

Matematická analýza 1

2025/2026

6. Limita funkcie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou  získate nápomoc.

Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

- 1 Definícia limity funkcie
- 2 Vlastnosti limít
- 3 Jednostranné limity
- 4 Asymptotické vlastnosti funkcie
- 5 Riešené príklady
- 6 Neurčité výrazy

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrowaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrowaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$,

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrowaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrowaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujímá nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrowaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrowaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \rightarrow 2$. $\Rightarrow$ • $f(x) \rightarrow x+2 = g(x) \rightarrow 2+2 = 4$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \rightarrow 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \rightarrow x+2 = g(x) \rightarrow 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujímá nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \rightarrow 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \rightarrow x+2 = g(x) \rightarrow 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]
- Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 4$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

• $x \rightarrow 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \rightarrow x+2 = g(x) \rightarrow 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]

• Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 4$.

[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

• $x \rightarrow 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \rightarrow x+2 = g(x) \rightarrow 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]

• Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 4$.

[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Analogicky platí pre každé $c \in D(f)$

• Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow c$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow c+2$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

• $x \rightarrow 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \rightarrow x+2 = g(x) \rightarrow 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]

• Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 4$.

[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Analogicky platí pre každé $c \in D(f)$ a aj pre $\pm\infty$:

• Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow c$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow c+2$.

• Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \pm\infty$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \pm\infty$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

• $x \rightarrow 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \rightarrow x+2 = g(x) \rightarrow 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]

• Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 4$.

[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Analogicky platí pre každé $c \in D(f)$ a aj pre $\pm\infty$:

• Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow c$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow c+2$.

• Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \pm\infty$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \pm\infty$.

Položme (dodefinujeme) $f(2) = 4$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \rightarrow 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \rightarrow x+2 = g(x) \rightarrow 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]
- Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 4$.
[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Analogicky platí pre každé $c \in D(f)$ a aj pre $\pm\infty$:

- Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow c$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow c+2$.
- Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \pm\infty$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \pm\infty$.

Položme (dodefinujme) $f(2) = 4$. $\Rightarrow$ Funkcia f bude definovaná pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Definícia limity – Motivačný príklad

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Zaujíma nás chovanie funkcie nielen v bodoch $x \in D(f)$, ale aj v okoliach bodov $x \notin D(f)$ a okoliach bodov $\pm\infty$.

Uvažujme funkcie $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ a $g(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$.

- $x \rightarrow 2$. [x sa blíži k číslu 2.] $\Rightarrow$ • $f(x) \rightarrow x+2 = g(x) \rightarrow 2+2 = 4$. [$f(x)$ sa blíži k číslu 4.]
- Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 2$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 4$.
[Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 2. $\Rightarrow$ Postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 4.]

Analogicky platí pre každé $c \in D(f)$ a aj pre $\pm\infty$:

- Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow c$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow c+2$.
- Lubovoľná postupnosť vzorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \pm\infty$. $\Rightarrow$ • Príslušná postupnosť obrazov $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \pm\infty$.

Položme (dodefinujme) $f(2) = 4$. $\Rightarrow$ Funkcia f bude definovaná pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ • $f(x) = g(x)$ bude platiť pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$,

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$,

ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$,

ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$,

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$,

ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$,

ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f), x_n \neq a \text{ pre } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \right.$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f), x_n \neq a \text{ pre } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \right.$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.
- [$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ pre $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. To znamená $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.]

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.
- $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f), x_n \neq a \text{ pre } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \text{ To znamená } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \right]$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.
- [$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ pre $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. To znamená $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.]

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} b \in \mathbb{R}. \\ b = \pm\infty. \end{cases}$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b$.
- [$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ pre $n \in N$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. To znamená $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.]

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.  $\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} \\ b = \pm\infty. \end{cases}$ [Konečná limita b .]

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b$.
- [$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ pre $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. To znamená $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.]

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.  $\begin{cases} b \in \mathbb{R}. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} & [\text{Konečná limita } b.] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} & [\text{Nekonečná limita } \pm\infty.] \end{cases}$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b$.
- [$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f), x_n \neq a$ pre $n \in N. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. To znamená $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.]

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \quad \begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} & [\text{Konečná limita } b.] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} & [\text{Nekonečná limita } \pm\infty.] \end{cases}$$

$$\quad \quad \quad \begin{cases} a \in R. \\ a = \pm\infty. \end{cases}$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.
- [$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f), x_n \neq a$ pre $n \in N. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. To znamená $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.]

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

$\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} & [\text{Konečná limita } b.] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} & [\text{Nekonečná limita } \pm\infty.] \end{cases}$

$\begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} & [\text{Limita v konečnom bode } a.] \\ a = \pm\infty. & \end{cases}$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b$.
- $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f), x_n \neq a \text{ pre } n \in N. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \text{ To znamená } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \right]$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

- $\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} & [\text{Konečná limita } b.] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} & [\text{Nekonečná limita } \pm\infty.] \end{cases}$
- $\begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} & [\text{Limita v konečnom bode } a.] \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Limita v nevlastnom bode.} & [\text{Limita v nekonečnom bode } \pm\infty.] \end{cases}$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow b$.
- $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f), x_n \neq a \text{ pre } n \in N. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \text{ To znamená } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \right]$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

- $\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} & [\text{Konečná limita } b.] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} & [\text{Nekonečná limita } \pm\infty.] \end{cases}$
- $\begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} & [\text{Limita v konečnom bode } a.] \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Limita v nevlastnom bode.} & [\text{Limita v nekonečnom bode } \pm\infty.] \end{cases}$

Z definície limity vyplýva:



Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b$.
- $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f), x_n \neq a \text{ pre } n \in N. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \text{ To znamená } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \right]$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

- $\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} & [\text{Konečná limita } b.] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} & [\text{Nekonečná limita } \pm\infty.] \end{cases}$
- $\begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} & [\text{Limita v konečnom bode } a.] \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Limita v nevlastnom bode.} & [\text{Limita v nekonečnom bode } \pm\infty.] \end{cases}$

Z definície limity vyplýva:

- Existuje najviac jedna limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b$.
- $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f), x_n \neq a \text{ pre } n \in N. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \text{ To znamená } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \right]$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

- $\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} & [\text{Konečná limita } b.] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} & [\text{Nekonečná limita } \pm\infty.] \end{cases}$
- $\begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} & [\text{Limita v konečnom bode } a.] \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Limita v nevlastnom bode.} & [\text{Limita v nekonečnom bode } \pm\infty.] \end{cases}$

Z definície limity vyplýva:

- Existuje najviac jedna limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$
- Ak existujú dve postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$

$$\begin{aligned} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} &\rightarrow a \\ \{x'_n\}_{n=1}^{\infty} &\rightarrow a \end{aligned}$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b$.
- $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f), x_n \neq a \text{ pre } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \text{ To znamená } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \right]$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

- $\begin{cases} b \in R. & \Rightarrow \text{Vlastná limita.} & [\text{Konečná limita } b.] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná limita.} & [\text{Nekonečná limita } \pm\infty.] \end{cases}$
- $\begin{cases} a \in R. & \Rightarrow \text{Limita vo vlastnom bode.} & [\text{Limita v konečnom bode } a.] \\ a = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Limita v nevlastnom bode.} & [\text{Limita v nekonečnom bode } \pm\infty.] \end{cases}$

Z definície limity vyplýva:

- Existuje najviac jedna limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$
- Ak existujú dve postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ a hodnoty $b_1 \neq b_2$ také, že:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a \text{ a } \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b_1.$$

$$\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a \text{ a } \{f(x'_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b_2.$$

Definícia limity – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu $b \in R^*$, označenie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
 - Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b$.
- $\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f), x_n \neq a \text{ pre } n \in N. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \text{ To znamená } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b. \right]$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

- $b \in R. \Rightarrow$ Vlastná limita. [Konečná limita b .]
- $b = \pm\infty. \Rightarrow$ Nevlastná limita. [Nekonečná limita $\pm\infty$.]

$\swarrow$

- $a \in R. \Rightarrow$ Limita vo vlastnom bode. [Limita v konečnom bode a .]
- $a = \pm\infty. \Rightarrow$ Limita v nevlastnom bode. [Limita v nekonečnom bode $\pm\infty$.]

Z definície limity vyplýva:

- Existuje najviac jedna limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$
- Ak existujú dve postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ a hodnoty $b_1 \neq b_2$ také, že:

$$\left. \begin{array}{l} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a \text{ a } \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b_1. \\ \{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a \text{ a } \{f(x'_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b_2. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2$$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2$$

- Označme $f(x) = x^2$.

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2$$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2$$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{a\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2$$

- Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{a\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2$$

• Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.

• Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{a\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \cdot a = a^2.$$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a \in R, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

• Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.

• Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \cdot a = a^2.$$

[Priamo dosadíme.]

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a \in \mathbb{R}, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

• Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.

• Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{a\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \cdot a = a^2.$$

[Priamo dosadíme.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$$

$[\chi(x) = 1 \text{ pre } x \in \mathbb{Q}, \chi(x) = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{I}.]$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a \in R, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

• Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.

• Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \cdot a = a^2.$$

[Priamo dosadíme.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$$

$[\chi(x) = 1 \text{ pre } x \in Q, \chi(x) = 0 \text{ pre } x \in I.]$

• Bod 0 je hromadným bodom $D(\chi) = R$.

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a \in \mathbb{R}, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

• Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.

• Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{a\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \cdot a = a^2.$$

[Priamo dosadíme.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$$

$[\chi(x) = 1 \text{ pre } x \in \mathbb{Q}, \chi(x) = 0 \text{ pre } x \in \mathbb{I}.]$

• Bod 0 je hromadným bodom $D(\chi) = \mathbb{R}$.

• Pre postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a \in R, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

• Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.

• Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \cdot a = a^2.$$

[Priamo dosadíme.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$$

$$[\chi(x) = 1 \text{ pre } x \in Q, \chi(x) = 0 \text{ pre } x \in I.]$$

• Bod 0 je hromadným bodom $D(\chi) = R$.

• Pre postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ a pre všetky $n \in N$ platí $\frac{1}{n} \neq 0$,

$$\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0, \frac{1}{n} \in Q, \text{ t. j. } \chi(\frac{1}{n}) = 1. \Rightarrow \{\chi(\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1.$$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a \in R, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

• Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.

• Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \cdot a = a^2.$$

[Priamo dosadíme.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$$

$[\chi(x) = 1 \text{ pre } x \in Q, \chi(x) = 0 \text{ pre } x \in I.]$

• Bod 0 je hromadným bodom $D(\chi) = R$.

• Pre postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ a pre všetky $n \in N$ platí $\frac{1}{n} \neq 0, \frac{\pi}{n} \neq 0$.

$$\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0, \frac{1}{n} \in Q, \text{ t. j. } \chi(\frac{1}{n}) = 1. \Rightarrow \{\chi(\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1.$$

$$\{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0, \frac{\pi}{n} \notin Q, \text{ t. j. } \chi(\frac{\pi}{n}) = 0. \Rightarrow \{\chi(\frac{\pi}{n})\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0.$$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \begin{cases} a^2 & \text{pre } a \in R, \\ \infty & \text{pre } a = \pm\infty. \end{cases}$$

• Označme $f(x) = x^2$. Každý bod $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.

• Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \cdot a = a^2.$$

[Priamo dosadíme.]

$\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ neexistuje.

$[\chi(x) = 1 \text{ pre } x \in Q, \chi(x) = 0 \text{ pre } x \in I.]$

• Bod 0 je hromadným bodom $D(\chi) = R$.

• Pre postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \{\frac{\pi}{n}\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{0\}$ a pre všetky $n \in N$ platí $\frac{1}{n} \neq 0, \frac{\pi}{n} \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0, \frac{1}{n} \in Q, \text{ t. j. } \chi\left(\frac{1}{n}\right) = 1. \Rightarrow \left\{ \chi\left(\frac{1}{n}\right) \right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 1. \\ \left\{ \frac{\pi}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0, \frac{\pi}{n} \notin Q, \text{ t. j. } \chi\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0. \Rightarrow \left\{ \chi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \chi(x) \text{ neexistuje.}$$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$.

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$,
 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0.$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0.$$

$$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

Definícia limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$.



Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.



Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$,

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.
 - Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.
- $\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.
 - Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.
- $\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\Rightarrow -|x_n| < \sin x_n < |x_n|$.

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\Rightarrow -|x_n| < \sin x_n < |x_n|$.

$$\Rightarrow -\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$$

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\Rightarrow -|x_n| < \sin x_n < |x_n|$.

$$\Rightarrow 0 = -\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0.$$

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\Rightarrow -|x_n| < \sin x_n < |x_n|$.

$\Rightarrow 0 = -\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$. $\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$.

Definícia limity – Príklady

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Označme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Označme $\alpha_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\beta_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_n \neq 0$, $\beta_n \neq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi) = 0. \\ \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} &\longrightarrow 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

- Označme $f(x) = \sin x$. Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R}$.
- Postupnosť (ľubovoľná) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ je taká, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, t. j. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

$\Rightarrow$ Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. $\Rightarrow -|x_n| < \sin x_n < |x_n|$.

$\Rightarrow 0 = -\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$. $\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$.

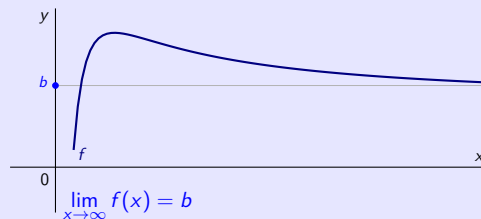
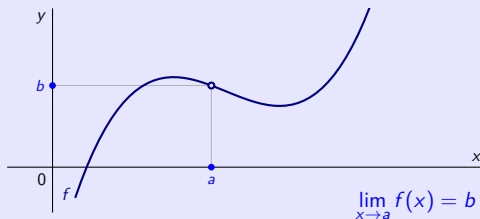
Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, a, b \in \mathbb{R}^*$ práve vtedy, ak:

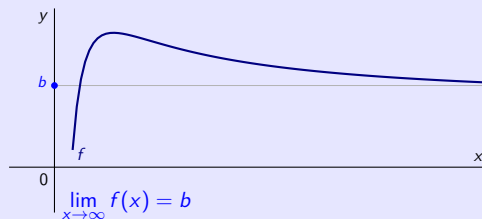
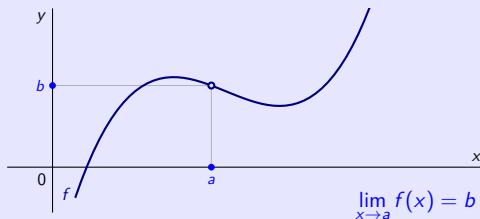


Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, a, b \in \mathbb{R}^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.

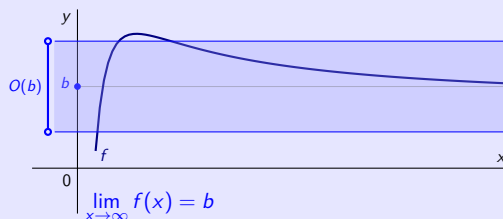
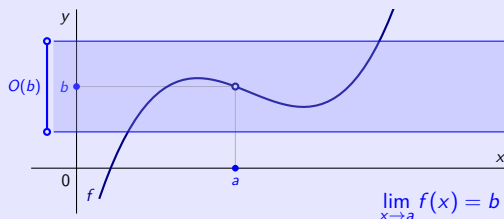


Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, a, b \in \mathbb{R}^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$

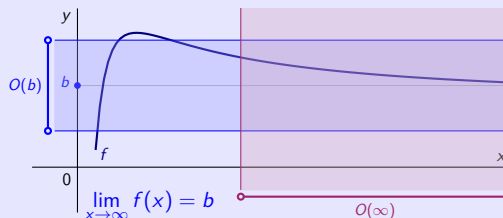
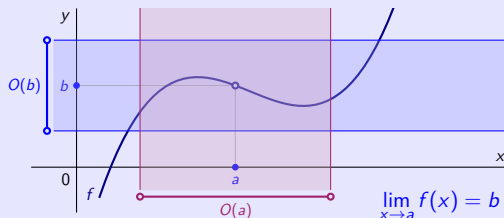


Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, a, b \in \mathbb{R}^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$

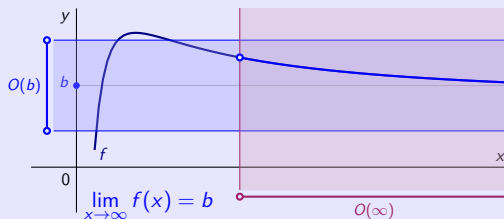
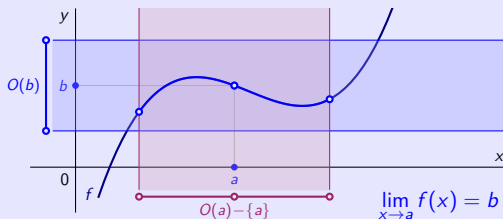


Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, a, b \in \mathbb{R}^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f), x \neq a$

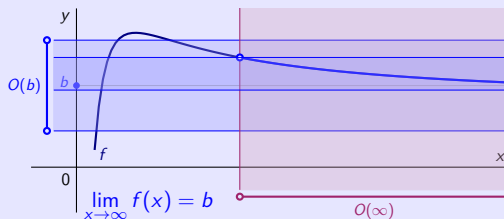
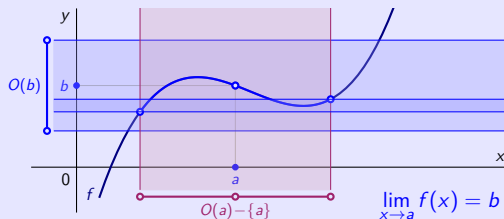


Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, a, b \in \mathbb{R}^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

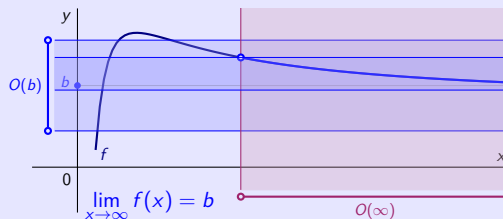
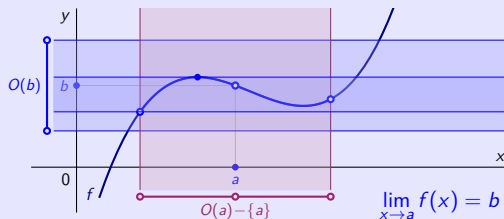


Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, a, b \in \mathbb{R}^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f), x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.



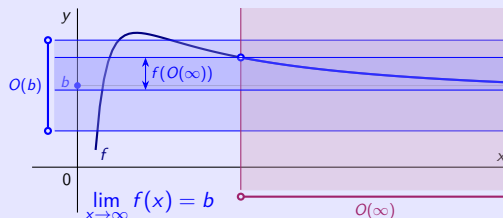
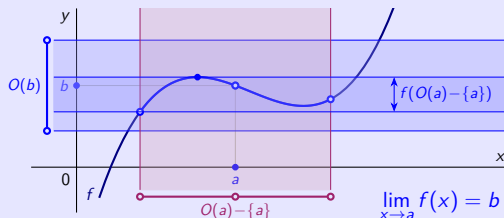
Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, a, b \in \mathbb{R}^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f), x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

[Pre všetky $O(b)$ existuje $O(a)$ také, že $f(O(a) - \{a\}) \subset O(b)$.]



Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

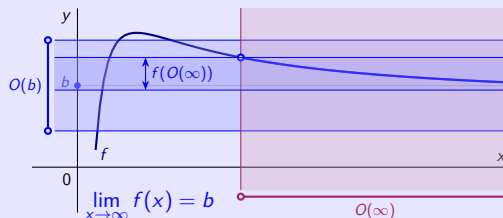
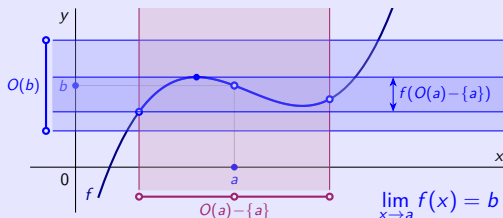
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, a, b \in \mathbb{R}^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f), x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

[Pre všetky $O(b)$ existuje $O(a)$ také, že $f(O(a) - \{a\}) \subset O(b)$.]

Ak označíme δ, ε polomery okolí $O(a), O(b)$, môžeme druhé tvrdenie symbolicky zapísať:



Definícia limity – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie f v nejakom okolí $O(a)$.

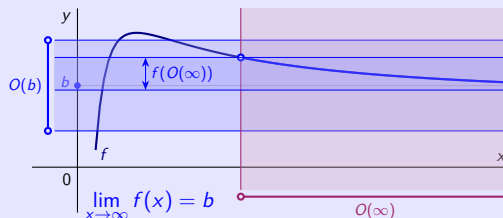
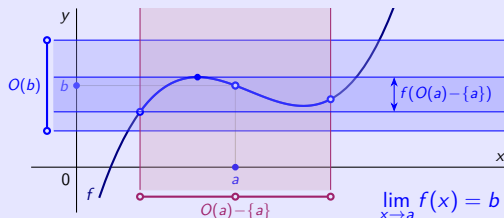
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, a, b \in \mathbb{R}^*$ práve vtedy, ak:

- a je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Ku každému okoliu $O(b)$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f), x \neq a$ platí $f(x) \in O(b)$.

[Pre všetky $O(b)$ existuje $O(a)$ také, že $f(O(a) - \{a\}) \subset O(b)$.]

Ak označíme δ, ε polomery okolí $O(a), O(b)$, môžeme druhé tvrdenie symbolicky zapísať:

- Ku každému okoliu $O_\varepsilon(b)$ existuje okolie $O_\delta(a)$ také, že pre všetky $x \in O_\delta(a) \cap D(f), x \neq a$ platí $f(x) \in O_\varepsilon(b)$.



Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $\mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $y = \frac{1}{x}$.

Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $R - \{0\}$ funkcie $y = \frac{1}{x}$.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty.$$

Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $\mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $y = \frac{1}{x}$.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty.$$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \left\{\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty.$$

Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $\mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $y = \frac{1}{x}$.

$$\left. \begin{array}{l} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty. \\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. \Rightarrow \left\{\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

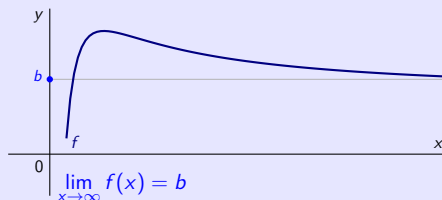
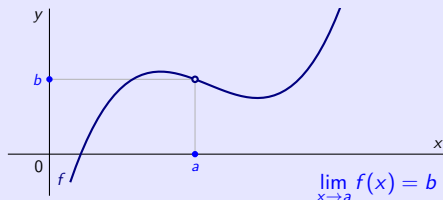
Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $R - \{0\}$ funkcie $y = \frac{1}{x}$.

$$\left. \begin{aligned} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. &\Rightarrow \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty. \\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. &\Rightarrow \left\{\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$a \in R^*, b \in R, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (konečná limita).



Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

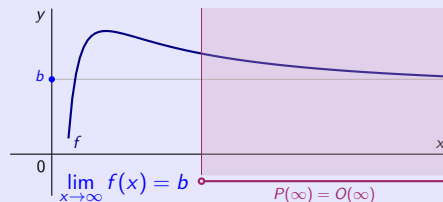
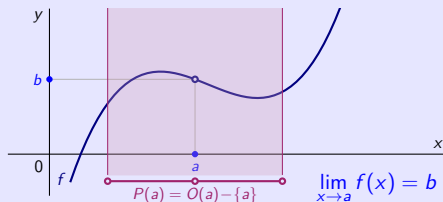
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

• Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $R - \{0\}$ funkcie $y = \frac{1}{x}$.

$$\left. \begin{aligned} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. &\Rightarrow \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty. \\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. &\Rightarrow \left\{\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$a \in R^*, b \in R, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (konečná limita).

$\Rightarrow$ • Existuje prstencové okolie $P(a) = O(a) - \{a\}$,



Definícia limity – Lokálna ohraničenosť

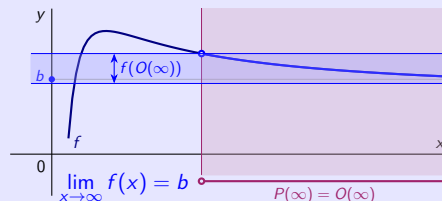
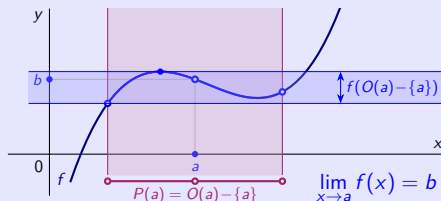
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

- Bod 0 je hromadným bodom definičného oboru $R - \{0\}$ funkcie $y = \frac{1}{x}$.

$$\left. \begin{aligned} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. &\Rightarrow \left\{\frac{1}{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \infty. \\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0. &\Rightarrow \left\{\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow -\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

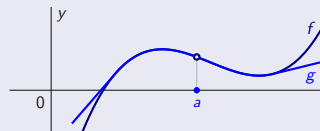
$a \in R^*, b \in R, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (konečná limita).

