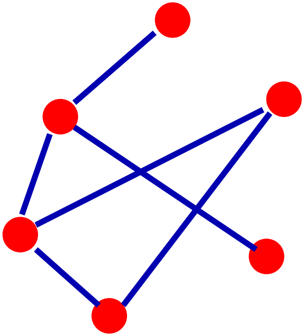
Základné pojmy teórie grafov

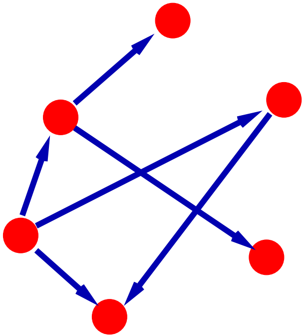
Stanislav Palúch

Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita

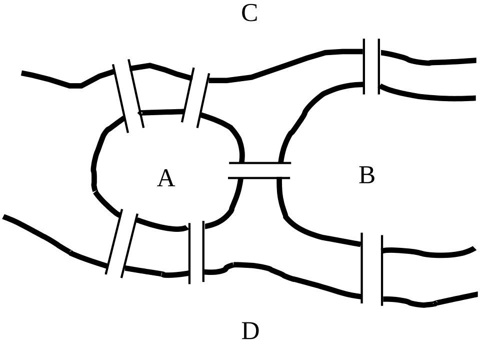
27. februára 2012

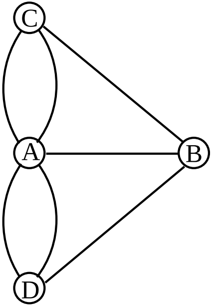
Grafy a digrafy



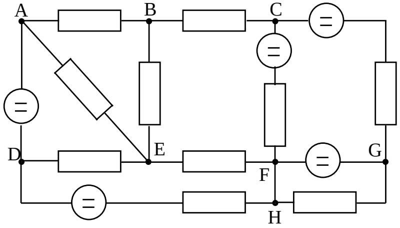


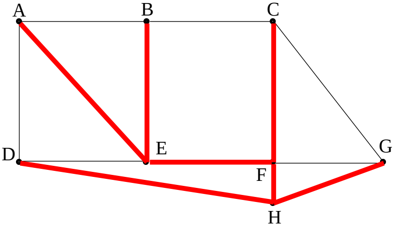
Problém siedmich mostov mesta Kaliningrad
Leonhard Euler – 1736





R. 1847 Kirchoff navrhol riešenie zložitého elektrického obvodu s využitím jeho podschémy, ktorú v dnešnej grafárskej terminológii nazývame kostrou grafu.

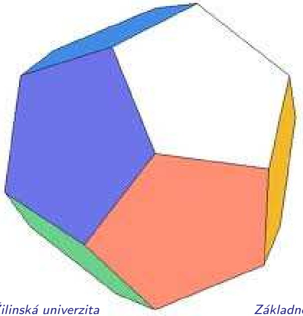




Hamiltonovské cesty

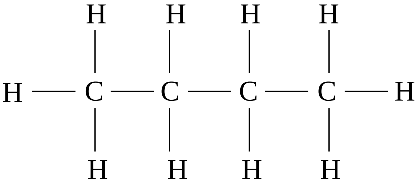
Írsky matematik R. W. Hamilton r. 1859 študoval problémy cestovania po vrcholoch a hranách pravidelného dvanásťstenu.

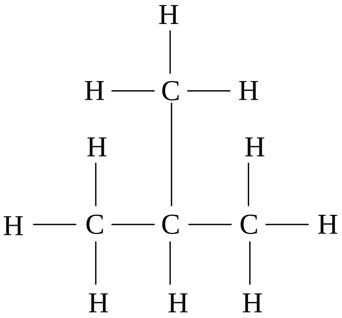
Jednou z úloh, ktoré formuloval, bola aj úloha nájdenia okružnej cesty, ktorá každý vrchol dvanásťstenu obsahuje práve raz. Táto úloha sa stala predchodcom známeho problému obchodného cestujúceho



Chemické grafy

Roku 1874 Cayley pri štúdiu štrukturálnych chemických vzorcov používal grafické zobrazenie a v tejto súvislosti Sylvester r. 1878 prvýkrát použil termín graf v dnešnom zmysle teórie grafov.





Vznik modernej teória grafov

- 1936 – maďarský matematik D. König publikoval prvú monografiu z teórie grafov.
- 1975 Christofides vydal prvú ucelenú monografiu o algoritmickej teórii grafov
- 1983 – J. Plesník vydáva slovensú knihu *Grafové algoritmy*

V roku 1965 si Edmonds ako prvý uvedomil, že existujú dobré – polynomiálne algoritmy a algoritmy ostatné – nepolynomiálne.

Vzniká nová disciplína skúmajúca zložitosť algoritmov.

Definícia grafu

Definícia

Usporiadaná dvojica(u, v) *prvkov u, v z množiny V je taká dvojica, pri ktorej je určené, ktorý z prvkov u, v je na prvom a ktorý na druhom mieste.* **Usporiadaná n-tica** *prvkov je taká n-tica prvkov $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, pri ktorej je určené poradie prvkov.*

Definícia

Grafom *nazveme usporiadanú dvojicu $G = (V, H)$, kde V je neprázdna konečná množina a H je množina neusporiadaných dvojíc typu $\{u, v\}$ takých, že $u \in V$, $v \in V$ a $u \neq v$, t. j.*

$$H \subseteq \{\{u, v\} \mid u \neq v,\ u, v \in V\} \subset V \circ V. \tag{1}$$

Prvky množiny V nazývame **vrcholmi** *a prvky množiny H* **hranami** *grafu G.*

Definícia digrafu

Definícia

Digrafom *nazveme usporiadanú dvojicu* $\overrightarrow{G} = (V, H)$*, kde* V *je neprázdna konečná množina a* H *je množina usporiadaných dvojíc typu* (u, v) *takých, že* $u \in V$, $v \in V$ *a* $u \neq v$*, t. j.*

$$H \subseteq \{(u, v) \mid u \neq v,\ u, v \in V\} \subset V \times V. \tag{2}$$

Prvky množiny V *nazývame* **vrcholmi** *a prvky množiny* H **orientovanými hranami** *digrafu* $\overrightarrow{G}$.

