Kapitola 8

Farbenie grafov

Z praktického hľadiska sú veľmi dôležité úlohy o farbení grafov. Tieto úlohy vznikli z praktických požiadaviek tlačiarní pri tlači politických máp. Pri farbení politických máp je treba farebne odlíšiť územia jednotlivých štátov tak, aby žiadne dva štáty, ktoré majú spoločnú hranicu, neboli vyfarbené rovnakou farbou. Pri začiatkoch farebnej tlače bolo tlačenie obrázku tým ťažšie a nákladnejšie, čím viac farieb obrázok obsahoval. Preto ďalšou prirodzenou požiadavkou bolo, aby pri farbení matpy bol použitý minimálny počet farieb.

Obr. 8.1: Grafový model pre problém farbenia máp
a) každému štátu i moru priradíme vrchol grafu
b) pospájame vrcholy susedných štátov
c) diagram výsledného grafu

K práve formulovanému problému si vytvoríme graf nasledovne: Každému štátu a tiež aj moru priradíme vrchol grafu G – tým máme definovanú množinu vrcholov V. Neusporiadanú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ prehlásime za hranu $\{u, v\}$ práve vtedy, keď štáty u, v majú spoločnú hranicu.

Zafarbiť mapu minimálnym počtom farieb tak, aby žiadne dva z nich, ktoré majú spoločnú hranicu, nemali rovnakú farbu, znamená zafarbiť vrcholy grafu G minimálnym počtom farieb tak, aby žiadne dva incidentné vrcholy nemali pridelené rovnakú farbu.

Pretože grafy modelujúce problém farbenia máp sú rovinné, budeme sa najprv venovať rovinným grafom.

8.1 Rovinné grafy

Podľa definície **??** na strane **??** je graf rovinný práve vtedy, keď k nemu existuje rovinný diagram. Rovinný diagram grafu je taký diagram, v ktorom čiary zodpovedjúce hranám sa nepretínajú nikde okrem vrcholov. Obrázok **??** na strane **??**, ktorý ukazuje dva diagramy toho istého grafu môže slúžiť ako príklad toho, že k rovinnému grafu možno zostrojiť aj nerovinný diagram.

Definícia 8.1. Stenou rovinného diagramu nazveme časť roviny, ktorej ľubovoľné dva body možno spojiť súvislou čiarou nepretínajúcou žiadnu hranu diagramu.

Obr. 8.2: Jedna stena rovinného diagramu

Máme steny dvoch druhov – jeden typ steny je časť roviny ohraničená niektorými vrcholmi a hranami – na obrázku 8.2 je jedna takáto stena vyznačená tmavšie. Každý diagram gafu má aj jednu neohraničenú časť roviny, ktorú budeme nazývať **vonkajšia stena**.

Všimnime si ešte, že vrcholy a hrany diagramu, ktoré vymedzujú ktorúkoľvek stenu, tvoria cyklus. V diagrame však vidíme aj také hrany – na obr. 8.2 sú to hrany $\{4,7\}$, $\{4,8\}$ – ktoré nevymedzujú žiadnu stenu. Hrana vymedzuje niektorú stenu práve vtedy, keď leží aspoň na jednom cykle. Vylúčením ktorejkoľvek hrany ležiacej na cykle klesne počet stien diagramu o 1.

Veta 8.1. Eulerova polyedrická formula. *Nech $G = (V, H)$ je súvislý rovinný digraf, nech S je množina stien jeho rovinného diagramu. Potom platí:*

$$|S| = |H| - |V| + 2. \tag{8.1}$$

Dôkaz. Matematickou indukciou podľa počtu stien rovinného grafu. Najjednoduchší súvislý graf s $|V|$ vrcholmi je strom. V strome je $|H| = |V|-1$. Rovinný diagram stromu má iba jedinú, a to vonkajšiu stenu – je teda $|S| = 1$ Počítajme $|H| - |V| + 2 = (|V| - 1) - |V| + 2 = 1$. Pre súvislé rovinné grafy s jedinou stenou (sú to práve stromy) tvrdenie vety platí.

Predpokladajme, že tvrdenie vety platí pre všetky súvislé rovinné grafy, ktorých diagramy majú s stien. Majme graf $G = (V, H)$, ktorého rovinný diagram má $|S| = s + 1 > 1$ stien. V grafe rovinnom diagrame grafu G existuje aspoň jedna hrana h vymedzujúca nejakú stenu. Hrana h musí ležať na nejakom cykle grafu G Odstránením tejto hrany z diagramu dostaneme diagram grafu $G - \{h\}$, ktorý má s stien, $|V|$ vrcholov a $|H| - 1$ hrán. Podľa indukčného predpokladu platí

$$s = (|H| - 1) - |V| + 2,$$

čo je to isté ako

$$|S| = s + 1 = |H| - |V| + 2.$$

□

Veta 8.2. *Nech $G = (V, H)$ je maximálny rovinný graf s množinou vrcholov V.Potom*

$$|H| = 3.|V| - 6. \tag{8.2}$$

Dôsledok. *V každom rovinnom grafe $G = (V, H)$ je*

$$|H| \leq 3.|V| - 6. \tag{8.3}$$

Dôkaz. Ak má byť G maximálny rovinný graf z n vrcholmi, potom musí byť každá stena (včítane vonkajšej) tzv. trojuholníkom – t.j. časťou roviny ohraničenou iba tromi hranami. Ak by totiž existovala stena ohraničená štyroma alebo viac hranami – t.j. r-uholník, dodaním hrany h príslušnej k niektorej uhlopriečke tohoto r-uholníka dostaneme rovinný graf $G \cup \{h\}$, čo je v spore s maximalitou grafu G.