$\Rightarrow \bullet$ Existuje prstencové okolie $P(a) = O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.



Definícia limity – Rovnosť limít

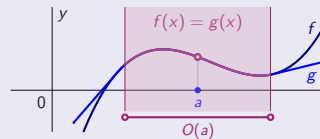
$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.



Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

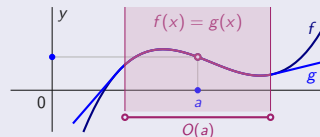


Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existuje.



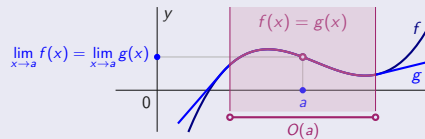
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existuje.

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



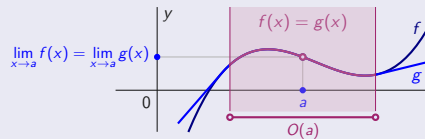
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existuje.

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



• Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

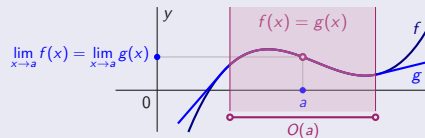
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existuje.

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



• Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

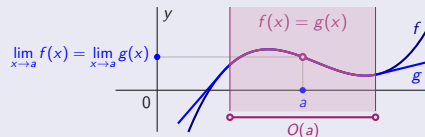
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existuje.

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



• Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

• Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 = g(x)$.

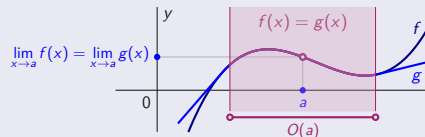
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existuje.

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



• Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

• Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 = g(x)$.

• 2 je hromadný bod $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ a tiež $D(g) = \mathbb{R}$.

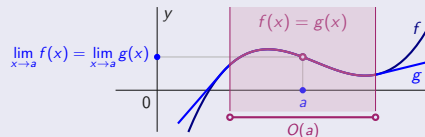
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existuje.

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



• Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

• Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 = g(x)$.

• 2 je hromadný bod $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ a tiež $D(g) = \mathbb{R}$.

• $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$

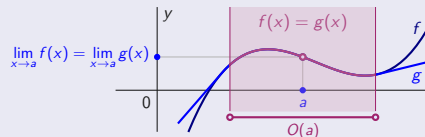
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existuje.

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



• Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

• Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 = g(x)$.

• 2 je hromadný bod $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ a tiež $D(g) = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

V praxi sa výpočet zapisuje priamo (rovnaké výrazy sa vykrátia):

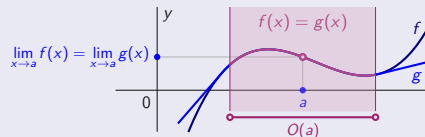
Definícia limity – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) = g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje. $\Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existuje.

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



• Tvrdenie sa pri výpočte limít využíva prakticky neustále.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

• Pre všetky $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ platí $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 = g(x)$.

• 2 je hromadný bod $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ a tiež $D(g) = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

V praxi sa výpočet zapisuje priamo (rovnaké výrazy sa vykrátia):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Definícia limity – Varíme s MA (1. recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}}$



Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right]$



Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right. \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}}$$



Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})}
 \end{aligned}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}
 \end{aligned}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0}
 \end{aligned}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.
 \end{aligned}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty.
 \end{aligned}$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty. \end{aligned}$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x - 1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty. \end{aligned}$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x - 1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x^2 - (x-1)}{x + \sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x + \sqrt{x}}.$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right. \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \text{Od tohto miesta už počítame} \\ \text{limitu úplne inej funkcie.} \end{array} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty. \end{aligned}$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x - 1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x^2 - (x-1)}{x + \sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} \Rightarrow \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \infty.$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \text{Od tohto miesta už počítame} \\ \text{limitu úplne inej funkcie.} \end{array} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty. \end{aligned}$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x - 1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x^2 - (x-1)}{x + \sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} \Rightarrow \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right. \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \text{Od tohto miesta už počítame} \\ \text{limitu úplne inej funkcie.} \end{array} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty. \end{aligned}$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x - 1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x^2 - (x-1)}{x + \sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} \Rightarrow \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x - 1 + \frac{1}{x})}{x(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x^2}})}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \text{Od tohto miesta už počítame} \\ \text{limitu úplne inej funkcie.} \end{array} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty. \end{aligned}$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x - 1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x^2 - (x-1)}{x + \sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} \Rightarrow \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x - 1 + \frac{1}{x})}{x(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x^2}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1 + \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \text{Od tohto miesta už počítame} \\ \text{limitu úplne inej funkcie.} \end{array} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty. \end{aligned}$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x - 1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x^2 - (x-1)}{x + \sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} \Rightarrow \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x - 1 + \frac{1}{x})}{x(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x^2}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1 + \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\infty - 1 + 0}{1 + \sqrt{0+0}}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \text{Od tohto miesta už počítame} \\ \text{limitu úplne inej funkcie.} \end{array} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty. \end{aligned}$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x - 1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x^2 - (x-1)}{x + \sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} \Rightarrow \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x - 1 + \frac{1}{x})}{x(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x^2}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1 + \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\infty - 1 + 0}{1 + \sqrt{0+0}} = \frac{\infty}{1}$$

Definícia limity – Varíme s MA (1.recept: Premúdrená kačka na limite)

- „Existuje okolie $O(a)$ také, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$.“ je veľmi dôležitý predpoklad

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x + \sqrt{x(1 + \frac{1}{x})}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 \\ \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \end{array} \right. \\ 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \text{Od tohto miesta už počítame} \\ \text{limitu úplne inej funkcie.} \end{array} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x}{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty. \end{aligned}$$

- Aby bol výpočet korektný, musíme ukázať, že sa uvedené limity rovnajú (napr. rovnosť funkcií v nejakom okolí).
- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je mimo realitu, pretože pre všetky $x > 1$ platí $x - 1 > 0$, $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$:

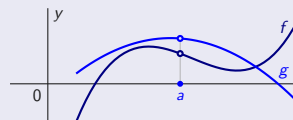
$$\frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x^2 - (x-1)}{x + \sqrt{x+1}} < \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} \Rightarrow \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + \sqrt{x}} = \infty.$$

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x - 1 + \frac{1}{x})}{x(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x^2}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1 + \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\infty - 1 + 0}{1 + \sqrt{0+0}} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

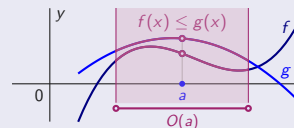


Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$,

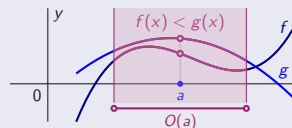


Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.



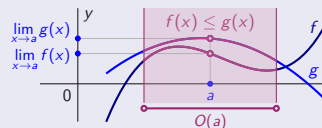
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



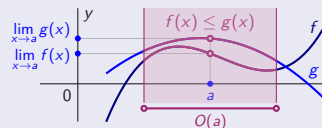
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



$\bullet$ Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.

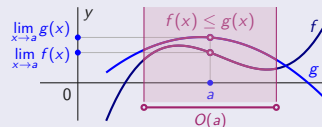
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



$\bullet$ Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.

$\bullet$ Ale pre limity platí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

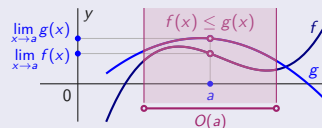
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



• Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.

• Ale pre limity platí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

[Ostrá nerovnosť $f(x) < g(x)$ nezaručuje
ostrú nerovnosť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.]

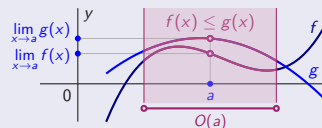
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



$\bullet$ Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.

$\bullet$ Ale pre limity platí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

[Ostrá nerovnosť $f(x) < g(x)$ nezaručuje
ostrú nerovnosť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.]

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

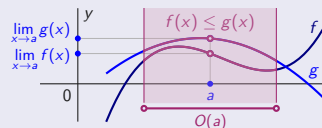
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



$\bullet$ Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.

$\bullet$ Ale pre limity platí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

[Ostrá nerovnosť $f(x) < g(x)$ nezaručuje
ostrú nerovnosť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.]

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) \leq g(x)$.

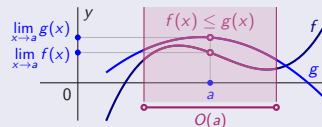
Vlastnosti limit – Nerovnosť limit

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



$\bullet$ Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.

$\bullet$ Ale pre limity platí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

[Ostrá nerovnosť $f(x) < g(x)$ nezaručuje
ostrú nerovnosť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.]

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) \leq g(x)$.

Potom platí: $\bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. $\Rightarrow \bullet$ Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

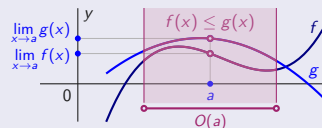
Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$

platí $f(x) \leq g(x)$, resp. $f(x) < g(x)$.

$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (pokiaľ existujú).



$\bullet$ Pre všetky $x > 0$ platí $f(x) = 0 < \frac{1}{x} = g(x)$.

$\bullet$ Ale pre limity platí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

[Ostrá nerovnosť $f(x) < g(x)$ nezaručuje
ostrú nerovnosť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.]

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

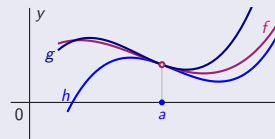
Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) \leq g(x)$.

Potom platí: $\bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty. \Rightarrow \bullet$ Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

$\bullet \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty. \Rightarrow \bullet$ Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

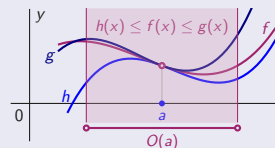


Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$

platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.



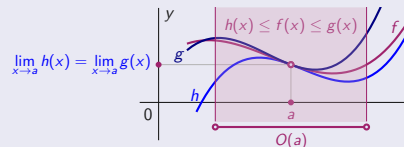
Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$

platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$.



Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

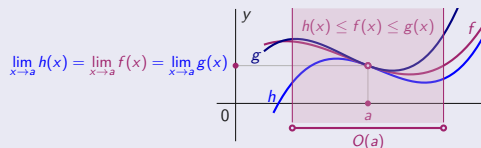
[Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$

platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

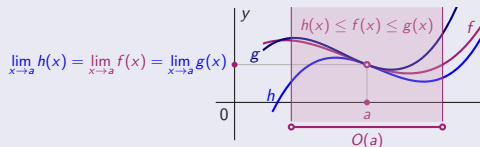
[Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$

platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

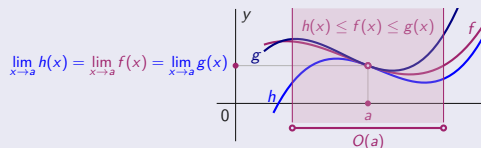
[Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$

platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

• Označme $h(x) = 0$, $x \in (0; \infty)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.

Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

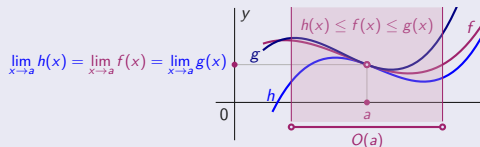
[Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$

platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

• Označme $h(x) = 0$, $x \in (0; \infty)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.

• Bod ∞ je hromadný bod množín $D(h) = D(g) = (0; \infty)$ a $D(f) = \mathbb{R}$.

Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

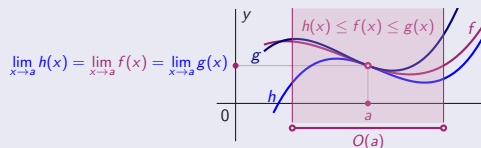
[Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$

platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

• Označme $h(x) = 0$, $x \in (0; \infty)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.

• Bod ∞ je hromadný bod množín $D(h) = D(g) = (0; \infty)$ a $D(f) = \mathbb{R}$.

• Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $0 = h(x) \leq f(x) \leq g(x) = \frac{1}{x}$.

Vlastnosti limít – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

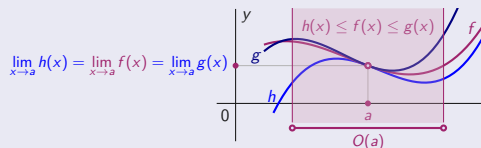
[Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$

platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

• Označme $h(x) = 0$, $x \in (0; \infty)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.

• Bod ∞ je hromadný bod množín $D(h) = D(g) = (0; \infty)$ a $D(f) = \mathbb{R}$.

• Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $0 = h(x) \leq f(x) \leq g(x) = \frac{1}{x}$.

$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Vlastnosti limit – Veta o zovretí (o dvoch policajtoch)

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$, $D(g)$ a $D(h)$.

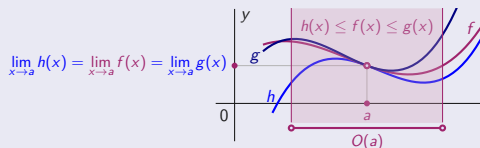
[Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, $x \neq a$

platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.



Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, ak $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ je definovaná vzťahom $y = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{x} & \text{pre } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

• Označme $h(x) = 0$, $x \in (0; \infty)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.

• Bod ∞ je hromadný bod množín $D(h) = D(g) = (0; \infty)$ a $D(f) = \mathbb{R}$.

• Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $0 = h(x) \leq f(x) \leq g(x) = \frac{1}{x}$.

$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0. \Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Vlastnosti limit – Příklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množin $D(f)$ a $D(g)$.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

Vlastnosti limit – Príklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
 - Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- } $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
 - Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $\left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
 - Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $\left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.

Vlastnosti limít – Příklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
 - Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $\left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$,

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
 - Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $$\left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Vlastnosti limít – Příklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
 - Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Existuje okolie } O(a) - \{a\}, \text{ v ktorom je funkcia } f \text{ ohraničená.} \\ \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
 - Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $$\left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
 - Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Existuje okolie } O(a) - \{a\}, \text{ v ktorom je funkcia } f \text{ ohraničená.} \\ \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Iné riešenie.

- $y = \frac{\sin x}{x} = f(x) \cdot g(x)$, $x \in (0; \infty)$, pričom $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.

Vlastnosti limít – Příklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
 - Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $$\left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Iné riešenie.

- $y = \frac{\sin x}{x} = f(x) \cdot g(x)$, $x \in (0; \infty)$, pričom $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je ohraničená.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
 - Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $$\left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Iné riešenie.

- $y = \frac{\sin x}{x} = f(x) \cdot g(x)$, $x \in (0; \infty)$, pričom $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je ohraničená.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Vlastnosti limít – Príklad

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existuje okolie $O(a) - \{a\}$, v ktorom je funkcia f ohraničená.
 - Existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $$\left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

- Bod ∞ je hromadný bod definičných oborov funkcií $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0; \infty)$ a $y = \pm \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
- Pre všetky $x \in (0; \infty)$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, t. j. $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Iné riešenie.

- $y = \frac{\sin x}{x} = f(x) \cdot g(x)$, $x \in (0; \infty)$, pričom $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$.
 - Funkcia $f(x) = \sin x$ je ohraničená.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.
- $$\left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

pre všetky $a \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$.

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x < n+1$.

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow$ • $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

$$a = 0.$$

$$a \neq 0.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow$ • $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

$$a = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1 = e^0.$$

[Splnené triviálne.]

$$a \neq 0.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow$ • $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

$$a = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1 = e^0.$$

[Splnené triviálne.]

$$a \neq 0. \Rightarrow \bullet a > 0. \Rightarrow 0 < \frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{x} \leq \frac{a}{n}.$$

$$\bullet a < 0. \Rightarrow 0 > \frac{a}{n+1} \geq \frac{a}{x} \geq \frac{a}{n}.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow$ • $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

$$a = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1 = e^0.$$

[Splnené triviálne.]

$$a \neq 0. \Rightarrow \bullet a > 0. \Rightarrow 0 < \frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{x} \leq \frac{a}{n}. \Rightarrow 1 < 1 + \frac{a}{n+1} \leq 1 + \frac{a}{x} \leq 1 + \frac{a}{n} \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet a < 0. \Rightarrow 0 > \frac{a}{n+1} \geq \frac{a}{x} \geq \frac{a}{n}.$$

$$\Rightarrow 1 > 1 + \frac{a}{n+1} \geq 1 + \frac{a}{x} \geq 1 + \frac{a}{n} \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}, n \geq -a.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow$ • $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

$$a = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1 = e^0.$$

[Splnené triviálne.]

$$a \neq 0. \Rightarrow \bullet a > 0. \Rightarrow 0 < \frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{x} \leq \frac{a}{n}. \Rightarrow 1 < 1 + \frac{a}{n+1} \leq 1 + \frac{a}{x} \leq 1 + \frac{a}{n} \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1}.$$

$$\bullet a < 0. \Rightarrow 0 > \frac{a}{n+1} \geq \frac{a}{x} \geq \frac{a}{n}.$$

$$\Rightarrow 1 > 1 + \frac{a}{n+1} \geq 1 + \frac{a}{x} \geq 1 + \frac{a}{n} \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}, n \geq -a.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow$ • $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

$$a = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1 = e^0.$$

[Splnené triviálne.]

$$a \neq 0. \Rightarrow \bullet a > 0. \Rightarrow 0 < \frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{x} \leq \frac{a}{n}. \Rightarrow 1 < 1 + \frac{a}{n+1} \leq 1 + \frac{a}{x} \leq 1 + \frac{a}{n} \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1}.$$

$$\bullet a < 0. \Rightarrow 0 > \frac{a}{n+1} \geq \frac{a}{x} \geq \frac{a}{n}.$$

$$\Rightarrow 1 > 1 + \frac{a}{n+1} \geq 1 + \frac{a}{x} \geq 1 + \frac{a}{n} \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}, n \geq -a.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n.$$

Nasledujúce limity sú súčasne aj limitami postupností.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1}$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow$ • $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

$$a = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1 = e^0.$$

[Splnené triviálne.]

$$a \neq 0. \Rightarrow \bullet a > 0. \Rightarrow 0 < \frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{x} \leq \frac{a}{n}. \Rightarrow 1 < 1 + \frac{a}{n+1} \leq 1 + \frac{a}{x} \leq 1 + \frac{a}{n} \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1}.$$

$$\bullet a < 0. \Rightarrow 0 > \frac{a}{n+1} \geq \frac{a}{x} \geq \frac{a}{n}.$$

$$\Rightarrow 1 > 1 + \frac{a}{n+1} \geq 1 + \frac{a}{x} \geq 1 + \frac{a}{n} \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}, n \geq -a.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n.$$

Nasledujúce limity sú súčasne aj limitami postupností.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{-1}\right]$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{a}{n}\right)\right]$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow$ • $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

$$a = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1 = e^0.$$

[Splnené triviálne.]

$$a \neq 0. \Rightarrow \bullet a > 0. \Rightarrow 0 < \frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{x} \leq \frac{a}{n}. \Rightarrow 1 < 1 + \frac{a}{n+1} \leq 1 + \frac{a}{x} \leq 1 + \frac{a}{n} \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1}.$$

$$\bullet a < 0. \Rightarrow 0 > \frac{a}{n+1} \geq \frac{a}{x} \geq \frac{a}{n}.$$

$$\Rightarrow 1 > 1 + \frac{a}{n+1} \geq 1 + \frac{a}{x} \geq 1 + \frac{a}{n} \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}, n \geq -a.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n.$$

Nasledujúce limity sú súčasne aj limitami postupností.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{-1}\right] = e^a \cdot (1+0)^{-1} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{a}{n}\right)\right] = e^a \cdot (1+0) = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow$ • $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

$$a = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1 = e^0.$$

[Splnené triviálne.]

$$a \neq 0. \Rightarrow \bullet a > 0. \Rightarrow 0 < \frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{x} \leq \frac{a}{n}. \Rightarrow 1 < 1 + \frac{a}{n+1} \leq 1 + \frac{a}{x} \leq 1 + \frac{a}{n} \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1}.$$

$$\bullet a < 0. \Rightarrow 0 > \frac{a}{n+1} \geq \frac{a}{x} \geq \frac{a}{n}.$$

$$\Rightarrow 1 > 1 + \frac{a}{n+1} \geq 1 + \frac{a}{x} \geq 1 + \frac{a}{n} \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}, n \geq -a.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n.$$

Nasledujúce limity sú súčasne aj limitami postupností.

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{-1}\right] = e^a \cdot (1+0)^{-1} = e^a \cdot 1 = e^a. \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{a}{n}\right)\right] = e^a \cdot (1+0) = e^a \cdot 1 = e^a. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^a \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq e^a.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \text{ pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow$ • $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

$$a = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1 = e^0.$$

[Splnené triviálne.]

$$a \neq 0. \Rightarrow \bullet a > 0. \Rightarrow 0 < \frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{x} \leq \frac{a}{n}. \Rightarrow 1 < 1 + \frac{a}{n+1} \leq 1 + \frac{a}{x} \leq 1 + \frac{a}{n} \text{ pre všetky } n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1}.$$

$$\bullet a < 0. \Rightarrow 0 > \frac{a}{n+1} \geq \frac{a}{x} \geq \frac{a}{n}.$$

$$\Rightarrow 1 > 1 + \frac{a}{n+1} \geq 1 + \frac{a}{x} \geq 1 + \frac{a}{n} \geq 0 \text{ pre všetky } n \in \mathbb{N}, n \geq -a.$$

$$\Rightarrow \bullet \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^x \leq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n.$$

Nasledujúce limity sú súčasne aj limitami postupností.

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{-1}\right] = e^a \cdot (1+0)^{-1} = e^a \cdot 1 = e^a. \\ \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{a}{n}\right)\right] = e^a \cdot (1+0) = e^a \cdot 1 = e^a. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^a \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \leq e^a. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Vlastnosti limít – Příklad

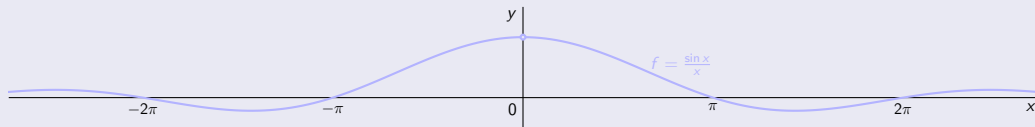
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

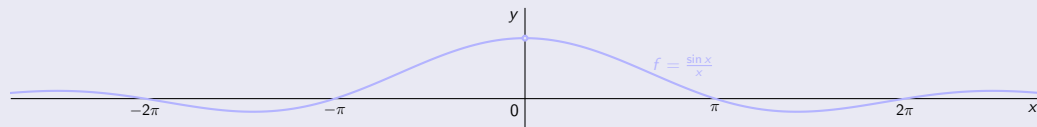
- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

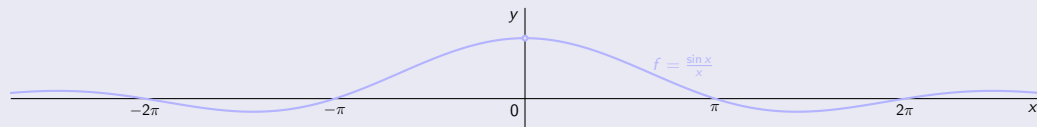
- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.
- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$.



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.
- Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.



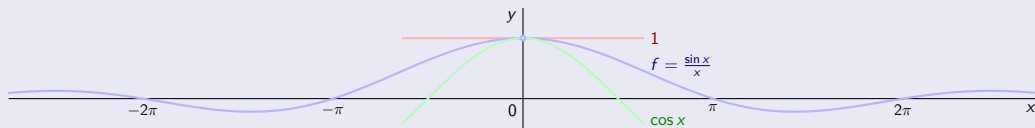
Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

• Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.

• Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$. $\Rightarrow$

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

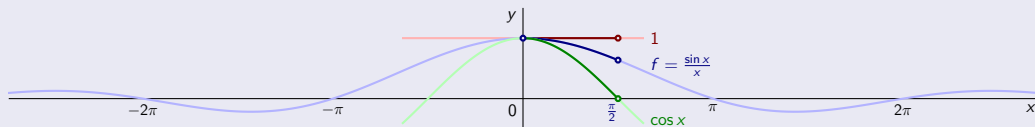
• Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.

• Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$. $\Rightarrow$

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

$\Rightarrow$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

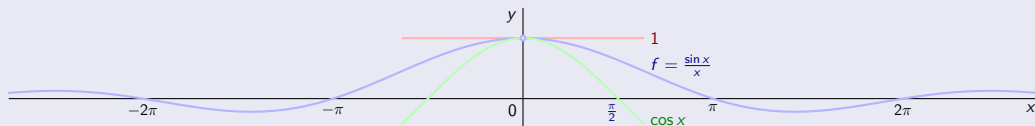


Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.

- Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$.



