(x-k)$ dráha. V acyklickom digrafe je možné očíslovať vrcholy tak, aby pre každú hranu (i,j) platilo $i < j$. Takéto očíslovanie budeme nazývať monotónnym. Jednou z metód monotónneho očíslovania je nasledujúci postup:

K1: Pre každý vrchol x sieťového digrafu vypočítame dĺžku najdlhšej $(z-x)$ dráhy $\mu(x)$. (Najdlhšou dráhou tu myslíme dráhu s najväčším počtom hrán).

K2: Akákoľvek postupnosť vrcholov $[1], [2], \dots, [N]$ taká, že

$$\mu([1]) \leq \mu([2]) \leq \dots \leq \mu([N])$$

určuje nové očíslovanie vrcholov (t.j. vrchol x bude mať číslo $[x]$) splňujúce požiadavku monotónnosti.

Pri monotónnom očíslovaní vrcholov je $z = 1$, $k = N$, kde N je počet vrcholov sieťovehé digrafu.

Hodnotu T trvania projektu určíme ako $d_{\max}(z-k)$ dĺžku maximálnej dráhy od začiatku projektu z do konca projektu k. Každú dráhu dĺžky T v sieťovom digrafe nazveme kritickou dráhou (kritických dráh môže existovať viac). Úlohy ležiace na kritickej dráhe sa nazývajú kritické úlohy.

Pre každý vrchol x sieťového grafu určíme dva časové okamžiky – $e(x)$ naskôr možný začiatok činností vychádzajúcich z vrchola x ako $e(x) = d_{\max}(z, x)$ a $l(x)$ najneskôr nutný koniec činností vchádzajúcich do vrchola x ako $l(x) = T - d_{\max}(x, k)$, kde $d_{\max}(x, y)$ je dĺžka maximálnej $(x-y)$ dráhy. Pre vrchol x ležiaci na nejakej kritickej dráhe je $e(x) = l(x)$, pre ostatné vrcholy je $e(x) < l(x)$. Úlohy reprezentované hranami (x, y) môžu byť v rozvrhu zadelené viacerými spôsobmi tak, že začínajú v ľubovoľnom časovom okamžiku uzavretého intervalu $\langle e(x), l(y) - p_{ij}\rangle$ (Toto zadelenie je však obmedzené časovou polohou ostatných úloh v rozvrhu. Predchádzajúce tvrdenie treba chápať tak, že pre ľubovoľnú úlohu reprezentovanú hranou $(x - y)$ a pre ľubovoľné $t \in \langle e(x), l(y) - p_{ij}\rangle$ existuje optimálny rozvrh taký, že daná úloha začína v čase t.) Zadelenie kritických úloh v čase je jednoznačné – ich začiatok je určený hodnotou $e(x) = l(x)$, kde x je vrchol sieťového digrafu reprezentujúci začiatok príslušnej úlohy.

Ak by sme zmiernili požiadavku na trvanie projektu, a dovolili, aby sa mohla posledná úloha dokončiť v čase $D > T$, potom by sa najneskôr nutný koniec vykonávania činností vchádzajúcich do vrchola x počítal ako $l(x) = D - d_{\max}(x, k)$. Tým vzniknú rezervy aj pre úlohy, ktoré pôvodne ležali na kritickej dráhe. Takýmto dodatočným zmiernením požiadaviek na rozvrh sa zväčší stupeň voľnosti rozvrhu, ktorý možno využiť na splnenie niektorých dodatočných obmedzení – napr. na splnenie požiadavky na obmedzené zdroje.

Podľa teórie rozvrhov je rozvrh pre úlohy $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ určený postupnosťou časových intervalov $\{(b_1, c_1), (b_2, c_2), \dots, (b_n, c_n)\}$, v ktorých sa majú úlohy z $\mathcal{J}$ vykonávať. Riešeniu úlohy sieťového plánovania ešte nedáva rozvrh v tomto zmysle, pretože, podľa predhádzajúceho textu, riešeniu zodpovedá niekoľko optimálnych rozvrhov.

Jedným z nich je ES–rozvrh (early start schedule) E, v ktorom je štart každej z úloh naplnánovaný v najskoršom možnom okamžiku vypočítanom metódou CPM, iným je LS–rozvrh (late start schedule) L, v ktorom je štart každej úlohy naplánovaný tak, aby skončila v najneskôr nutnom čase určenom metódou CPM.