- Je veľká nejednotnosť v grafovej terminológii
- neorienotvaná hrana – hrana,edge, rebro
- orientovaná hrana – šíp, arc, oblúk

Digraf – množina V s antireflexnou reláciou

Graf – množina V s antireflexnou symetrickou reláciou

Diagram grafu

Definícia

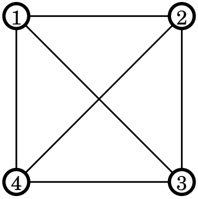
Diagram grafu. *Graf často reprezentujeme graficky a príslušný obrázok voláme diagram grafu.* **Diagram grafu** $G = (V, H)$ *v nejakom priestore* $\mathcal{P}$ *je množina* B *bodov a množina* S *súvislých čiar v priestore* $\mathcal{P}$ *takých, že*

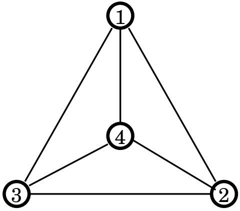
- *Každému vrcholu* $v \in V$ *zodpovedá práve jeden bod* $b_v \in B$ *a každému bodu* $b \in B$ *zodpovedá práve jeden vrchol* $v \in V$ *(t. j.* $b = b_v$*), pričom pre* $u, v \in V,\ u \neq v$ *je* $b_u \neq b_v$*.*
- *Každej hrane* $h \in H$ *zodpovedá práve jedna čiara* $s_h \in S$ *a každej čiare* $s \in S$ *zodpovedá práve jedna hrana* $h \in H$ *(t. j.* $s = s_h$*), pričom pre* $h, k \in H,\ h \neq k$ *je* $s_h \neq s_k$*.*
- *Ak* $h = \{u, v\} \in H$*, potom čiara* s_h *má koncové body* b_u*,* b_v*. Okrem koncových bodov žiadna čiara neobsahuje žiaden bod typu* $b_w \in B$*.*
- *Naviac sa často žiada, aby bol diagram nakreslený tak, že žiadna čiara samu seba nepretína a dve čiary majú najviac jeden priesečník.*

Definícia

Diagram grafu, resp. digrafu v rovine nazveme **rovinný**, *ak sa jeho hrany nepretínajú nikde inde okrem vrcholov. Graf* $G = (V, H)$, *resp. digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *nazveme* **rovinný**, *ak k nemu existuje rovinný diagram.*

V niektorej slovenskej literatúre sa namiesto termínu rovinný graf používa termín **planárny graf**.

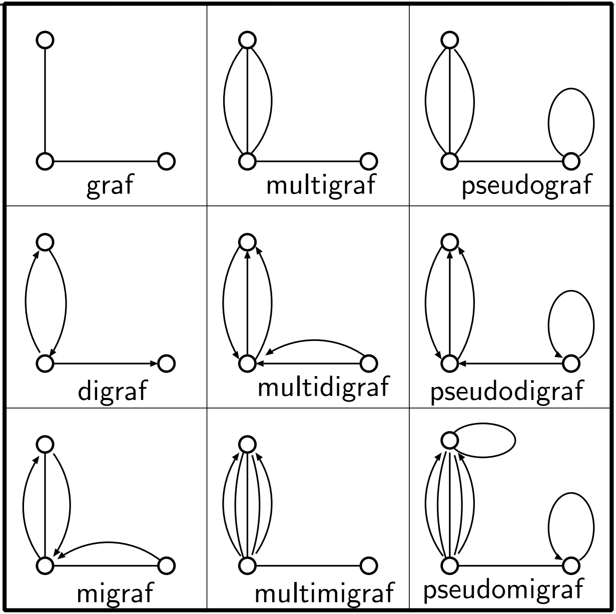




Obr.: Dva diagramy toho istého grafu $G = (V, H)$,

kde $V = \{1, 2, 3, 4\}$, H=$\{\{1, 2\},\{1, 3\},\{1, 4\}, \{2, 3\},\{2, 4\},\{3, 4\}\}$.

Všeobecnejšie grafové štruktúry

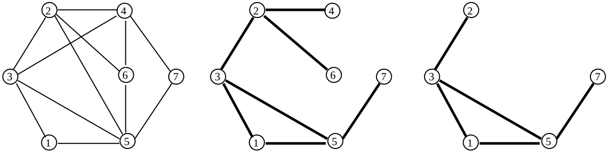


Definícia

Hovoríme, že graf $G' = (V', H')$ *je* **podgrafom grafu** $G = (V, H)$, *ak platí* $V' \subseteq V$ *a* $H' \subseteq H$. *V tomto prípade budeme písať* $G' \subseteq G$.
Digraf $\overrightarrow{G'} = (V', H')$ *je* **podgrafom digrafu** $\overrightarrow{G} = (V, H)$, *ak* $V' \subseteq V$ *a* $H' \subseteq H$.

Definícia

Hovoríme, že graf $G' = (V', H')$ *je* **faktorovým podgrafom** *grafu* $G = (V, H)$, *ak platí* $V' = V$ *a* $H' \subseteq H$. *Analogicky definujeme* **faktorový podgraf digrafu** $\overrightarrow{G}$.