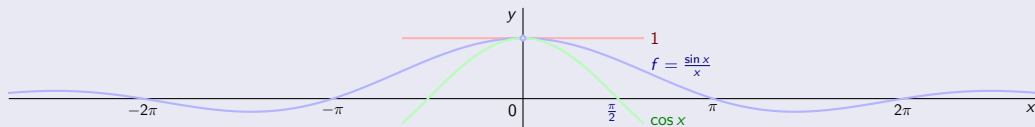
Vlastnosti limít – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.



- Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

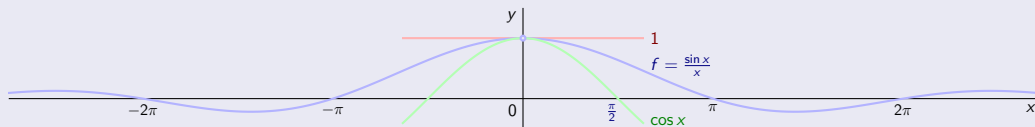


Vlastnosti limit – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.

- Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$. $\Rightarrow$
- $$1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$



Vlastnosti limit – Příklad

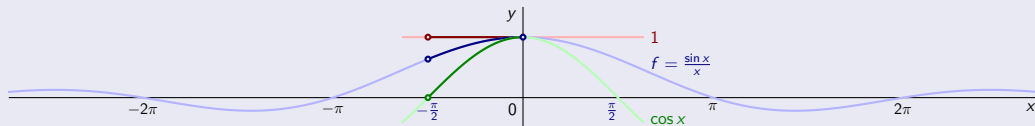
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

- Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.

- Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$. $\Rightarrow$

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

 $\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$



Vlastnosti limit – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

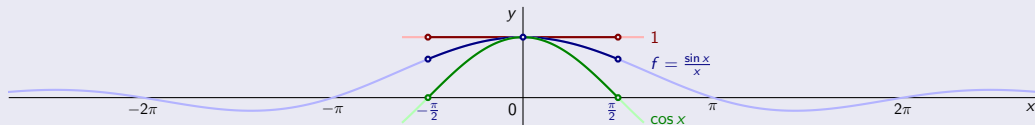
• Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.

• Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

• Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

$$\Rightarrow \text{Pre všetky } x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), x \neq 0 \text{ platí } 1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$



Vlastnosti limit – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

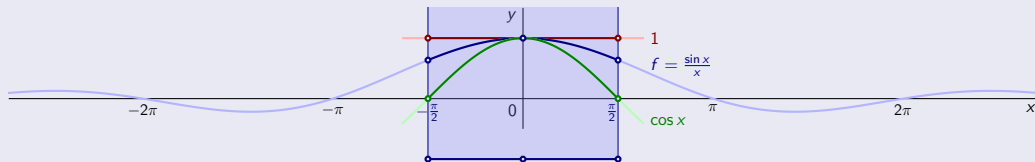
• Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.

• Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

• Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

$$\Rightarrow \text{Pre všetky } x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), x \neq 0 \text{ platí } 1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

$\Rightarrow$ • Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), x \neq 0$ platí $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

• Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.

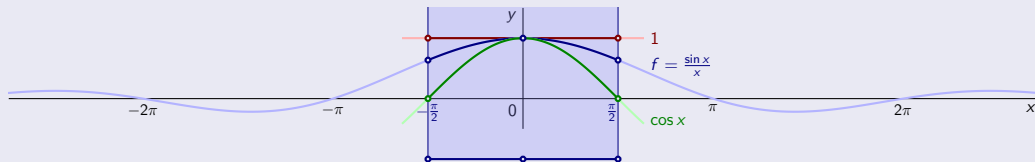
• Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

• Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

$$\Rightarrow \text{Pre všetky } x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), x \neq 0 \text{ platí } 1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

$$\Rightarrow \bullet \text{ Pre všetky } x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), x \neq 0 \text{ platí } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

$$\Rightarrow \bullet 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \text{ (veta o zovretí).}$$



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

• Bod 0 je hromadným bodom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ funkcie $f: y = \frac{\sin x}{x}$.

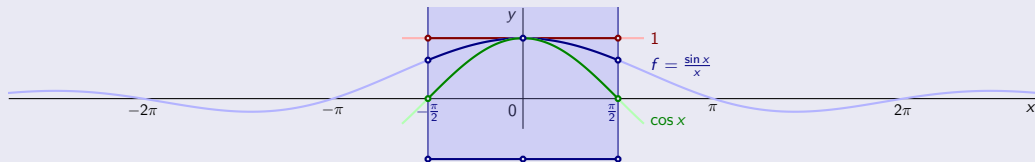
• Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

• Pre všetky $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$ platí $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$. $\Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

$$\Rightarrow \text{Pre všetky } x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), x \neq 0 \text{ platí } 1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

$$\Rightarrow \bullet \text{ Pre všetky } x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), x \neq 0 \text{ platí } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

$$\Rightarrow \bullet 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \text{ (veta o zovretí). } \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Vlastnosti limít – Nerovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) < g(x)$.

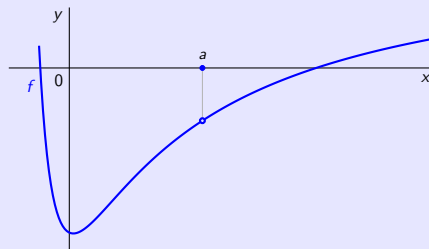
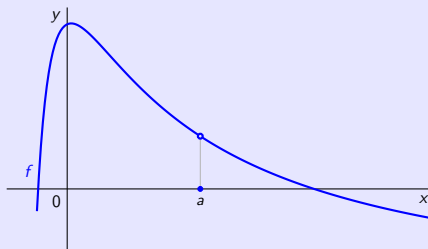
Vlastnosti limit – Nerovnosť limit

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

• Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) < g(x)$.

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.



Vlastnosti limit – Nerovnosť limit

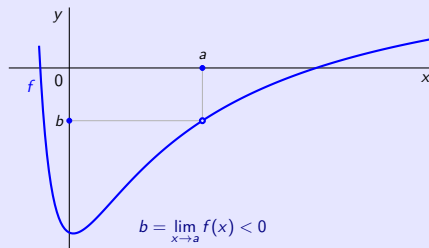
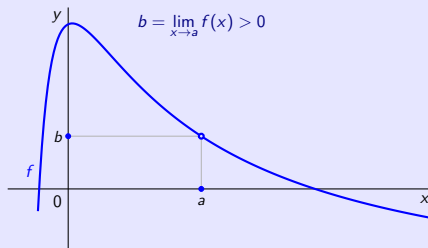
$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

- Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

$\Rightarrow$ Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) < g(x)$.

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0$.



Vlastnosti limit – Nerovnosť limit

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$.

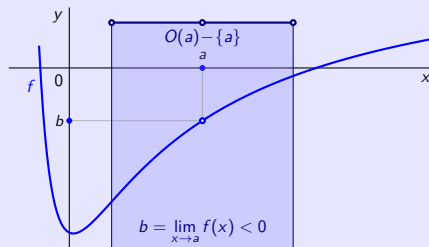
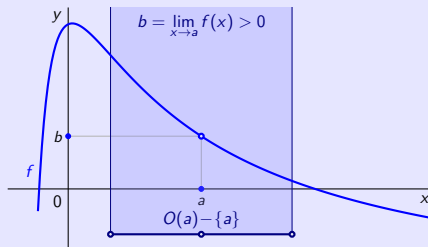
- Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

$\Rightarrow$ Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) < g(x)$.

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0 \Rightarrow$ Existuje okolie $O(a)$

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0 \Rightarrow$ Existuje okolie $O(a)$



Vlastnosti limit – Nerovnost limit

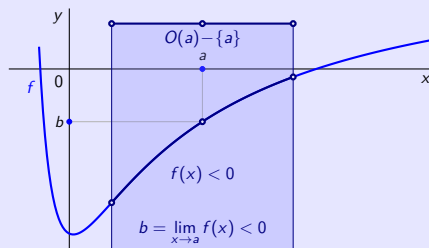
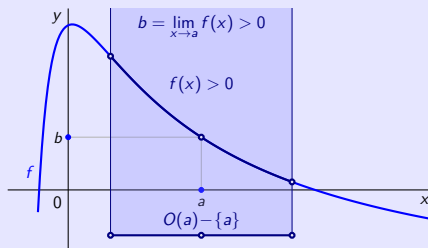
$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množin $D(f)$ a $D(g)$.

- Existují limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

$\Rightarrow$ Existuje okolie $O(a)$ také, že pro všechny $x \in O(a) \cap D(f) \cap D(g)$, $x \neq a$ platí $f(x) < g(x)$.

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$. $\Rightarrow$ Existuje okolie $O(a)$ také, že pro všechny $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0$. $\Rightarrow$ Existuje okolie $O(a)$ také, že pro všechny $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) < 0$.



Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$,

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$,

Potom platí: $\bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in \mathbb{R}$ je reálne číslo.

Potom platí:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0. \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - b| = 0.$

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in \mathbb{R}$ je reálne číslo.

- Potom platí:
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Leftrightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - b| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|.$

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in \mathbb{R}$ je reálne číslo.

- Potom platí:
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Leftrightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - b| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|.$

[Opačné tvrdenie neplatí.]

$$f(x) = 1 - x.$$

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in \mathbb{R}$ je reálne číslo.

- Potom platí:
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0. \Leftrightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Leftrightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - b| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|.$

[Opačné tvrdenie neplatí.]

$$f(x) = 1 - x. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 2} |1 - x| = 1. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (1 - x) = -1.$$

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in \mathbb{R}$ je reálne číslo.

- Potom platí:
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - b| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|.$

[Opačné tvrdenie neplatí.]

$$f(x) = 1 - x. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 2} |1 - x| = 1. \bullet \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (1 - x) = -1.$$

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in \mathbb{R}$ je reálne číslo.

- Potom platí:
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - b| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|.$

[Opačné tvrdenie neplatí.]

$$f(x) = 1 - x. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 2} |1 - x| = 1. \bullet \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (1 - x) = -1.$$

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) > 0$.

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) < 0$.

Vlastnosti limít – Rovnosť limít

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$, $b \in \mathbb{R}$ je reálne číslo.

- Potom platí:
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - b| = 0.$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|.$

[Opačné tvrdenie neplatí.]

$$f(x) = 1 - x. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 2} |1 - x| = 1. \bullet \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (1 - x) = -1.$$

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) > 0$.

- Potom platí:
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty.$

$a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) < 0$.

- Potom platí:
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov ❶

- ❶ $g(b) = c$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov ❶ alebo ❷.

- ❶ $g(b) = c$.
- ❷ Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g(f)$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov ❶ alebo ❷.

- ❶ $g(b) = c$.
- ❷ Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c.$$

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g(f)$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov ① alebo ②.

- ① $g(b) = c$.
- ② Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c.$$

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow \bullet$ Vykonávame substitúciu $u = f(x)$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g \circ f$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov A alebo B.

- $g(b) = c$.
- Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c.$$

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow \bullet$ **Vykonávame substitúciu** $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b .]

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g(f)$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov ❶ alebo ❷.

- ❶ $g(b) = c$.
- ❷ Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c.$$

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow \bullet$ **Vykonávame substitúciu** $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b .]

- Predchádzajúce pravidlo v mnohých prípadoch zjednodušuje výpočet limít.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g \circ f$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov ❶ alebo ❷.

- ❶ $g(b) = c$.
- ❷ Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c.$$

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow \bullet$ **Vykonávame substitúciu** $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b .]

- Predchádzajúce pravidlo v mnohých prípadoch zjednodušuje výpočet limít.

- Ak platí predpoklad ❶, potom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c = g(b) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g \circ f$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov ❶ alebo ❷.

- ❶ $g(b) = c$.
- ❷ Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c.$$

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow \bullet$ **Vykonávame substitúciu** $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b .]

- Predchádzajúce pravidlo v mnohých prípadoch zjednodušuje výpočet limít.

- Ak platí predpoklad ❶, potom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c = g(b) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$.

- Predpoklad ❷ je splnený napr., ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ a funkcia f je prostá v nejakom okolí $O(a)$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g \circ f$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov ❶ alebo ❷.

- ❶ $g(b) = c$.
- ❷ Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c.$$

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow \bullet$ **Vykonávame substitúciu** $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b .]

- Predchádzajúce pravidlo v mnohých prípadoch zjednodušuje výpočet limít.
- Ak platí predpoklad ❶, potom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c = g(b) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$.
- Predpoklad ❷ je splnený napr., ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ a funkcia f je prostá v nejakom okolí $O(a)$.
- Substitúcia $x = h + a$ pri výpočte $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Vlastnosti limít – Limita zloženej funkcie

Funkcie f, g , pričom $H(f) \subset D(g)$. Zložená funkcia $F = g \circ f$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ a existuje $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$, pričom $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Platí aspoň jeden z predpokladov ❶ alebo ❷.

- ❶ $g(b) = c$.
- ❷ Existuje okolie $O(a)$ tak, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ platí $f(x) \neq b$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c.$$

Položíme $u = f(x)$. $\Rightarrow \bullet$ **Vykonávame substitúciu** $u = f(x)$.

[Výpočet pôvodnej limity funkcie $f(x)$ v bode a prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b .]

- Predchádzajúce pravidlo v mnohých prípadoch zjednodušuje výpočet limít.
- Ak platí predpoklad ❶, potom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = c = g(b) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$.
- Predpoklad ❷ je splnený napr., ak existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ a funkcia f je prostá v nejakom okolí $O(a)$.
- Substitúcia $x = h + a$ pri výpočte $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. $\Rightarrow \bullet h \rightarrow 0$ a platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(h + a)$.

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

- $= \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

- $= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right)$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x + 1)$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \right)$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x + 1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \right) = \ln 2.$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x + 1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x+1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x+1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \rightarrow 2 \\ z = x - 2 & z \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x+1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = x - 2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 2 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x + 1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = x - 2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 2 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x+1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = x - 2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 2 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x + 1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = x - 2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 2 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ x = z^3 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 1 \\ z \rightarrow 1 \end{array} \right]$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x+1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = x - 2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 2 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ x = z^3 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 1 \\ z \rightarrow 1 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3-1}{\sqrt[3]{z^3}-1}$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x+1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = x - 2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 2 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ x = z^3 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 1 \\ z \rightarrow 1 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3-1}{\sqrt[3]{z^3}-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3-1}{z-1}$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x+1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

$$\bullet = \left[\text{Subst.} \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 2 \\ z = x - 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$\bullet = \left[\text{Subst.} \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 1 \\ x = z^3 \end{array} \right| \begin{array}{l} z \rightarrow 1 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3-1}{\sqrt[3]{z^3}-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3-1}{z-1} = \left[a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \text{ pre } a, b \in \mathbb{R} \right]$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x+1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

$$\bullet = \left[\text{Subst.} \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 2 \\ z = x - 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$\bullet = \left[\text{Subst.} \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 1 \\ x = z^3 \end{array} \right| \begin{array}{l} z \rightarrow 1 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3-1}{\sqrt[3]{z^3}-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3-1}{z-1} = \left[a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \text{ pre } a, b \in \mathbb{R} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \cdot (z^2 + z + 1)}{z-1}$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x + 1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} & x \rightarrow 2 \\ z = x - 2 & z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} & x \rightarrow 1 \\ x = z^3 & z \rightarrow 1 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 - 1}{\sqrt[3]{z^3} - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 - 1}{z - 1} = \left[a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \text{ pre } a, b \in \mathbb{R} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \cdot (z^2 + z + 1)}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z^2 + z + 1)$$

Vlastnosti limít – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln 2.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \ln (x+1) = \ln 2.$$

$$\bullet = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \right) = \ln 2.$$

[Využili sme rovnosť $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ z pravidla z predchádzajúcej strany.]

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} & x \rightarrow 2 \\ z = x - 2 & z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = 3.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} & x \rightarrow 1 \\ x = z^3 & z \rightarrow 1 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3-1}{\sqrt[3]{z^3}-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3-1}{z-1} = \left[a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \text{ pre } a, b \in \mathbb{R} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \cdot (z^2 + z + 1)}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z^2 + z + 1) = 3. \end{aligned}$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje.]

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty - \infty$$

[Postup nemôžeme použiť,

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

- $$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

- $$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\infty + \infty} = \frac{1}{\infty} \end{aligned}$$

Vlastnosti limít – Základné pravidlá pre výpočet limít

$a \in R^*$ je hromadný bod množín $D(f)$ a $D(g)$, $r \in R$ je reálne číslo.

Existujú limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, kde $b, c \in R^*$.

$\Rightarrow$ (Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel.)

- $\lim_{x \rightarrow a} [r \cdot f(x)] = r \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = r \cdot b.$
- $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{c}.$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$

[Ak niektorý z výrazov nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. $\Rightarrow$ Limitu musíme vypočítať iným spôsobom.]

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty - \infty = ?.$

[Postup nemôžeme použiť, pretože $\infty - \infty$ nevieme vypočítať.]

- $$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\infty + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$.



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x$.



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x$.

$$a \geq 0.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x$.

$$a \geq 0. \Rightarrow$$

- $a > 1$.

- $a = 1$.

- $a < 1$.

- $a = 0$.

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x$.

$$a \geq 0. \Rightarrow \bullet a > 1. \Rightarrow 1 < a^n \leq a^x.$$

$$\bullet a = 1.$$

$$\bullet a < 1.$$

$$\bullet a = 0.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$a \geq 0. \Rightarrow \bullet a > 1. \Rightarrow 1 < a^n \leq a^x. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \leq \lim_{x \rightarrow \infty} a^x.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$\bullet a = 1.$$

$$\bullet a < 1.$$

$$\bullet a = 0.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$a \geq 0. \Rightarrow \bullet a > 1. \Rightarrow 1 < a^n \leq a^x. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \leq \lim_{x \rightarrow \infty} a^x. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$\bullet a = 1.$$

$$\bullet a < 1.$$

$$\bullet a = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty). \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$a \geq 0. \Rightarrow \bullet a > 1. \Rightarrow 1 < a^n \leq a^x. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \leq \lim_{x \rightarrow \infty} a^x. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$\bullet a = 1. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

[Splnené triviálne.]

$$\bullet a < 1.$$

$$\bullet a = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{pre } a = 1, \\ \infty & \text{pre } a \in (1; \infty). \end{cases}$$

Vlastnosti limit – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$a \geq 0. \Rightarrow \bullet a > 1. \Rightarrow 1 < a^n \leq a^x. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \leq \lim_{x \rightarrow \infty} a^x. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$\bullet a = 1. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

[Splnené triviálne.]

$$\bullet a < 1. \Rightarrow \text{Označme } b = \frac{1}{a} > 1.$$

$$\bullet a = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{pre } a = 1, \\ \infty & \text{pre } a \in (1; \infty). \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$a \geq 0. \Rightarrow \bullet a > 1. \Rightarrow 1 < a^n \leq a^x. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \leq \lim_{x \rightarrow \infty} a^x. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$\bullet a = 1. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

[Splnené triviálne.]

$$\bullet a < 1. \Rightarrow \text{Označme } b = \frac{1}{a} > 1. \Rightarrow a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}.$$

$$\bullet a = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} 1 & \text{pre } a = 1, \\ \infty & \text{pre } a \in (1; \infty). \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$a \geq 0. \Rightarrow \bullet a > 1. \Rightarrow 1 < a^n \leq a^x. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \leq \lim_{x \rightarrow \infty} a^x. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$\bullet a = 1. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

[Splnené triviálne.]

$$\bullet a < 1. \Rightarrow \text{Označme } b = \frac{1}{a} > 1. \Rightarrow a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} b^x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\bullet a = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{pre } a \in (0; 1), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ \infty & \text{pre } a \in (1; \infty). \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \text{ pre } a \geq 0.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$a \geq 0. \Rightarrow \bullet a > 1. \Rightarrow 1 < a^n \leq a^x. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \leq \lim_{x \rightarrow \infty} a^x. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$\bullet a = 1. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

[Splnené triviálne.]

$$\bullet a < 1. \Rightarrow \text{Označme } b = \frac{1}{a} > 1. \Rightarrow a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x}.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} b^x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\bullet a = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 0^x = 0.$$

[Splnené triviálne.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{pre } a \in \langle 0; 1 \rangle, \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ \infty & \text{pre } a \in (1; \infty). \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \text{ pre } q \in \mathbb{R}.$$



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \text{ pre } q \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$.



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \text{ pre } q \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x$.



Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \text{ pre } q \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x$.

$$q > 0.$$



$$q = 0.$$

$$q < 0.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \text{ pre } q \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow$ • $n \in \mathbb{N}$. • $1 \leq n \leq x$.

$$q > 0. \Rightarrow 1 < n^q \leq x^q.$$



$$q = 0.$$

$$q < 0.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \text{ pre } q \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$q > 0. \Rightarrow 1 < n^q \leq x^q. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} n^q \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^q.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$q = 0.$$

$$q < 0.$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \text{ pre } q \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$q > 0. \Rightarrow 1 < n^q \leq x^q. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} n^q \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^q. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \infty.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$q = 0.$$

$$q < 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \text{ pre } q \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$q > 0. \Rightarrow 1 < n^q \leq x^q. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} n^q \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^q. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \infty.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$q = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \lim_{x \rightarrow \infty} x^0 = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

[Splnené triviálne.]

$$q < 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \text{ pre } q \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$q > 0. \Rightarrow 1 < n^q \leq x^q. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} n^q \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^q. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \infty.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$q = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \lim_{x \rightarrow \infty} x^0 = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

[Splnené triviálne.]

$$q < 0. \Rightarrow \text{Označme } r = -q > 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \text{ pre } q \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$q > 0. \Rightarrow 1 < n^q \leq x^q. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} n^q \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^q. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \infty.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$q = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \lim_{x \rightarrow \infty} x^0 = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

[Splnené triviálne.]

$$q < 0. \Rightarrow \text{Označme } r = -q > 0. \Rightarrow x^q = x^{-r} = \frac{1}{x^r}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$$

Vlastnosti limít – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^q \text{ pre } q \in \mathbb{R}.$$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor$. $\Rightarrow \bullet n \in \mathbb{N}$. $\bullet 1 \leq n \leq x$.

$$q > 0. \Rightarrow 1 < n^q \leq x^q. \Rightarrow \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} n^q \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^q. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \infty.$$

[Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n^q = \infty$ je súčasne aj limitou postupnosti.]

$$q = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \lim_{x \rightarrow \infty} x^0 = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

[Splnené triviálne.]

$$q < 0. \Rightarrow \text{Označme } r = -q > 0. \Rightarrow x^q = x^{-r} = \frac{1}{x^r}.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} x^r} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$$

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje)

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pre } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1$, $x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0$, $x \in I$.

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1$, $x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0$, $x \in I$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ neexistuje,

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1$, $x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0$, $x \in I$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1$, $x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0$, $x \in I$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I .]

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1$, $x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0$, $x \in I$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I .]

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$,

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1$, $x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0$, $x \in I$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I .]

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$,

ak:

- $\lim_{x \rightarrow a} f|_A(x) = b$

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1$, $x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0$, $x \in I$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I .]

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$,

ak:

- $\lim_{x \rightarrow a} f|_A(x) = b$ (v bode a má limitu rovnú b zúženie $f|_A$),

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1$, $x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0$, $x \in I$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I .]

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$,

ak:

- $\lim_{x \rightarrow a} f|_A(x) = b$ (v bode a má limitu rovnú b zúženie $f|_A$), t. j. ak:
- a je hromadným bodom množiny A .

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1$, $x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0$, $x \in I$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I .]

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$,

ak:

- $\lim_{x \rightarrow a} f|_A(x) = b$ (v bode a má limitu rovnú b zúženie $f|_A$), t. j. ak:

- a je hromadným bodom množiny A .

- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b$.

Jednostranné limity – Limita vzhľadom na množinu

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (pokiaľ existuje) je definovaná na množine $D(f)$, resp. v okolí $O(a) \cap D(f) - \{a\}$.

Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in Q, \\ 0 & \text{pre } x \in I. \end{cases}$

Označme zúženia $f(x) = \chi|_Q(x) = 1$, $x \in Q$ a $g(x) = \chi|_I(x) = 0$, $x \in I$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ neexistuje, ale existujú limity zúžených funkcií (reštrikcií):
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

[Existujú limity funkcií f a g zúžených na množiny Q a I .]

Funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$,

označenie $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$, resp. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $x \in A$, ak:

- $\lim_{x \rightarrow a} f|_A(x) = b$ (v bode a má limitu rovnú b zúženie $f|_A$), t. j. ak:
- a je hromadným bodom množiny A .
- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$.

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom množiny A .

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}^*$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny A .

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny A .

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f .

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom množiny A .

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f .

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}^*$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny A .

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f .

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A \subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny A .

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f .

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A \subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$.

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom množiny A .

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f .

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A \subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$.

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ neexistuje.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny A .

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f .

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A \subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$.

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ neexistuje.

[Pre postupnosť $\{2n\pi\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty$ platí $\{\sin(2n\pi)\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$.
Pre postupnosť $\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty$ platí $\{\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.]