Time – Cost trade of

Predpokladajme, že vrcholy sieťového digrafu sú očíslované tak, že pre každú hranu (i, j) platí $i < j$. Potom vrchol 1 je začiatok vykonávania projektu, vrchol n koniec vykonávania projektu. Označme:

N - počet vrcholov sieťového grafu
x_i - začiatok vykonávania úlohy J_i
t_{ij} - trvanie úlohy (i, j)

Potom pre úlohu sieťového plánovania možno zostaviť nasledujúci matematický model lineárneho programovania:

$$\text{Minimalizovať } x_N$$

za podmienok:

$$\begin{aligned} &x_1 = 0 \\ &x_j - x_i \geq p_{ij} \qquad \text{pre každú hranu } (i, j) \end{aligned}$$

Označme T hodnotu x_N pre optimálne riešenie poslednej úlohy.

Najskôr možné začiatky x_i' úloh vychádzajúcich z vrcholov i sú optimálnym riešením úlohy

$$\text{Minimalizovať } \sum_{i=1}^{N} x_i$$

za podmienok:

$$\begin{aligned} &x_1 = 0 \\ &x_N = T \\ &x_j - x_i \geq p_{ij} \qquad \text{pre každú hranu } (i,j) \end{aligned}$$

Najneskôr nutné konce x_i'' úloh vchádzajúcich do vrcholov i sú optimálnym riešením úlohy

$$\text{Maximalizovať } \sum_{i=1}^{N} x_i$$

za podmienok:

$$\begin{aligned} &x_1 = 0 \\ &x_N = T \\ &x_j - x_i \geq p_{ij} \qquad \text{pre každú hranu } (i,j) \end{aligned}$$

Pre praktické riešenie úlohy sieťového plánovania je lineárne programovanie zbytočne silným aparátom, jeho význam však oceníme v nasledujúcom zovšeobecnení tejto úlohy.

Predpokladajme, že časy p_{ij} vykonávania jednotlivých úloh nie sú konštanty, ale každý sa môže meniť v intervale $\langle m_{ij}, M_{ij}\rangle$. Zrýchlenie vykonávania úlohy však čosi stojí. Nech $f_{ij}(t) = c_{0ij} - c_{ij}.t$ pre $t \in \langle m_{ij}, M_{ij}\rangle$ je funkcia vyjadrujúca náklady na spracovanie úlohy (i,j) za predpokladu, že toto spracovanie bude trvať čas t. Nech C pokuta za oneskorenie projektu o jednotku času. Ako kriteriálnu funkciu vezmeme súčet nákladov na spracovanie všetkých úloh plus celkovú pokutu za oneskorenie. Kriteriálna funkcia bude teda:

$$C.(x_N - T) + \sum_{(i,j)\in H} (c_{0ij} - c_{ij}.t_{ij}),$$

kde T je minimálna možná doba trvania projektu, t_{ij} je trvanie úlohy reprezentovanej hranou $(i,j) \in H$. Pretože $C.T$ a $\sum_{(i,j)\in H} c_{0ij}$ sú konštanty, možno toto kritérium nahradiť jednoduchším

$$C.x_N - \sum_{(i,j)\in H} c_{ij}.t_{ij}$$

Úloha zovšeobecneného sieťového plánovania potom bude mať tvar:

$$\text{Minimalizovať} \quad C.x_N - \sum_{(i,j)\in H} c_{ij}.t_{ij}$$

za podmienok:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 0 \\
&x_j - x_i - p_{ij} \geq 0 \qquad \text{pre každú hranu } (i,j) \\
&p_{ij} \leq M_{ij} \\
&p_{ij} \geq m_{ij}
\end{aligned}$$

Obmedzené zdroje

Každá úloha J_i z množiny $\mathcal{J}$ môže vyžadovať isté zdroje. Môže to byť istý počet pracovníkov, nákladných vozidiel, isté množstvo energie, pohonných hmôt, surovín a podobne. Metóda CPM nepredpokladá žiadne obmedzenia na tieto zdroje. Skutočnosť je však bližšia k situácii, keď máme k dispozícii v jednom časovom okamžiku len isté obmedzené počty ľudí, dopravných prostriedkov, či obmedzené množstvá energie, materiálov atď. V takomto prípade už nemožno naplánovať súčasné vykonávanie viacerých činností podľa výsledkov metódy CPM, ale niektoré činnosti musia počkať, kým sa ukončením iných neuvoľnia zdroje potrebné pre ich spracovanie.