Nech $G = (V, H)$ je graf. Ak pre štruktúru $G' = (V', H')$ platí $V' \subseteq V$, $H' \subseteq H$, ešte nemusí byť G' podgrafom grafu G.

Príklad

$G = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\})$, $G' = (\{1, 2\}, \{\{1, 3\}\})$.
G' totiž nie je vôbec graf, lebo hrana $\{1, 3\}$ nie je dvojicou prvkov z množiny $\{1, 2\}$.

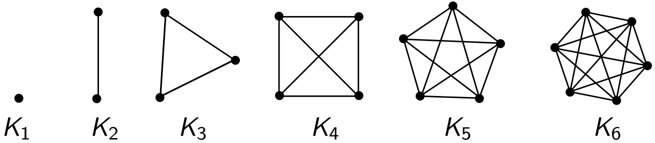
Úplný graf

Definícia

Graf $G = (V, H)$ *nazveme* **úplným**, *ak množina* H *obsahuje všetky možné dvojice typu* $\{u, v\}$, *kde* $u, v \in V$ *a* $u \neq v$. *Úplný graf o* n *vrcholoch budeme značiť* K_n.
Podobne digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *nazveme* **úplným**, *ak množina* H *obsahuje všetky možné dvojice typu* (u, v), *kde* $u, v \in V$ *a* $u \neq v$.

Poznámka

Niektorá literatúra používa namiesto termínu **úplný graf** *termín* **kompletný graf**.



Obr.: Diagramy úplných grafov K_1 až K_6.

Maximálny resp. minimálny podgraf grafu s vlastnosťou $\mathcal{V}$

Definícia

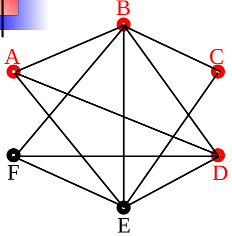
Maximálny podgraf G' **grafu** G **s nejakou vlastnosťou** $\mathcal{V}$ *je taký podgraf grafu* G*, ktorý má vlastnosť* $\mathcal{V}$*, a pritom neexistuje podgraf* G'' *grafu* G *s vlastnosťou* $\mathcal{V}$ *taký, že* $G' \subseteq G''$ *a* $G' \neq G''$.

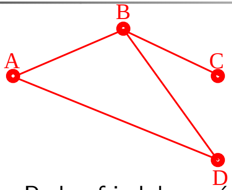
Minimálny podgraf G' **grafu** G **s vlastnosťou** $\mathcal{V}$ *je taký podgraf grafu* G*, ktorý má vlastnosť* $\mathcal{V}$*, a pritom neexistuje podgraf* G'' *grafu* G *s vlastnosťou* $\mathcal{V}$ *taký, že* $G'' \subseteq G'$ *a* $G'' \neq G'$.

Definícia

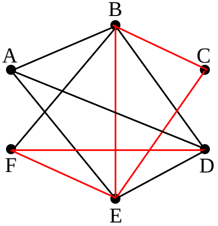
Nech $G = (V, H)$ *je graf (digraf),* $V' \subseteq V$*. Hovoríme, že* G' *je* **podgraf grafu (digrafu)** G **indukovaný množinou vrcholov** V'*, ak* G' *je maximálny podgraf grafu* G *s množinou vrcholov* V'.
Nech $H' \subseteq H$*. Hovoríme, že* G' *je* **podgraf grafu (digrafu)** G **indukovaný množinou hrán** H'*, ak* G' *je minimálny podgraf grafu* G *s množinou hrán* H'.

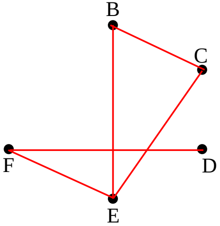
Podgrafy indukované množinou vrcholov resp. hrán





Podgraf indukovaný množinou vrcholov $\{A, B, C, D\}$





Podgraf indukovaný množinou hrán $\{\{B, C\}, \{B, E\}, \{C, E\}\{E, F\}, \{F, D\}\}$

Priľahlosť – susednosť vrcholov resp. hrán

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf, resp. digraf, $v \in V$, $h \in H$.
Vrchol v je **incidentný s hranou** *h, ak je v jedným z vrcholov hrany h.*
Hrany h, $k \in H$, $h \neq k$ sú **priľahlé** *alebo* **susedné**, *ak majú spoločný jeden vrchol.*
Vrcholy u, v sú **priľahlé** *alebo* **susedné**, *ak $\{u, v\} \in H$, t. j. ak $\{u, v\}$ je hranou, resp. ak $(u, v) \in H$ alebo $(v, u) \in H$.*

Symbolom $H(v)$ budeme označovať množinu všetkých hrán grafu G incidentných s vrcholom v, symbolom $V(v)$ budeme označovať množinu všetkých vrcholov priľahlých k vrcholu v.

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf, $u \in V$, $v \in V$, $h \in H$. Hovoríme, že orientovaná hrana h **vychádza z vrcholu** *u, alebo že* **vrchol** *u* **je začiatočný vrchol orientovanej hrany** *h, ak $h = (u, x)$ pre niektoré $x \in V$. Hovoríme, že orientovaná hrana h* **vchádza do vrchola** *v, alebo že* **vrchol** *v* **je koncový vrchol orientovanej hrany** *h, ak $h = (y, v)$ pre niektoré $y \in V$. Orientovaná hrana h je* **incidentná** *s vrcholom v, ak hrana h vchádza do vrchola v alebo vychádza z vrchola v.*

$H^+(v)$ – množina všetkých orientovaných hrán digrafu $\overrightarrow{G}$ vychádzajúcich z vrchola v

$H^-(v)$ – množina všetkých orientovaných hrán digrafu $\overrightarrow{G}$ vchádzajúcich do vrchola v

$V^+(v)$ – množina koncových vrcholov všetkých hrán z $H^+(v)$,

$V^-(v)$ – množina začiatočných vrcholov všetkých hrán z $H^-(v)$.

