

Matematická analýza 1

2024/2025

7. Spojitosť funkcie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou  získate nápomoc.

Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

- 1 Definícia spojitosti funkcie
- 2 Nespojitosť funkcie
- 3 Vlastnosti spojitých funkcií
- 4 Spojitosť na intervaloch

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.



Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrowaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrowaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita
a vyjadruje vzťah, že malej zmene nezávislej premennej x zodpovedá malá zmena závislej premennej $f(x)$.

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita
a vyjadruje vzťah, že malej zmene nezávislej premennej x zodpovedá malá zmena závislej premennej $f(x)$.

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$,

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita

a vyjadruje vzťah, že malej zmene nezávislej premennej x zodpovedá malá zmena závislej premennej $f(x)$.

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$,

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita
a vyjadruje vzťah, že malej zmene nezávislej premennej x zodpovedá malá zmena závislej premennej $f(x)$.

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita

a vyjadruje vzťah, že malej zmene nezávislej premennej x zodpovedá malá zmena závislej premennej $f(x)$.

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f) \text{ pre } n \in \mathbb{N}. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a). \right]$$

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita

a vyjadruje vzťah, že malej zmene nezávislej premennej x zodpovedá malá zmena závislej premennej $f(x)$.

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f) \text{ pre } n \in \mathbb{N}. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a). \right]$$

- Ak funkcia f nie je spojitá v bode $a \in D(f)$,

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita

a vyjadruje vzťah, že malej zmene nezávislej premennej x zodpovedá malá zmena závislej premennej $f(x)$.

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f) \text{ pre } n \in \mathbb{N}. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a). \right]$$

- Ak funkcia f nie je spojitá v bode $a \in D(f)$, nazýva sa **nespojité** v bode a .

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita

a vyjadruje vzťah, že malej zmene nezávislej premennej x zodpovedá malá zmena závislej premennej $f(x)$.

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f) \text{ pre } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \right]$$

- Bod a nazývame **bodom spojitosti** funkcie f .
- Ak funkcia f nie je spojitá v bode $a \in D(f)$, nazýva sa **nespojité** v bode a .
- Bod a nazývame **bodom nespojitosti** funkcie f .

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita

a vyjadruje vzťah, že malej zmene nezávislej premennej x zodpovedá malá zmena závislej premennej $f(x)$.

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f) \text{ pre } n \in \mathbb{N}. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a). \right]$$

- Bod a nazývame **bodom spojitosti** funkcie f .

- Ak funkcia f nie je spojitá v bode $a \in D(f)$, nazýva sa **nespojité** v bode a .

- Bod a nazývame **bodom nespojitosti** funkcie f .

Funkcia f je **nespojité** v bode $a \in D(f)$,

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita

a vyjadruje vzťah, že malej zmene nezávislej premennej x zodpovedá malá zmena závislej premennej $f(x)$.

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f) \text{ pre } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \right]$$

- Bod a nazývame **bodom spojitosti** funkcie f .

- Ak funkcia f nie je spojitá v bode $a \in D(f)$, nazýva sa **nespojité** v bode a .

- Bod a nazývame **bodom nespojitosti** funkcie f .

Funkcia f je **nespojité** v bode $a \in D(f)$, ak:

- Existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, také, že $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow f(a)$.

Definícia spojitosti – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

- Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti.
- Reálne deje často prebiehajú súvisle, spojite a popisujú sa „spojitými funkciami“.
- Spojitosť funkcie úzko súvisí s pojmom limita

a vyjadruje vzťah, že malej zmene nezávislej premennej x zodpovedá malá zmena závislej premennej $f(x)$.

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$, ak:

- Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \in D(f) \text{ pre } n \in \mathbb{N}. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a). \right]$$

- Bod a nazývame **bodom spojitosti** funkcie f .

- Ak funkcia f nie je spojitá v bode $a \in D(f)$, nazýva sa **nespojité** v bode a .

- Bod a nazývame **bodom nespojitosti** funkcie f .

Funkcia f je **nespojité** v bode $a \in D(f)$, ak:

- Existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, také, že $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \not\longrightarrow f(a)$.

$$\left[\text{T. j. existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(a) \text{ alebo } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \text{ neexistuje.} \right]$$

Definícia spojitosti – Spojitosť v izolovanom a hromadnom bode

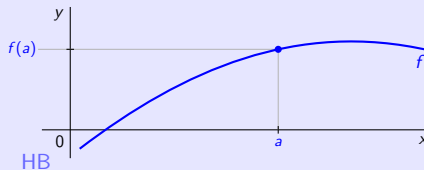
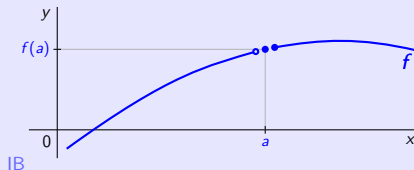
- Bod $a \in D(f)$ môže byť iba izolovaným alebo hromadným bodom $D(f)$.

Definícia spojitosti – Spojitosť v izolovanom a hromadnom bode

- Bod $a \in D(f)$ môže byť iba izolovaným alebo hromadným bodom $D(f)$.

$a \in D(f)$ je izolovaným bodom $D(f)$.

[IB → vľavo.]



$a \in D(f)$ je hromadným bodom $D(f)$.

[HB → vpravo.]

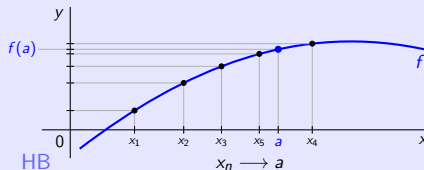
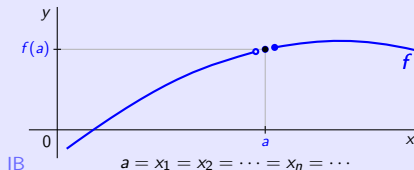
Definícia spojitosti – Spojitosť v izolovanom a hromadnom bode

- Bod $a \in D(f)$ môže byť iba izolovaným alebo hromadným bodom $D(f)$.

$a \in D(f)$ je izolovaným bodom $D(f)$.

[IB → vľavo.]

- Existuje jediná $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.



$a \in D(f)$ je hromadným bodom $D(f)$.

[HB → vpravo.]

Definícia limity: • $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.

Definícia spojitosti: • $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$.

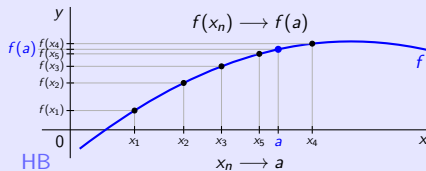
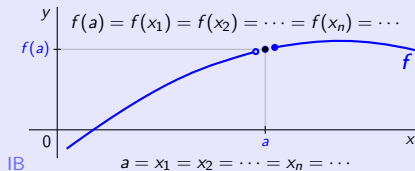
Definícia spojitosti – Spojitosť v izolovanom a hromadnom bode

- Bod $a \in D(f)$ môže byť iba izolovaným alebo hromadným bodom $D(f)$.

$a \in D(f)$ je izolovaným bodom $D(f)$.

[IB → vľavo.]

- Existuje jediná $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a. \Rightarrow$
- $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{f(a)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(a).$



$a \in D(f)$ je hromadným bodom $D(f)$.

[HB → vpravo.]

Definícia limity: • $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a. \Rightarrow$ • $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x).$

Definícia spojitosti: • $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f), \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a. \Rightarrow$ • $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(a).$

Definícia spojitosti – Spojitosť v izolovanom a hromadnom bode

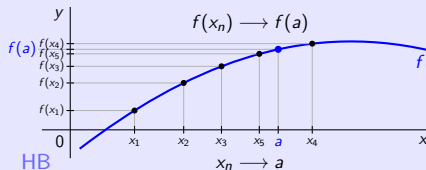
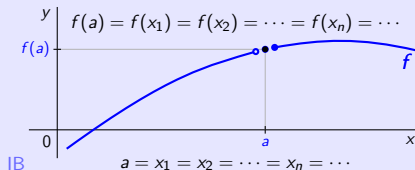
- Bod $a \in D(f)$ môže byť iba izolovaným alebo hromadným bodom $D(f)$.

$a \in D(f)$ je izolovaným bodom $D(f)$.

[IB → vľavo.]

- Existuje jediná $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a. \Rightarrow$
- $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{f(a)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(a)$.

- f je vždy spojitá v izolovanom bode a .



$a \in D(f)$ je hromadným bodom $D(f)$.

[HB → vpravo.]

Definícia limity: • $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a. \Rightarrow$ • $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Definícia spojitosti: • $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f), \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a. \Rightarrow$ • $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(a)$.

- f je spojitá v hromadnom bode $a. \Leftrightarrow$ • $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna závislosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna závislosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$.

Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna závislosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

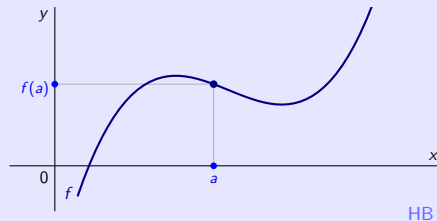
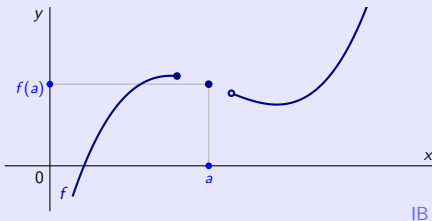
[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.]

Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna záležitosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.]

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak:



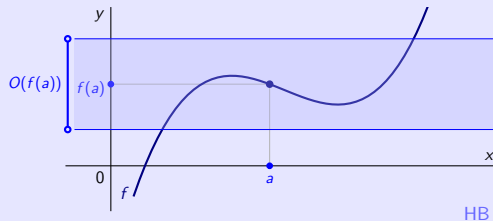
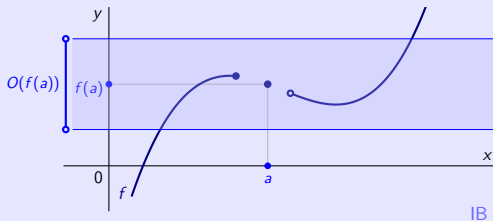
Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna záležitosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.]

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak:

- Ku každému okoliu $O(f(a))$



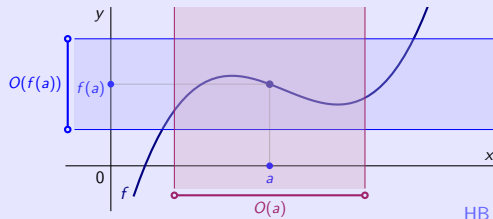
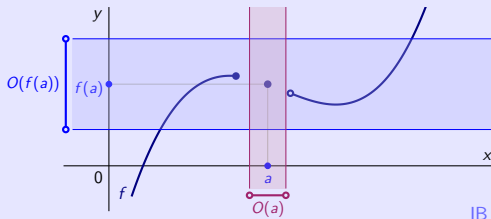
Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna záležitosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.]

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak:

- Ku každému okoliu $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$



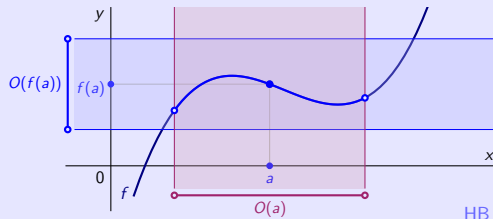
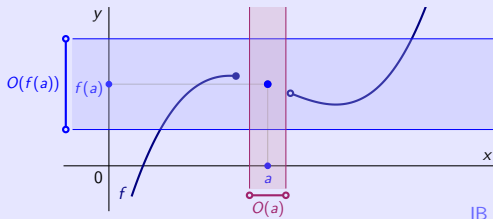
Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna záležitosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.]

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak:

- Ku každému okoliu $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$



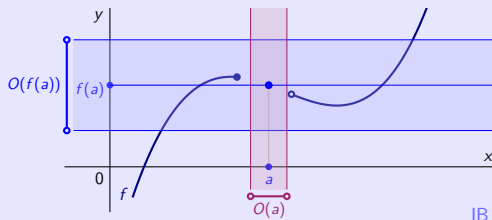
Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna záležitosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

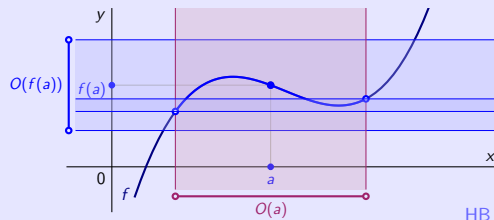
[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.]

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak:

- Ku každému okoliu $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(f(a))$.



IB



HB

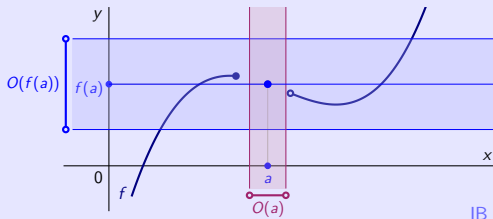
Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna záležitosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

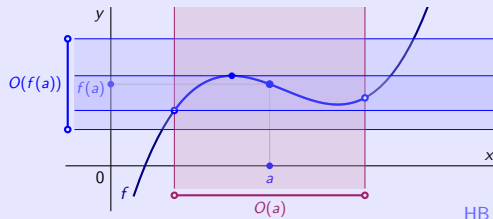
[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.]

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak:

- Ku každému okoliu $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(f(a))$.



IB



HB

Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

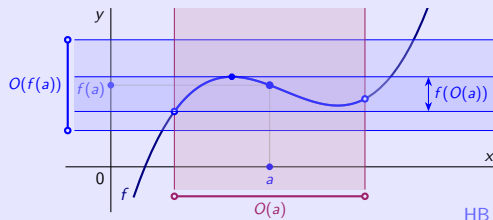
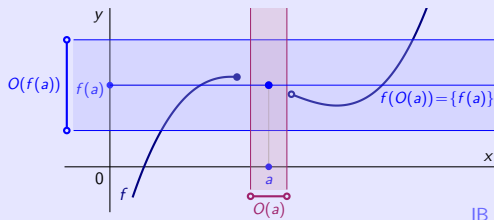
- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna záležitosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.]

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak:

- Ku každému okoliu $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(f(a))$.

[Pre všetky $O(f(a))$ existuje $O(a)$ také, že $f(O(a)) \subset O(f(a))$.]



Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna záležitosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

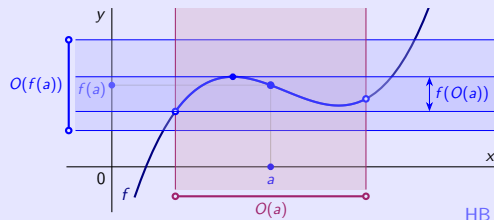
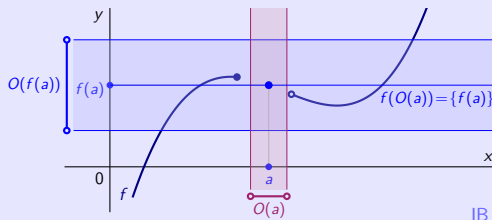
[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.]

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak:

- Ku každému okoliu $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(f(a))$.

[Pre všetky $O(f(a))$ existuje $O(a)$ také, že $f(O(a)) \subset O(f(a))$.]

Ak označíme δ, ε polomery okolí $O_\delta(a)$, $O_\varepsilon(f(a))$, môžeme druhé tvrdenie symbolicky zapísať v tvaroch:



Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna záležitosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.]

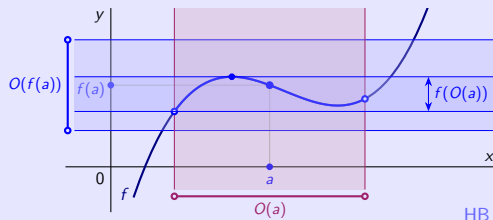
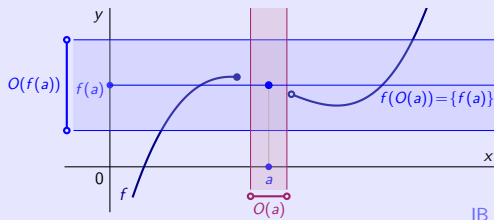
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak:

- Ku každému okoliu $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(f(a))$.

[Pre všetky $O(f(a))$ existuje $O(a)$ také, že $f(O(a)) \subset O(f(a))$.]

Ak označíme δ, ε polomery okolí $O_\delta(a)$, $O_\varepsilon(f(a))$, môžeme druhé tvrdenie symbolicky zapísať v tvaroch:

- Ku každému okoliu $O_\varepsilon(f(a))$ existuje okolie $O_\delta(a)$ také, že pre všetky $x \in O_\delta(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O_\varepsilon(f(a))$.



Definícia spojitosti – Ekvivalentná definícia pomocou okolí

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ je lokálna záležitosť funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

[Pri spojitosti je potrebné, aby $a \in D(f)$. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom $D(f)$.]

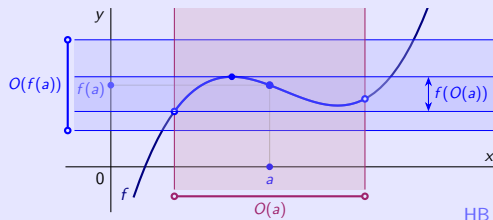
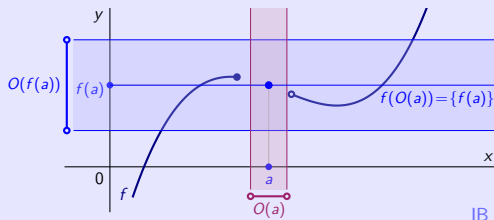
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak:

- Ku každému okoliu $O(f(a))$ existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(f(a))$.

[Pre všetky $O(f(a))$ existuje $O(a)$ také, že $f(O(a)) \subset O(f(a))$.]