Je teda daná množina $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_q\}$ zdrojov, z ktorých máme k dispozícíí v každom časovom okmžiku iba A_j jednotiek zo zdoja R_j, pričom úloha J_i potrebuje v každom okamžiku svojho spracovania a_{ij} jednotiek zdroja R_j. Označme $G_S(t)$ množinu všetkých úloh, ktoré sa podľa rozvrhu S vykonávajú v čase t, t.j.

$$G_S(t) = \{J_i \mid J_i \in \mathcal{J},\ t \in [b_i, c_i)\}$$

Pre rozvrhovanie s obmedzenými zdrojmi potom rozvrh S považujeme za prípustný, ak pre každý časový okamžik t a pre každý zdroj R_j platí

$$\sum_{i \in G_S(t)} a_{ij} \leq A_j.$$

Formulácia pomocou celočíselného lineárneho programovania

Označme:

- A_j – množstvo jednotiek zdroja R_j
- a_{ij} – množstvo zdroja R_j požadovaného úlohou J_i
- x_{it} – bivalentná premenná nadobúdajúca hodnotu 1 len ak úloha J_i skončí v čase t
- H – časový horizont – množina časov t, v ktorých pripadá do úvahy skončenie nejakej úlohy J_i

Potom čas ukončenia úlohy J_i možno vyjadriť ako $C_i = \sum_{t \in H} t.x_{it}$, čas začiatku vykonávania úlohy J_j ako $B_j = \sum_{t \in H} t.x_{jt} - p_j$. Ak má byť $J_i \prec J_j$, potom musí byť $C_i \leq B_j$.

Precedenčné obmedzenia možno teda zapísať v tvare:

$$\sum_{t \in H} t.x_{it} + p_j \leq \sum_{t \in H} t.x_{jt} \quad \text{pre všetky } i,j \text{ také, že } J_i \prec\prec J_j$$

Úloha J_i s dĺžkou spracovania p_i sa vykonáva v čase t práve vtedy, keď medzi časovými okamžikmi $t, t+1, \ldots, t+p_i-1$ existuje okamžik u jej skončenia, pre ktorý jediný platí $x_{iu} = 1$, čo nastane práve vtedy, keď $\sum_{u=t}^{t+p_i-1} x_{iu} = 1$.

Obmedzenia na zdroje možno teda zapísať:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \sum_{u=t}^{t+p_i-1} x_{iu} \le A_k \quad \forall t \in H$$

Ešte treba dodať obmedzenie vyjdrujúce, že každá úloha sa má vykonať práve raz:

$$\sum_{t\in H} x_{it} = 1$$

Kriteriálna funkcia vyjadrujúca minimalizáciu trvania projektu bude:

$$\sum_{t\in H} t.x_{nt} \to \min$$

Tu sa budeme zaoberať iba prípadom jediného obmedzeného zdroja s celkovým množstvom A jednotiek, a_i bude predstavovať počet jednotiek tohoto zdroja potrebných pre vykonanie úlohy J_i.

Nech S je ľubovoľný rozvrh pre danú úlohu. Označme $G_S(t)$ množinu všetkých úloh, ktoré sa podľa rozvrhu S vykonávajú v čase t. Ďalej označme:

$$r_E(t) = \sum_{i\in G_E(t)} a_i \qquad r_L(t) = \sum_{i\in G_L(t)} a_i \qquad r_S(t) = \sum_{i\in G_S(t)} a_i$$

Funkcia $r_S(t)$ udáva, koľko jednotiek zdroja je potrebných v čase t, ak sa úlohy z $\mathcal{J}$ vykonávajú podľa rozvrhu S.