Obr. 8.3: Ak existuje stena, ktorá nie je trojuholník,
(na tomto obrázku $1, \{1, 2\}, 2, \{2, 3\}, 3, \{3, 4\}, 4, \{4, 5\}, 5, \{5, 1\}$),
možno dodaním hrany $h = \{1, 3\}$ zvýšiť počet stien diagramu grafu.

Diagram grafu G je teda tvorený s trojuholníkmi. Keby trojuholníky boli disjunktné (každá hrana len v jednom trojuholníku) potom by sme na ich vytvorenie potrebovali $3.s$ hrán. Pretože však každá hrana je použitá v dvoch susedných trojuholníkoch, je v maximálnom grafe G presne $\frac{3.s}{2}$ hrán, t.j. $|H| = \frac{3.s}{2}$ alebo $s = \frac{2}{3}.|H|$. Použitím Eulerovej polyedrickej formuly z vety 8.1 máme

$$\begin{aligned} |S| = \frac{2}{3}.|H| &= |H| - |V| + 2 \\ 2.|H| &= 3.|H| - 3.|V| + 6 \\ |H| &= 3.|V| - 6 \end{aligned}$$

□

Veta 8.3. *Úplný graf s piatimi vrcholmi K_5 nie je rovinný. Úplný bipartitný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný.*

Dôkaz. Úplný graf K_5 má $(5 \times 4)/2 = 10$ hrán a 5 vrcholov. Keby bol rovinný mohol by mať podľa (8.3) najviac $3 \times 5 - 6 = 9$ vrcholov.

Predpokladajme, že graf $K_{3,3}$ je rovinný. Potom jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník – t.j. všetky steny sú aspoň štvoruholníky. Nech diagram grafu $K_{3,3}$ má s stien. Ak by všetky štvor- a viac-uholníky boli disjunktné potrebovali by sme na ich konštrukciu aspoň $4.s$ hrán. Pretože však v diagrame je každá hrana v dvoch viac-uholníkoch, potrebujeme aspoň $4.s/2 = 2.s$ hrán, t.j. $|H| \geq 2s$

$$\begin{aligned} |H| &\geq 2|S| = 2|H| - 2|V| + 2.2 \\ -|H| &\geq -2|V| + 4 \\ |H| &\leq 2|V| - 4 \end{aligned}$$

Graf $K_{3,3}$ má 9 hrán. Keďže má 6 vrcholov a jeho diagram neobsahuje ani jeden trojuholník, ak by bol rovinný, môže mať najviac $2.6 - 4 = 8$ hrán – graf $K_{3,3}$ nemôže byt rovinný. □

Graf K_4 je rovinný, podobne je rovinný graf $K_{3,2}$. Grafy K_5 a $K_{3,3}$ sú preto najjednoduchšie nerovinné grafy.

Definícia 8.2. Hovoríme, že graf $G' = (V', H')$ vznikol z grafu $G(V, H)$ **rozpolením hrany** $h \in H$, ak

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{x\} \quad \text{kde } x \notin V, \\ H' &= \big(H - \{\{u, v\}\}\big) \cup \{\{u, x\}, \{x, v\}\} \quad \text{kde } h = \{u, v\}. \end{aligned}$$

Hovoríme, že grafy $G(V, H)$, $G' = (V', H')$ sú **homeomorfné**, ak konečným počtom rozpoľovaní ich hrán môžeme z nich dostať izomorfné grafy.

Rozpolenie hrany $h = \{u, v\}$ si môžeme prestaviť ako dodanie ďalšieho vrchola x do jej stredu. Tým prestane existovať „priame prepojenie vrcholov“ u, v (modelované vylúčením hrany h z množiny H) a do množiny H pribudnú ďalšie hrany $\{u, x\}$, $\{x, v\}$.

Veta 8.4. Kuratowski. *Graf G je rovinný práve vtedy, keď ako podgraf neobsahuje graf homeomorfný s K_5 alebo $K_{3,3}$.*

Túto vetu uvádzame bez dôkazu. Jej teoretická krása je v tom, že nerovinnosť grafu znamená, že tento graf obsahuje ako podgraf homeomorfný s jedným z prototypom nerovinnosti – K_5 alebo $K_{3,3}$. Napriek matematickej elegancii Kuratowského vety algoritmus na rozhodnutie o rovinnosti grafu postavený na hľadaní homeomorfných podgrafov s K_5 a $K_{3,3}$ nie je efektívny.

8.2 Farbenie všeobecných a rovinných grafov

Definícia 8.3. Graf $G = (V, H)$ nazveme **k-zafarbiteľným**, ak jeho vrcholy možno zafarbiť k farbami tak, aby žiadne dva susedné vrcholy neboli zafarbené rovnakou farbou. Zafarbenie, ktoré žiadnym dvom susedným vrcholom nepriraďuje tú istú farbu nazveme **prípustným zafarbením**.
Chromatické číslo grafu je najmenšie prirodzené číslo k také, že graf G je k-zafarbiteľný. Chromatické číslo grafu G budeme značiť symbolom $\chi(G)$.

Majme graf $G = (V, H)$ zafarbený k farbami tak, že žiadne dva susedné vrcholy nie sú zafarbené tou istou farbou. Relácia „vrchol v_i je zafarbený tou istou farbou ako vrchol v_j" je reláciou ekvivalencie na množine vrcholov V, a preto definuje rozklad množiny V na triedy ekvivalencie, Počet neprázdnych tried tohoto rozkladu je je práve k. V každej triede ekvivalencie sú všetky vrcholy rovnakej farby. Z vlastnosti zafarbenia vyplýva, že žiadne dva vrcholy v tej istej triede rozkladu nie sú susedné – triedy rozkladu sú tzv. nezávislé množiny.