Ak označíme δ, ε polomery okolí $O_\delta(a)$, $O_\varepsilon(f(a))$, môžeme druhé tvrdenie symbolicky zapísať v tvaroch:

- Ku každému okoliu $O_\varepsilon(f(a))$ existuje okolie $O_\delta(a)$ také, že pre všetky $x \in O_\delta(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O_\varepsilon(f(a))$.
- Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D(f)$, $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.



Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.

Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.
- Pojem nespojitosti rozšírime na všetky hromadné body množiny $D(f)$.

Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.
- Pojem nespojitosti rozšírime na všetky hromadné body množiny $D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$:

Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.
- Pojem nespojitosti rozšírime na všetky hromadné body množiny $D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$:

- Bod odstrániteľnej nespojitosti,
-
- Bod neodstrániteľnej nespojitosti

Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.
- Pojem nespojitosti rozšírime na všetky hromadné body množiny $D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$:

- Bod odstrániteľnej nespojitosti,
- Bod neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu,
- Bod neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu,

Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.
- Pojem nespojitosti rozšírime na všetky hromadné body množiny $D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$:

- Bod **odstrániteľnej nespojitosti**,

ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu**,

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu**,

Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.
- Pojem nespojitosti rozšírime na všetky hromadné body množiny $D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$:

- Bod **odstrániteľnej nespojitosti**,

ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu**,

ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in R$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu**,

Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.
- Pojem nespojitosti rozšírime na všetky hromadné body množiny $D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$:

- Bod **odstrániteľnej nespojitosti**,

ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu**,

ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in R$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu**,

ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná.

Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.
- Pojem nespojitosti rozšírime na všetky hromadné body množiny $D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$:

- Bod **odstrániteľnej nespojitosti**,

ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

[Ak položíme $f(a) = b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, nespojitosť sa odstráni.]

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu**,

ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in R$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu**,

ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná.

Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.
- Pojem nespojitosti rozšírime na všetky hromadné body množiny $D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$:

- Bod **odstrániteľnej nespojitosti**,

ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

[Ak položíme $f(a) = b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, nespojitosť sa odstráni.]

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu**,

ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in R$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

[Číslo $c = b_2 - b_1$ sa nazýva skok funkcie f v bode a .]

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu**,

ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná.

Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.
- Pojem nespojitosti rozšírime na všetky hromadné body množiny $D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$:

- Bod **odstrániteľnej nespojitosti**,

ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

[Ak položíme $f(a) = b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, nespojitosť sa odstráni.]

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu**,

ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in R$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

[Číslo $c = b_2 - b_1$ sa nazýva skok funkcie f v bode a .]

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu**,

ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná.

- Ak je niektorá z jednostranných limit nevlastná, potom f je **asymptoticky nespojitá** v bode a .

Nespojitosť – Body nespojitosti funkcie

- Funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode.
- Pojem nespojitosti rozšírime na všetky hromadné body množiny $D(f)$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ má v hromadnom bode a množiny $D(f)$:

- Bod **odstrániteľnej nespojitosti**,

ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

[Ak položíme $f(a) = b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, nespojitosť sa odstráni.]

- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu**,

ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in R$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in R$, ale $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

[Číslo $c = b_2 - b_1$ sa nazýva skok funkcie f v bode a .]

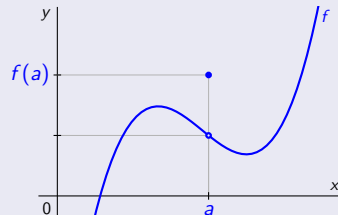
- Bod **neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu**,

ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná.

- Ak je niektorá z jednostranných limit nevlastná, potom f je **asymptoticky nespojitá** v bode a .
- f je asymptoticky nespojitá v bode a . $\Leftrightarrow$ • f má asymptotu bez smernice v bode a .

Nespojitosť – Odstrániteľná nespojitosť

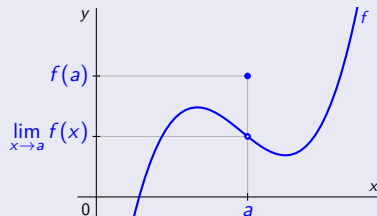
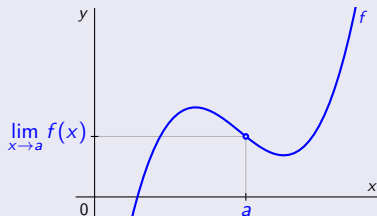
Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **odstrániteľnej nespojitosti** funkcie f ,



Nespojitosť – Odstrániteľná nespojitosť

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **odstrániteľnej nespojitosti** funkcie f ,

- ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

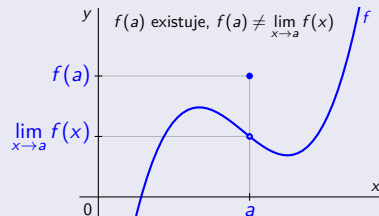
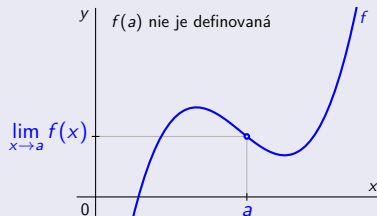


Nespojitosť – Odstrániteľná nespojitosť

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **odstrániteľnej nespojitosti** funkcie f ,

- ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

[f nemusí byť v bode a definovaná.]

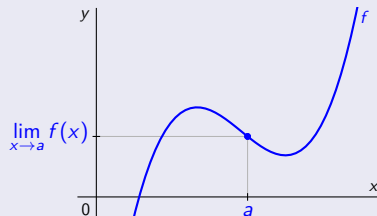
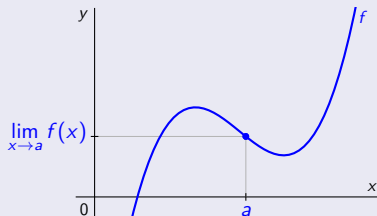


Nespojitosť – Odstrániteľná nespojitosť

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **odstrániteľnej nespojitosti** funkcie f ,

- ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

[f nemusí byť v bode a definovaná.]



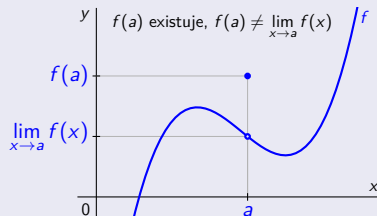
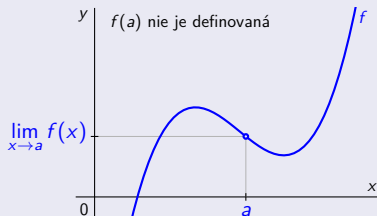
- Ak položíme $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nespojitosť v bode a sa odstráni.

Nespojitosť – Odstrániteľná nespojitosť

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **odstrániteľnej nespojitosti** funkcie f ,

- ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

[f nemusí byť v bode a definovaná.]



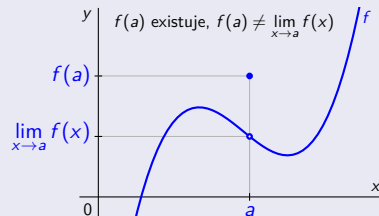
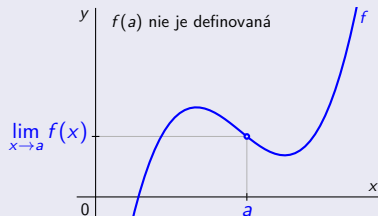
- Ak položíme $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nespojitosť v bode a sa odstráni.

Nespojitosť – Odstrániteľná nespojitosť

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **odstrániteľnej nespojitosti** funkcie f ,

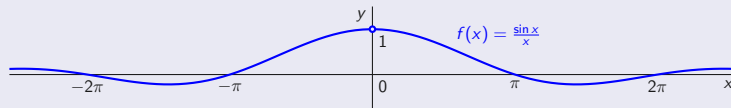
- ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

[f nemusí byť v bode a definovaná.]



- Ak položíme $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nespojitosť v bode a sa odstráni.

Funkcia $f: y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ má v bode $a = 0$ bod odstrániteľnej nespojitosti.

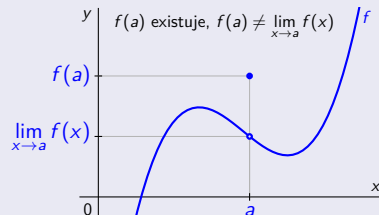
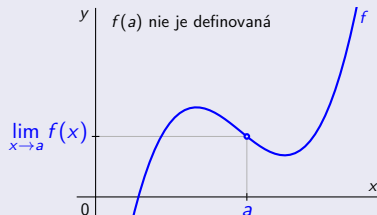


Nespojitosť – Odstrániteľná nespojitosť

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **odstrániteľnej nespojitosti** funkcie f ,

- ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

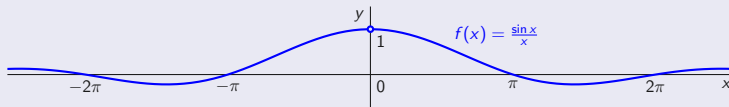
[f nemusí byť v bode a definovaná.]