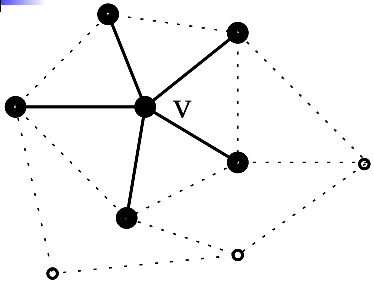
$$H(v) = H^+(v) \cup H^-(v) \qquad V(v) = V^+(v) \cup V^-(v)$$

Okolie, výstupná hviezda, vstupná hviezda

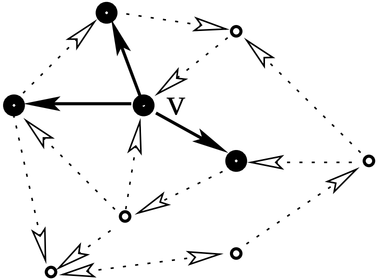
Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf alebo digraf, $v \in V$.
Okolím vrchola *v nazveme graf, resp. digraf $O(v) = (V(v) \cup \{v\}, H(v))$, t. j. ktorého vrcholová množina pozostáva z vrchola v a všetkých s ním susedných vrcholov a ktorého hranová množina je množinou všetkých hrán incidentných s vrcholom v.*

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf, $v \in V$.
Výstupnou hviezdou vrchola *v nazveme digraf $Fstar(v) = (V^+(v) \cup \{v\}, H^+(v))$, ktorého vrcholová množina pozostáva z vrchola v a koncových vrcholov všetkých hrán vychádzajúcich z vrchola v a hranová množina je množinou všetkých hrán vychádzajúcich z vrchola v.*
Vstupnou hviezdou vrchola *v nazveme digraf $Bstar(v) = (V^-(v) \cup \{v\}, H^-(v))$, ktorého vrcholová množina pozostáva z vrchola v a začiatočných vrcholov všetkých hrán vchádzajúcich do vrchola v a ktorého hranová množina je množinou všetkých hrán vchádzajúcich do vrchola v.*



Okolie vrchola v



Výstupná hviezda vrchola v

Obr.: Okolie a výstupná hviezda vrchola v sú vyznačené hrubo čiarami.

Stupeň vrchola

Definícia

Stupeň $\deg(v)$ **vrchola** *v v grafe $G = (V, H)$ je počet hrán incidentných s vrcholom v.*

Výstupný stupeň $\mathbf{odeg}(v)$ **vrchola** *v v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je počet hrán digrafu $\overrightarrow{G}$ z vrchola v vychádzajúcich.*

Vstupný stupeň $\mathbf{ideg}(v)$ **vrchola** *v v digrafe $\overrightarrow{G}$ je počet hrán digrafu $\overrightarrow{G}$ do vrchola v vchádzajúcich.*

Veta

(Euler.) *Súčet stupňov všetkých vrcholov v grafe $G = (V, H)$ sa rovná dvojnásobku počtu hrán grafu G, t. j.*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2.|H|.$$

Počet vrcholov nepárneho stupňa je párny

Veta

Počet vrcholov nepárneho stupňa v ľubovoľnom grafe $G = (V, H)$ je párny.

$$V = V_1 \cup V_2$$

- V_1 – množina vrcholov nepárneho stupňa
- V_2 – množina vrcholov párneho stupňa

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1 \cup V_2} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2.|H|, \quad (3)$$

a teda

$$\sum_{v \in V_1} \deg(v) = 2.|H| - \sum_{v \in V_2} \deg(v). \quad (4)$$

Počet vrcholov nepárneho stupňa je párny

Veta

Počet vrcholov nepárneho stupňa v ľubovoľnom grafe $G = (V, H)$ je párny.

$$V = V_1 \cup V_2$$

- V_1 – množina vrcholov nepárneho stupňa
- V_2 – množina vrcholov párneho stupňa

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{v\in V_1\cup V_2} \deg(v) = \sum_{v\in V_1} \deg(v) + \sum_{v\in V_2} \deg(v) = 2.|H|, \quad (3)$$

a teda

$$\sum_{v\in V_1} \deg(v) = 2.|H| - \sum_{v\in V_2} \deg(v). \quad (4)$$

Počet vrcholov nepárneho stupňa je párny

Veta

Počet vrcholov nepárneho stupňa v ľubovoľnom grafe $G = (V, H)$ je párny.

$$V = V_1 \cup V_2$$

- V_1 – množina vrcholov nepárneho stupňa
- V_2 – množina vrcholov párneho stupňa

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1 \cup V_2} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2.|H|, \quad (3)$$

a teda

$$\sum_{v \in V_1} \deg(v) = 2.|H| - \sum_{v \in V_2} \deg(v). \quad (4)$$

Počet vrcholov nepárneho stupňa je párny

Veta

Počet vrcholov nepárneho stupňa v ľubovoľnom grafe $G = (V, H)$ je párny.

$$V = V_1 \cup V_2$$

- V_1 – množina vrcholov nepárneho stupňa
- V_2 – množina vrcholov párneho stupňa

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1 \cup V_2} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2.|H|, \quad (3)$$

a teda

$$\sum_{v \in V_1} \deg(v) = 2.|H| - \sum_{v \in V_2} \deg(v). \quad (4)$$

Počet vrcholov nepárneho stupňa je párny

$$\sum_{v \in V_1} \deg(v) = \underbrace{2.|H|}_{\text{párne}} - \sum_{v \in V_2} \underbrace{\deg(v)}_{\text{párne}}.$$

Dôsledok: $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ je párne číslo.