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny A .

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f .

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A \subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$.

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ neexistuje.

[Pre postupnosť $\{2n\pi\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty$ platí $\{\sin(2n\pi)\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$.]

- $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in A}} \sin x = 0$ pre $A = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodom množiny A .

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f .

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A \subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$.

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ neexistuje.

[Pre postupnosť $\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty$ platí $\{\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.]

- $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in A}} \sin x = 0$ pre $A = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in A}} \sin x = 1$ pre $A = \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Jednostranné limity – Vlastnosti limity vzhľadom na množinu

- Pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $a \in R^*$ (limitu funkcie v danom bode a vzhľadom na množinu)

platia všetky pravidlá, ktoré platia pre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limitu funkcie v danom bode a).

Funkcia f . Množina $A \subset D(f)$. Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny A .

- Existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$ (limita funkcie v bode a vzhľadom na množinu A).

Funkcia f .

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $b \in R^*$. $\Leftrightarrow$ • Pre každú množinu $A \subset D(f)$ s hromadným bodom a platí $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$.

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ neexistuje.

[Pre postupnosť $\{2n\pi\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty$ platí $\{\sin(2n\pi)\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$.
Pre postupnosť $\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty$ platí $\{\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 1$.]

- $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in A}} \sin x = 0$ pre $A = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in A}} \sin x = 1$ pre $A = \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme: • $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x < a\}$,

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme: • $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x < a\},$

- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A; x > a\}.$

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).

- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f) \cap (a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x < a\},$

- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A; x > a\}.$

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).

- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f) \cap (a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R},$

Limitou sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R},$

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x < a\},$

- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A; x > a\}.$

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).

- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f) \cap (a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$,

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^-$ v bode a ,

Limitou sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$,

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^+$ v bode a ,

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x < a\},$

- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A; x > a\}.$

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).

- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f) \cap (a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R},$

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^-$ v bode $a,$ t. j. limitu funkcie f_a^- v bode $a.$

Limitou sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R},$

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^+$ v bode $a,$ t. j. limitu funkcie f_a^+ v bode $a.$

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x < a\},$

- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A; x > a\}.$

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).

- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f) \cap (a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$, označenie $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^-$ v bode a , t. j. limitu funkcie f_a^- v bode a .

Limitou sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$, označenie $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^+$ v bode a , t. j. limitu funkcie f_a^+ v bode a .

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x < a\},$

- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A; x > a\}.$

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).

- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f) \cap (a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$, označenie $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^-$ v bode $a,$

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D(f)_a^-}} f(x)$

Limitou sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$, označenie $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^+$ v bode $a,$

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D(f)_a^+}} f(x)$

Jednostranné limity – Definícia

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^- = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x < a\},$

- $A_a^+ = A \cap (a; \infty) = \{x \in A; x > a\}.$

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f_a^-(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^-}$ (zúženie naľavo).

- $f_a^+(x) = f(x)|_{D(f) \cap (a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^+}$ (zúženie napravo).

Limitou zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$, označenie $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^-$ v bode a , t. j. limitu funkcie f_a^- v bode a .

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D(f)_a^-}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_a^-(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)|_{D(f)_a^-}.$

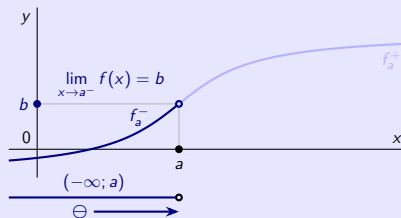
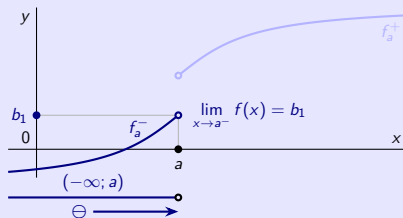
Limitou sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$, označenie $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$

nazývame limitu funkcie f vzhľadom na množinu $D(f)_a^+$ v bode a , t. j. limitu funkcie f_a^+ v bode a .

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D(f)_a^+}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_a^+(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)|_{D(f)_a^+}.$

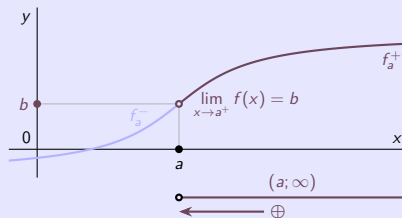
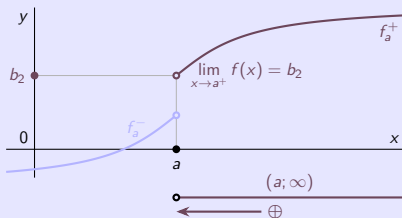
Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)



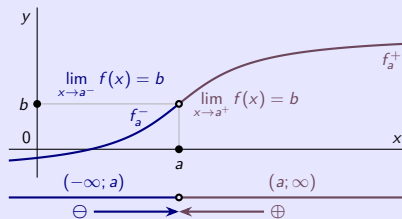
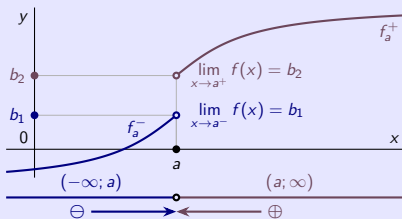
Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)



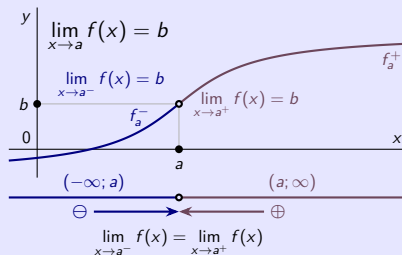
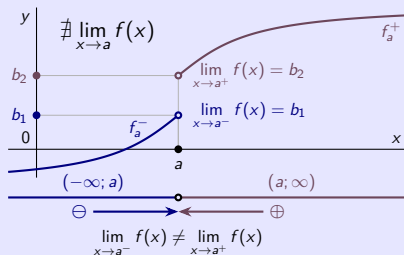
Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
 - $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
- sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a .



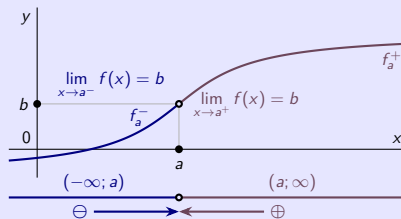
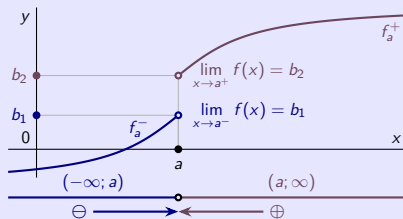
Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
 - $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
- sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limita funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$) sa nazýva **obojsstranná limita** funkcie f v bode a .



Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

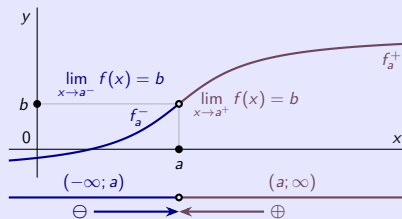
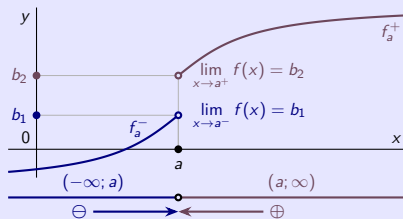
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
 - $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
- sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limita funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$) sa nazýva **obojsstranná limita** funkcie f v bode a .



Funkcia f , bod $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodom $D(f)$, bod $b \in \mathbb{R}^*$.

Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
 - $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
- sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limita funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$) sa nazýva **obojstranná limita** funkcie f v bode a .

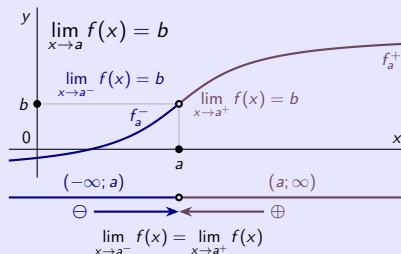
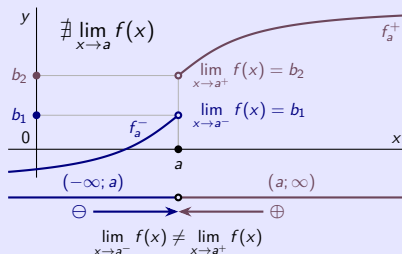


Funkcia f , bod $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodom $D(f)$, bod $b \in \mathbb{R}^*$.

Potom platí:

Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
 - $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
- sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limita funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$) sa nazýva **obojstranná limita** funkcie f v bode a .

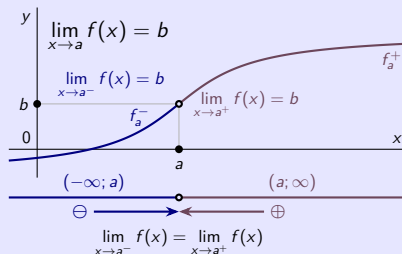
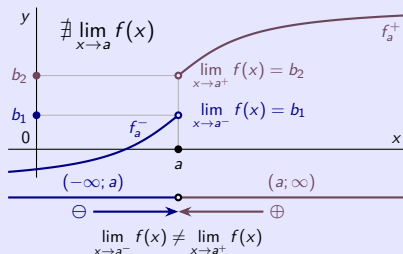


Funkcia f , bod $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodom $D(f)$, bod $b \in \mathbb{R}^*$.

Potom platí: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$.

Jednostranné limity – Jednostranné a obojstranné limity

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (limita zľava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
 - $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (limita sprava funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$)
- sa nazývajú **jednostranné limity** funkcie f v bode a .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (limita funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$) sa nazýva **obojstranná limita** funkcie f v bode a .



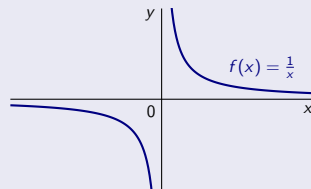
Funkcia f , bod $a \in \mathbb{R}$ je hromadným bodom $D(f)$, bod $b \in \mathbb{R}^*$.

Potom platí: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b. \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b.$

[Obojstranná limita funkcie f v bode $a \in \mathbb{R}$ existuje práve vtedy, ak existujú jednostranné limity funkcie f v bode a a rovnajú sa.]

Jednostranné limity – Príklady

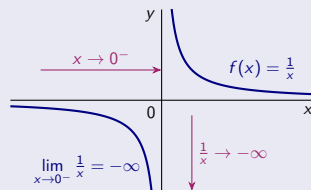
$$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$



Jednostranné limity – Príklady

$$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

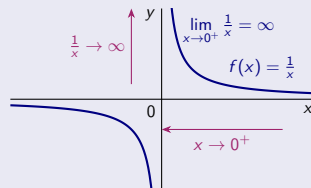
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$



Jednostranné limity – Príklady

$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

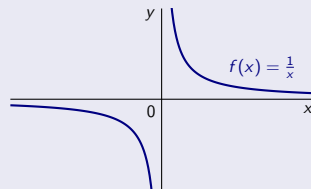
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty$.



Jednostranné limity – Príklady

$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$
- $\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.

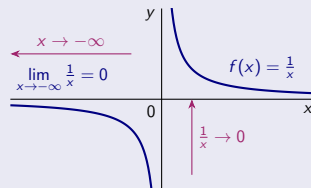


Jednostranné limity – Príklady

$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

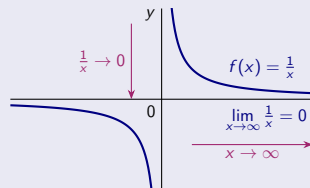


Jednostranné limity – Príklady

$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

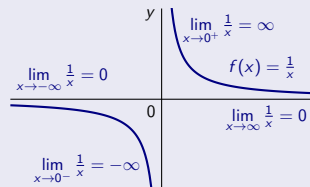


Jednostranné limity – Príklady

$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

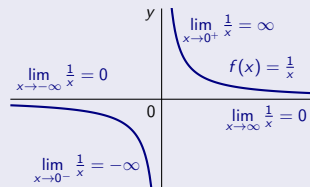


Jednostranné limity – Príklady

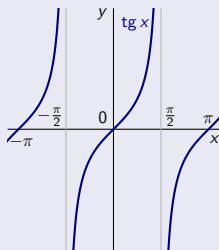
$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$



$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

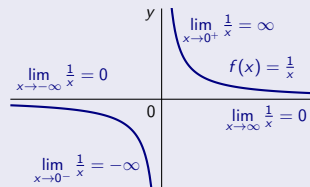


Jednostranné limity – Príklady

$$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

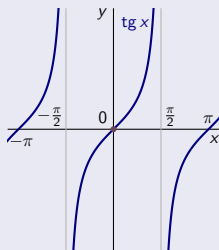
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$



$$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = 0.$$

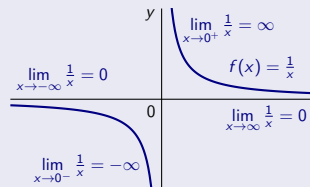


Jednostranné limity – Príklady

$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

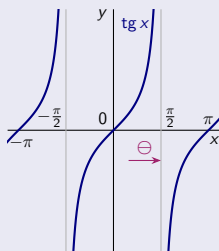
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$



$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x &= 0. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x &= \infty. \end{aligned}$$

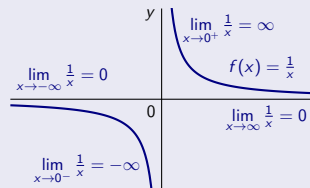


Jednostranné limity – Príklady

$$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

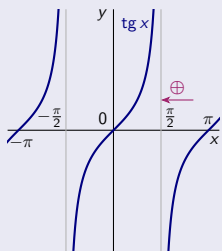
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$



$$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x &= 0. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x &= \infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x &= -\infty. \end{aligned}$$

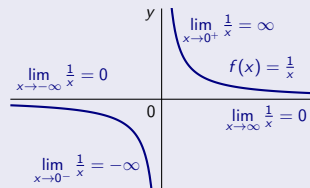


Jednostranné limity – Príklady

$$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

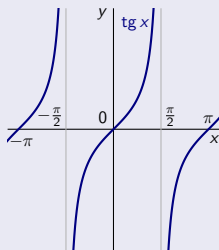
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$



$$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x &= 0. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x &= \infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x &= -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x &\text{ neexistuje.} \end{aligned}$$

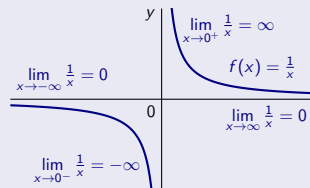


Jednostranné limity – Príklady

$$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

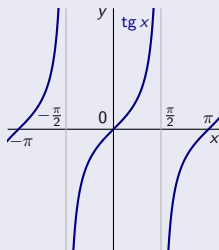
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

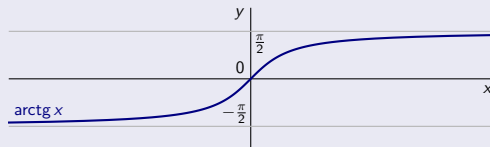


$$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x &= 0. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x &= \infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x &= -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x &\text{ neexistuje.} \end{aligned}$$



$$f: y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}.$$

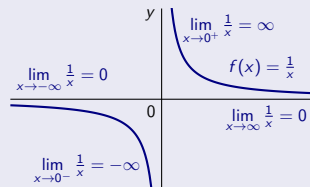


Jednostranné limity – Príklady

$$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

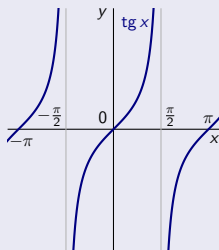
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$



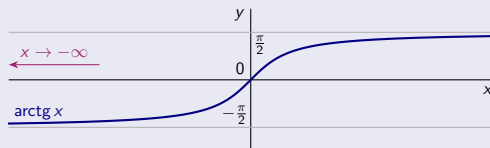
$$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x &= 0. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x &= \infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x &= -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x &\text{ neexistuje.} \end{aligned}$$



$$f: y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

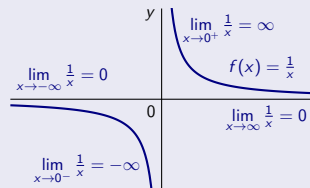


Jednostranné limity – Príklady

$$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

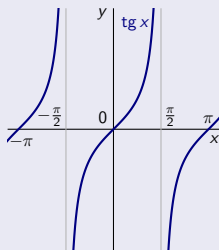
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$



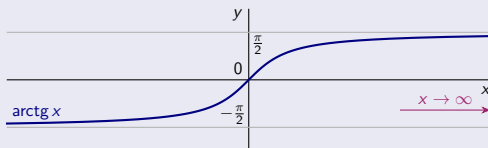
$$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x &= 0. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x &= \infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x &= -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x &\text{ neexistuje.} \end{aligned}$$



$$f: y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x &= -\frac{\pi}{2}. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

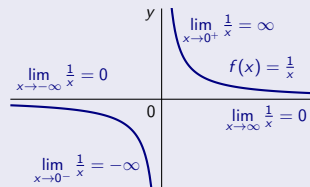


Jednostranné limity – Príklady

$$f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

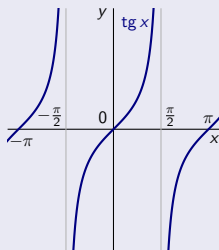
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^-} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \frac{1}{0^+} = \infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$



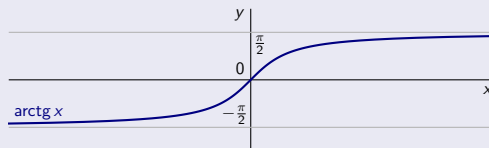
$$f: y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x &= 0. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x &= \infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x &= -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x &\text{ neexistuje.} \end{aligned}$$



$$f: y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x &= -\frac{\pi}{2}. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = \frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right]$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow 0, x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = \frac{1}{x} \\ x \rightarrow 0, x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = \frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right. \right]$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = \frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{-z}\right)^{-z}$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = \frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{-z}\right)^{-z}$
$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1}$$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = \frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{-z}\right)^{-z}$
$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1}$$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = \frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{-z}\right)^{-z}$
$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1} = e^a.$$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \text{ pre } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = \frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} &= \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{-z}\right)^{-z} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1} = e^a. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \text{ pre } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = \frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{-z}\right)^{-z} \\ = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1} = e^a.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

Jednostranné limity – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \text{ pre } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = \frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{-z}\right)^{-z} \\ = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1} = e^a.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x+1)$$

Jednostranné limity – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \text{ pre } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = \frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{-z}\right)^{-z} \\ = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1} = e^a.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}}$$

Jednostranné limity – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \text{ pre } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = \frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{-z}\right)^{-z} \\ = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1} = e^a.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} \right]$$

Jednostranné limity – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \text{ pre } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = \frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{-z}\right)^{-z} \\ = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1} = e^a.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e$$

Jednostranné limity – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \text{ pre } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = \frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 0, x > 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z}\right)^z = e^a.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -\frac{1}{x} \mid x \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0, x < 0 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{-z}\right)^{-z} \\ = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-a}{z}\right)^z\right]^{-1} = [e^{-a}]^{-1} = e^a.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1.$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva nekonečne malá v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$.]

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva **rádu $o(g(x))$** v bode a , ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva **rádu $o(g(x))$** v bode a , ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- f sa nazýva **rádu $O(g(x))$** v bode a , resp. v okolí $P(a)$,

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva **rádu $o(g(x))$** v bode a , ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

- f sa nazýva **rádu $O(g(x))$** v bode a , resp. v okolí $P(a)$,

ak existuje $c \in \mathbb{R}, c > 0$ také, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $|f(x)| \leq c |g(x)|$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva **rádu $o(g(x))$** v bode a , ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Označenie $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$.

- f sa nazýva **rádu $O(g(x))$** v bode a , resp. v okolí $P(a)$,

ak existuje $c \in \mathbb{R}, c > 0$ také, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $|f(x)| \leq c |g(x)|$.

Označenie $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow a$, resp. $f(x) = O(g(x)), x \in P(a)$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva **rádu $o(g(x))$** v bode a , ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Označenie $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$.

- f sa nazýva **rádu $O(g(x))$** v bode a , resp. v okolí $P(a)$,

ak existuje $c \in \mathbb{R}, c > 0$ také, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $|f(x)| \leq c |g(x)|$.

Označenie $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow a$, resp. $f(x) = O(g(x)), x \in P(a)$.

- Symboly o, O sa používajú často, zaviedol ich nemecký matematik Edmund Landau (1877–1938).

Asymptotické vlastnosti funkcie – Symbolika o, O

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
- f sa nazýva **nekonečne veľká** v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

[Pojem môžeme rozšíriť aj na absolútnu hodnotu: f sa nazýva nekonečne veľká v bode a , ak $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$.]

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- f sa nazýva **rádu $o(g(x))$** v bode a , ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Označenie $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$.

- f sa nazýva **rádu $O(g(x))$** v bode a , resp. v okolí $P(a)$,

ak existuje $c \in \mathbb{R}, c > 0$ také, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $|f(x)| \leq c |g(x)|$.

Označenie $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow a$, resp. $f(x) = O(g(x)), x \in P(a)$.

- Symboly o, O sa používajú často, zaviedol ich nemecký matematik Edmund Landau (1877–1938).
- Pre $a = \pm\infty$ platí $P(-\infty) = O(-\infty) = (-\infty; r)$ a $P(\infty) = O(\infty) = (r; \infty)$, kde $r \in \mathbb{R}$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

ak $f(x) = o((x - a)^n)$, $x \rightarrow a$, t. j. ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

ak $f(x) = o((x - a)^n)$, $x \rightarrow a$, t. j. ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

ak $f(x) = o((x - a)^n)$, $x \rightarrow a$, t. j. ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

- $\sin x = o(1)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

ak $f(x) = o((x - a)^n)$, $x \rightarrow a$, t. j. ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

ak $f(x) = o((x - a)^n)$, $x \rightarrow a$, t. j. ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x)$, $x \rightarrow \pi$, pretože $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

$$\text{ak } f(x) = o((x - a)^n), x \rightarrow a, \text{ t. j. ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

- $x^2 = o(x), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x), x \rightarrow \pi$, pretože $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Pre všetky $a \in \mathbb{R}^*$ platí:

- $\sin x = O(1), x \rightarrow a$,
- $\sin x = O(x), x \rightarrow a$,

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

$$\text{ak } f(x) = o((x - a)^n), x \rightarrow a, \text{ t. j. ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

- $x^2 = o(x), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x), x \rightarrow \pi$, pretože $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Pre všetky $a \in \mathbb{R}^*$ platí:

- $\sin x = O(1), x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x| \leq 1$.
- $\sin x = O(x), x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x| \leq |x|$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

$$\text{ak } f(x) = o((x - a)^n), x \rightarrow a, \text{ t. j. ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

- $x^2 = o(x), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x), x \rightarrow \pi$, pretože $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Pre všetky $a \in \mathbb{R}^*$ platí:

- $\sin x = O(1), x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x| \leq 1$.
- $\sin x = O(x), x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in (-1; 1)$ platí:

- $x^2 = O(x), x \rightarrow a$,

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

$$\text{ak } f(x) = o((x - a)^n), x \rightarrow a, \text{ t. j. ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

- $x^2 = o(x), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x), x \rightarrow \pi$, pretože $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Pre všetky $a \in \mathbb{R}^*$ platí:

- $\sin x = O(1), x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x| \leq 1$.
- $\sin x = O(x), x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in \langle -1; 1 \rangle$ platí:

- $x^2 = O(x), x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \langle -1; 1 \rangle$ platí $|x^2| \leq |x|$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

$$\text{ak } f(x) = o((x - a)^n), x \rightarrow a, \text{ t. j. ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

- $x^2 = o(x), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x), x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x), x \rightarrow \pi$, pretože $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Pre všetky $a \in \mathbb{R}^*$ platí:

- $\sin x = O(1), x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x| \leq 1$.
- $\sin x = O(x), x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in \langle -1; 1 \rangle$ platí:

- $x^2 = O(x), x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \langle -1; 1 \rangle$ platí $|x^2| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$ platí:

- $x = O(x^2), x \rightarrow a$,

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá rádu n

- V praxi sa veľmi často ako funkcia na porovnanie volí polynóm $g(x) = (x - a)^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f .

- f sa nazýva **nekonečne malá** rádu (väčšieho alebo rovného) $n \in \mathbb{N}$ v bode a ,

ak $f(x) = o((x - a)^n)$, $x \rightarrow a$, t. j. ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = 0$.

- $x^2 = o(x)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.
- $\sin x = o(1)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$.
- $\sin x \neq o(x)$, $x \rightarrow 0$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x = o(x)$, $x \rightarrow \pi$, pretože $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Pre všetky $a \in \mathbb{R}^*$ platí:

- $\sin x = O(1)$, $x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x| \leq 1$.
- $\sin x = O(x)$, $x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|\sin x| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in \langle -1; 1 \rangle$ platí:

- $x^2 = O(x)$, $x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in \langle -1; 1 \rangle$ platí $|x^2| \leq |x|$.