- Ak položíme $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nespojitosť v bode a sa odstráni.

Funkcia $f: y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ má v bode $a = 0$ bod odstrániteľnej nespojitosti.

- $f(0)$ neexistuje.

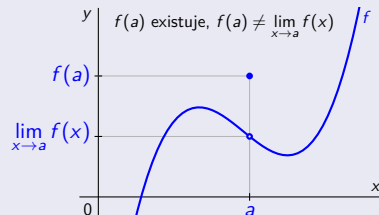
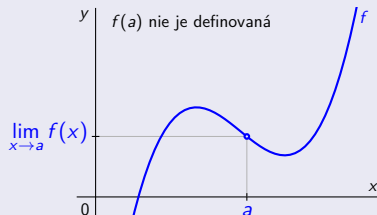


Nespojitosť – Odstrániteľná nespojitosť

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **odstrániteľnej nespojitosti** funkcie f ,

- ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

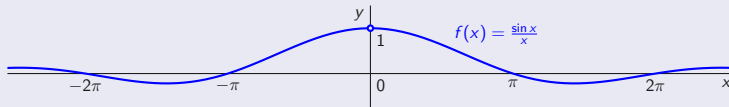
[f nemusí byť v bode a definovaná.]



- Ak položíme $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nespojitosť v bode a sa odstráni.

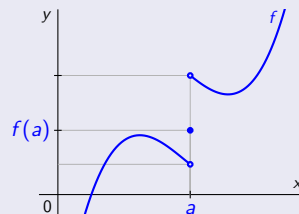
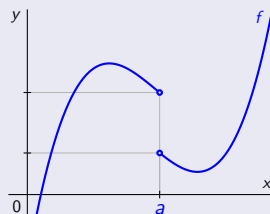
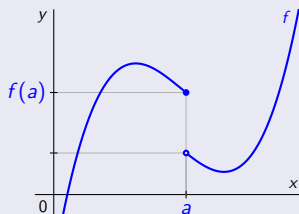
Funkcia $f: y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ má v bode $a = 0$ bod odstrániteľnej nespojitosti.

- $f(0)$ neexistuje.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ je konečná.



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť I. druhu

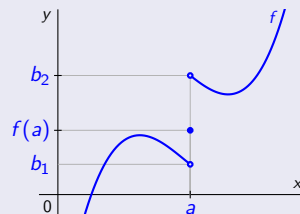
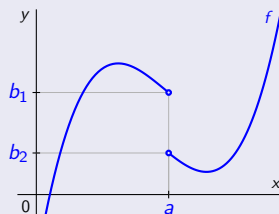
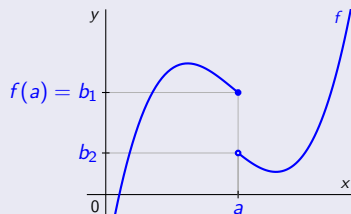
Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu funkcie f ,



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť I. druhu

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu funkcie f ,

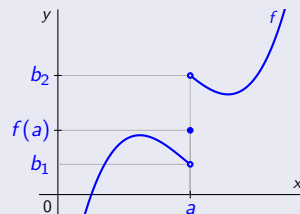
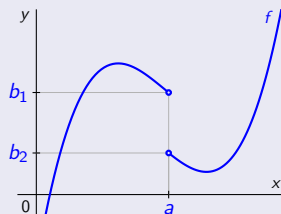
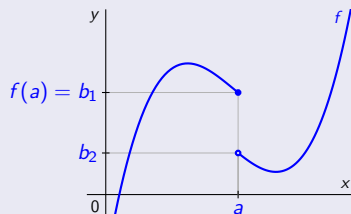
- ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in \mathbb{R}$,



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť I. druhu

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu funkcie f ,

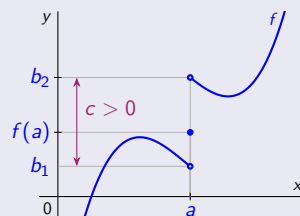
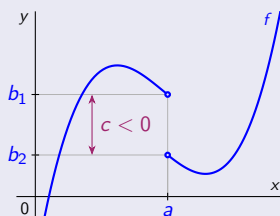
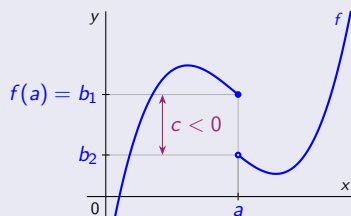
- ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in \mathbb{R}$, ale $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť I. druhu

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu funkcie f ,

- ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in \mathbb{R}$, ale $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

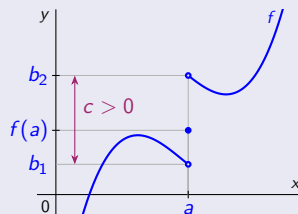
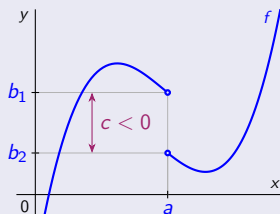
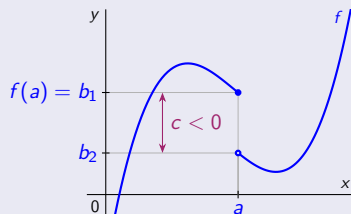


- Rozdiel $c = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_2 - b_1$ sa nazýva **skok funkcie f v bode a** .

Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť I. druhu

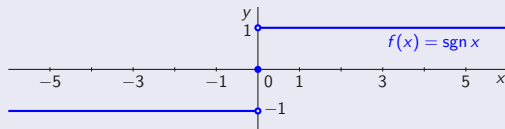
Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu** funkcie f ,

- ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in \mathbb{R}$, ale $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.



- Rozdiel $c = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_2 - b_1$ sa nazýva **skok funkcie f v bode a** .

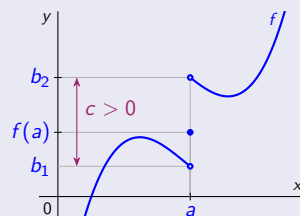
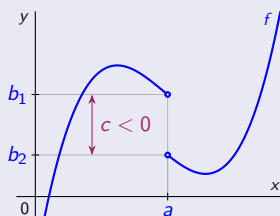
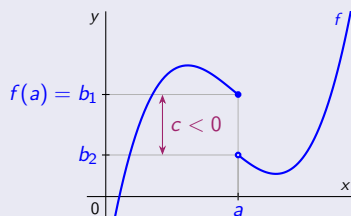
Funkcia $f: y = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}$ má v bode $a = 0$ bod neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu.



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť I. druhu

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu** funkcie f ,

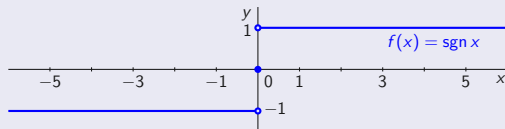
- ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in \mathbb{R}$, ale $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.



- Rozdiel $c = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_2 - b_1$ sa nazýva **skok funkcie f v bode a** .

Funkcia $f: y = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}$ má v bode $a = 0$ bod neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu.

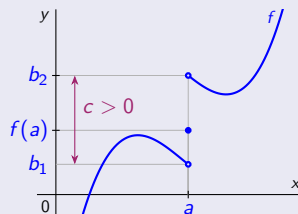
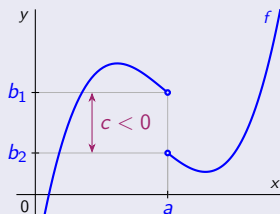
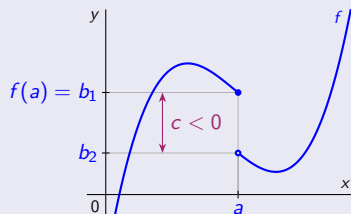
- $f(0) = 0$.



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť I. druhu

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu** funkcie f ,

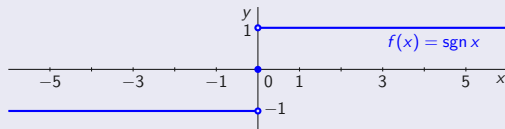
- ak existujú konečné $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2 \in \mathbb{R}$, ale $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.



- Rozdiel $c = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_2 - b_1$ sa nazýva **skok funkcie f v bode a** .

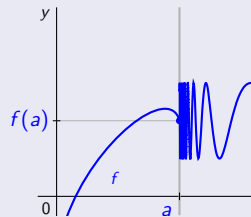
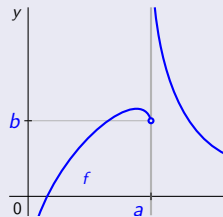
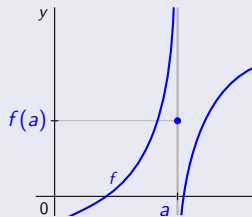
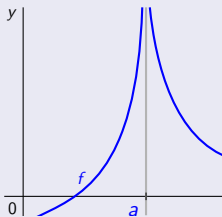
Funkcia $f: y = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R}$ má v bode $a = 0$ bod neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu.

- $f(0) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$.