$\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ je súčet istého počtu k nepárnych čísel.
Nech $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, nech k je nepárne číslo.
Potom

$$\sum_{v \in V_1} \deg(v) = \underbrace{(\deg(v_1) + \deg(v_2))}_{\text{párne}} + \underbrace{(\deg(v_3) + \deg(v_4))}_{\text{párne}} + \dots$$
$$\dots + \underbrace{(\deg(v_{k-2}) + \deg(v_{k-1}))}_{\text{párne}} + \underbrace{\deg(v_k)}_{\text{nepárne}} \quad (5)$$

Počet vrcholov nepárneho stupňa je párny

$$\sum_{v \in V_1} \deg(v) = \underbrace{2.|H|}_{\text{párne}} - \sum_{v \in V_2} \underbrace{\deg(v)}_{\text{párne}}.$$

Dôsledok: $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ je párne číslo.

$\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ je súčet istého počtu k nepárnych čísel.
Nech $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, nech k je nepárne číslo.
Potom

$$\sum_{v \in V_1} \deg(v) = \underbrace{(\deg(v_1) + \deg(v_2))}_{\text{párne}} + \underbrace{(\deg(v_3) + \deg(v_4))}_{\text{párne}} + \ldots$$
$$\cdots + \underbrace{(\deg(v_{k-2}) + \deg(v_{k-1}))}_{\text{párne}} + \underbrace{\deg(v_k)}_{\text{nepárne}} \quad (5)$$

Počet vrcholov nepárneho stupňa je párny

$$\sum_{v\in V_1} \deg(v) = \underbrace{2.|H|}_{\text{párne}} - \sum_{v\in V_2} \underbrace{\deg(v)}_{\text{párne}}.$$

Dôsledok: $\sum_{v\in V_1} \deg(v)$ je párne číslo.

$\sum_{v\in V_1} \deg(v)$ je súčet istého počtu k nepárnych čísel.
Nech $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, nech k je nepárne číslo.
Potom

$$\sum_{v\in V_1} \deg(v) = \underbrace{(\deg(v_1) + \deg(v_2))}_{\text{párne}} + \underbrace{(\deg(v_3) + \deg(v_4))}_{\text{párne}} + \dots$$
$$\dots + \underbrace{(\deg(v_{k-2}) + \deg(v_{k-1}))}_{\text{párne}} + \underbrace{\deg(v_k)}_{\text{nepárne}} \quad (5)$$

Pravidelný graf, komplementárne grafy

Definícia

Pravidelný graf stupňa k *je taký graf* $G = (V, H)$, *v ktorom má každý vrchol* $v \in V$ *stupeň* k.

Definícia

Grafy $G = (V, H)$, $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{H})$ *nazveme* **komplementárne**, *ak* $V = \overline{V}$ *a pre každú dvojicu vrcholov* $u, \ v \in V$ *takých, že* $u \neq v$, *platí:*

$$\{u, v\} \in H \text{ práve vtedy, keď } \{u, v\} \notin \overline{H}.$$

Analogicky definujeme dvojicu komplementárnych digrafov.

Obr.: Dvojice komplementárnych grafov a digrafov.

Pravidelný graf, komplementárne grafy

Definícia

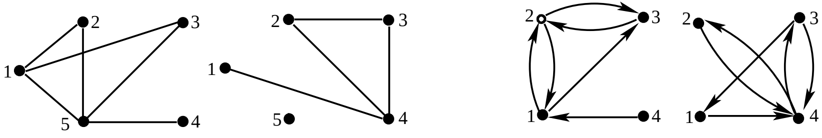
Pravidelný graf stupňa k *je taký graf* $G = (V, H)$, *v ktorom má každý vrchol* $v \in V$ *stupeň* k.

Definícia

Grafy $G = (V, H)$, $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{H})$ *nazveme* **komplementárne**, *ak* $V = \overline{V}$ *a pre každú dvojicu vrcholov* $u,\ v \in V$ *takých, že* $u \neq v$, *platí:*

$$\{u, v\} \in H \text{ práve vtedy, keď } \{u, v\} \notin \overline{H}.$$

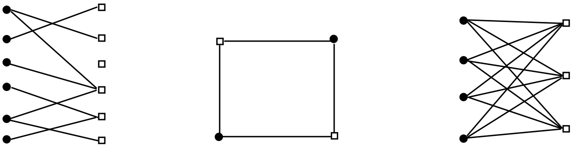
Analogicky definujeme dvojicu komplementárnych digrafov.



Obr.: Dvojice komplementárnych grafov a digrafov.

Definícia

Graf $G = (V, H)$ nazveme **bipartitný***, ak jeho množinu vrcholov V možno rozdeliť na dve disjunktné neprázdne podmnožiny (partie alebo časti) V_1, V_2 tak, že žiadne dva vrcholy z tej istej časti nie sú susedné.*
Úplný bipartitný graf *K_{mn} je taký bipartitný graf s časťami V_1, V_2, v ktorom $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ a v ktorom je každý vrchol množiny V_1 susedný s každým vrcholom množiny V_2.*
Analogicky možno definovať k–partitný graf.



Obr.: Diagramy bipartitných grafov.

Vrcholy častí V_1, V_2 sú znázornené odlišne.
Prostredný diagram prislúcha grafu $K_{2,2}$,
tretí diagram zľava je diagram grafu $K_{4,3}$.