Veta 8.5. *Problém zafarbiť graf s minimálnym počtom farieb je NP-ťažký.*

Pre rýchly horný odhad chromatického čísla grafu môže slúžiť nasledujúci algoritmus farbenia grafu, ktorý však nedáva zaručene optimálne riešenie.

Algoritmus. Sekvenčné farbenie grafu

- Krok 1. Nech $\mathcal{P} = v_1, v_2, \dots, v_n$ je ľubovoľná postupnosť vrcholov grafu $G = (V, H)$.
- Krok 2. Postupne pre $i = 1, 2, \dots, n$ urob: Ofarbi vrchol v_i farbou najmenšieho čísla takou, že žiaden z ofarbených susedov vrcholu v_i nie je ofarbený touto farbou.

Veta 8.6. *Algoritmus na sekvenčné farbenie grafu potrebuje na zafarbenie ľubovoľného grafu najviac* $\max_{v \in V}\{\deg(v)\} + 1$ *farieb.*

Algoritmus na sekvenčné farbenie grafu zafarbí vrchol 1 farbou 1. Nech už máme zafarbných i vrcholov $v_1, v_2, \dots, v_i$ s použitím najviac $\max_{v \in V}\{\deg(v)\} + 1$ farieb. Ďalší vrchol v_{i+1} algoritmus ofarbí farbou najnižšieho čísla, ktorá nie je priradená žiadnemu jeho susedovi. Keďže vrchol v_{i+1} môže mať najviac $\max_{v \in V}\{\deg(v)\}$ susedov, medzi $\max_{v \in V}\{\deg(v)\} + 1$ ostáva aspoň jedna, ktorou môžeme ofarbiť vrchol v_{i+1}. $\square$

Dôsledkom tejto vety je nasledujúce tvrdenie.

Veta 8.7. *Pre chromatické číslo ľubovoľného grafu platí:*

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{v \in V}\{\deg(v)\} \tag{8.4}$$

Veta 8.8. *Graf* $G = (V, H)$ *je 2-zafarbiteľný práve vtedy, keď neobsahuje cyklus s nepárnym počtom hrán.*

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že G je súvislý. Vezmime ľubovoľný vrchol v a položme $S_0 = \{v\}$, $S_1 = \{u \mid u \in V,\ \{v, u\} \in H\}$. Ak už máme definované $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$, definujeme

$$S_k = \{u \mid u \in V - \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i,\ \{v, u\} \in H\} \tag{8.5}$$

Najneskôr pre $k = n$ je $S_k = \emptyset$. Pretože G je súvislý, každý vrchol sa objaví v niektorej množine S_i práve raz. Systém $\mathcal{S} = \{S_i \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}$ je rozkladom množiny $|V|$.

Ukážeme, že S_i je množina práve tých vrcholov, ktoré majú od vrcholu v vzdialenosť i (pri jednotkovej dĺžke hrán). Pre S_1 tvrdenie platí. Nech tvrdenie platí pre $i = 1, 2, \dots, i-1$. Nech $u \in S_i$. Keby u malo menšiu vzdialenosť od v ako i, bolo by podľa indukčného predpokladu $u \in S_j$ pre nejaké $j < i$ a potom by nemohlo byť aj $u \in S_i$. Pretože existuje $w \in S_{i-1}$ také že $\{w, u\} \in H$ a pretože existuje v–w cesta dĺžky $i - 1$, táto v–w cesta predĺžená o hranu

Obr. 8.4: Množiny S_i

$\{w, u\}$ dá cestu v–i cestu dĺžky i. Ukázali sme, že každý vrchol z S_i má vzdialenosť od vrcholu v i. Ukážme ešte, že ak $d(v, x) = i$, potom $x \in S_i$. Nech z je predposledný vrchol nakratšej v–x cesty s dĺžkou i, potom $d(v, z) = i - 1$ a podľa indukčného predpokladu $z \in S_{i-1}$. Keďže existuje hrana $\{z, x\}$ a x doteraz nebolo zaradené v žiadnej množine S_k, $k < i$, je $z \in S_i$.

Ďalej si všimnime, že neexistuje žiadna hrana typu $\{x, y\}$, $x \in S_j$, $y \in S_i$, kde $i \leq i - 2$, pretože všetky incidentné vrcholy s vrcholom x sú buď v množinách typu S_k, kde $k \leq j$ alebo v množine S_{j+1}.

Obr. 8.5: Z existencie hrany medzi vrcholmi množiny S_i vyplýva existencia cyklu nepárnej dĺžky
a) ak $x \in S_i$, $y \in S_i$ obe najkratšie cesty $m(v, x)$, $m(v, y)$ majú rovnaký počet hrán i
b) cesty $m(z, x)$, $m(z, y)$ majú tiež rovnaký počet hrán
a spolu s hranou $\{x, y\}$ vytvárajú cyklus nepárnej dĺžky

Nakoniec ukážeme, že žiadne dva prvky z množiny S_i nie sú incidentné. Nech existujú $x \in S_i$, $y \in S_i$ také že $\{x, y\} \in H$ pozri obrázok 8.5. Keďže $x, y \in S_i$, existujú cesty $m(v, x)$, $m(v, y)$ dĺžky i. Nech z je posledný spoločný vrchol týchto ciest. Časť cesty $m(v, x)$ počínajúc vrcholom z a končiac vrcholom x (označme ju $m(z, x)$) má rovnaký počet hrán, ako časť cesty $m(v, y)$ počínajúc vrcholom z a končiac vrcholom y, ktorú osnačíme $m(z, y)$. Zreťazenie cesty $m(z, x)$ s jednohranovou cestou $x, \{x, y\}, y$ a opačne vzatej cesty $m(z, y)$ vytvára cyklus s nepárnym počtom hrán. počet hrán ako časť cesty.