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť II. druhu

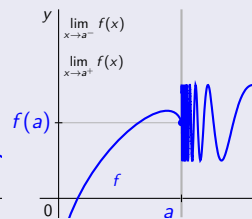
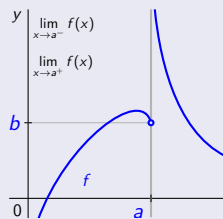
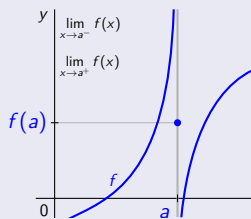
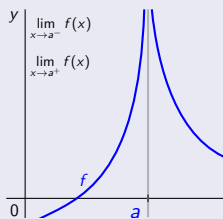
Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu funkcie f ,



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť II. druhu

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu funkcie f ,

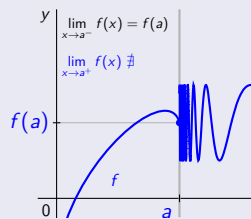
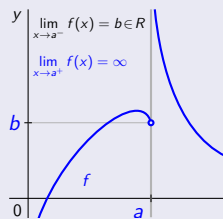
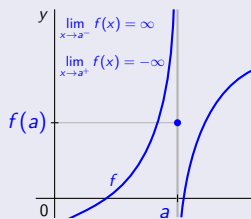
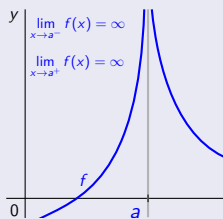
- ak aspoň jedna z limít $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť II. druhu

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu funkcie f ,

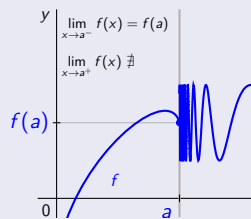
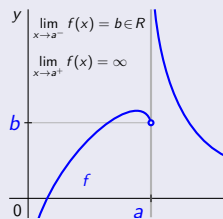
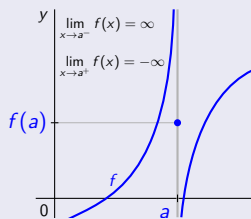
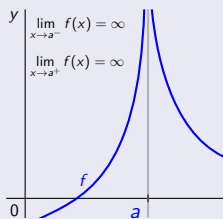
- ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná alebo neexistuje.



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť II. druhu

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu funkcie f ,

- ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná alebo neexistuje.

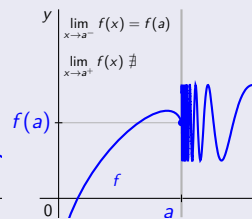
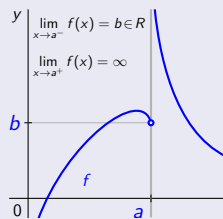
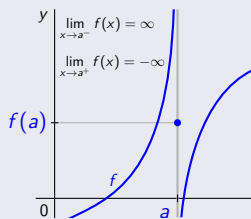
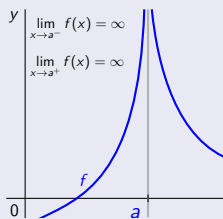


- Ak je niektorá z jednostranných limit nevlastná, nazýva sa bodom asymptotickej nespojitosti funkcie f .

Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť II. druhu

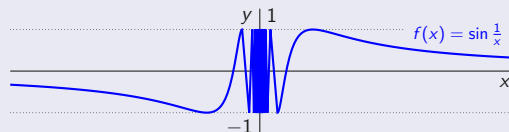
Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu** funkcie f ,

- ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná alebo neexistuje.



- Ak je niektorá z jednostranných limit nevlastná, nazýva sa bodom **asymptotickej nespojitosti** funkcie f .

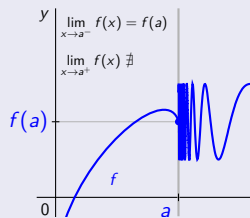
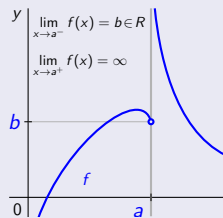
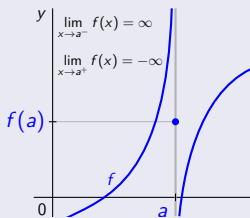
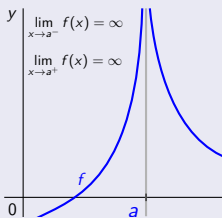
Funkcia $f: y = \sin \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ má v bode $a = 0$ bod neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť II. druhu

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu** funkcie f ,

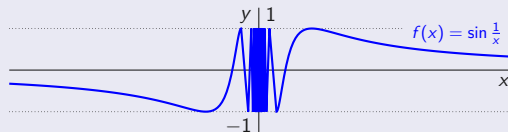
- ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná alebo neexistuje.



- Ak je niektorá z jednostranných limit nevlastná, nazýva sa bodom **asymptotickej nespojitosti** funkcie f .

Funkcia $f: y = \sin \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ má v bode $a = 0$ bod neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.

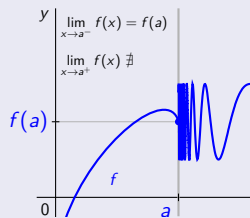
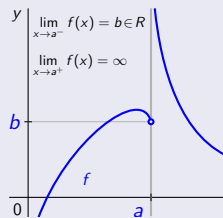
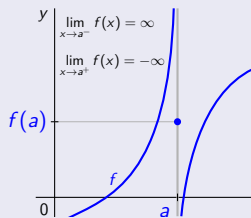
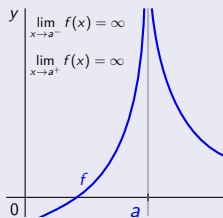
- $f(0)$ neexistuje.



Nespojitosť – Neodstrániteľná nespojitosť II. druhu

Hromadný bod a množiny $D(f)$ je bodom **neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu** funkcie f ,

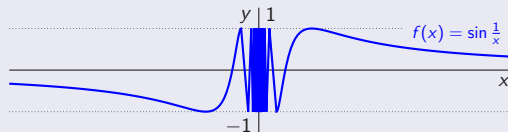
- ak aspoň jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ je nevlastná alebo neexistuje.



- Ak je niektorá z jednostranných limit nevlastná, nazýva sa bodom **asymptotickej nespojitosti** funkcie f .

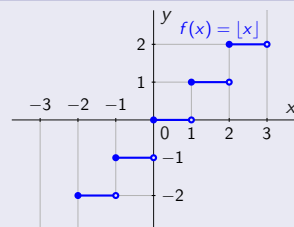
Funkcia $f: y = \sin \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ má v bode $a = 0$ bod neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.

- $f(0)$ neexistuje.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x}$ a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$ neexistujú.



Nespojitosť – Príklady

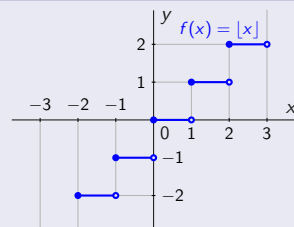
Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$ má v bodoch $a \in \mathbb{Z}$ body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu.



Nespojitosť – Príklady

Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$ má v bodoch $a \in \mathbb{Z}$ body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu.

Pre všetky $a = k \in \mathbb{Z}$ platí:

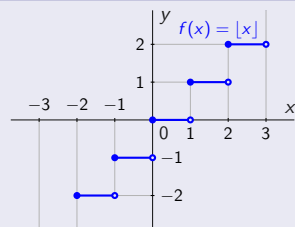


Nespojitosť – Príklady

Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$ má v bodoch $a \in \mathbb{Z}$ body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu.

Pre všetky $a = k \in \mathbb{Z}$ platí:

- $\lim_{x \rightarrow k^-} \lfloor x \rfloor = k - 1.$

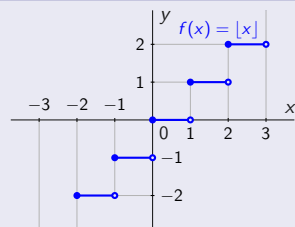


Nespojitosť – Príklady

Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$ má v bodoch $a \in \mathbb{Z}$ body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu.

Pre všetky $a = k \in \mathbb{Z}$ platí:

- $\lim_{x \rightarrow k^-} \lfloor x \rfloor = k - 1.$
- $\lim_{x \rightarrow k^+} \lfloor x \rfloor = k.$

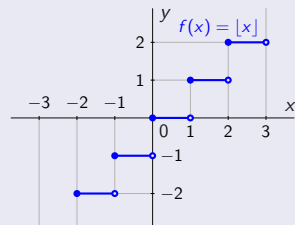


Nespojitosť – Príklady

Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$ má v bodoch $a \in \mathbb{Z}$ body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu.