Hranový graf

Definícia

Nech $G = (V, H)$ *je graf. Jeho* **hranovým grafom** *nazveme graf* $L(G) = (H, E)$, *ktorého vrcholovú množinu tvorí hranová množina grafu* G *a ktorého hranová* E *množina je definovaná nasledovne:* $\{h_1, h_2\} \in E$ *práve vtedy, keď sú hrany* h_1, h_2 *susedné.*

Hranovo ohodnotené grafy

Definícia

Graf, resp. digraf $G = (V, H)$ nazveme **hranovo ohodnoteným**, *ak každej hrane, resp. orientovanej hrane $h \in H$ je priradené reálne číslo $c(h)$ nazývané* **cena hrany** *h alebo tiež* **ohodnotenie hrany** *h.*

Za hranovo ohodnotený graf budeme teda pokladať usporiadanú trojicu $G = (V, H, c)$, kde V je množina vrcholov, H množina hrán a $c : H \to \mathbb{R}$ je reálna funkcia definovaná na množine H.

Podobne možno definovať **vrcholovo ohodnotený graf (digraf)** *ako usporiadanú trojicu $G = (V, H, d)$, kde V je množina vrcholov, H množina hrán a $d : V \to \mathbb{R}$ je reálna funkcia definovaná na množine V. Číslo $d(v)$ nazveme* **ohodnotenie vrchola** *v alebo tiež* **cena vrchola** *v.*

Definícia

Graf, resp. digraf $G = (V, H)$ nazveme **hranovo ohodnoteným**, *ak každej hrane, resp. orientovanej hrane $h \in H$ je priradené reálne číslo $c(h)$ nazývané* **cena hrany** *h alebo tiež* **ohodnotenie hrany** *h.*

Za hranovo ohodnotený graf budeme teda pokladať usporiadanú trojicu $G = (V, H, c)$, kde V je množina vrcholov, H množina hrán a $c : H \to \mathbb{R}$ je reálna funkcia definovaná na množine H.

Podobne možno definovať **vrcholovo ohodnotený graf (digraf)** *ako usporiadanú trojicu $G = (V, H, d)$, kde V je množina vrcholov, H množina hrán a $d : V \to \mathbb{R}$ je reálna funkcia definovaná na množine V. Číslo $d(v)$ nazveme* **ohodnotenie vrchola** *v alebo tiež* **cena vrchola** *v.*

Definícia

Graf $G = (V, H)$ *je* **izomorfný s grafom** $G' = (V', H')$, *ak existuje také vzájomne jednoznačné zobrazenie* $f : V \leftrightarrow V'$, *že pre každú dvojicu vrcholov* $u, v \in V$ *platí:*

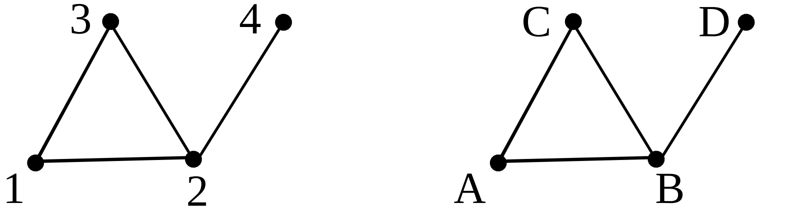
$$\{u, v\} \in H \quad \textit{práve vtedy, keď} \quad \{f(u), f(v)\} \in H'. \tag{6}$$

Zobrazenie f *sa volá* **izomorfizmus grafov** G *a* G'.
Digraf $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je* **izomorfný s digrafom** $\overrightarrow{G}' = (V', H')$, *ak existuje také vzájomne jednoznačné zobrazenie* $f : V \leftrightarrow V'$, *že pre každú dvojicu vrcholov* $u, v \in V$ *platí:*

$$(u, v) \in H \quad \textit{práve vtedy, keď} \quad (f(u), f(v)) \in H'. \tag{7}$$

Zobrazenie f *sa volá* **izomorfizmus digrafov** $\overrightarrow{G}$ *a* $\overrightarrow{G}'$.

Príklad izomorfných grafov



Obr.: Dvojica izomorfných grafov.

Zobrazenie f definované rovnosťami
$f(1) = A$, $f(2) = B$, $f(3) = C$, $f(4) = D$ je izomorfizmom.

Poznámka

Izomorfizmus grafov je reflexívna, symetrická a tranzitívna relácia – je to teda relácia ekvivalencie na triede všetkých grafov.

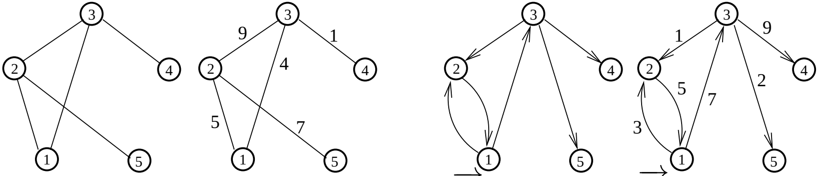
Invarianty izomorfizmu

Ak sú grafy G, G' izomorfné, musia mať všetky grafové charakteristiky rovnaké – napr. počet vrcholov, počet hrán, valenčné postupnosti, počet komponentov, počet cyklov s k hranami, počet ciest s k hranami, počet úplných podgrafov typu K_p atď. Takéto charakteristiky nazývame **invarianty izomorfizmu**. Invarianty izomorfizmu možno využiť na dôkaz toho, že grafy G, G' nie sú izomorfné – ak sa ukáže, že G má niektorú vlastnosť inú ako G', takéto grafy nemôžu byť izomorfné.

Na dôkaz izomorfnosti dvoch grafov, resp. digrafov treba zostrojiť konkrétne zobrazenie f s vlastnosťami (6), resp. (7). Zatiaľ na to nepoznáme iný spôsob ako vyskúšať všetky vzájomne jednoznačné zobrazenia množiny V na množinu V', ktorých je $n!$ (kde $n = |V|$).