Pre všetky $a \in \mathbb{R} - (-1; 1)$ platí:

- $x = O(x^2)$, $x \rightarrow a$, pretože pre všetky $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ platí $|x| \leq |x^2|$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in \mathbb{R}^*$.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in \mathbb{R}^*$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in \mathbb{R}^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in \mathbb{R}^*$.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in \mathbb{R}^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in \mathbb{R}^*$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in \mathbb{R}^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in \mathbb{R}^*$.

- $b = 0$.
- $b \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- $b = \pm\infty$.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in \mathbb{R}^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in \mathbb{R}^*$.

- $b = 0$.
- $b \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- $b = \pm\infty$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

• $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .

• $b \in R - \{0\}$.

• $b = \pm\infty$.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

• $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .

• $b \in R - \{0\}$.

• $b = \pm\infty$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .
- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **rovnako rýchlo** ako funkcia g .
- $b = \pm\infty$.

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .
- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **rovnako rýchlo** ako funkcia g .
- $b = \pm\infty$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in \mathbb{R}^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in \mathbb{R}^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .
- $b \in \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **rovnako rýchlo** ako funkcia g .
- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **pomalšie** ako funkcia g .

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in \mathbb{R}^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in \mathbb{R}^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .
- $b \in \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **rovnako rýchlo** ako funkcia g .
- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **pomalšie** ako funkcia g .

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in \mathbb{R}^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in \mathbb{R}^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne malá vyššieho rádu ako funkcia g .]

- $b \in \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **rovnako rýchlo** ako funkcia g .

- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **pomalšie** ako funkcia g .

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in \mathbb{R}^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in \mathbb{R}^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne veľká nižšieho rádu ako funkcia g .]

- $b \in \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **rovnako rýchlo** ako funkcia g .

- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **pomalšie** ako funkcia g .

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne malá vyššieho rádu ako funkcia g .]

- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **rovnako rýchlo** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne malá rovnakého rádu ako funkcia g .]

- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **pomalšie** ako funkcia g .

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne veľká nižšieho rádu ako funkcia g .]

- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **rovnako rýchlo** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne veľká rovnakého rádu ako funkcia g .]

- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **pomalšie** ako funkcia g .

Asymptotické vlastnosti funkcie – Nekonečne malá

Funkcie f, g sú nekonečne malé v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne malá vyššieho rádu ako funkcia g .]

- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **rovnako rýchlo** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne malá rovnakého rádu ako funkcia g .]

- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (konverguje) k nule v bode a **pomalšie** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne malá nižšieho rádu ako funkcia g .]

Funkcie f, g sú nekonečne veľké v bode $a \in R^*$. Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$.

- $b = 0$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **rýchlejšie** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne veľká nižšieho rádu ako funkcia g .]

- $b \in R - \{0\}$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **rovnako rýchlo** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne veľká rovnakého rádu ako funkcia g .]

- $b = \pm\infty$. $\Rightarrow$ Funkcia f sa **blíži** (rastie, klesá) do $\pm\infty$ v bode a **pomalšie** ako funkcia g .

[Funkcia f je v bode a nekonečne veľká vyššieho rádu ako funkcia g .]

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a ,

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in R^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

$$\text{ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a.$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

ak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x, x \rightarrow 1.$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

$$\text{ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x, x \rightarrow 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x, x \rightarrow 0.$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

$$\text{ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x, x \rightarrow 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x, x \rightarrow 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow 0.$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

$$\text{ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x, x \rightarrow 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x, x \rightarrow 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow 0.$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow \frac{\pi}{2}.$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

$$\text{ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x, x \rightarrow 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in \mathbb{R}$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

$$\text{ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x, x \rightarrow 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in \mathbb{R}$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

[Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva asymptota bez smernice

grafu funkcie f ,

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

$$\text{ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x, x \rightarrow 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in \mathbb{R}$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

[Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva asymptota bez smernice (vertikálna, zvislá) grafu funkcie f ,

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

$$\text{ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x, x \rightarrow 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in \mathbb{R}$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

[Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva asymptota bez smernice (vertikálna, zvislá) grafu funkcie f ,

ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

$$\text{ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x, x \rightarrow 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in \mathbb{R}$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

[Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva asymptota bez smernice (vertikálna, zvislá) grafu funkcie f ,

ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

[Aspoň jedna z jednostranných limít musí byť nevlastná,

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g (f, g sa asymptoticky rovnajú) v bode a ,

$$\text{ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x, x \rightarrow 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in \mathbb{R}$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

[Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva asymptota bez smernice (vertikálna, zvislá) grafu funkcie f ,

ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

[Aspoň jedna z jednostranných limít musí byť nevlastná, druhá jednostranná limita môže byť vlastná, nevlastná alebo nemusí existovať.]

Asymptotické vlastnosti funkcie – ABS (asymptota bez smernice)

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcie f, g sú definované v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

- Funkcia f sa **asymptoticky rovná** funkcii g (f, g sa **asymptoticky rovnajú**) v bode a ,

$$\text{ak platí } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Označenie $f \sim g, x \rightarrow a$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1. \Rightarrow x^2 \sim x, x \rightarrow 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1. \Rightarrow \ln(x+1) \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow 0.$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1. \Rightarrow \sin x \sim x, x \rightarrow \frac{\pi}{2}.$

Bod $a \in \mathbb{R}$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $P(a) = O(a) - \{a\}$.

[Asymptota bez smernice – ABS.]

- Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota bez smernice** (vertikálna, zvislá) grafu funkcie f ,

ak aspoň jedna z jednostranných limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná.

[Aspoň jedna z jednostranných limit musí byť nevlastná, druhá jednostranná limita môže byť vlastná, nevlastná alebo nemusí existovať.]

- Priamka $x = 0$ je ABS grafu funkcie $f: y = \frac{1}{x}$, pretože $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$

Asymptotické vlastnosti funkcie

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS

(asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS

(asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,

ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS

(asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS

(asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,

ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.

- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,

ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.

- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f . [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f . [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$NP \Rightarrow$ $y = kx + q$ je ASS.



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$NP \Rightarrow$ $y = kx + q$ je ASS. $\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = 0$.



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f . [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$$NP \Rightarrow: y = kx + q \text{ je ASS.} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = q.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$$NP \Rightarrow: y = kx + q \text{ je ASS.} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = q.$$

$$\Rightarrow \bullet 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - kx - q}{x}$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f . [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$$NP \Rightarrow: y = kx + q \text{ je ASS.} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = q.$$

$$\Rightarrow \bullet 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x} \right]$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$$NP \Rightarrow: y = kx + q \text{ je ASS.} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = q.$$

$$\Rightarrow \bullet 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} - k - 0.$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
 NP \Rightarrow: & y = kx + q \text{ je ASS.} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = q. \\
 \Rightarrow & \bullet 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} - k - 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = k.
 \end{aligned}$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS

(asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$$NP \Rightarrow: y = kx + q \text{ je ASS.} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = q.$$

$$\Rightarrow \bullet 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} - k - 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$PP \Leftarrow: k, q \in \mathbb{R}.$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS

(asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f . [Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$$NP \Rightarrow: y = kx + q \text{ je ASS.} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = q.$$

$$\Rightarrow \bullet 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} - k - 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$PP \Leftarrow: k, q \in \mathbb{R}. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)]$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS

(asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$$NP \Rightarrow: y = kx + q \text{ je ASS.} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = q.$$

$$\Rightarrow \bullet 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} - k - 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$PP \Leftarrow: k, q \in \mathbb{R}. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx] - \lim_{x \rightarrow a} q$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS

(asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

[Asymptota so smernicou – ASS.]

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, sa nazýva **asymptota so smernicou k** grafu funkcie f ,
ak platí podmienka $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - p(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx - q] = 0$.
- ASS $p: y = q$ (ASS so smernicou $k = 0$) sa nazýva **horizontálna (vodorovná)**.

[Funkcia môže mať najviac dve ASS, jednu pre $x \rightarrow -\infty$ a jednu pre $x \rightarrow +\infty$.]

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f .

- Priamka $p: y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, je ASS grafu f .
 $\Leftrightarrow$ • Existujú limity $k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx]$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.

Dôkaz.

$$NP \Rightarrow: y = kx + q \text{ je ASS. } \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = q.$$

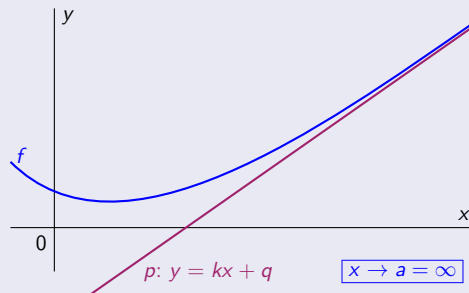
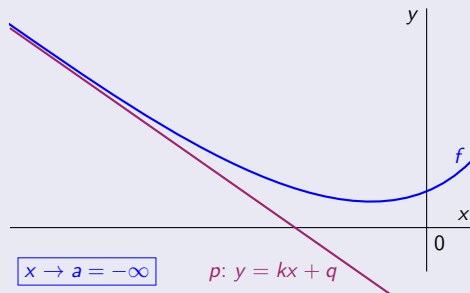
$$\Rightarrow \bullet 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} - k - 0. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = k.$$

$$PP \Leftarrow: k, q \in \mathbb{R}. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - (kx + q)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - kx] - \lim_{x \rightarrow a} q = q - q = 0.$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS

(asymptota so smernicou)

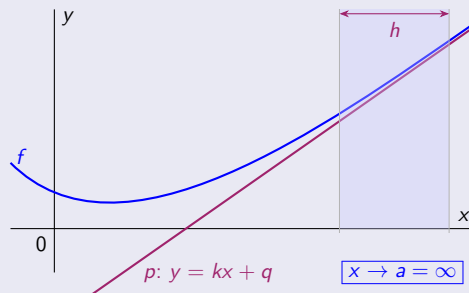
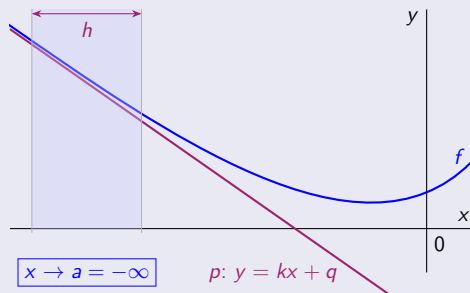
Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

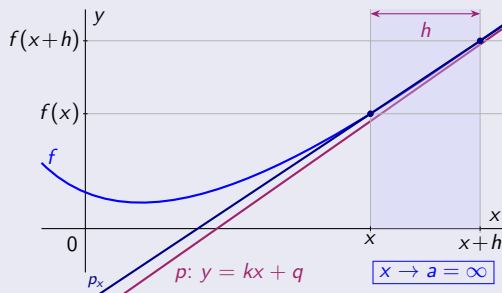
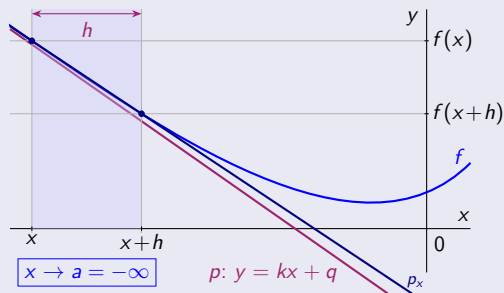
Zvoľme $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo).



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

Zvoľme $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo). • Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.

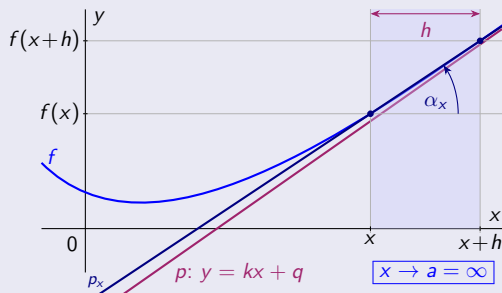
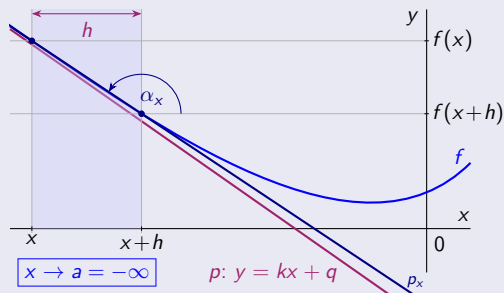


Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

Zvoľme $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo).

- Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.
- Označme α_x uhol priamky p_x s osou x .



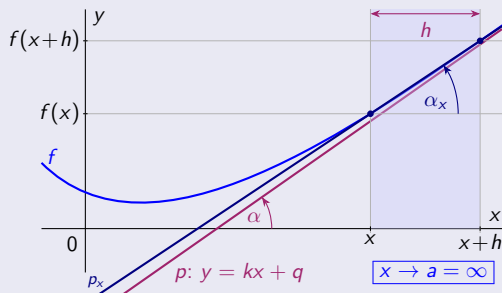
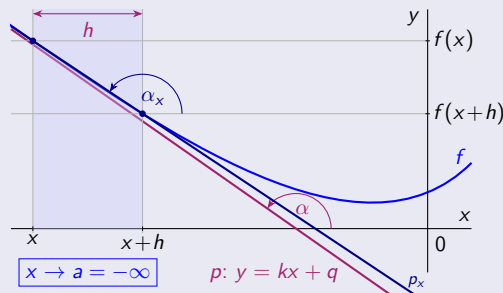
Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

Zvoľme $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo). • Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.

• Označme α_x uhol priamky p_x s osou x .

• Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x . [$x \rightarrow a = -\infty$; $x \rightarrow a = \infty$]



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

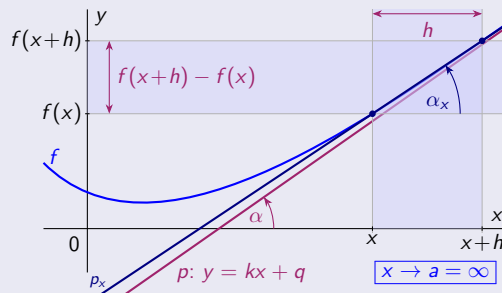
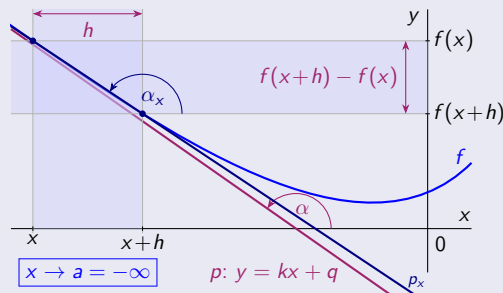
Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

Zvoľme $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo). • Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.

• Označme α_x uhol priamky p_x s osou x .

• Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x . [$x \rightarrow a = -\infty$; $x \rightarrow a = \infty$]

$$\bullet \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

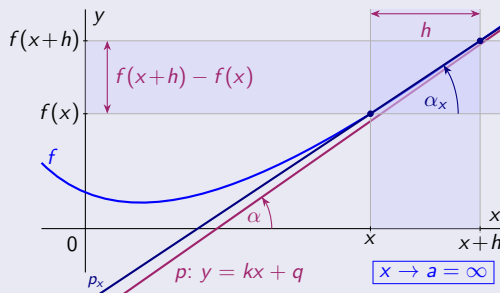
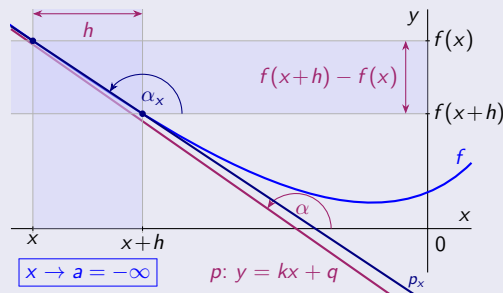
Zvoľme $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo). • Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.

• Označme α_x uhol priamky p_x s osou x .

• Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x . [$x \rightarrow a = -\infty$; $x \rightarrow a = \infty$]

• Pre $x \rightarrow a$ platí $\alpha_x \rightarrow \alpha$.

$$\bullet \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

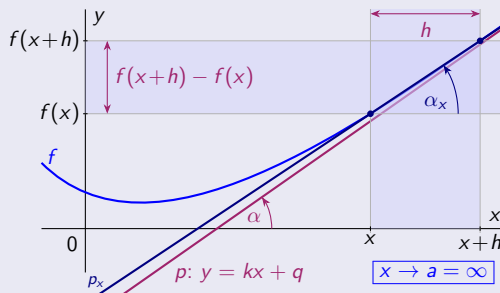
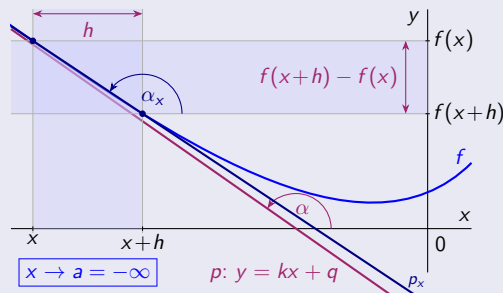
Zvoľme $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo). • Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.

• Označme α_x uhol priamky p_x s osou x .

• Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x . [$x \rightarrow a = -\infty$; $x \rightarrow a = \infty$]

• Pre $x \rightarrow a$ platí $\alpha_x \rightarrow \alpha$.

$$\Rightarrow \bullet \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

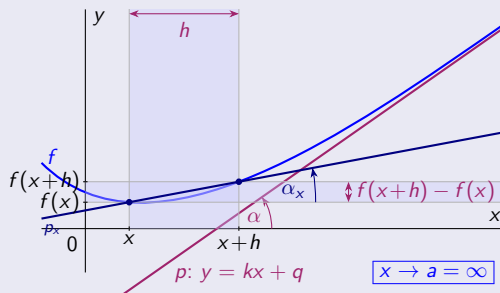
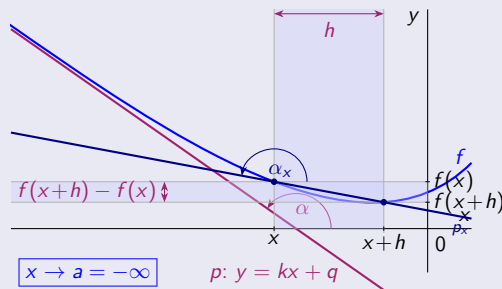
Zvoľme $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo). • Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.

• Označme α_x uhol priamky p_x s osou X .

• Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou X . [$x \rightarrow a = -\infty$; $x \rightarrow a = \infty$]

• Pre $x \rightarrow a$ platí $\alpha_x \rightarrow \alpha$.

$$\Rightarrow \bullet \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

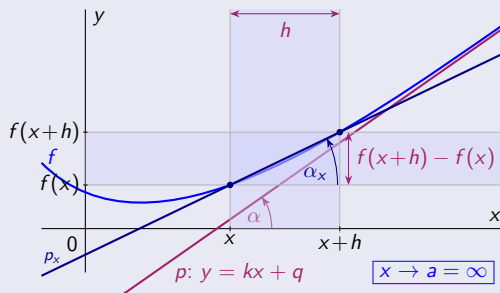
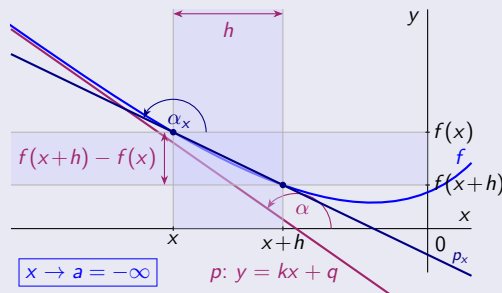
Zvoľme $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo). • Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.

• Označme α_x uhol priamky p_x s osou x .

• Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x . [$x \rightarrow a = -\infty$; $x \rightarrow a = \infty$]

• Pre $x \rightarrow a$ platí $\alpha_x \rightarrow \alpha$.

$$\Rightarrow \bullet \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

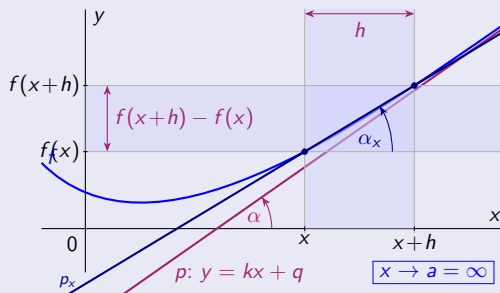
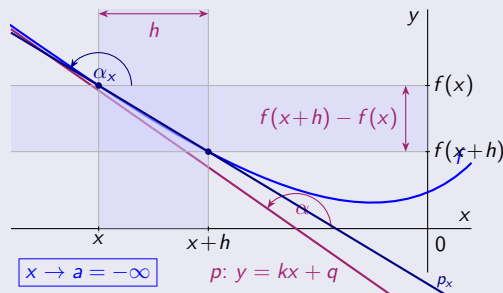
Zvoľme $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo). • Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.

• Označme α_x uhol priamky p_x s osou x .

• Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x . [$x \rightarrow a = -\infty$; $x \rightarrow a = \infty$]

• Pre $x \rightarrow a$ platí $\alpha_x \rightarrow \alpha$.

$$\Rightarrow \bullet \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

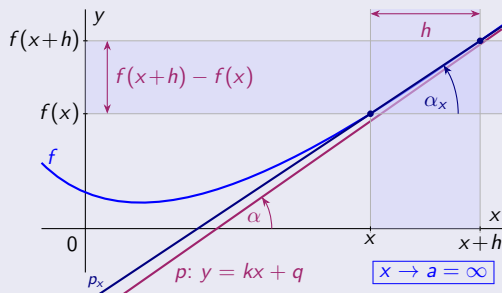
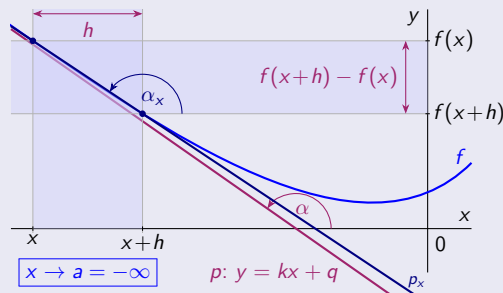
Zvoľme $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo). • Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.

• Označme α_x uhol priamky p_x s osou x .

• Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x . [$x \rightarrow a = -\infty$; $x \rightarrow a = \infty$]

• Pre $x \rightarrow a$ platí $\alpha_x \rightarrow \alpha$.

$$\Rightarrow \bullet \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

Bod $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , priamka $p: y = kx + q$ je ASS grafu f .

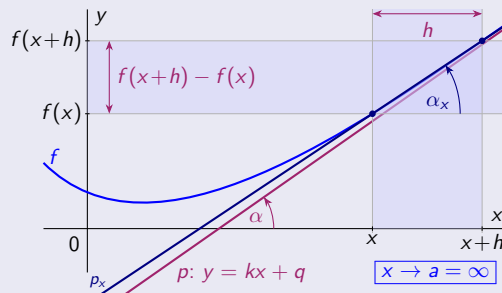
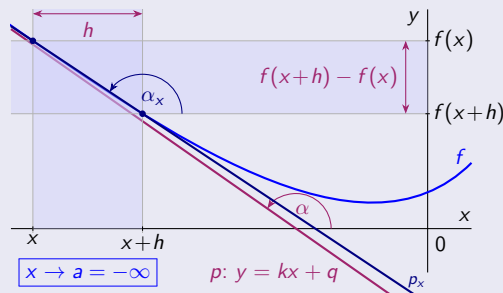
Zvoľme $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ (pevné dané číslo). • Označme p_x priamku určenú bodmi $[x; f(x)]$, $[x+h; f(x+h)]$.

• Označme α_x uhol priamky p_x s osou x .

• Smernica asymptoty $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$, kde α je uhol asymptoty p s osou x . [$x \rightarrow a = -\infty$; $x \rightarrow a = \infty$]

• Pre $x \rightarrow a$ platí $\alpha_x \rightarrow \alpha$.

$$\Rightarrow \bullet \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS

(asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

Exemply

Príklady

Príklady

Príklady

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

Existuje

Existuje

Existuje

Existuje

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

Existuje

Existuje

a platí

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať.

Existuje

Existuje

a platí

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať.

[Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

Existuje

Existuje

a platí

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ nemusí existovať.

[Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

• Zvoľme $h = 1$.

Existuje

Existuje

a platí

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ nemusí existovať.

[Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

• Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} [f(x+1) - f(x)]$.

Existuje

Existuje

a platí

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ nemusí existovať.

[Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

• Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} [f(x+1) - f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

Existuje

Existuje

a platí

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ nemusí existovať.

[Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

• Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} [f(x+1) - f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

• Ak $N \subset D(f)$,

Existuje

Existuje

a platí

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať.

[Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

• Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} [f(x+1) - f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

• Ak $N \subset D(f)$, potom reštrikcia $f|_N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom $a_n = f(n)$, $n \in N$.