Pre všetky $a = k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow k^-} \lfloor x \rfloor &= k - 1. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow k^+} \lfloor x \rfloor &= k. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{Skok } c = k - (k - 1) = 1.$$

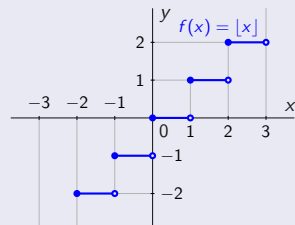


Nespojitosť – Príklady

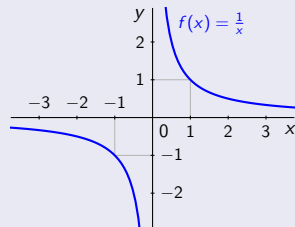
Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$ má v bodoch $a \in \mathbb{Z}$ body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu.

Pre všetky $a = k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow k^-} \lfloor x \rfloor &= k - 1. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow k^+} \lfloor x \rfloor &= k. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{Skok } c = k - (k - 1) = 1.$$



Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ má v bode $a = 0$ bod neodstrániteľnej (asymptotickej) nespojitosti II. druhu.

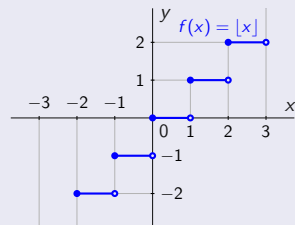


Nespojitosť – Príklady

Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$ má v bodoch $a \in \mathbb{Z}$ body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu.

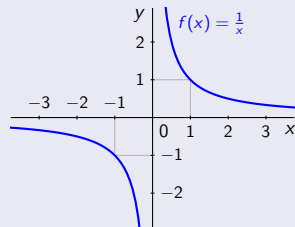
Pre všetky $a = k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow k^-} \lfloor x \rfloor &= k - 1. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow k^+} \lfloor x \rfloor &= k. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{Skok } c = k - (k - 1) = 1.$$



Funkcia $f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ má v bode $a = 0$ bod neodstrániteľnej (asymptotickej) nespojitosti II. druhu.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

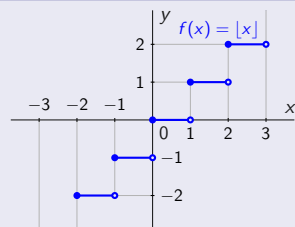


Nespojitosť – Príklady

Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$ má v bodoch $a \in \mathbb{Z}$ body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu.

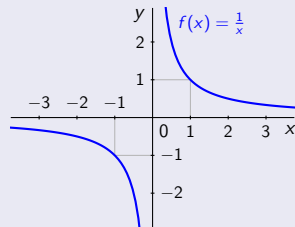
Pre všetky $a = k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow k^-} \lfloor x \rfloor &= k - 1. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow k^+} \lfloor x \rfloor &= k. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bullet \text{Skok } c = k - (k - 1) = 1.$$



Funkcia $f: y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ má v bode $a = 0$ bod neodstrániteľnej (asymptotickej) nespojitosti II. druhu.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty. \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$



Vlastnosti spojitých funkcí – Základné vlastnosti

- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Vlastnosti spojitých funkcií – Základné vlastnosti

- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti spojitých funkcí – Základné vlastnosti

- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ • V bode a sú tiež spojité funkcie $|f|, f \pm g, fg, f^2, f^n, f + r$ a rf .

Vlastnosti spojitých funkcií – Základné vlastnosti

- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$
- V bode a sú tiež spojité funkcie $|f|, f \pm g, fg, f^2, f^n, f + r$ a rf .
 - Ak $g(a) \neq 0$, potom sú v bode a tiež spojité funkcie $\frac{1}{g}, \frac{f}{g}$.

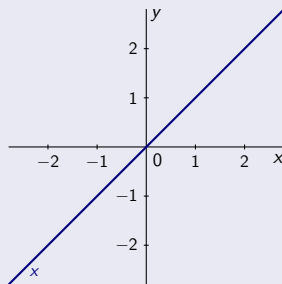
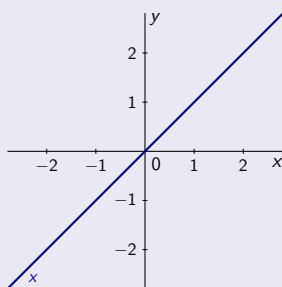
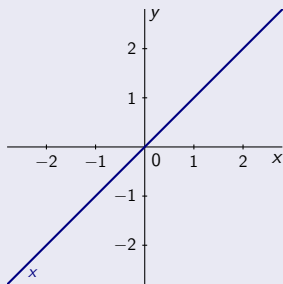
Vlastnosti spojitých funkcí – Základné vlastnosti

- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$ • V bode a sú tiež spojité funkcie $|f|$, $f \pm g$, fg , f^2 , f^n , $f + r$ a rf .
- Ak $g(a) \neq 0$, potom sú v bode a tiež spojité funkcie $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$.

Funkcia $f: y = x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$.



Vlastnosti spojitých funkcí – Základné vlastnosti

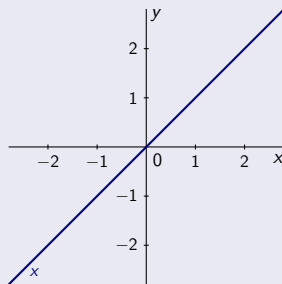
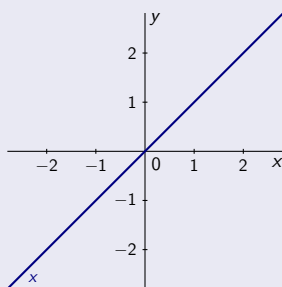
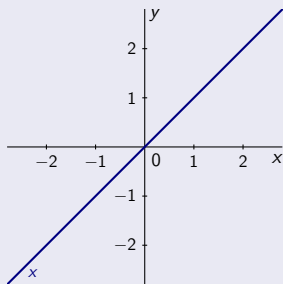
- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$ • V bode a sú tiež spojité funkcie $|f|, f \pm g, fg, f^2, f^n, f+r$ a rf .
- Ak $g(a) \neq 0$, potom sú v bode a tiež spojité funkcie $\frac{1}{g}, \frac{f}{g}$.

Funkcia $f: y = x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$. Označme $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}$.

- $f^n: y = x^n$ je spojitá v bode a .
- $\frac{1}{f^n}: y = x^{-n}$ je spojitá v bode $a \neq 0$.
- $rf: y = rx$ je spojitá v bode a .



Vlastnosti spojitých funkcí – Základné vlastnosti

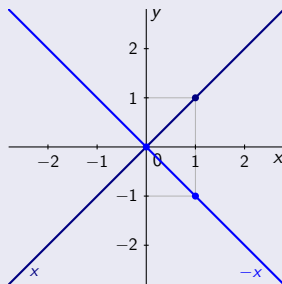
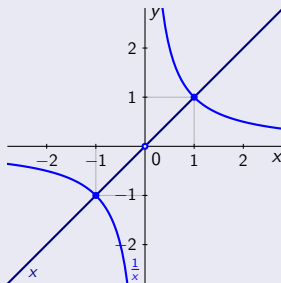
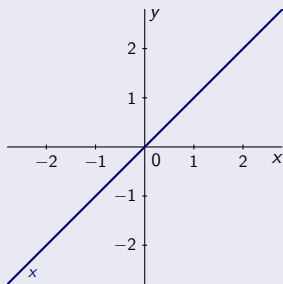
- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$ • V bode a sú tiež spojité funkcie $|f|, f \pm g, fg, f^2, f^n, f+r$ a rf .
- Ak $g(a) \neq 0$, potom sú v bode a tiež spojité funkcie $\frac{1}{g}, \frac{f}{g}$.

Funkcia $f: y = x, x \in \mathbb{R}$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$. Označme $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}$.

- $f^n: y = x^n$ je spojitá v bode a .
- $\frac{1}{f^n}: y = x^{-n}$ je spojitá v bode $a \neq 0$.
- $rf: y = rx$ je spojitá v bode a .



Vlastnosti spojitých funkcí – Základné vlastnosti

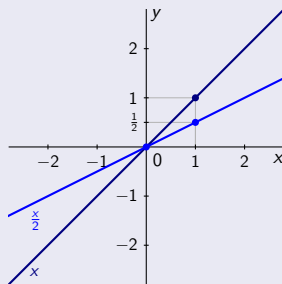
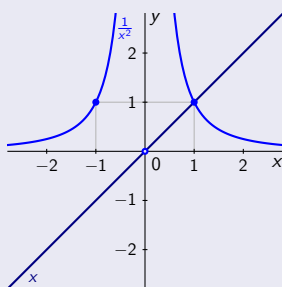
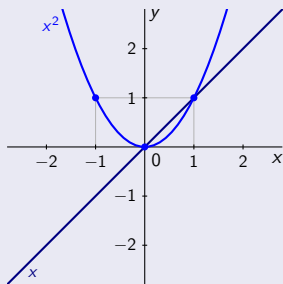
- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$ • V bode a sú tiež spojité funkcie $|f|$, $f \pm g$, fg , f^2 , f^n , $f + r$ a rf .
- Ak $g(a) \neq 0$, potom sú v bode a tiež spojité funkcie $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$.

Funkcia $f: y = x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$. Označme $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$.