Problém grafového izomorfizmu je navrhnúť prakticky realizovateľný všeobecný algoritmus, ktorý by pre ľubovoľné dva grafy rozhodol, či sú izomorfné alebo nie, alebo dokázať, že žiaden taký algoritmus neexistuje.

1. Reprezentácia diagramom grafu



$G_1 = (V_1, H_1)$ $G_1' = (V_1, H_1, c_1)$ $\overrightarrow{G_2} = (V_2, H_2)$ $\overrightarrow{G_2'} = (V_2, H_2, c_2)$

Obr.: Diagramy grafu, hranovo ohodnoteného grafu,

digrafu a hranovo ohodnoteného digrafu.

2. Reprezentácia množinami vrcholov a hrán

Nech $V_1 = \{1,2,3,4,5\}$, $H_1 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,4\}\}$. Množinami V_1 a H_1 je jednoznačne určený graf $G_1 = (V_1, H_1)$.

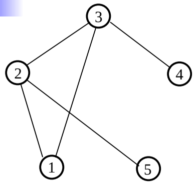
Podobne nech $V_2 = \{1,2,3,4,5\}$ a
$H_2 = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2),(3,4),(3,5)\}$,
potom množinami V_2, H_2 je jednoznačne určený digraf $\overrightarrow{G_2} = (V_2, H_2)$.

V počítači môžeme množinu vrcholov V reprezentovať ako jednorozmerné pole V s $n = |V|$ prvkami, kde $V[i]$ je i-tý vrchol.

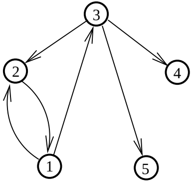
Množinu hrán môžeme uložiť do dvojrozmerného poľa H typu $(m \times 2)$, kde $m = |H|$ je počet hrán, $H[j,1]$ je začiatočný a $H[j,2]$ koncový vrchol j-tej hrany, čím je daná aj orientácia tejto hrany v prípade digrafu.

Ak ide naviac o hranovo ohodnotený graf alebo digraf, ohodnotenia hrán môžeme ukladať do zvláštneho jednorozmerného poľa $C[\ ]$ dĺžky $m = |H|$ (kde $C[j]$ je ohodnotenie j-tej hrany), alebo hrany ukladať do dvojrozmerného poľa H typu $m \times 3$, kde $H[j,1]$, $H[j,2]$, sú začiatočný a koncový vrchol j-tej hrany a $H[j,3]$ je ohodnotenie j-tej hrany.

Príklad



$G_1 = (V_1, H_1)$



$\overrightarrow{G_2} = (V_2, H_2)$

i	1	2	3	4	5
$V[i]$	1	2	3	4	5

j	1	2	3	4	5
$H[j,1]$	1	1	2	2	3
$H[j,2]$	2	3	3	5	4
$C[j] = H[j,3]$	5	4	9	7	1

i	1	2	3	4	5
$V[i]$	1	2	3	4	5

j	1	2	3	4	5	6
$H[j,1]$	1	1	2	3	3	3
$H[j,2]$	2	3	1	2	4	5
$C[j] = H[j,3]$	3	7	5	1	9	2

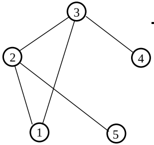
Tabuľka:

Reprezentácia grafu G_1 a digrafu $\overrightarrow{G_2}$.

3. Reprezentácia maticou priľahlosti

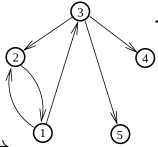
Matica priľahlosti $\mathbf{M} = (m_{ij})$ je štvorcová matica typu $n \times n$, kde $n = |V|$ je počet vrcholov grafu, resp. digrafu G, ktorej prvky sú definované nasledovne:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } \{i,j\} \in H \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \qquad m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } (i,j) \in H \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \tag{8}$$



$G_1 = (V_1, H_1)$

	1	2	3	4	5
1	-	1	1	-	-
2	1	-	1	-	1
3	1	1	-	1	-
4	-	-	1	-	-
5	-	1	-	-	-



$\overrightarrow{G}_2 = (V_2, H_2)$

	1	2	3	4	5
1	-	1	1	-	-
2	1	-	-	-	-
3	-	1	-	1	1
4	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-

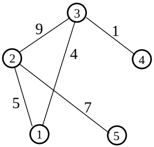
Matica priľahlosti grafu G_1.

Matica priľahlosti digrafu $\overrightarrow{G}_2$.

4. Reprezentácia maticou ohodnotení hrán

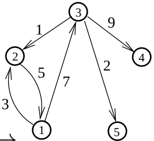
Matica **M** ohodnotení hrán grafu, resp. digrafu je štvorcová matica typu $n \times n$, kde $n = |V|$ je počet vrcholov grafu, resp. digrafu a prvky ktorej sú definované nasledovne:

$$m_{ij} = \begin{cases} c(\{i,j\}) & \text{ak } \{i,j\} \in H \\ \infty & \text{inak} \end{cases} \qquad m_{ij} = \begin{cases} c((i,j)) & \text{ak } (i,j) \in H \\ \infty & \text{inak} \end{cases} \tag{9}$$



$G_1' = (V_1, H_1, c_1)$

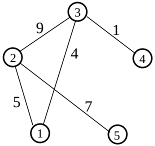
	1	2	3	4	5
1	-	5	4	-	-
2	5	-	9	-	7
3	4	9	-	1	-
4	-	-	1	-	-
5	-	7	-	-	-



$\overrightarrow{G_2'} = (V_2, H_2, c_2)$

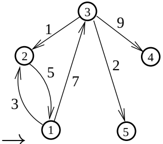
	1	2	3	4	5
1	-	3	7	-	-
2	5	-	-	-	-
3	-	1	-	9	2
4	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-