Označme V_1 zjednotenie všetkých S_i s nepárnymi indexami a V_2 zjednotenie všetkých S_i s párnymi indexami. Žiadne dva vrcholy z V_1 nie sú incidentné, podobne žiadne dva vrcholy z V_2 nie sú incidentné, a preto môžeme ofarbiť vrcholy z V_1 farbou 1 a vrcholy z V_2 farbou 2. Keďže $V = V_1 \cup V_2$, je toto zafarbenie 2-zafarbením grafu G.

Veta 8.9. Dôsledky. *Každý strom je 2-zafarbiteľný.*
Každý bipartitný graf je 2-zafarbiteľný.

Dôkaz. Žiaden z týchto grafov neobsahuje cyklus nepárnej dĺžky. $\square$

Veta 8.10. Appel, Haken, 1976. *Každý rovinný graf je 4-zafarbiteľný.*

Dlho pred dôkazom tejto vety sa vedelo, že každý rovinný graf je 5-zafarbiteľný. Nenašiel sa však žiaden rovinný graf G s chromatickým číslom $\chi(G) = 5$. Veta o 4-zafarbiteľnosti rovinných grafov je jedna z prvých, na dokázanie ktorej bol použitý počítač. Počítačový postup navrhol pôvodne Heesch, Appel a Haken zredukovali problém na skontrolovanie viac ako 1900 konfigurácií. Na vyriešenie problému sa spotrebovalo viac ako 1200 hodín strojového času. Dnes sú počítače takmer o tri rády rýchlejšie, ale aj tak by tento výpočet vyžadoval výpočtový čas meraný v hodinách.

8.3 Heuristiky pre farbenie grafu

Keďže problém zafarbenia grafu minimálnym počtom farieb je NP-ťažký, na jeho riešenie pri úlohách väčšieho rozmeru používame heuristiky. Jednou z nich je algoritmus na sekvenčné farbenie grafu uvedený v časti 8.6.

Algoritmus sekvenčného farbenia grafu postupne vyberal vrcholy a farbil ich najnižšou možnou farbou. Nasledujúci algoritmus zoberie jednu farbu a ňou zafarbí pokiaľ možno najväčší počet vrcholov grafu. Potom vezme ďalšiu farbu a zafarbí ňou ďalšie vrcholy atď. Je založený na domnienke, že najprv treba zafarbiť vrcholy s najväčším stupňom.

Algoritmus. Paralelné farbenie grafu

- Krok 1. Zoraď vrcholy grafu $G = (V, H)$ do postupnosti $\mathcal{P} = v_1, v_2, \ldots, v_n$ podľa stupňa vrchola nerastúco. Inicializuj množinu farieb $\mathcal{F} = \{1\}$, $j := 1$.
- Krok 2. Postupne s prvkami $v_1, v_2, \ldots, v_n$ postupnosti $\mathcal{P}$ urob: Ak vrchol v_i nie je zafarbený a nemá suseda zafarbeného farbou j, tak ho farbou j zafarbi.
- Krok 3. Ak sú všetky vrcholy postupnosti $\mathcal{P}$ zafarbené, STOP.
- Krok 4. Ak nie sú všetky vrcholy postupnosti $\mathcal{P}$ zafarbené, zvýš počet farieb, t.j. j:=j+1, $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{j\}$ a Goto Krok 2.

Nasledujúci algoritmus je v podstate sekvenčný altoritmus, ktorý si však v priebehu výpočtu stanovuje, ktorému z vrcholov sa bude prideľovať najnižšia prideliteľná farba.

Farbenie grafu LDF (Largest Degree First).
Pre účel tohoto algoritmu definujeme farebný stupeň vrchola v ako počet rôznych farieb, ktorými sú ofarbení susedia vrcholu v.

- Krok 1. Zo všetkých nezafarbených vrcholov s najväčším stupňom vyber vrchol v s najväčším farebným stupňom.
- Krok 2. Priraď vrcholu v farbu najnižšieho možného čísla.
- Ak sú všetky vrcholy ofarbené, STOP. Inak Goto Krok 1.

Uvedené algoritmy sú veľmi jednoduché. Nemajú žiadne opravné kroky, keď raz vrcholu prideli farbu, toto pridelenie je definitívne. Bolo by ich možné modifikovať tak, že by sa menilo vstupné poradie vrcholov, ktorým sa prideľuje farba.

8.4 Exaktný algoritmus na farbenie grafov

Na zafarbenie grafu $G = (V, H)$ potrebujeme v najhoršom prípade $n = |V|$ farieb (pre úplné grafy K_n). Zafarbenie grafu G je vlastne funkcia n-prvkovej množiny V do množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Takýchto zobrazení je n^n, nie každé z nich však spĺňa podmienku, že žiadni dvaja susedia v grafe G nie sú zafarbení tou istou farbou. Ak by sme však chceli riešiť problém zafarbenia grafu G minimálnym počtom farieb prezretím všetkých možností, museli by sme prezrieť všetky zobrazenia $\phi : V \to \{1, 2, \ldots, n\}$, z nich vylúčiť tie, ktoré nedefinujú prípustné zafarbenie grafu G a z tých, ktoré ostanú vybrať jedno s najmenej početným oborom hodnôt. Pre grafy s maximálnym stupňom $d = \max_{v \in V}$ stačí namiesto množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ uvažovať $\{1, 2, \ldots, d, d + 1\}$, čím sa zníží počet zobrazení na $(d + 1)^n$, ale ani toto nedáva veľké nádeje na použitie úplného prehľadávania.