Existuje

Existuje

a platí

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať.

[Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

• Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} [f(x+1) - f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

• Ak $N \subset D(f)$, potom reštrikcia $f|_N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom $a_n = f(n)$, $n \in N$.

[$D(f)$ môže obsahovať všetky prirodzené čísla n alebo všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$.]

Existuje

Existuje

a platí

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať.

[Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

• Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} [f(x+1) - f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

• Ak $N \subset D(f)$, potom reštrikcia $f|_N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom $a_n = f(n)$, $n \in N$.

[$D(f)$ môže obsahovať všetky prirodzené čísla n alebo všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$.]

• Existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_{n+1} - a_n]$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať.

[Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

• Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} [f(x+1) - f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

• Ak $N \subset D(f)$, potom reštrikcia $f|_N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom $a_n = f(n)$, $n \in N$.

[$D(f)$ môže obsahovať všetky prirodzené čísla n alebo všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$.]

• Existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_{n+1} - a_n]$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$

Asymptotické vlastnosti funkcie – ASS (asymptota so smernicou)

$h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ (pevné dané číslo), $a = \pm\infty$ je hromadný bod $D(f)$ funkcie f , $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b \in \mathbb{R}^*$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = b$.

• Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

• $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ môže existovať a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nemusí existovať.

[Pôvodné tvrdenie nemožno obrátiť.]

• Zvoľme $h = 1$. $\Rightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a} [f(x+1) - f(x)]$.

Špeciálne pre číselné postupnosti platí:

• Ak $N \subset D(f)$, potom reštrikcia $f|_N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzťahom $a_n = f(n)$, $n \in N$.

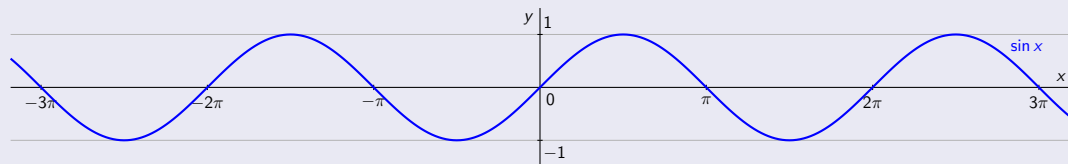
[$D(f)$ môže obsahovať všetky prirodzené čísla n alebo všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, kde $n_0 \in N$.]

• Existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_{n+1} - a_n]$.

$\Rightarrow$ • Existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ a platí • $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_{n+1} - a_n]$.

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

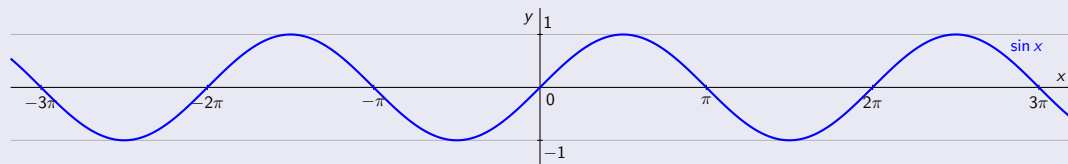
Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$

Pre koeficienty ASS platí:



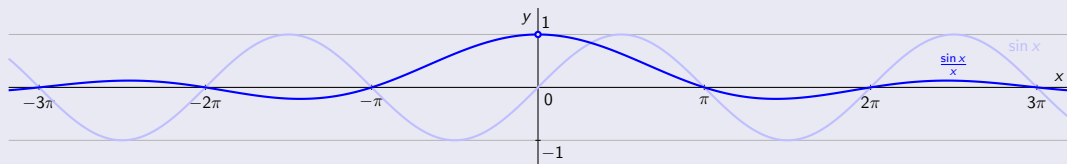
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$

Pre koeficienty ASS platí:

$$\bullet k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

$\left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ existuje,} \right.$

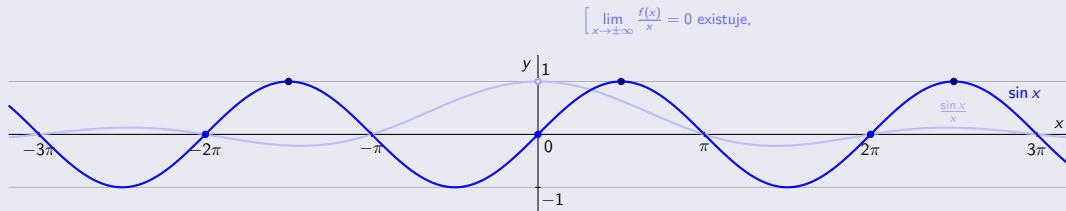


Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$

Pre koeficienty ASS platí:

- $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$
- $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$ neexistuje.



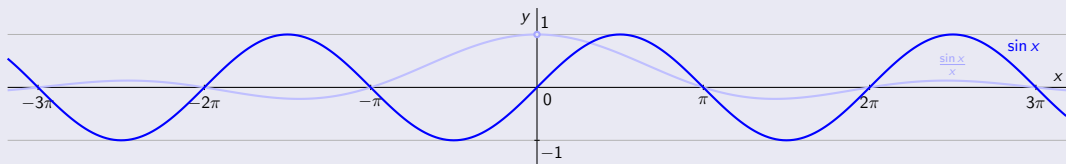
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ nemá ASS.

Pre koeficienty ASS platí:

- $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$
 - $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$ neexistuje.
- } $\Rightarrow$ Funkcia f nemá ASS.

$\left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ existuje, ASS neexistuje,} \right.$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

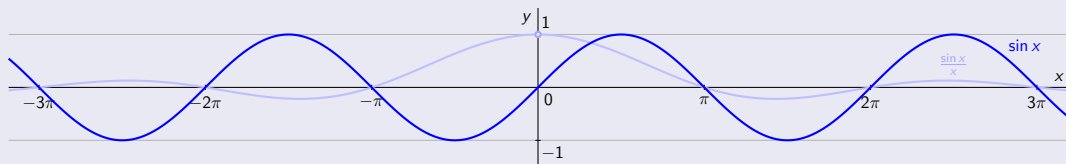
Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ nemá ASS.

Pre koeficienty ASS platí:

$$\begin{aligned}
 & \bullet k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0. \\
 & \bullet q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \text{ neexistuje.}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}} \right\} \Rightarrow \text{Funkcia } f \text{ nemá ASS.}$$

Pre $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ platí:

$$\left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ existuje, ASS neexistuje,} \right.$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ nemá ASS.

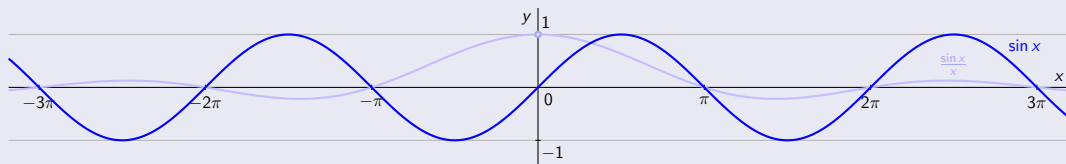
Pre koeficienty ASS platí:

$$\begin{aligned} \bullet k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0. \\ \bullet q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \text{ neexistuje.} \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}} \right\} \Rightarrow \text{Funkcia } f \text{ nemá ASS.}$$

Pre $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ platí:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$\left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ existuje, ASS neexistuje,} \right.$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ nemá ASS.

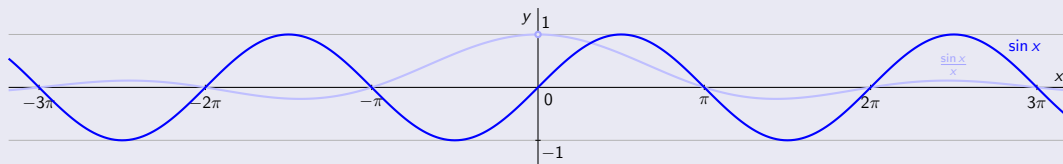
Pre koeficienty ASS platí:

$$\begin{aligned} \bullet k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0. \\ \bullet q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \text{ neexistuje.} \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}} \right\} \Rightarrow \text{Funkcia } f \text{ nemá ASS.}$$

Pre $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ platí:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cdot \cos \frac{x+h+x}{2}}{h}$$

$\left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ existuje, ASS neexistuje,} \right.$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ nemá ASS.

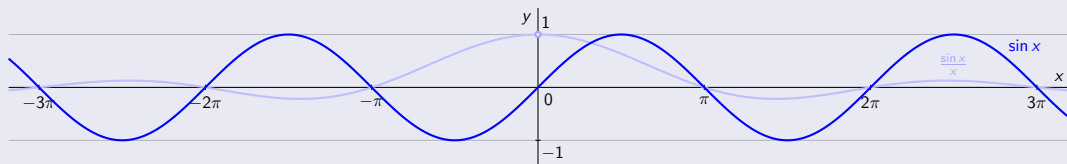
Pre koeficienty ASS platí:

$$\begin{aligned}
 &\bullet k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0. \\
 &\bullet q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \text{ neexistuje.}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}} \right\} \Rightarrow \text{Funkcia } f \text{ nemá ASS.}$$

Pre $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ platí:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cdot \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos(x + \frac{h}{2})}{h}
 \end{aligned}$$

$\left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ existuje, ASS neexistuje,} \right.$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ nemá ASS.

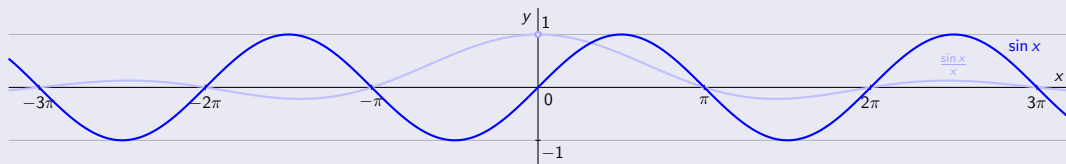
Pre koeficienty ASS platí:

$$\begin{aligned} \bullet k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0. \\ \bullet q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \text{ neexistuje.} \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}} \right\} \Rightarrow \text{Funkcia } f \text{ nemá ASS.}$$

Pre $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cdot \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos(x + \frac{h}{2})}{h} = \frac{2}{h} \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(x + \frac{h}{2}) \end{aligned}$$

$\left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ existuje, ASS neexistuje,} \right.$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ nemá ASS.

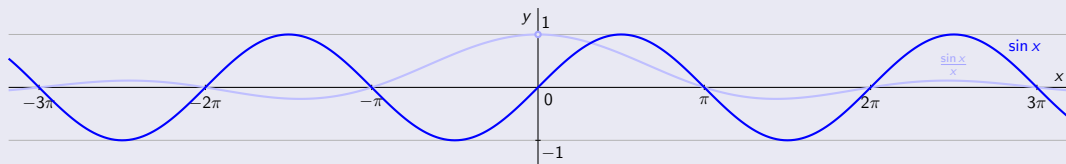
Pre koeficienty ASS platí:

$$\begin{aligned} \bullet k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0. \\ \bullet q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\sin x - k \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \text{ neexistuje.} \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}} \right\} \Rightarrow \text{Funkcia } f \text{ nemá ASS.}$$

Pre $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ platí:

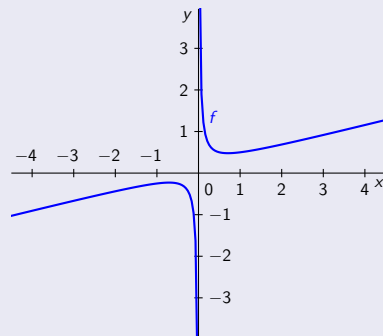
$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cdot \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos(x + \frac{h}{2})}{h} = \frac{2}{h} \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(x + \frac{h}{2}) \text{ neexistuje.} \end{aligned}$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ existuje, ASS neexistuje, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ neexistuje.} \right]$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

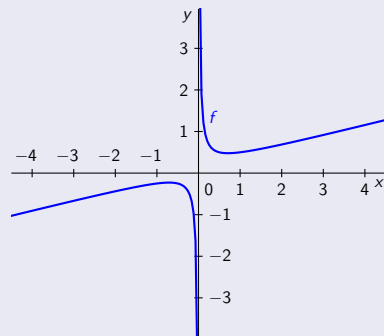
Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

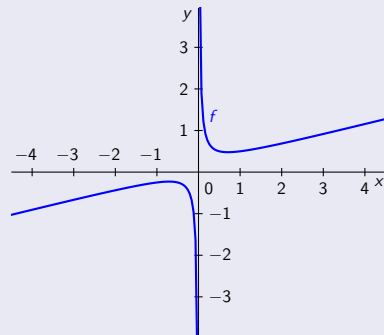
- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.



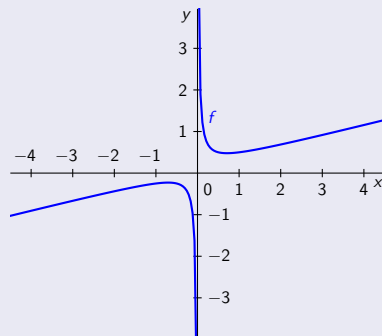
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right]$$



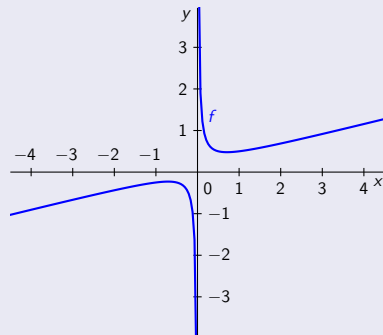
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = 0 + \frac{1}{8} - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = 0 + \frac{1}{8} + \infty$$



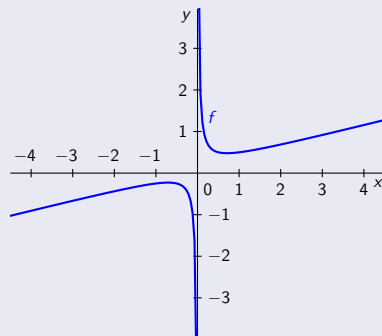
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = 0 + \frac{1}{8} + \infty = +\infty.$$

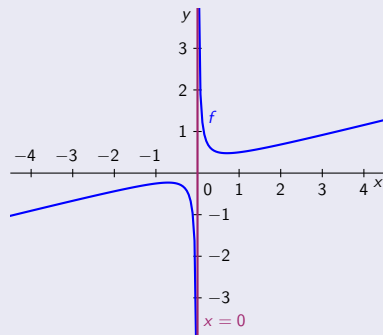


Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = 0 + \frac{1}{8} + \infty = +\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ ABS je } x = 0.$$



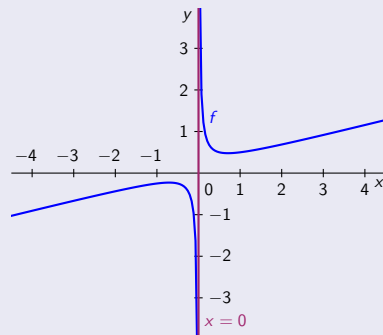
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

• $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = 0 + \frac{1}{8} + \infty = +\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ ABS je } x = 0.$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

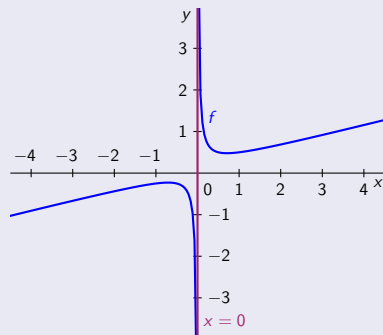
Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = 0 + \frac{1}{8} + \infty = +\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ ABS je } x = 0.$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2}$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

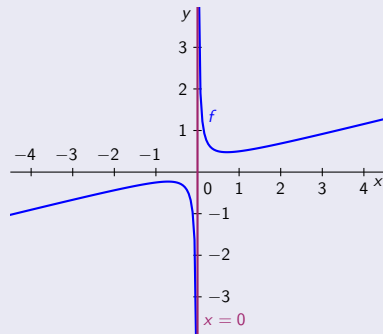
Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = 0 + \frac{1}{8} + \infty = +\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ ABS je } x = 0.$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] = \frac{1}{4} + 0 + 0 \end{aligned}$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

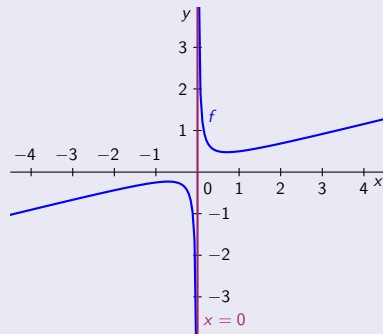
Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

- $D(f) = R - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = 0 + \frac{1}{8} + \infty = +\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ ABS je } x = 0.$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] = \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

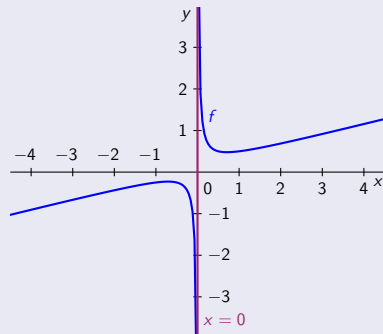
- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = 0 + \frac{1}{8} + \infty = +\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ ABS je } x = 0.$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] = \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} - \frac{x}{4} \right]$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

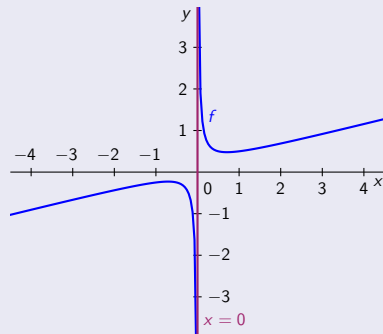
- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = 0 + \frac{1}{8} + \infty = +\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ ABS je } x = 0.$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] = \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} - \frac{x}{4} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot (\pm\infty)} = \frac{1}{8} + 0 \end{aligned}$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

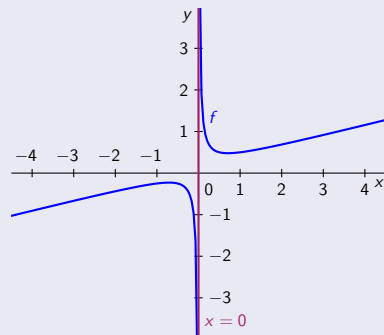
- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = 0 + \frac{1}{8} + \infty = +\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ ABS je } x = 0.$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] = \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} - \frac{x}{4} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot (\pm\infty)} = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$.

• $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $\Rightarrow$ ABS môže byť iba v bode $x_0 = 0$.

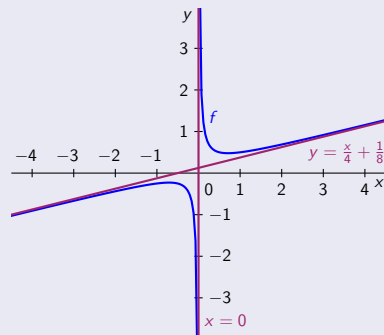
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^-} = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 0^+} = 0 + \frac{1}{8} + \infty = +\infty. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ ABS je } x = 0.$$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2} \right] = \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

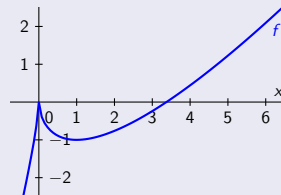
$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} - \frac{x}{4} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x} \right] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot (\pm\infty)} = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \bullet$ ASS je $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$.



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

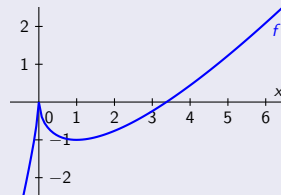
Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

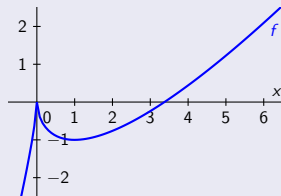
- $D(f) = \mathbb{R}$ (f je definovaná v každom bode).



Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

- $D(f) = \mathbb{R}$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.

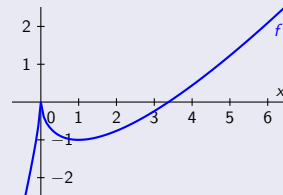


Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

• $D(f) = \mathbb{R}$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.

• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow -\infty$ platí:



• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow \infty$ platí:

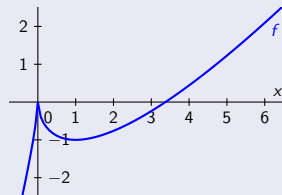
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

• $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.

• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow -\infty$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right)$$



• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow \infty$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right)$$

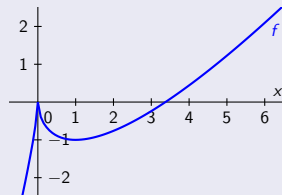
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

• $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.

• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow -\infty$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right]$$



• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow \infty$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right)$$

Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

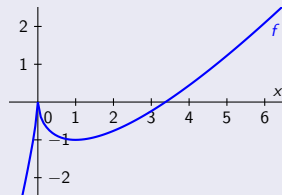
• $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.

• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow -\infty$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}} \right) \end{aligned}$$

• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow \infty$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right)$$



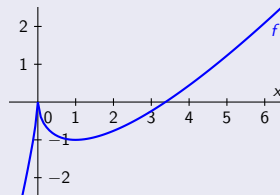
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

• $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.

• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow -\infty$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}} \right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$



• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow \infty$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

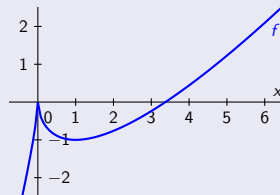
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

• $D(f) = \mathbb{R}$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.

• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow -\infty$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}} \right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$



• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow \infty$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

• Pre $x \rightarrow \pm\infty$ platí:

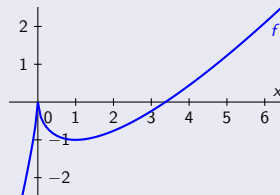
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

• $D(f) = \mathbb{R}$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.

• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow -\infty$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}} \right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$



• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow \infty$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

• Pre $x \rightarrow \pm\infty$ platí:

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x]$$

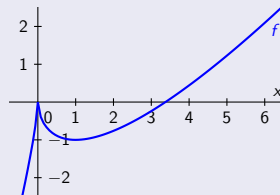
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

• $D(f) = \mathbb{R}$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.

• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow -\infty$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}} \right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$



• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow \infty$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

• Pre $x \rightarrow \pm\infty$ platí:

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [-3\sqrt[3]{x^2}]$$

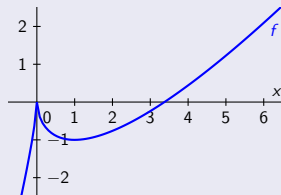
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

• $D(f) = \mathbb{R}$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.

• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow -\infty$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}} \right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$



• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow \infty$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

• Pre $x \rightarrow \pm\infty$ platí:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [-3\sqrt[3]{x^2}] \\ &= -3 \cdot \infty = -\infty. \end{aligned}$$

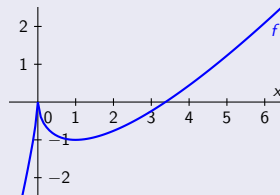
Asymptotické vlastnosti funkcie – Príklad

Nájdite asymptoty funkcie $f: y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

• $D(f) = R$ (f je definovaná v každom bode). $\Rightarrow$ • ABS neexistujú.

• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow -\infty$ platí:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = -x \mid x \rightarrow -\infty \\ x^2 = z^2 \mid z \rightarrow \infty \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{z}} \right) = 2 + \frac{3}{\infty} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$



• Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ pre $x \rightarrow \infty$ platí:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) = 2 - \frac{3}{\infty} = 2 - 0 = 2.$$

• Pre $x \rightarrow \pm\infty$ platí:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [-3\sqrt[3]{x^2}] \\ &= -3 \cdot \infty = -\infty. \Rightarrow \bullet \text{ ASS neexistujú.} \end{aligned}$$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ pre } a > 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ pre } a > 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ pre } a > 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ pre } a > 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{pre } a > 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \quad \text{pre } a \in \mathbb{R}.$$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ pre $a \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ pre } a > 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \text{ pre } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \text{ pre } a > 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ pre $a \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$.

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ pre $a \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[x]{a} - 1) = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ pre $a > 0$.

Riešené príklady – Dôležité limity

Dôležité limity (Naspamäť!):

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ pre $a > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ pre $a \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[x]{a} - 1\right) = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[x]{e} - 1\right) = 1$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: • $\lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

[$q \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 0$.]

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: • $\lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ • $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: • $\lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ • $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$.

$\bullet a \in (1; \infty)$.

$\bullet a \in (0; 1)$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: • $\lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ • $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ • $1 \leq n \leq x < n+1$.

• $a \in (1; \infty)$.

• $q > 0$.

• $q = 0$.

• $q < 0$.

• $a \in (0; 1)$.

• $q < 0$.

• $q = 0$.