- $f^n: y = x^n$ je spojitá v bode a .
- $\frac{1}{f^n}: y = x^{-n}$ je spojitá v bode $a \neq 0$.
- $rf: y = rx$ je spojitá v bode a .



Vlastnosti spojitých funkcí – Základné vlastnosti

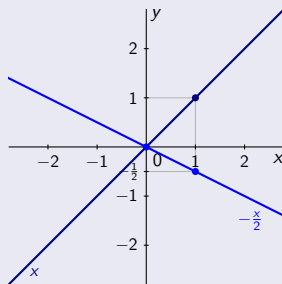
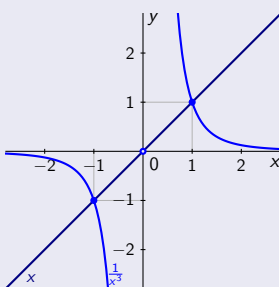
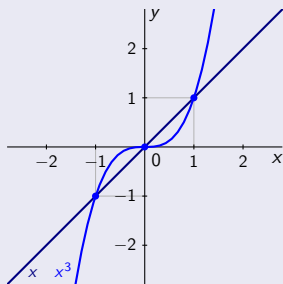
- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$ • V bode a sú tiež spojité funkcie $|f|$, $f \pm g$, fg , f^2 , f^n , $f + r$ a rf .
- Ak $g(a) \neq 0$, potom sú v bode a tiež spojité funkcie $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$.

Funkcia $f: y = x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$. Označme $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$.

- $f^n: y = x^n$ je spojitá v bode a .
- $\frac{1}{f^n}: y = x^{-n}$ je spojitá v bode $a \neq 0$.
- $rf: y = rx$ je spojitá v bode a .



Vlastnosti spojitých funkcí – Základné vlastnosti

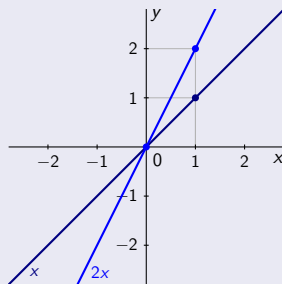
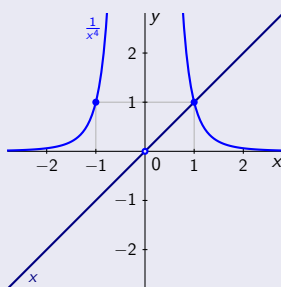
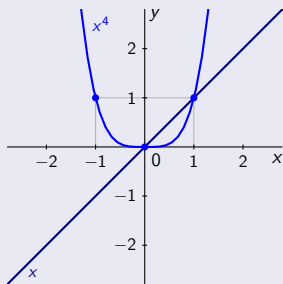
- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$ • V bode a sú tiež spojité funkcie $|f|$, $f \pm g$, fg , f^2 , f^n , $f + r$ a rf .
- Ak $g(a) \neq 0$, potom sú v bode a tiež spojité funkcie $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$.

Funkcia $f: y = x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$. Označme $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$.

- $f^n: y = x^n$ je spojitá v bode a .
- $\frac{1}{f^n}: y = x^{-n}$ je spojitá v bode $a \neq 0$.
- $rf: y = rx$ je spojitá v bode a .



Vlastnosti spojitých funkcí – Základné vlastnosti

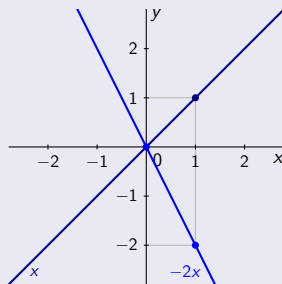
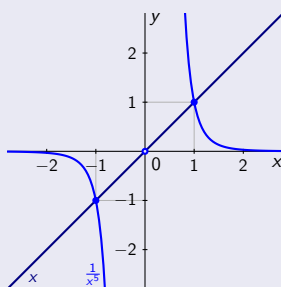
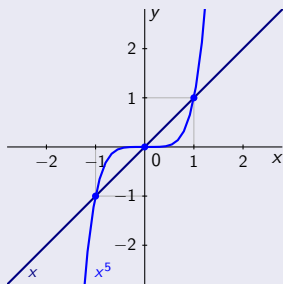
- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$ • V bode a sú tiež spojité funkcie $|f|$, $f \pm g$, fg , f^2 , f^n , $f + r$ a rf .
- Ak $g(a) \neq 0$, potom sú v bode a tiež spojité funkcie $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$.

Funkcia $f: y = x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$. Označme $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$.

- $f^n: y = x^n$ je spojitá v bode a .
- $\frac{1}{f^n}: y = x^{-n}$ je spojitá v bode $a \neq 0$.
- $rf: y = rx$ je spojitá v bode a .



Vlastnosti spojitých funkcí – Základné vlastnosti

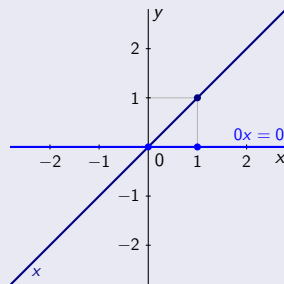
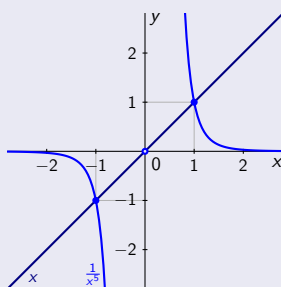
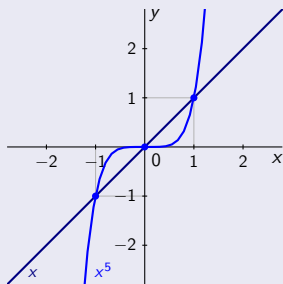
- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$ • V bode a sú tiež spojité funkcie $|f|$, $f \pm g$, fg , f^2 , f^n , $f + r$ a rf .
- Ak $g(a) \neq 0$, potom sú v bode a tiež spojité funkcie $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$.

Funkcia $f: y = x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$. Označme $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$.

- $f^n: y = x^n$ je spojitá v bode a .
- $\frac{1}{f^n}: y = x^{-n}$ je spojitá v bode $a \neq 0$.
- $rf: y = rx$ je spojitá v bode a .



Vlastnosti spojitých funkcí – Základné vlastnosti

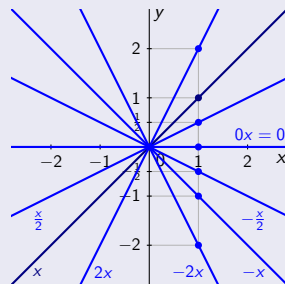
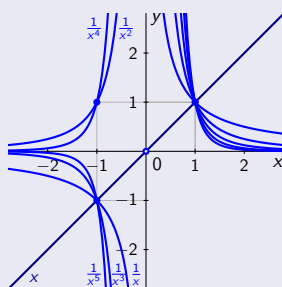
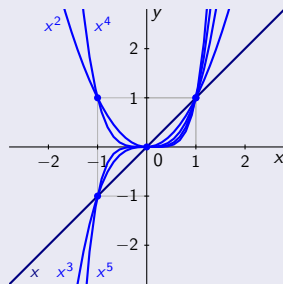
- Pre spojité funkcie v danom bode a platia podobné tvrdenia ako pre limitu funkcie v danom bode.

Funkcie f, g sú spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, číslo $n \in \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{R}$.

- $\Rightarrow$ • V bode a sú tiež spojité funkcie $|f|$, $f \pm g$, fg , f^2 , f^n , $f + r$ a rf .
- Ak $g(a) \neq 0$, potom sú v bode a tiež spojité funkcie $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$.

Funkcia $f: y = x$, $x \in \mathbb{R}$ je spojitá v každom bode $a \in \mathbb{R}$. Označme $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$.

- $f^n: y = x^n$ je spojitá v bode a .
- $\frac{1}{f^n}: y = x^{-n}$ je spojitá v bode $a \neq 0$.
- $rf: y = rx$ je spojitá v bode a .



Vlastnosti spojitých funkcií – Spojitosť zloženej funkcie

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť zloženej funkcie

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a .

Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost zložené funkcie

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a .

Funkcia $F: y = \sqrt{x^2 + 1}$ je spojitá v každom bode $a \in D(F) = \mathbb{R}$.

Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost zložené funkcie

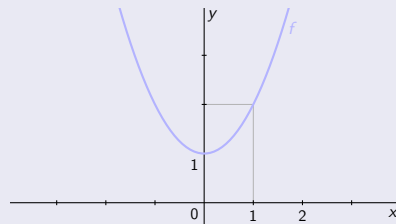
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a .

Funkcia $F: y = \sqrt{x^2 + 1}$ je spojitá v každom bode $a \in D(F) = \mathbb{R}$.

• Označme $f: y = x^2 + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 1; \infty \rangle$



Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť zloženej funkcie

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

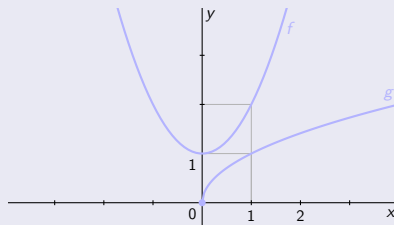
Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a .