Zoraďme vrcholy grafu G do postupnosti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a toto poradie považujme v rámci celej tejto časti za pevné. K ľubovoľnému zafarbeniu $f_1, f_2, \ldots, f_n$ grafu G možno zostrojiť zafarbenie $f'_1, f'_2, \ldots, f'_n$ takto:

$$f'_1 = 1 \tag{8.6}$$

$$f'_2 = \begin{cases} 1 & \text{ak } f_1 = f_2 \\ 2 & \text{ak } f_1 \neq f_2 \end{cases} \tag{8.7}$$

$$f'_k = \begin{cases} f'_j & \text{ak } f_k = f_j \text{ pre niektoré } 1 \leq j < k \\ \max_{1 \leq j < k}\{f_j\} + 1 & \text{ak } f_k \neq f_j \ \forall (1 \leq j < k) \end{cases} \tag{8.8}$$

Je ľahko vidieť, že aj $f'_1, f'_2, \ldots, f'_n$ je zafarbenie grafu G s rovnakým počtom farieb ako pôvodné zafarbenie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ a platí: Vrcholy v_i, v_j sú rovnako zafarbené pri farbení f práve vtedy, keď sú rovnako zafarbené pri farbení f', t.j. $f_i = f_j$ práve vtedy, keď $f'_i = f'_j$. Obe zafarbenia definujú ten istý rozklad množiny V na triedy rovnako zafarbených vrcholov. Ak fixujeme poradie vrcholov, potom pre ľubovoľný rozklad množiny V na triedy rovnako zafarbených vrcholov existuje jediné zafarbenie vrcholov $f_1, f_2, \ldots, f_n$ také, že každá čiastočná podpostupnost typu $f_1, f_2, \ldots, f_k$, kde $1 \leq k \leq n$ obsahuje všetky prirodzené čísla $1, 2, \ldots, \max_{1 \leq j \leq k}\{f_j\}$. Prípustné zafarbenie f s práve popísanou vlastnosťou budeme nazývať **systematické zafarbenie**. Systematických zafarbení je už podstatne menej, ako všetkých zafarbení – vrchol v_1 môže mať len farbu 1, vrchol v_2 nemôže byť zafarbený farbou 3 alebo vyššou, všeobecne vrchol v_i nemôže byť zafarbený farbou k, kde $k > i$.

Pre navrhovaný farbiaci algoritmus ztotožníme vrcholy množiny V s ich indexami, budeme predpokladať, že $v_1, v_2, \ldots, v_n = 1, 2, \ldots, n$. Nech V_x je množina všetkých susedov vrcholu x, definujme $P(x) = V_x \cup \{1, 2, \ldots, x - 1\}$. Sústavou množín $P(x)$, $x \in V$ je graf G pre účely farbenia dostatočne popísaný.

Označme G_1 podgraf grafu G indukovaný množinou $\{1\}$, G_2 podgraf grafu G indukovaný množinou $\{1, 2\}$, atď., G_k podgraf grafu G indukovaný množinou $\{1, 2, \ldots, k\}$ pre $1 \leq k \leq n$. Ak máme systematické zafarbenie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ grafu G, potom $f_1, f_2, \ldots, f_k$ je systematické zafarbenie grafu G_k pre všetky $1 \leq k \leq n$.

Optimálne riešenie budeme hľadať v pomyselnom koreňovom strome možných riešení T. Aby sme minimalizovali prehľadávanie, budeme chcieť, aby strom T modeloval len systematické zafarbenia. Keďže sa zaujímame o zafarbenie grafu G minimálnym počtom farieb, budeme v strome modelovať len zafarbenia s $FMAX = \max_{v \in V}\{\deg(v)\} + 1$ farbami. Každý vrchol ag replacements

$f_1(t)$

$f_2(t)$

$f_3(t)$

0

1440

Obr. 8.6: Postup prezerania stromu riešení T

stromu bude mať priradenú farbu. Koreň stromu zopdpovedajúci vrcholu 1 bude mať priradenú farbu 1, prvá úroveň stromu T bude zodpovedať zafarbeniam vrcholu 2 a každá ďalšia úroveň k bude hovoriť o zafarbeniach vrcholu $k + 1$.

Koreň stromu so svojou značkou farby 1 zodpovedá systematickému zafarbeniu grafu G_1 (keďže G_1 je triviálny graf, také zafarbenie existuje jediné). Nech na úrovni $k - 1$ každý vrchol t stromu T zodpovedá systematickému zafarbeniu grafu G_k, nech značky farieb vrcholov cesty z koreňa do tohoto vrchola definujú systematické zafarbenie grafu G_k. Pre vrchol t na úrovni $k - 1$ definujeme prvého pravého následníka so značkou najnižšej farby, ktorá sa nevyskytuje v ofarbeniach vrcholov z $P(x)$, ďalších pravých následníkov definujeme a označíme značkou ďalšej najnižšej nepoužitej farby len vtedy, ak takýmto zafarbením vrcholu $k + 1$ vznikne systematické zafarbenie grafu G_{k+1}.

Prvá vetva zprava v strome T zodpovedá sekvenčnému zafarbeniu grafu G s najnižším číslom farby. Položme $FMAX$:= počet farieb a zároveň najvyššie číslo farby použité pri sekvenčnom zafarbení grafu G.

Nech y je prvý vrchol na ceste z koreňa do vrcholu definujúceho súčasné riešenie, ktorý je zafarbený farbou $FMAX$. Aby sme znížili farbu vrcholu y, musíme zmeniť (t.j. zvýšiť) farbu niektorého z vrcholov x z množiny $P(y)$. Aby sme zabezpečili, že preskúmame najbližšiu nádejnú nepreskúmanú pravú vetvu stromu T, zvolíme za x posledný vrchol z $P(y)$. Ak farbu vrchola x nemožno zvýšiť na hodnotu menšiu než $FMAX$, skúsime vrchol $x - 1$, $x - 2$ atď. Ak sa pre žiadny vrchol nepodarí zvýšiť jeho farbu, máme optimálne riešenie.