• $q > 0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$.

$$\bullet a \in (1; \infty).$$

$$\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}.$$

$$\bullet q > 0.$$

$$\bullet q = 0.$$

$$\bullet q < 0.$$

$$\bullet a \in (0; 1).$$

$$\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0.$$

$$\bullet q < 0.$$

$$\bullet q = 0.$$

$$\bullet q > 0.$$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$.

$$\bullet a \in (1; \infty).$$

$$\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}. \Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^x} \leq \frac{1}{a^n}.$$

$$\bullet q > 0.$$

$$\bullet q = 0.$$

$$\bullet q < 0.$$

$$\bullet a \in (0; 1).$$

$$\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0. \Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^x}.$$

$$\bullet q < 0.$$

$$\bullet q = 0.$$

$$\bullet q > 0.$$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n^q \leq x^q < (n+1)^q$ pre $q > 0$. $\bullet 1 \geq n^q \geq x^q > (n+1)^q > 0$ pre $q < 0$.

$\bullet a \in (1; \infty)$.

$\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{x^q}{a^x} < \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q > 0$.

$\bullet q > 0$.

$\bullet q = 0$.

$\bullet q < 0$.

$\bullet a \in (0; 1)$.

$\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet \frac{x^q}{a^x} > \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q < 0$.

$\bullet q < 0$.

$\bullet q = 0$.

$\bullet q > 0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n^q \leq x^q < (n+1)^q$ pre $q > 0$. $\bullet 1 \geq n^q \geq x^q > (n+1)^q > 0$ pre $q < 0$.

$\bullet a \in (1; \infty)$.

$\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{x^q}{a^x} < \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q > 0$.

$\bullet q > 0$. $\Rightarrow 0 \leq L_1 \leq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$

$\bullet q = 0$.

$\bullet q < 0$.

$\bullet a \in (0; 1)$.

$\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet \frac{x^q}{a^x} > \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q < 0$.

$\bullet q < 0$. $\Rightarrow L_1 \geq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$

$\bullet q = 0$.

$\bullet q > 0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n^q \leq x^q < (n+1)^q$ pre $q > 0$. $\bullet 1 \geq n^q \geq x^q > (n+1)^q > 0$ pre $q < 0$.

$\bullet a \in (1; \infty)$.

$\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{x^q}{a^x} < \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q > 0$.

$\bullet q > 0$. $\Rightarrow 0 \leq L_1 \leq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n}$

$\bullet q = 0$.

$\bullet q < 0$.

$\bullet a \in (0; 1)$.

$\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet \frac{x^q}{a^x} > \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q < 0$.

$\bullet q < 0$. $\Rightarrow L_1 \geq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n}$

$\bullet q = 0$.

$\bullet q > 0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n^q \leq x^q < (n+1)^q$ pre $q > 0$. $\bullet 1 \geq n^q \geq x^q > (n+1)^q > 0$ pre $q < 0$.

$\bullet a \in (1; \infty)$.

$\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{x^q}{a^x} < \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q > 0$.

$\bullet q > 0$. $\Rightarrow 0 \leq L_1 \leq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot 0 = 0$.

$\bullet q = 0$.

$\bullet q < 0$.

$\bullet a \in (0; 1)$.

$\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet \frac{x^q}{a^x} > \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q < 0$.

$\bullet q < 0$. $\Rightarrow L_1 \geq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot \infty = \infty$.

$\bullet q = 0$.

$\bullet q > 0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n^q \leq x^q < (n+1)^q$ pre $q > 0$. $\bullet 1 \geq n^q \geq x^q > (n+1)^q > 0$ pre $q < 0$.

$\bullet a \in (1; \infty)$.

$\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{x^q}{a^x} < \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q > 0$.

$\bullet q > 0$. $\Rightarrow 0 \leq L_1 \leq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot 0 = 0$. $\Rightarrow L_1 = 0$.

$\bullet q = 0$.

$\bullet q < 0$.

$\bullet a \in (0; 1)$.

$\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet \frac{x^q}{a^x} > \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q < 0$.

$\bullet q < 0$. $\Rightarrow L_1 \geq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot \infty = \infty$. $\Rightarrow L_1 = \infty$.

$\bullet q = 0$.

$\bullet q > 0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n^q \leq x^q < (n+1)^q$ pre $q > 0$. $\bullet 1 \geq n^q \geq x^q > (n+1)^q > 0$ pre $q < 0$.

$\bullet a \in (1; \infty)$.

$\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{x^q}{a^x} < \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q > 0$.

$\bullet q > 0$. $\Rightarrow 0 \leq L_1 \leq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot 0 = 0$. $\Rightarrow L_1 = 0$.

$\bullet q = 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{\infty} = 0$.

$\bullet q < 0$.

$\bullet a \in (0; 1)$.

$\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet \frac{x^q}{a^x} > \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q < 0$.

$\bullet q < 0$. $\Rightarrow L_1 \geq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot \infty = \infty$. $\Rightarrow L_1 = \infty$.

$\bullet q = 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{0^+} = \infty$.

$\bullet q > 0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n^q \leq x^q < (n+1)^q$ pre $q > 0$. $\bullet 1 \geq n^q \geq x^q > (n+1)^q > 0$ pre $q < 0$.

$\bullet a \in (1; \infty)$.

$$\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}. \Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^x} \leq \frac{1}{a^n}. \Rightarrow \bullet 0 < \frac{x^q}{a^x} < \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} \text{ pre } q > 0.$$

$$\bullet q > 0. \Rightarrow 0 \leq L_1 \leq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot 0 = 0. \Rightarrow L_1 = 0.$$

$$\bullet q = 0. \Rightarrow L_1 = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\bullet q < 0. \Rightarrow L_1 = \frac{0}{\infty} = 0.$$

$\bullet a \in (0; 1)$.

$$\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0. \Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^x}. \Rightarrow \bullet \frac{x^q}{a^x} > \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} \text{ pre } q < 0.$$

$$\bullet q < 0. \Rightarrow L_1 \geq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot \infty = \infty. \Rightarrow L_1 = \infty.$$

$$\bullet q = 0. \Rightarrow L_1 = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

$$\bullet q > 0. \Rightarrow L_1 = \frac{\infty}{0^+} = \infty.$$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q}$$

$[q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n^q \leq x^q < (n+1)^q$ pre $q > 0$. $\bullet 1 \geq n^q \geq x^q > (n+1)^q > 0$ pre $q < 0$.

$\bullet a \in (1; \infty)$.

$\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^x} \leq \frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{x^q}{a^x} < \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q > 0$.

$\bullet q > 0$. $\Rightarrow 0 \leq L_1 \leq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot 0 = 0$. $\Rightarrow L_1 = 0$.

$\bullet q = 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{\infty} = 0$.

$\bullet q < 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{0}{\infty} = 0$.

$\bullet q \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow L_2 = \frac{1}{L_1}$

$\bullet a \in (0; 1)$.

$\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet \frac{x^q}{a^x} > \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q < 0$.

$\bullet q < 0$. $\Rightarrow L_1 \geq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot \infty = \infty$. $\Rightarrow L_1 = \infty$.

$\bullet q = 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{0^+} = \infty$.

$\bullet q > 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{\infty}{0^+} = \infty$.

$\bullet q \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow L_2 = \frac{1}{L_1}$

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases} \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases} \quad [q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n^q \leq x^q < (n+1)^q$ pre $q > 0$. $\bullet 1 \geq n^q \geq x^q > (n+1)^q > 0$ pre $q < 0$.

$\bullet a \in (1; \infty)$. $\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^x} \leq \frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{x^q}{a^x} < \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q > 0$.

$\bullet q > 0$. $\Rightarrow 0 \leq L_1 \leq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot 0 = 0$. $\Rightarrow L_1 = 0$.

$\bullet q = 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{\infty} = 0$.

$\bullet q < 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{0}{\infty} = 0$.

$\bullet q \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow L_2 = \frac{1}{L_1} = \frac{1}{0^+} = \infty$.

$\bullet a \in (0; 1)$. $\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet \frac{x^q}{a^x} > \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q < 0$.

$\bullet q < 0$. $\Rightarrow L_1 \geq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot \infty = \infty$. $\Rightarrow L_1 = \infty$.

$\bullet q = 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{0^+} = \infty$.

$\bullet q > 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{\infty}{0^+} = \infty$.

$\bullet q \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow L_2 = \frac{1}{L_1} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Riešené príklady – Príklad

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases} \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^q} = \begin{cases} 0 & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (0; 1), \\ \infty & \text{pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \end{cases} \quad [q \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 0.]$$

Z príkladov 02-PrIV a 02-PrV vyplýva: $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x^q = \begin{cases} 0 & \text{pre } q < 0, \\ 1 & \text{pre } q = 0, \\ \infty & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ $\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pre } a \in (1; \infty), \\ 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0 & \text{pre } a \in (0; 1). \end{cases}$

Pre $x > 1$, $x \rightarrow \infty$ označme $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n \leq x < n+1$. $\Rightarrow \bullet 1 \leq n^q \leq x^q < (n+1)^q$ pre $q > 0$. $\bullet 1 \geq n^q \geq x^q > (n+1)^q > 0$ pre $q < 0$.

$\bullet a \in (1; \infty)$. $\bullet 1 < a \leq a^n \leq a^x < a^{n+1}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^x} \leq \frac{1}{a^n}$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{x^q}{a^x} < \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q > 0$.

$\bullet q > 0$. $\Rightarrow 0 \leq L_1 \leq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot 0 = 0$. $\Rightarrow L_1 = 0$.

$\bullet q = 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{\infty} = 0$.

$\bullet q < 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{0}{\infty} = 0$.

$\bullet q \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow L_2 = \frac{1}{L_1} = \frac{1}{0^+} = \infty$.

$\bullet a \in (0; 1)$. $\bullet 1 > a \geq a^n \geq a^x > a^{n+1} > 0$. $\Rightarrow \bullet 0 < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^x}$. $\Rightarrow \bullet \frac{x^q}{a^x} > \frac{(n+1)^q}{a^n} = a \cdot \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}}$ pre $q < 0$.

$\bullet q < 0$. $\Rightarrow L_1 \geq a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^q}{a^n} = a \cdot \infty = \infty$. $\Rightarrow L_1 = \infty$.

$\bullet q = 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{1}{0^+} = \infty$.

$\bullet q > 0$. $\Rightarrow L_1 = \frac{\infty}{0^+} = \infty$.

$\bullet q \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow L_2 = \frac{1}{L_1} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x & z \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x & z \rightarrow 0 \end{array} \middle| \ln(z + 1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z + 1)}{\ln a} \right]$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x & z \rightarrow 0 \end{array} \middle| \ln(z + 1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } z = a^x - 1 & x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x & z \rightarrow 0 \end{array} \middle| \ln(z + 1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z + 1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z + 1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z + 1)}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = a^x - 1 \mid x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \mid \ln(z + 1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z + 1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z + 1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z + 1)}$$
$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z + 1)}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{matrix} z = a^x - 1 & \left| \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x \end{matrix} \right| \end{matrix} \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{matrix} \left| \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} \end{aligned}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = a^x - 1 \\ z + 1 = a^x \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right| \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} \end{aligned}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{matrix} z = a^x - 1 & \left| \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x \end{matrix} \right| \end{matrix} \right. \left. \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{matrix} \right| \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \left. \vphantom{\begin{matrix} z = a^x - 1 \\ x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x \end{matrix}} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{matrix} z = a^x - 1 & \left| \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{matrix} \right. \\ z + 1 = a^x & \left| \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{matrix} \right. \end{matrix} \left| \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right. \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = a^x - 1 \mid x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \mid \ln(z + 1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = e^x - 1 \mid z + 1 = e^x \mid x \rightarrow 0 \\ \ln(z + 1) = x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = a^x - 1 \mid x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \mid \ln(z + 1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\bullet = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = e^x - 1 \mid z + 1 = e^x \mid x \rightarrow 0 \\ \ln(z+1) = x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z+1)}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = a^x - 1 \mid x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \mid \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\bullet = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = e^x - 1 \mid z + 1 = e^x \\ \ln(z+1) = x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \mid \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{z} \ln(z+1)}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{matrix} z = a^x - 1 & \left| \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x \end{matrix} \right. \end{matrix} \left| \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{matrix} \right. \right. \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \left. \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\bullet = \left[\text{Subst. } \begin{matrix} z = e^x - 1 & \left| \begin{matrix} z + 1 = e^x \\ \ln(z+1) = x \end{matrix} \right. \right. \left. \left| \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{matrix} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = a^x - 1 \\ z + 1 = a^x \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right. \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = e^x - 1 \\ \ln(z+1) = x \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} \\ &= \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} \end{aligned}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = a^x - 1 \\ z + 1 = a^x \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right. \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = e^x - 1 \\ z + 1 = e^x \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right. \ln(z+1) = x \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} \\ &= \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } z = a^x - 1 \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x \end{array} \right. \right. \left. \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } z = e^x - 1 \left| \begin{array}{l} z + 1 = e^x \\ \ln(z+1) = x \end{array} \right. \right. \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} \\ &= \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = a^x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x \end{array} \right. \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right. \right. \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \left. \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = e^x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} z + 1 = e^x \\ \ln(z+1) = x \end{array} \right. \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} \\ &= \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{3^x - 1} \right)$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = a^x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z + 1 = a^x \end{array} \right. \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right. \right. \left. \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = e^x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} z + 1 = e^x \\ \ln(z+1) = x \end{array} \right. \right. \left. \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} \\ &= \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{3^x - 1} \right) = \ln 2 \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{pre } a > 0, a \neq 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = a^x - 1 \\ z + 1 = a^x \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right. \ln(z+1) = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow x = \frac{\ln(z+1)}{\ln a} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\ln(z+1)}{\ln a}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \ln a}{\ln(z+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} z = e^x - 1 \\ \ln(z+1) = x \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{z} \ln(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(z+1)^{\frac{1}{z}}} \\ &= \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{3^x - 1} \right) = \ln 2 \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst.} & x \rightarrow 0 \\ z = \sin^2 x & z \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

$$\bullet = [x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x - 1 \rightarrow 0]$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cotg^2 x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst.} & x \rightarrow 0 & \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ z = \sin^2 x & z \rightarrow 0 & \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right]$$

$$\bullet = [x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x - 1 \rightarrow 0] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \cdot (\cos x - 1) \right]^{\cotg^2 x}$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cotg^2 x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x \rightarrow 0 & \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ z = \sin^2 x & z \rightarrow 0 & x \in O(0) \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = |\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1 - z)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} (1 - z)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= [x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x - 1 \rightarrow 0] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \cdot (\cos x - 1) \right]^{\cotg^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right] (\cos x - 1) \cdot \cotg^2 x \end{aligned}$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cotg^2 x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \rightarrow 0 \\ \hline z = \sin^2 x & z \rightarrow 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right| \begin{array}{l} x \in O(0) \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = |\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1 - z)^{\frac{1}{2}} \\ x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow \cotg^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - z}{z} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1-z}{z}}$$

$$\bullet = \left[x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x - 1 \rightarrow 0 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \cdot (\cos x - 1) \right]^{\cotg^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{(\cos x - 1) \cdot \cotg^2 x} = e$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \rightarrow 0 \\ \hline z = \cos x - 1 & z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cotg^2 x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \sin^2 x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x \in O(0) \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = |\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1 - z)^{\frac{1}{2}} \\ x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow \cotg^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - z}{z} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1-z}{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{z}} \right]^{\frac{1-z}{2}}$$

$$\bullet = \left[x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x - 1 \rightarrow 0 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \cdot (\cos x - 1) \right]^{\cotg^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{(\cos x - 1) \cdot \cotg^2 x} = e$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \cos x - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \cotg^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \sin^2 x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x \in O(0) \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = |\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1 - z)^{\frac{1}{2}} \\ x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - z}{z} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1-z}{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{z}} \right]^{\frac{1-z}{2}} = (e^{-1})^{\frac{1-0}{2}}$$

$$\bullet = \left[x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x - 1 \rightarrow 0 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \cdot (\cos x - 1) \right]^{\cot^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{(\cos x - 1) \cdot \cot^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \cos x - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \cot^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \frac{\cos^2 x}{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} = - \frac{\cos^2 0}{1 + \cos 0} = - \frac{1^2}{1 + 1} = - \frac{1}{2}.$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cotg^2 x} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \sin^2 x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Uvažujeme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x \in O(0) \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = |\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1 - z)^{\frac{1}{2}} \\ x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow \cotg^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - z}{z} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1-z}{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{z}} \right]^{\frac{1-z}{2}} = (e^{-1})^{\frac{1-0}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$\bullet = [x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x - 1 \rightarrow 0] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \cdot (\cos x - 1) \right]^{\cotg^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{(\cos x - 1) \cdot \cotg^2 x} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \cos x - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \cotg^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \frac{\cos^2 x}{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} = - \frac{\cos^2 0}{1 + \cos 0} = - \frac{1^2}{1 + 1} = - \frac{1}{2}.$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ z = \cos^2 2x & z \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t = 2x & t \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right]$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} & x \rightarrow \frac{\pi}{4} & \text{Uvažujme okolie } O(\frac{\pi}{4}) = (0; \frac{\pi}{2}) \\ z = \cos^2 2x & z \rightarrow 0 & \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right]$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t = 2x & t \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\operatorname{tg}^2 t}$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \cos^2 2x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ z \rightarrow 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Uvažujme okolie } O(\frac{\pi}{4}) = (0; \frac{\pi}{2}) \\ \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right| x \in O(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x > 0 \Rightarrow \sin 2x = |\sin 2x| = \sqrt{1 - \cos^2 2x} = (1 - \cos^2 2x)^{\frac{1}{2}} = (1 - z)^{\frac{1}{2}} \left. \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} (1 - z)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ t = 2x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\operatorname{tg}^2 t} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} \cdot (\sin t - 1) \right]^{\operatorname{tg}^2 t}$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \cos^2 2x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{Uvažujeme okolie } O(\frac{\pi}{4}) = (0; \frac{\pi}{2}) \\ \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x \in O(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x > 0 \Rightarrow \sin 2x = |\sin 2x| = \sqrt{1 - \cos^2 2x} = (1 - \cos^2 2x)^{\frac{1}{2}} = (1 - z)^{\frac{1}{2}} \\ x \in O(\frac{\pi}{4}) - \{\frac{\pi}{4}\} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1 - \cos^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1 - z}{z} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1 - z}{z}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ t = 2x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\operatorname{tg}^2 t} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} \cdot (\sin t - 1) \right]^{\operatorname{tg}^2 t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} \right]^{(\sin t - 1) \cdot \operatorname{tg}^2 t} = e$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \sin t - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \cos^2 2x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{Uvažujme okolie } O(\frac{\pi}{4}) = (0; \frac{\pi}{2}) \\ \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x \in O(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x > 0 \Rightarrow \sin 2x = |\sin 2x| = \sqrt{1 - \cos^2 2x} = (1 - \cos^2 2x)^{\frac{1}{2}} = (1 - z)^{\frac{1}{2}} \\ x \in O(\frac{\pi}{4}) - \{\frac{\pi}{4}\} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1 - \cos^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1 - z}{z} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1 - z}{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{z}} \right]^{\frac{1 - z}{2}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ t = 2x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\operatorname{tg}^2 t} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} \cdot (\sin t - 1) \right]^{\operatorname{tg}^2 t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} \right]^{(\sin t - 1) \cdot \operatorname{tg}^2 t} = e$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \sin t - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t - 1) \cdot \operatorname{tg}^2 t = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t - 1) \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t - 1) \cdot \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t}$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ z = \cos^2 2x & z \rightarrow 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Uvažujeme okolie } O(\frac{\pi}{4}) = (0; \frac{\pi}{2}) \\ \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x \in O(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x > 0 \Rightarrow \sin 2x = |\sin 2x| = \sqrt{1 - \cos^2 2x} = (1 - \cos^2 2x)^{\frac{1}{2}} = (1 - z)^{\frac{1}{2}} \\ x \in O(\frac{\pi}{4}) - \{\frac{\pi}{4}\} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1 - \cos^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1 - z}{z} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1 - z}{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{z}} \right]^{\frac{1 - z}{2}} = (e^{-1})^{\frac{1 - 0}{2}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t = 2x & t \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\operatorname{tg}^2 t} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} \cdot (\sin t - 1) \right]^{\operatorname{tg}^2 t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} \right]^{(\sin t - 1) \cdot \operatorname{tg}^2 t} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.} & t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ z = \sin t - 1 & z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t - 1) \cdot \operatorname{tg}^2 t = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t - 1) \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t - 1) \cdot \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t - 1) \cdot \frac{\sin^2 t}{(1 - \sin t) \cdot (1 + \sin t)} = - \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1 + \sin t} = - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = - \frac{1^2}{1 + 1} = - \frac{1}{2}.$$

Riešené príklady – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \cos^2 2x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{Uvažujeme okolie } O(\frac{\pi}{4}) = (0; \frac{\pi}{2}) \\ \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \text{ pre } x \in R \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x \in O(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sin 2x > 0 \Rightarrow \sin 2x = |\sin 2x| = \sqrt{1 - \cos^2 2x} = (1 - \cos^2 2x)^{\frac{1}{2}} = (1 - z)^{\frac{1}{2}} \\ x \in O(\frac{\pi}{4}) - \{\frac{\pi}{4}\} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1 - \cos^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1 - z}{z} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1 - z}{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 - z)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1 - z}{2}} = (e^{-1})^{\frac{1 - 0}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ t = 2x \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\operatorname{tg}^2 t} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} \cdot (\sin t - 1) \right]^{\operatorname{tg}^2 t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} \right]^{(\sin t - 1) \cdot \operatorname{tg}^2 t} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin t - 1)^{\frac{1}{\sin t - 1}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \sin t - 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t - 1) \cdot \operatorname{tg}^2 t = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t - 1) \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t - 1) \cdot \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin t - 1) \cdot \frac{\sin^2 t}{(1 - \sin t) \cdot (1 + \sin t)} = - \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1 + \sin t} = - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = - \frac{1^2}{1 + 1} = - \frac{1}{2}.$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

pre všetky $a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

pre všetky $a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}}$$



Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

pre všetky $a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$



Riešené příklady – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

pre všetky $a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{1}{x-a}}$$



Riešené příklady – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

pre všetky $a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{1}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin x - \sin a}{x-a}} \end{aligned}$$



Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

pre všetky $a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{1}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin x - \sin a}{x-a}} = e^{\frac{1}{\sin a}} \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \sin x - \sin a \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot z \right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$



Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

pre všetky $a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{1}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin x - \sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}} \right]^{\cos a} \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z = \sin x - \sin a \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot z \right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right] = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ z = \frac{x-a}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos \frac{a+a}{2} = \cos a. \end{aligned}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

pre všetky $a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{1}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin x - \sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}} \right]^{\cos a} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z = \sin x - \sin a \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot z \right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right] = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ z = \frac{x-a}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos \frac{a+a}{2} = \cos a. \end{aligned}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\cotg a} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{1}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin x - \sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}} \right]^{\cos a} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\cotg a}. \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z = \sin x - \sin a \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot z \right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right] = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ z = \frac{x-a}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos \frac{a+a}{2} = \cos a. \end{aligned}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\cotg a} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{1}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin x - \sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}} \right]^{\cos a} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\cotg a}. \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z = \sin x - \sin a \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot z \right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right] = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z = \frac{x-a}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos \frac{a+a}{2} = \cos a. \end{aligned}$$

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O(a) - \{a\}$, existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\cotg a} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{1}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin x - \sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}} \right]^{\cos a} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\cotg a}. \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z = \sin x - \sin a \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot z \right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right] = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z = \frac{x-a}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos \frac{a+a}{2} = \cos a. \end{aligned}$$

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O(a) - \{a\}$, existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\cotg a} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{1}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin x - \sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}} \right]^{\cos a} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\cotg a}. \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z = \sin x - \sin a \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot z \right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right] = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z = \frac{x-a}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos \frac{a+a}{2} = \cos a. \end{aligned}$$

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O(a) - \{a\}$, existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ z = f(x) \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\cotg a} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{1}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin x - \sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}} \right]^{\cos a} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\cotg a}. \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z = \sin x - \sin a \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot z \right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right] = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z = \frac{x-a}{2} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos \frac{a+a}{2} = \cos a. \end{aligned}$$

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O(a) - \{a\}$, existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ z = f(x) \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow a \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (1 \pm z)^{\frac{1}{z}}$$

Riešené príklady – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\cotg a} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x}{\sin a} - 1 \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{\sin x - \sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{1}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin x - \sin a}{x-a}} = \left[e^{\frac{1}{\sin a}} \right]^{\cos a} = e^{\frac{\cos a}{\sin a}} = e^{\cotg a}. \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot (\sin x - \sin a) \right)^{\frac{1}{\sin x - \sin a}} = \left[\text{Subst. } \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ z = \sin x - \sin a \end{matrix} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\sin a} \cdot z \right)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\sin a}}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos \frac{x+a}{2} \right] = \left[\text{Subst. } \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ z = \frac{x-a}{2} \end{matrix} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos \frac{a+a}{2} = \cos a. \end{aligned}$$

Bod $a \in \mathbb{R}^*$, funkcia f je definovaná v nejakom okolí $O(a) - \{a\}$, existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

$$\Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \left[\text{Subst. } \begin{matrix} x \rightarrow a \\ z = f(x) \end{matrix} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} (1 \pm z)^{\frac{1}{z}} = e^{\pm 1}.$$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$



- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x}$



Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right]$



- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right]$



Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x}$$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sin x}$$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1}$$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene správny kuchársky recept.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$

- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1}$

- V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$

- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1}$

- V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x}$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1}$$

- V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = \sin z \mid x \rightarrow 0 \\ z = \arcsin x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = \sin z \mid x \rightarrow 1 \\ z = \arcsin x \mid z \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right]$$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1}$$

- V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = \sin z \mid x \rightarrow 0 \\ z = \arcsin x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = \sin z \mid x \rightarrow 1 \\ z = \arcsin x \mid z \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{z}{\sin z}$$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- Substitúcia je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1}$$

- V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = \sin z \mid x \rightarrow 0 \\ z = \arcsin x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = \sin z \mid x \rightarrow 1 \\ z = \arcsin x \mid z \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{z}{\sin z} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- **Substitúcia** je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1} \approx 1,188\,395.$$

- V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = \sin z \mid x \rightarrow 0 \\ z = \arcsin x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = \sin z \mid x \rightarrow 1 \\ z = \arcsin x \mid z \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{z}{\sin z} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2} \approx 1,570\,796.$$

Riešené príklady – Varíme s MA (2. recept: Kalerábový závin bez umu)

- **Substitúcia** je jednoduchý a veľmi účinný prostriedok na výpočet limit

a mnohé „

“ ho ignorujú.