Potom platí:

$$\sum_{u=1}^{t} r_E(u) \ge \sum_{u=1}^{t} r_S(u) \ge \sum_{u=1}^{t} r_L(u)$$

$$\sum_{u=D-t}^{D} r_E(u) \le \sum_{u=D-t}^{D} r_S(u) \le \sum_{u=D-t}^{D} r_L(u)$$

VETA. *Ak* $\sum_{u=1}^{t} r_L(u) > t.A$ *pre nejaké* $t \in \langle 1, D\rangle$, *potom neexistuje prípustný rozvrh dĺžky* D.

VETA. *Ak* $\sum_{u=D-t}^{D} r_E(u) > t.A$ *pre nejaké* $t \in \langle 1, D\rangle$, *potom neexistuje prípustný rozvrh dĺžky* D.

Predchádzajúce dve vety však nedávajú záruku existencie riešenia v prípade, keď pre všetky $t \in \langle 0, D\rangle$ platí $\sum_{u=1}^{t} r_L(u) \le t.A$ resp. $\sum_{u=D-t}^{D} r_E(u) \le t.A$. Pomocou nich však možno odvodiť odhad kritéria $C_{\max}$.

Označme $R = \sum_{u=1}^{D} r_E(u)$. Potom nutnou podmienkou pre existenciu vhodného rozvrhu je $R \le D.A$. Z posledného vzťahu možno odvodiť dolnú hranicu trvania projektu $\frac{R}{A}$.

Tento odhad možno ešte trochu zlepšiť takto: Nech α je prvý časový okamžik, kedy $r_E(t) > A$, nech β je posledný časový okamžik, kedy $r_L(t) > A$. Potom nevyužitá kapacita zdrojov od začiatku do okamžiku α je $\sum_{u=1}^{\alpha-1}(A - r_E(u))$, nevyužitá kapacita od okamžiku β do konca trvania projektu D je $\sum_{u=\beta+1}^{D}(A - r_L(u))$. Potom nutnou podmienkou existencie prípustného rozvrhu dĺžky D je

$$R \leq D.A - \sum_{u=1}^{\alpha-1}(A - r_E(u)) - \sum_{u=\beta+1}^{D}(A - r_L(u)).$$

Skúmajme teraz problém $Pm|prec|C_{\max}$ a porovnajme ho s problémom $P\infty|\ prec, res1|C_{\max}$, t.j. so systémom s mnohými paralelnými identickými strojmi s jedným ohraničeným zdrojom, z ktorého každá úloha vyžaduje jednotkové množstvo a ktoré má kapacitu $A = m$. Pre každú množinu úloh $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ majú oba spomenuté problémy ten istý optimálny rozvrh.

Heuristiky

Sieťový digraf je acyklický graf. To umožňuje monotónne očíslovanie jeho vrcholov (t.j. také očíslovanie, aby pre každú jeho hranu (i, j) platilo $i < j$. Takéto očíslovanie vrcholov určuje poradie hrán nasledujúcim predpisom $(i, j) \prec (k, l)$ práve vtedy, keď $i < l$ alebo $i = l$ a $k < l$.

Heuristický algoritmus na minimalizáciu $\mathbf{C_{max}}$ v systéme $P\infty|prec, res|C_{\max}$.

KROK 1: Očíslujeme monotónne vrcholy sieťového digrafu.

KROK 2: Monotónne očíslovanie vrcholov definuje poradie činností, v akom ich zaraďujeme do rozvrhu. Každú činnosť zaradíme v najskoršom možnom intervale kedy sú pre ňu voľné zdroje.

Existuje mnoho rôznych očíslovaní vrcholov sieťového digrafu, a teda mnoho príslušných rozvrhov vytvorených predchádzajúcim algoritmom. Zmenou očíslovania (náhodnou metódou random sampling) alebo i riadenou nejakým heuristickým pravidlom možno dospieť k suboptimálnemu riešeniu. Keďže do rozvrhu postupne pridávame jednu úlohu po druhej, táto metódu možno nazvať sériovou.

Inou heuristickou metódou tvorby suboptimálneho rozvrhu je nasledujúca tzv. paralelená metóda.

V každom čase výpočtu máme množinu $\mathcal{I}$ zaraditeľných úloh, ktorých všetci predchodcovia sú už zaradení. Podľa nejakého pravidla vyberiem podmnožinu $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}$ úloh, ktoré naraz zaradíme do rozvrhu. Efektívnosť tejto metódy závisí od pravidiel výberu tejto preferovanej množiny úloh $\mathcal{I}_0$.