Ak takýto vrchol x nájdeme, zvýšime jeho farbu na najnižšiu prípustnú hodnotu a počínajúc vrcholom $x + 1$ postupne prefarbíme všetky vrcholy najnižšou možnou farbou (ako v algoritme sekvenčného farbenia). Ak pre niektorý vrchol použijeme farbu $FMAX$, ďalej farby neprideľujeme, ale ho zoberieme za nový vrchol y. Nie je totiž šanca nájsť v tejto vetve zlepšenie.

Ak sa týmto spôsobom podarí ofarbiť všetky vrcholy bez použitia farby $FMAX$, máme zlepšenie a nový rekord si zapamätáme. Zároveň zaktualizujeme $FMAX$ – položíme ho číslu najvyššej použitej farby pri novom rekorde. Nájdeme y prvý vrchol v rekordnom riešení s farbou $FMAX$ a opakujeme algoritmus.

Obrovskou výhodou tohoto postupu je, že nemusíme v pamäti udržiavať strom T. Tým, že sa stále držíme v prvej nepreskúmanej vetve sprava a po jej preskúmaní vieme prejsť do jej najbližšej susednej vetvy, stačí držať v pamäti rekord a tvar súčasnej vetvy, ktorý je jednoznačne daný systematickým zafarbením grafu G. Takto celý algoritmus okrem nárokov na uloženie grafu formou množín $P(x)$ vyžaduje len dve celočíselné polia rozmeru $n = |V|$ a niekoľko jednoduchých pomocných premenných.

Pracovné farby vrcholov budeme držať v poli B – $B(x)$ je farba vrcholu x, najlepšie nájdené zafarbenie v poli $REKORD()$. Súčasný najlepší dosiahnutý počet farieb bude v premennej $FMAX$.

Algoritmus na optimálne zafarbenie grafu

Položme

$$P(x) := V_x \cap \{1, 2, \dots, x-1\}, \tag{8.9}$$

$$\mathcal{F}(x) := \min\{i \mid 1 \le i,\ \forall j \in P(x)\ i \ne B(j)\} \tag{8.10}$$

$$\mathcal{G}(x) := \min\{i \mid B(x) < i,\ \forall j \in P(x)\ i \ne B(j)\} \tag{8.11}$$

- Krok 0. Polož $B(1) := 1$ a postupne pre každé $x = 2, 3, \dots, n$ $B(x) := \mathcal{F}(x)$.
- Krok 1. Polož $FMAX := \max_{1 \le x \le n}\{B(x)\}$.
  Skopíruj pole B do poľa $REKORD$.
- Krok 2. Nájdi v poli B najmenšie y také, že $B(y) = FMAX$.
- Krok 3. Polož $x := \max_{k \in P(y)}\{k\}$
- Krok 4. Ak $x = 1$, STOP. Chromatické číslo grafu $\chi(G) = FMAX$ a príslušné optimálne zafarbenie grafu G je v poli $REKORD$.
- Krok 5. Ak $\mathcal{G}(x) \ge FMAX$ alebo ak $\mathcal{G}(x) > (\max_{1 \le i < x}\{B(i)\} + 1)$, polož $x := x - 1$ a Goto Krok 4.
  Ináč polož $B(x) := \mathcal{G}(x)$, $z := x + 1$.
- Krok 6. $B(z) := \mathcal{F}(z)$. Ak $B(z) \ge FMAX$, polož $y := z$ a Goto Krok 3.
  Ak $z < n$, polož $z := z + 1$ a opakuj Krok 6.
  Ak $z = n$ máme nový rekord. Goto Krok 1.

8.5 Aplikácie

8.5.1 Priradenie registrov počítača

Počítače majú konečný počet špeciálnych registrov. Aritmetické operácie s údajmi v týchto registroch sú rýchlejšie, než operácie s údajmi v pamäti. Programátor má možnosť deklarovať niektoré premenné, ktoré sa veľmi často používajú, ako registre, čím sa program sa takto definovanými premennými zrýchli. Avšak ak programátor deklaruje viac registrových premenných ako je registrov, môže sa stať, že pri výkone programu sa viac času premrhá prepisovaním obsahu pamäte medzi registrami, než sa získa použitím týchto registrov. Jedným z riešení je priradenie rôznych registrov premenným, ktoré sa súčasne používajú. Grafový model pre tento problém má za vrcholy premenné. Dve premenné sú spojené hranou práve vtedy, keď sú príslušné premenné súčasne aktívne. Chromatické číslo tohoto grafu je rovné počtu registrov potrebných na to, aby sa predišlo časovým stratám z nadmerného menenia obsahu registrov.

8.5.2 Priradenie rádiových frekvencií

Ak sú dva vysielače blízko seba, nemôžu používať tú istú frekvenciu, pretože by sa navzájom rušili. Rádiové frekvencie sú však obmedzeným prírodným zdrojom. Preto nemožno každému vysielaču priradiť inú frekvenciu. Modelom tejto situácie je graf G, ktorého vrcholy sú vysielače a v ktorom za incidentné vrcholy považujeme tie dvojice vysielačov, ktoré by sa pri pridelení rovnakej frekvencie rušili. Úloha prideliť danej množine fysielačov čo najmenej rôznych frekvencií tak, aby sa žiadne dva navzájom nerušili sa tak prevedie na úlohu ofarbit vrcholy grafu G minimálnym počtom farieb (frekvencií) tak aby žiadne dva incidentné vrcholy (vysielače, ktoré by sa rušili) nemali pridelenú tú istú farbu (frekvenciu).