Zaručene nesprávny kuchársky recept.

[Samozrejme nesprávny postup výpočtu limity.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

- Výsledok je (náhodou) správny, ale postup je úplne mimo realitu.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Kalerábové sínusovanie} \\ \sin \arcsin x = x \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \arcsin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1} \approx 1,188\,395.$$

- V tomto prípade je úplne mimo realitu nielen postup, ale aj výsledok.

Jeden zo správnych ~~kuchárskych receptov~~ postupov.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = \sin z \mid x \rightarrow 0 \\ z = \arcsin x \mid z \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = \sin z \mid x \rightarrow 1 \\ z = \arcsin x \mid z \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{z}{\sin z} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2} \approx 1,570\,796.$$

[V tomto prípade stačí dosadiť príslušné hodnoty: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{x} = \frac{\arcsin 1}{1} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.]

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm \infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{\pm \infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm \infty}. \bullet 1^{\pm \infty}. \bullet (\pm \infty)^0.$$

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm \infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{\pm \infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm \infty}. \bullet 1^{\pm \infty}. \bullet (\pm \infty)^0.$$

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamým dosadením,

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm \infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{\pm \infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm \infty}. \bullet 1^{\pm \infty}. \bullet (\pm \infty)^0.$$

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limit.]

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

• $\infty - \infty$. • $\pm\infty \cdot 0$. • $\frac{0}{0}$. • $\frac{1}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{0}$. • $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. • 0^0 . • $0^{\pm\infty}$. • $1^{\pm\infty}$. • $(\pm\infty)^0$.

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limit.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný.

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm\infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm\infty}{0}. \bullet \frac{\pm\infty}{\pm\infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm\infty}. \bullet 1^{\pm\infty}. \bullet (\pm\infty)^0.$$

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limit.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný.

[Aj keď sa stále v praxi používa.]

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm \infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{\pm \infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm \infty}. \bullet 1^{\pm \infty}. \bullet (\pm \infty)^0.$$

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limit.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm \infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{\pm \infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm \infty}. \bullet 1^{\pm \infty}. \bullet (\pm \infty)^0.$$

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limit.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.
[Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm \infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{\pm \infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm \infty}. \bullet 1^{\pm \infty}. \bullet (\pm \infty)^0.$$

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamým dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limit.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch. [Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]
- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto **limita vôbec existuje**.

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm \infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{\pm \infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm \infty}. \bullet 1^{\pm \infty}. \bullet (\pm \infty)^0.$$

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamym dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limit.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch. [Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]
- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto **limita vôbec existuje**.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{a}{\ln x}} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm\infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm\infty}{0}. \bullet \frac{\pm\infty}{\pm\infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm\infty}. \bullet 1^{\pm\infty}. \bullet (\pm\infty)^0.$$

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamym dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limit.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch. [Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]
- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto **limita vôbec existuje**.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{a}{\ln x}} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ x > 0 \end{array} \middle| \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \right]$$

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm\infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm\infty}{0}. \bullet \frac{\pm\infty}{\pm\infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm\infty}. \bullet 1^{\pm\infty}. \bullet (\pm\infty)^0.$$

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamym dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limit.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.
[Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]
- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto **limita vôbec existuje**.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{a}{\ln x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}} = e^{\ln \left(x^{\frac{a}{\ln x}} \right)} = e^{\frac{a}{\ln x} \cdot \ln x} = e^a. \end{array} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{a}{\ln x}} \quad \text{pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{a}{\ln x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}} = e^{\ln \left(x^{\frac{a}{\ln x}} \right)} = e^{\frac{a}{\ln x} \cdot \ln x} = e^a. \end{array} \right]$$

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm \infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{0}. \bullet \frac{\pm \infty}{\pm \infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm \infty}. \bullet 1^{\pm \infty}. \bullet (\pm \infty)^0.$$

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamym dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limit.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.
[Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]
- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto **limita vôbec existuje**.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}}$ pre všetky $a \in \mathbb{R}$.

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{a}{\ln x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}} = e^{\ln \left(x^{\frac{a}{\ln x}} \right)} = e^{\frac{a}{\ln x} \cdot \ln x} = e^a. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^a$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{a}{\ln x}}$ pre všetky $a \in \mathbb{R}$.

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{a}{\ln x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}} = e^{\ln \left(x^{\frac{a}{\ln x}} \right)} = e^{\frac{a}{\ln x} \cdot \ln x} = e^a. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} e^a$$

Neurčité výrazy – Definícia

Neurčitými výrazmi nazývame výrazy typu:

$$\bullet \infty - \infty. \bullet \pm\infty \cdot 0. \bullet \frac{0}{0}. \bullet \frac{1}{0}. \bullet \frac{\pm\infty}{0}. \bullet \frac{\pm\infty}{\pm\infty}. \bullet 0^0. \bullet 0^{\pm\infty}. \bullet 1^{\pm\infty}. \bullet (\pm\infty)^0.$$

[Uvedené výrazy nemôžeme počítať priamym dosadením, preto ich musíme počítať nepriamo, najčastejšie pomocou limit.]

- Názov **neurčitý výraz** je z vecného hľadiska nevhodný. [Aj keď sa stále v praxi používa.]
- Neurčité výrazy sa najčastejšie počítajú ako **limity zodpovedajúcich funkcií** v daných bodoch.
[Na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje (vlastná alebo nevlastná) alebo neexistuje.]
- Problém je v tom, že (väčšinou) na prvý pohľad nevieme určiť, či takáto **limita vôbec existuje**.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}} = e^a \text{ pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{a}{\ln x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}} = e^{\ln(x^{\frac{a}{\ln x}})} = e^{\frac{a}{\ln x} \cdot \ln x} = e^a. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^a = e^a.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{a}{\ln x}} = e^a \text{ pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{a}{\ln x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{a}{\ln x}} = e^{\ln(x^{\frac{a}{\ln x}})} = e^{\frac{a}{\ln x} \cdot \ln x} = e^a. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} e^a = e^a.$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \right]$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} x \rightarrow 0^+ & \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x > 0 & x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right]$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = [x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty.]$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{(-\infty)^2}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right]$$

$$= e^{(-\infty)^2} = e^\infty$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right]$$

$$= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right]$$

$$= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right]$$

$$= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \end{array} \right. \right]$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right]$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right]$$

$$= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right]$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{\frac{-\infty}{0^+}}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{(-\infty)^2} = e^\infty = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right]$$

$$= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right]$$

$$= e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = [x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty.]$$

$$= e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = [x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty.]$$

$$= e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \end{array} \right]$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right]$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{(-\infty)^2} = e^{\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ x > 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{(-\infty)^2} = e^\infty = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = \ln x \\ x = e^z \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^z} = \left[\text{VIP limity, resp. 05-PrI: } L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = 0 \text{ pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \right] = 0.$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x} = \infty$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\ln x} > 0. \Rightarrow x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln^2 x} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{(-\infty)^2} = e^\infty = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \left[x \rightarrow 0^+, \Rightarrow \ln x \rightarrow -\infty. \right] \\ = e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ x > 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{Pre } f(x) > 0 \text{ platí } f(x) = e^{\ln f(x)}. \\ x^{\frac{1}{x}} > 0. \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } z = \ln x \\ x = e^z \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{e^z} = \left[\text{VIP limity, resp. 05-PrI: } L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{a^x} = 0 \text{ pre } q \in \mathbb{R}, a \in (1; \infty). \right] = 0.$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \right] \text{05-Pr V: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \Bigg] = e^{-1}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-Pr V: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} x \rightarrow 0 & \text{05-Pr V: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \sin x \rightarrow 0 & \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right]$$

$$= (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l|l} x \rightarrow 0 & \text{05-PrV: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \sin x \rightarrow 0 & \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right]$$

$$= (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-Pr V: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \end{array} \right. \right]$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-PrV: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-PrV: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x)}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-PrV: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \mid x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \mid \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x)} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \cdot (-\infty) = +\infty \end{array} \right]$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-PrV: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \mid x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \mid \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x)} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \cdot (-\infty) = +\infty \end{array} \right] \\ = \begin{cases} e^{+\infty} & \text{pre } x \rightarrow 0^-, \end{cases}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-PrV: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \\ \text{Uvažujme okolí } O(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \\ \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x)} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \end{array} \right] \\ = \left\{ \right.$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-PrV: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \\ \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x)} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \end{array} \right] \\ = \left\{ e^{-\infty} \right. \quad \text{pre } x \rightarrow 0^+.$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-PrV: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \\ \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x)} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \cdot (-\infty) = +\infty \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \end{array} \right] \\ = \begin{cases} e^{+\infty} & \text{pre } x \rightarrow 0^-, \\ e^{-\infty} & \text{pre } x \rightarrow 0^+. \end{cases}$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-PrV: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \\ \text{Uvažujme okolie } O(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \\ \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x)} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \cdot (-\infty) = +\infty \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \end{array} \right] \\ = \begin{cases} e^{+\infty} = \infty & \text{pre } x \rightarrow 0^-, \\ e^{-\infty} & \text{pre } x \rightarrow 0^+. \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty.$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-PrV: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \\ \text{Uvažujme okolí } O(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \\ \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x)} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \cdot (-\infty) = +\infty \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \end{array} \right] \\ = \begin{cases} e^{+\infty} = \infty & \text{pre } x \rightarrow 0^-, \\ e^{-\infty} = 0 & \text{pre } x \rightarrow 0^+. \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Neurčité výrazy – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin x \rightarrow 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{05-PrV: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 \pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\pm 1} \\ \text{VIP limity: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right. \right] \\ = (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}} \text{ neexistuje.}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0 \\ \text{Uvažujme okolí } O(0) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \left| \begin{array}{l} x \in O(0) - \{0\} \Rightarrow 1 > \cos x > 0 \Rightarrow 1 - \cos x > 0 \\ \Rightarrow 1 - \cos x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \end{array} \right. \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x)} = \left[\begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty \cdot (-\infty) = +\infty \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \ln(1 - \cos x) \rightarrow +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \end{array} \right] \\ = \left\{ \begin{array}{l} e^{+\infty} = \infty \text{ pre } x \rightarrow 0^-, \\ e^{-\infty} = 0 \text{ pre } x \rightarrow 0^+. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}} \nexists.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$,

- = Tvrdenie 02 NL III:

Neurčité výrazy – Príklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}$.
-

- = $\left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \right]$

Neurčité výrazy – Príklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h)$.

- = $\left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \right]$

Neurčité výrazy – Príklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h) \Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$

- = $\left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right]$

Neurčité výrazy – Príklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

• = $\left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right]$

- Funkcia $f(x) = \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je ohraničená.

Neurčité výrazy – Príklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

• $\left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right]$

- Funkcia $f(x) = \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je ohraničená.
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Neurčité výrazy – Príklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = 0.$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

$$\bullet = \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right] = 0.$$

- Funkcia $f(x) = \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je ohraničená.
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Neurčité výrazy – Příklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
 - $x \in D(h) \Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).
-

- $x \rightarrow 0^-$.

- $x \rightarrow 0^+$.

Neurčité výrazy – Příklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h) \Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \rightarrow 0^- \Rightarrow L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$.

- $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$.

Neurčité výrazy – Příklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \rightarrow 0^-$. $\Rightarrow L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$.
 $\Rightarrow x < 0$.

- $x \rightarrow 0^+$. $\Rightarrow L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$.
 $\Rightarrow x > 0$.

Neurčité výrazy – Příklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h) \Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \rightarrow 0^- \Rightarrow L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x).$
 $\Rightarrow x < 0. \Rightarrow 0 \geq h(x) \geq x.$

- $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x).$
 $\Rightarrow x > 0. \Rightarrow 0 \leq h(x) \leq x.$

Neurčité výrazy – Příklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \rightarrow 0^-$. $\Rightarrow L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$.
 $\Rightarrow x < 0$. $\Rightarrow 0 \geq h(x) \geq x$. $\Rightarrow 0 \geq L^- \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$.

- $x \rightarrow 0^+$. $\Rightarrow L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$.
 $\Rightarrow x > 0$. $\Rightarrow 0 \leq h(x) \leq x$. $\Rightarrow 0 \leq L^+ \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$.

Neurčité výrazy – Příklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \rightarrow 0^-$. $\Rightarrow L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$.

$$\Rightarrow x < 0. \Rightarrow 0 \geq h(x) \geq x. \Rightarrow 0 \geq L^- \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0. \Rightarrow \bullet L^- = 0.$$

- $x \rightarrow 0^+$. $\Rightarrow L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$.

$$\Rightarrow x > 0. \Rightarrow 0 \leq h(x) \leq x. \Rightarrow 0 \leq L^+ \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \Rightarrow \bullet L^+ = 0.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = 0.$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

-
- $x \rightarrow 0^-$. $\Rightarrow L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$.
 $\Rightarrow x < 0$. $\Rightarrow 0 \geq h(x) \geq x$. $\Rightarrow 0 \geq L^- \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$. $\Rightarrow \bullet L^- = 0$.
 - $x \rightarrow 0^+$. $\Rightarrow L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$.
 $\Rightarrow x > 0$. $\Rightarrow 0 \leq h(x) \leq x$. $\Rightarrow 0 \leq L^+ \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$. $\Rightarrow \bullet L^+ = 0$.
- } $\Rightarrow \bullet L = 0$.
-

Neurčité výrazy – Príklad

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = 0.$$

- $h: y = x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je definovaná pre $\cos \frac{1}{x} \geq 0$, t. j. pre x také, že $\frac{1}{x} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \in D(h)$. $\Rightarrow 0 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$. $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos \frac{1}{x}} \leq 1$ (ohraničená).

- $x \rightarrow 0^-$. $\Rightarrow L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$.
 - $x \rightarrow 0^+$. $\Rightarrow L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$.
- $$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow x < 0. \Rightarrow 0 \geq h(x) \geq x. \Rightarrow 0 \geq L^- \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0. \Rightarrow \bullet L^- = 0. \\ \Rightarrow x > 0. \Rightarrow 0 \leq h(x) \leq x. \Rightarrow 0 \leq L^+ \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \Rightarrow \bullet L^+ = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet L = 0.$$

- $= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right] = 0.$

- Funkcia $f(x) = \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ je ohraničená.
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

- $x \rightarrow 0^-$.

- $x \rightarrow 0^+$.

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$\bullet x \rightarrow 0^-. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$\bullet x \rightarrow 0^+. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$$

$$\bullet x \rightarrow 0^-. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \mid x \rightarrow 0^- \mid x < 0 \\ z = \frac{1}{x} \mid z \rightarrow -\infty \mid z < 0 \end{array} \right]$$

$$\bullet x \rightarrow 0^+. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \mid x \rightarrow 0^+ \mid x > 0 \\ z = \frac{1}{x} \mid z \rightarrow \infty \mid z > 0 \end{array} \right]$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$$

$$\bullet x \rightarrow 0^-. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ z \rightarrow -\infty \end{array} \right| \begin{array}{l} x < 0 \\ z < 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{|z|}{z}$$

$$\bullet x \rightarrow 0^+. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Subst.} \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right| \begin{array}{l} x > 0 \\ z > 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|z|}{z}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$\bullet x \rightarrow 0^-. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst.} \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \left| \begin{array}{l} x < 0 \\ z \rightarrow -\infty \\ z < 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z}$$

$$\bullet z < 0. \Rightarrow z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z < 0.$$

$$\bullet x \rightarrow 0^+. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst.} \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \left| \begin{array}{l} x > 0 \\ z \rightarrow \infty \\ z > 0 \end{array} \right. \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z}$$

$$\bullet z > 1. \Rightarrow 0 < z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$\bullet x \rightarrow 0^-. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \right| \begin{array}{l} x < 0 \\ z \rightarrow -\infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z}$$

$$\bullet z < 0. \Rightarrow z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z < 0. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \geq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \geq \frac{z}{z} = 1.$$

$$\bullet x \rightarrow 0^+. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \right| \begin{array}{l} x > 0 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z}$$

$$\bullet z > 1. \Rightarrow 0 < z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \leq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \leq \frac{z}{z} = 1.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$\bullet x \rightarrow 0^-. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x < 0 \\ z \rightarrow -\infty \end{array} \middle| \begin{array}{l} x < 0 \\ z < 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z}$$

$$\bullet z < 0. \Rightarrow z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z < 0. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \geq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \geq \frac{z}{z} = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \geq \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \geq 1.$$

$$\bullet x \rightarrow 0^+. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ z > 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z}$$

$$\bullet z > 1. \Rightarrow 0 < z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \leq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \leq \frac{z}{z} = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \leq 1.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$\bullet x \rightarrow 0^-. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x < 0 \\ z \rightarrow -\infty \end{array} \middle| \begin{array}{l} x < 0 \\ z < 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z}$$

$$\bullet z < 0. \Rightarrow z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z < 0. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \geq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \geq \frac{z}{z} = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet 1 = 1 - 0 = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \geq \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \geq 1.$$

$$\bullet x \rightarrow 0^+. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ z \rightarrow \infty \end{array} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ z > 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z}$$

$$\bullet z > 1. \Rightarrow 0 < z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \leq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \leq \frac{z}{z} = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet 1 = 1 - 0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \leq 1.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$\bullet x \rightarrow 0^-. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x < 0 \\ z < 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} = 1.$$

$$\bullet z < 0. \Rightarrow z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z < 0. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \geq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \geq \frac{z}{z} = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet 1 = 1 - 0 = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \geq \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \geq 1.$$

$$\bullet x \rightarrow 0^+. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ z > 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} = 1.$$

$$\bullet z > 1. \Rightarrow 0 < z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \leq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \leq \frac{z}{z} = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet 1 = 1 - 0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \leq 1.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$\bullet x \rightarrow 0^-. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x < 0 \\ z < 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} = 1.$$

$$\bullet z < 0. \Rightarrow z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z < 0. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \geq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \geq \frac{z}{z} = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet 1 = 1 - 0 = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \geq \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \geq 1.$$

$$\bullet x \rightarrow 0^+. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ z > 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} = 1.$$

$$\bullet z > 1. \Rightarrow 0 < z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \leq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \leq \frac{z}{z} = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet 1 = 1 - 0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \leq 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1.$$

$$\bullet x \rightarrow 0^-. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0^- \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x < 0 \\ z < 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} = 1.$$

$$\bullet z < 0. \Rightarrow z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z < 0. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \geq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \geq \frac{z}{z} = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet 1 = 1 - 0 = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \geq \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \geq 1.$$

$$\bullet x \rightarrow 0^+. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left[\text{Subst. } \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ z = \frac{1}{x} \end{array} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ z > 0 \end{array} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} = 1.$$

$$\bullet z > 1. \Rightarrow 0 < z - 1 \leq \lfloor z \rfloor \leq z. \Rightarrow 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z} \leq \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \leq \frac{z}{z} = 1.$$

$$\Rightarrow \bullet 1 = 1 - 0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\lfloor z \rfloor}{z} \leq 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$



Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

• $= \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$



Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

• $= \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

$$\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

$$\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III:} \right]$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

$$\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \right]$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

$$\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \right]$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

$$\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right]$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

$$\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right]$$

$$\bullet \text{ Funkcia } f(x) = \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \text{ je ohraničená, pre všetky } x \in \mathbb{R} \text{ platí } -1 \leq f(x) \leq 1.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

$$\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right]$$

$$\bullet \text{ Funkcia } f(x) = \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \text{ je ohraničená, pre všetky } x \in \mathbb{R} \text{ platí } -1 \leq f(x) \leq 1.$$

$$\bullet \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

$$\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right]$$

$$\bullet \text{ Funkcia } f(x) = \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \text{ je ohraničená, pre všetky } x \in \mathbb{R} \text{ platí } -1 \leq f(x) \leq 1.$$

$$\bullet \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

- $\left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right]$$

- Funkcia $f(x) = \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}$ je ohraničená, pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $-1 \leq f(x) \leq 1$.

- $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{(x+1) - (x-1)}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

- $\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right]$$

- $\bullet$ Funkcia $f(x) = \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}$ je ohraničená, pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $-1 \leq f(x) \leq 1$.

- $\bullet \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{(x+1) - (x-1)}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

$$\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right]$$

$$\bullet \text{ Funkcia } f(x) = \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \text{ je ohraničená, pre všetky } x \in \mathbb{R} \text{ platí } -1 \leq f(x) \leq 1.$$

$$\bullet \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{(x+1) - (x-1)}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \sin \frac{1}{\infty} = \sin 0 = 0.$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right)$$

$$\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0 \right] = 2 \cdot 0$$

$$\bullet \text{ Funkcia } f(x) = \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \text{ je ohraničená, pre všetky } x \in \mathbb{R} \text{ platí } -1 \leq f(x) \leq 1.$$

$$\bullet \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{(x+1) - (x-1)}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \sin \frac{1}{\infty} = \sin 0 = 0.$$

Neurčité výrazy – Príklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x-1} \right) = 0$$

$$\bullet = \left[\text{Pre všetky } x, y \in \mathbb{R} \text{ platí } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \right)$$

$$= \left[\text{Tvrdenie 02 NL III: } f \text{ je ohraničená v okolí } O(a) - \{a\}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0. \right] = 2 \cdot 0 = 0.$$

$$\bullet \text{ Funkcia } f(x) = \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \text{ je ohraničená, pre všetky } x \in \mathbb{R} \text{ platí } -1 \leq f(x) \leq 1.$$

$$\bullet \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{(x+1) - (x-1)}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \sin \frac{1}{\infty} = \sin 0 = 0.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$



Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}}$$



Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$



Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{(nx)^{n+1}} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Aritmetický rad} \\ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{(nx)^{n+1}} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Aritmetický rad} \\ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \end{aligned}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{(nx)^n+1} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \end{aligned}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{(nx)^n+1} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \end{aligned}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{(nx)^{n+1}} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \end{aligned}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{(nx)^n+1} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n+\frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}} \end{aligned}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left((nx)^n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{\left(n^n+0\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} \end{aligned}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \text{ pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \text{ pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{\left(n^n+0\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad n = 2.$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \text{ pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1^n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

$$\bullet \ n = 2. \Rightarrow \bullet \ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \text{ pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{\left(n^n+0\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1^n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad n = 2. \Rightarrow \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^3}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \text{ pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{\left(n^n+0\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1^n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

$$\bullet \ n = 2. \Rightarrow \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^3}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \text{ pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{\left(n^n+0\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1^n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad n = 2. \Rightarrow \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^3}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \left[x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \right] \end{aligned}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \text{ pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1^n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad n = 2. \Rightarrow \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^3}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \left[x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \right] = \frac{(1+0)(1+0)}{(2^2+0)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Neurčité výrazy – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}} \text{ pre } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x \left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2 \cdots \left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot (x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{1+2+\cdots+n}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{Aritmetický rad} \\ 1+2+\cdots+n = \frac{(1+n)n}{2} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty^n}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\left(1+\frac{1}{\infty}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\infty}\right)}{\left(n^n + \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(n^n+0)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{1^n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad n = 2. \Rightarrow \bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^3}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \left[x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \right] = \frac{(1+0)(1+0)}{(2^2+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Koniec 6. časti

Ďakujem za pozornosť.