Graf možno reprezentovať tak, že ku každému vrcholu v zadáme množinu $V(v)$ — t. j. zoznam jeho najbližších susedov. Podobne digraf možno reprezentovať tak, že ku každému vrcholu v zadáme množinu $V^{+}(v)$ – t. j. množinu koncov hrán vychádzajúcich z vrchola v. Pre graf G_1 a digraf $\overrightarrow{G}_2$ z obrázkov sú tieto zoznamy v nasledujúcich tabuľkách:



$G_1' = (V_1, H_1, c_1)$

$V(1)$	2	3	-
$V(2)$	1	3	5
$V(3)$	1	2	4
$V(4)$	3	-	-
$V(5)$	2	-	-



$\overrightarrow{G_2'} = (V_2, H_2, c_2)$

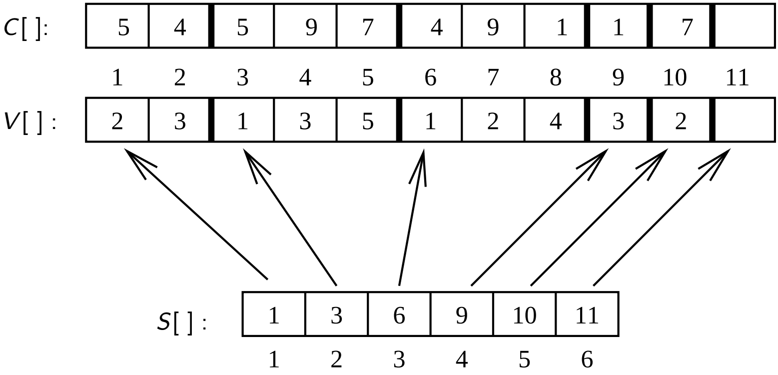
$V^{+}(1)$	2	3	-
$V^{+}(2)$	1	-	-
$V^{+}(3)$	2	4	5
$V^{+}(4)$	-	-	-
$V^{+}(5)$	-	-	-

Vrcholy okolí pre graf G_1'.

Vrcholy výstupných hviezd pre digraf $\overrightarrow{G_2'}$.

Príklad

Veľmi efektívne možno zoznamy najbližších susedov implementovať tak, že do poľa $V[\,]$ najprv zapíšeme najbližších susedov vrchola 1, potom najbližších susedov vrchola 2 atď., až nakoniec najbližších susedov posledného vrchola.



Obr.: Reprezentácia zoznamov susedov pomocou smerníkov.

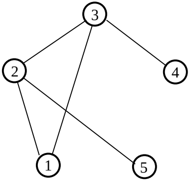
Incidenčná matica vrcholov a hrán je matica **B** typu $n \times m$, kde n je počet vrcholov a m počet hrán reprezentovaného grafu alebo digrafu. Každý prvok b_{ij} matice **B** hovorí o spôsobe incidencie vrchola i s hranou j nasledovne:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak vrchol } i \text{ je incidentný s hranou } j \text{ v grafe } G \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak vrchol } i \text{ je začiatočným vrcholom hrany } j \text{ v digrafe } \overrightarrow{G} \\ -1 & \text{ak vrchol } i \text{ je koncovým vrcholom hrany } j \text{ v digrafe } \overrightarrow{G} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Tento spôsob je vhodný aj pre multigrafy, multidigrafy a multimigrafy. Pre pseudomigrafy sa dá dodefinovať b_{ij} aj pre slučky vzťahom $b_{ij} = 2$, ak j je neorientovaná slučka začínajúca a končiaca vo vrchole i a vzťahom $b_{ij} = -2$, ak j je orientovaná slučka začínajúca a končiaca vo vrchole i.

Príklad



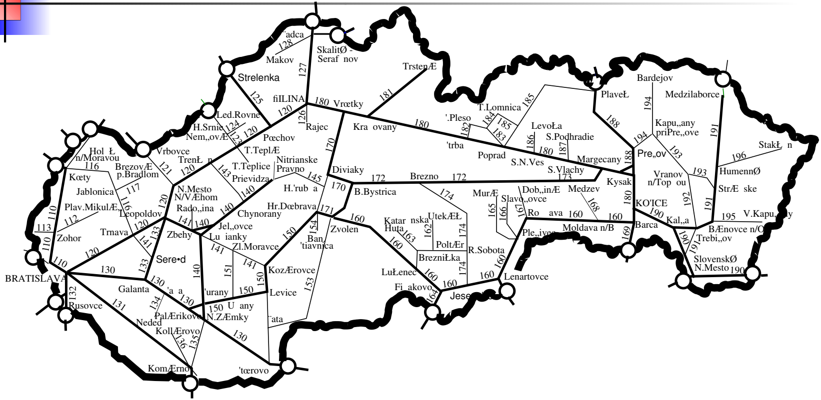
$G_1 = (V_1, H_1)$

v	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2,5\}$	$\{3,4\}$
1	1	1			
2	1		1	1	
3		1	1		1
4					1
5				1	

Tabuľka: Incidenčná matica grafu $G_1 = (V_1, H_1)$

$(V_1 = \{1,2,3,4,5\},\ H_1 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,4\}\})$.

Aplikácie – Modelovanie reálnej dopravnej siete



Obr.: Model železničnej siete na Slovensku.

Tento obrázok môžeme považovať za diagram hranovo ohodnoteného grafu G. Ohodnotenie hrany grafu vyjadruje príslušnosť modelovaného úseku k trati a slúži na rýchle nájdenie spojov, ktoré cez úsek modelovaný príslušnou hranou premávajú.