Graf G na riešenie problému prideľovania frekvencií nemusí byť a ani vo väčšine prípadov nie je rovinný, hoci by tomu mohlo naznačovať rozmiestnenie vysielačov v rovine. Rôzny výkon vysielačov, prírodné podmienky šírenia rádiových vĺn, prekážky, odrazy spôsobujú, že vzájomné ovplyvňovanie sa vysielačov je veľmi zložité a preto sa nedá graf G čo do zložitosti porovnať s grafom pre farbenie rovinných máp.

8.5.3 Problém nákupných tašiek

Ideme nakupovať n produktov. Zo skúsenosti vieme, že niektoré tovary neradno nosiť spolu v jednej taške. Nová košeľa a slanina, čerstvé pečivo a prášky na pranie, sáčkové mlieko a klince by nemali byť v jednej taške. Takéto tovary nazveme nekompatibilné. Koľko nákupných tašiek najmenej potrebujeme, aby sme do nich mohli poukladať n tovarov tak, aby sa žiaden tovar nepoškodil? Problém riešime tak, že zostrojíme graf G, ktorého vrcholy budú tovary a v ktorom dva vrcholy (tovary) budú spojené hranou práve vtedy, keď ich nemožno dať do jednej nákupnej tašky. Tak sme problém minimalizácie počtu nákupných tašiek previedli na problém zafarbenia grafu G minimálnym počtom farieb. Každému vrcholu (tovaru) treba určiť farbu (tašku, do ktorej ho uložíme) tak, aby žiadne dva incidentné vrcholy nemali tú istú farbu (aby žiadne dva nekompatibilné tovary neboli uložené v jednej taške) a aby bol počet použitých farieb (tašiek) minimálny.

Táto úloha má veľa variantov. Chemikálie treba uložiť do najmenšieho možného počtu kontajnerov tak, aby sa nedostala do jedného kontajnera žiadna dvojica chemikálií, ktorá by mohla spôsobiť výbuch. Biologické preparáty treba uložiť do najmenšieho možného počtu chladiacich boxov tak, aby sa žiadne dva, ktoré sa môžu ovplyvniť, nedostali do toho istého boxu. Z danej množiny pracovníkov treba vytvoriť čo najmenší počet pracovných skupín tak, aby sa v každej skupine dobre znášali.

Kontrolná otázka: Aký je minimálny počet politických strán, taký aby žiadni dvaja na seba alergickí politicki neboli v jednej strane? Pretože hlavnou činnosťou politikov je byť alergický na príslušníkov iných opozičných a neskôr aj koaličných strán, a pretože alergie vznikajú aj pri mocenskom boji vovnútri strán, vidíme, že ani použitie najlepších algoritmov na farbenie grafu tu nezabráni vzniku nových politických strán.

8.5.4 Rozvrhovanie voliteľných predmetov

Predpokladajme, že každý študent fakulty si môže zapísať niekoľko vybraných voliteľných predmetov. Fakulta venuje voliteľným predmetom niekoľko vyhradených blokov. Pretože fakulta má záujem, aby všetci študenti mohli navštevovať vybrané predmety, treba umiestniť tieto predmety do blokov tak, aby žiadnemu študentovi predmety nekolidovali. Je to vôbec možné? (Predpokladá sa dostatok učební).

Na riešenie tejto úlohy zostrojíme graf G ktorého vrcholmi budú voliteľné predmety. Dvojica predmetov bude tvoriť hranu grafu G práve vtedy, keď aspoň jeden študent má zapísané obidva predmety. Chromatické číslo $\chi(G)$ grafu G nám povie, aký je minimálny počet blokov potrebný na rozvrh bez konfliktov medzi jednotlivými voliteľnými predmetmi. Zafarbenie grafu G minimálnym počtom farieb (blokov) nám povie, ktoré voliteľné predmety treba zaradiť do rozvrhu v rovnakom čase.

Problém má niekoľko variácií. Pre povinné predmety sú skupiny poslucháčov sú disjunktné, avšak dva predmety môžu spolu kolidovať preto, lebo majú toho istého učiteľa, alebo preto, lebo vyžadujú špecializovanú učebňu či laboratórium.

8.5.5 Minimalizácia počtu autobusových stanovíšť

Autobusová stanica má obmedzený počet autobusových stanovíšť. Na autobusovom stanovišti môže stáť len jedno vozidlo. Ideálne by bolo, keby autobusy každej linky mali svoje vlastné stanovište. To však nie je možné, pretože autobusovú stanicu nemožno rozšíriť. Preto musia niektoré linky zdieľať spoločné autobusové stanovište.

Obsadenie nástupišťa autobusmi jednej linky možno vyjadriť reálnou funkciou $f(t)$ s definičným oborom $\langle 0, 1440\rangle$ (minúty jedného dňa) ktorá pre $t \in \langle 0, 1440\rangle$ nadobúda hodnotu 1 práve vtedy, keď je nástupište obsadené autobusom príslušnej linky, inak $f(t) = 0$.

lacements

$f_1(t)$

$f_2(t)$

$f_3(t)$

0

1440

Obr. 8.7: Funkcie $f_1,\ f_2,\ f_3$ obsadenia nástupišťa pre tri linky $L_1,\ L_2,\ L_3$

Na obrázku 8.7 vidíme tri funkcie $f_1,\ f_2,\ f_3$ obsadenia stanovišťa troch liniek $L_1,\ L_2,\ L_3$. Linky L_1, L_2 môžu zdieľať to isté stanovište, pretože neexistuje časový okamžik, v ktorom by obe funkcie boli rovné 1 – budeme hovoriť, že linky L_1, L_2 sú kompatibliné. Naopak, linka L_3 nemôže zdieľať to isté stanovište so žiadnou z liniek L_1, L_2.

Pomocou funkcií f_i, f_j možno veľmi ľahko určiť, kompatibilitu liniek L_1, L_2 – tie sú, kompatibilné práve vtedy, keď $f_1(t) + f_2(t) \leq 1$ pre každé $t \in \langle 0, 1440 \rangle$.

Teraz môžeme zostrojiť graf G, vrcholmi ktorého budú linky a hranami ktorého budú dvojice nekompatibilných liniek. Optimálnym zafarbením grafu G určíme minimálny počet farieb (stanovíšť) a každej linke priradíme farbu (stanovište) tak, že žiadne dve nekompatibilné linky nemajú rovnakú farbu (stanovište).

Ak by vyšla potreba stanovíšť väčšia ako disponibilný počet stanovíšť, môžeme sa pokúsiť skrátiť pobyty autobusov na zastávkach, v dôsledku čoho sa „zúžia zuby“ fukcií f_i a poklesne počet nekompatibilných dvojíc liniek, čo môže mať za následok zníženie chromatického čísla príslušného grafu G.

8.5.6 Fázovanie svetelne riadenej križovatky

Obr. 8.8: Križovatka

Konštrukcia programu pre riadenie svetelne riadenej križovatky začína geometrickým plánom križovatky. Jeden takýto plán vidíme na obrázku 8.8. Vozidlá prechádzajú križovatku v prúdoch. Na našej križovatke máme desať vozidlových prúdov $1, 2, \ldots, 10$, dva električkové prúdy $11, 12$ a štyri prúdy chodcov $13, 14, 15, 16$. Medzi prúdmi existuje relácia kolíznosti – dva prúdy i, j sú kolízne, ak ich dráhy majú spoločný bod zvaný tiež kolízny bod. Kolízne prúdy nemôžu vchádzať do križovatky naraz, pretože v kolíznych bodoch by sa vozidlá jednotlivých prúdov stretali a vznikali by tak nebezpečné situácie.

Pre dva kolízne prúdy i, j definujeme medzičas m_{ij} ako najmenší možný čas taký, o ktorý treba oneskoriť začiatok zelenej pre prúd j od konca zelenej pre prúd i tak, aby vozidlá prúdu i stihli opustiť kolízny bod prúdov i, j skôr, než doň dorazia vozidlá prúdu j. Medzičasy m_{ij} sa usporiadávajú do matice medzičasov. Ak sú prúdy i, j nekolízne, má matica mezdičasov na mieste (i, j) symbol „–“.

Matica medzičasov pre križovatku z obr. 8.8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	-	-	5	6	7	-	-	6	5	-	-	-	-	4	-	8
2	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	3	6	-
3	6	-	-	-	-	4	-	-	8	9	6	8	-	9	3	-
4	6	-	-	-	-	8	9	6	-	-	8	7	10	-	3	-
5	3	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	3	6
6	-	-	5	4	-	-	-	8	9	3	-	-	10	-	-	5
7	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6	-	-	3
8	8	-	-	6	10	8	-	-	-	-	8	6	3	-	-	10
9	10	10	8	-	-	4	-	-	-	-	7	8	3	-	10	-
10	-	-	6	-	-	3	-	-	-	-	-	-	3	6	-	-
11	-	-	10	12	-	-	-	9	8	-	-	-	-	12	-	5
12	-	-	8	10	-	-	-	8	10	-	-	-	-	5	-	12
13	-	-	-	3	-	-	8	9	9	9	-	-	-	-	-	-
14	10	10	5	-	-	4	-	-	-	6	3	10	-	-	-	-
15	-	8	9	9	9	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-
16	4	-	-	-	8	9	9	4	-	-	9	4	-	-	-	-

Pri riadení križovatky technikou fázových skupín sa jednotlivé prúdy združujú do množín tak, že každá z nich obsahuje navzájom nekolízne prúdy. Takáto množina nekolíznych prúdov sa volá fáza. Prúdy jednej fázy budú mať v budúcom signálnom pláne súčasne zelenú, po istom čase sa zelená pridelí inej fáze atď. až kým sa zelená nepridelí aj poslednej fáze a potom sa celý tento dej cyklicky opakuje. Prvou úlohou pri navrhovaní signálneho plánu riadenej križovatky je určiť fázovanie.

Aké sú požiadavky na dobré fázovanie? V prvom rade každý prúd sa musí vyskytovať v niektorej fáze. Druhou požiadavkou je, aby bol počet fáz čo najmenší. Táto druhá požiadavka vyplýva zo skutočnosti, že pri prechode signálneho plánu zo zelenej pre jednu fázu na zelenú na druhú fázu musia byť dodržané medzičasy medzi prúdmi prvej a druhej fázy. Počas medzičasu nesvieti zelená ani pre jeden z dvojice príslušných kolíznych prúdov, križovatka sa po tento čas len vyprázdňuje. Čím je súčet medzičasov na križovatke väčší, tým je väčšia neproduktívna časť cyklu riadenia a tým sa znižuje reálna priepustnosť križovatky. Čím menej fáz bude mať signálny plán, tým menšia bude časť cyklu premárnená v medzičasoch.

Obr. 8.9: Graf kolíznosti pre križovatku z obr. 8.8

Pomocou matice medzičasov môžeme zostrojiť graf $G = (V, H)$ kolíznosti prúdov križovatky, ktorý bude mať za množinu vrcholov všetky prúdy a za množinu hrán všetky neusporiadané dvojice kolíznych prúdov (t.j. tie dvojice vrcholov i, j, pre ktoré je v matici medzičasov na mieste (i, j) reálne číslo). Potom problém fázovania možno v grafe G riešiť ako problém zafarbenia grafu G minimálnym počtom farieb. Každému vrcholu treba určiť farbu – fázu, tak aby žiadne dva kolízne vrcholy nemali tú istú farbu – fázu a tak, aby počet použitých farieb – fáz bol čo najmenší.