Funkcia $F: y = \sqrt{x^2 + 1}$ je spojitá v každom bode $a \in D(F) = \mathbb{R}$.

• Označme $f: y = x^2 + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 1; \infty \rangle$

• Označme $g: y = \sqrt{x}$, $D(g) = \langle 0; \infty \rangle$, $H(g) = \langle 0; \infty \rangle$.



Vlastnosti spojitých funkcií – Spojitosť zloženej funkcie

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

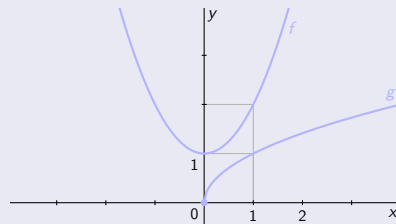
Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a .

Funkcia $F: y = \sqrt{x^2 + 1}$ je spojitá v každom bode $a \in D(F) = \mathbb{R}$.

• Označme $f: y = x^2 + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 1; \infty \rangle \subset D(g)$.

• Označme $g: y = \sqrt{x}$, $D(g) = \langle 0; \infty \rangle$, $H(g) = \langle 0; \infty \rangle$.



Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť zloženej funkcie

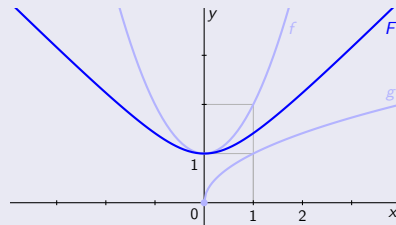
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a .

Funkcia $F: y = \sqrt{x^2 + 1}$ je spojitá v každom bode $a \in D(F) = \mathbb{R}$.

- Označme $f: y = x^2 + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 1; \infty \rangle \subset D(g)$.
- Označme $g: y = \sqrt{x}$, $D(g) = \langle 0; \infty \rangle$, $H(g) = \langle 0; \infty \rangle$.
- Označme $F = g(f): y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$, $D(F) = \mathbb{R}$.



Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť zloženej funkcie

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a .

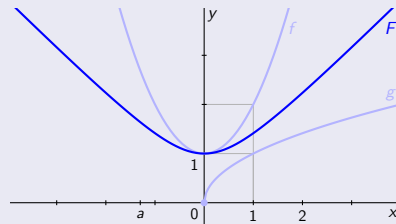
Funkcia $F: y = \sqrt{x^2 + 1}$ je spojitá v každom bode $a \in D(F) = \mathbb{R}$.

• Označme $f: y = x^2 + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 1; \infty \rangle \subset D(g)$.

• Označme $g: y = \sqrt{x}$, $D(g) = \langle 0; \infty \rangle$, $H(g) = \langle 0; \infty \rangle$.

• Označme $F = g(f): y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$, $D(F) = \mathbb{R}$.

• $a \in D(F)$.



Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť zloženej funkcie

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a .

Funkcia $F: y = \sqrt{x^2 + 1}$ je spojitá v každom bode $a \in D(F) = \mathbb{R}$.

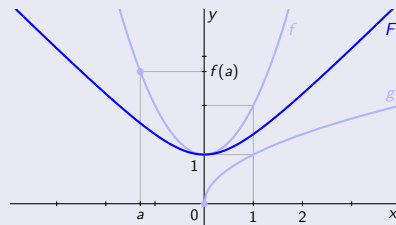
• Označme $f: y = x^2 + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 1; \infty \rangle \subset D(g)$. [Funkcia f je spojitá v každom bode $a \in D(f)$.]

• Označme $g: y = \sqrt{x}$, $D(g) = \langle 0; \infty \rangle$, $H(g) = \langle 0; \infty \rangle$.

• Označme $F = g(f): y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$, $D(F) = \mathbb{R}$.

• $a \in D(F)$. $\Rightarrow a \in D(f)$.

$\Rightarrow$ • f je spojitá v bode a .



Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť zloženej funkcie

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a .

Funkcia $F: y = \sqrt{x^2 + 1}$ je spojitá v každom bode $a \in D(F) = \mathbb{R}$.

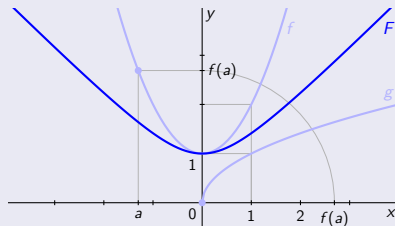
• Označme $f: y = x^2 + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 1; \infty \rangle \subset D(g)$. [Funkcia f je spojitá v každom bode $a \in D(f)$.]

• Označme $g: y = \sqrt{x}$, $D(g) = \langle 0; \infty \rangle$, $H(g) = \langle 0; \infty \rangle$.

• Označme $F = g(f): y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$, $D(F) = \mathbb{R}$.

• $a \in D(F)$. $\Rightarrow a \in D(f)$. $\Rightarrow f(a) \in D(g)$.

$\Rightarrow$ • f je spojitá v bode a .



Vlastnosti spojitých funkcií – Spojitosť zloženej funkcie

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a .

Funkcia $F: y = \sqrt{x^2 + 1}$ je spojitá v každom bode $a \in D(F) = \mathbb{R}$.

• Označme $f: y = x^2 + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 1; \infty \rangle \subset D(g)$. [Funkcia f je spojitá v každom bode $a \in D(f)$.]

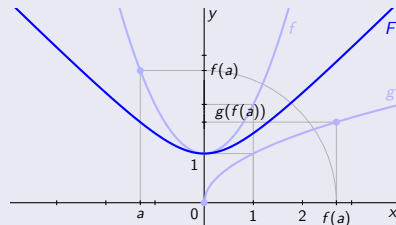
• Označme $g: y = \sqrt{x}$, $D(g) = \langle 0; \infty \rangle$, $H(g) = \langle 0; \infty \rangle$. [Funkcia g je spojitá v každom bode $b \in D(g)$.]

• Označme $F = g(f): y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$, $D(F) = \mathbb{R}$.

• $a \in D(F) \Rightarrow a \in D(f) \Rightarrow f(a) \in D(g)$.

$\Rightarrow$ • f je spojitá v bode a .

$\Rightarrow$ • g je spojitá v bode $f(a)$.



Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť zloženej funkcie

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

Funkcia g je spojitá v bode $f(a) \in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$.

$\Rightarrow$ • Zložená funkcia $F = g(f)$ je spojitá v bode a .

Funkcia $F: y = \sqrt{x^2 + 1}$ je spojitá v každom bode $a \in D(F) = R$.

• Označme $f: y = x^2 + 1$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle 1; \infty \rangle \subset D(g)$. [Funkcia f je spojitá v každom bode $a \in D(f)$.]

• Označme $g: y = \sqrt{x}$, $D(g) = \langle 0; \infty \rangle$, $H(g) = \langle 0; \infty \rangle$. [Funkcia g je spojitá v každom bode $b \in D(g)$.]

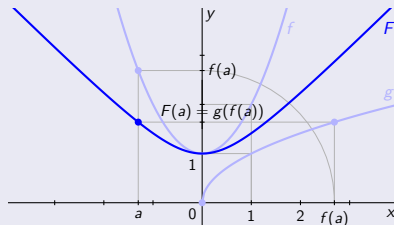
• Označme $F = g(f): y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$, $D(F) = R$.

• $a \in D(F) \Rightarrow a \in D(f) \Rightarrow f(a) \in D(g)$.

$\Rightarrow$ • f je spojitá v bode a .

$\Rightarrow$ • g je spojitá v bode $f(a)$.

$\Rightarrow$ • $F = g(f)$ je spojitá v bode a .



Vlastnosti spojitých funkcií – Veta o zovretí (o 2 policajtoch)

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

Vlastnosti spojitých funkcií – Veta o zovretí (o 2 policajtoch)

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

Označme prienik definičných oborov $D(f) \cap D(g) \cap D(h) = D_{fgh}$.

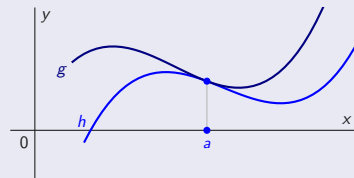


Vlastnosti spojitých funkcií – Veta o zovretí (o 2 policajtoch)

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

Označme prienik definičných oborov $D(f) \cap D(g) \cap D(h) = D_{fgh}$.

Funkcie g a h sú spojité v bode $a \in D_{fgh}$.



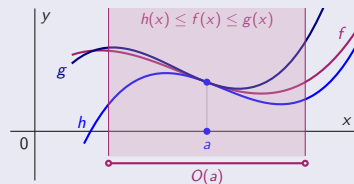
Vlastnosti spojitých funkcií – Veta o zovretí (o 2 policajtoch)

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

Označme prienik definičných oborov $D(f) \cap D(g) \cap D(h) = D_{fgh}$.

Funkcie g a h sú spojité v bode $a \in D_{fgh}$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D_{fgh}$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.



Vlastnosti spojitých funkcií – Veta o zovretí (o 2 policajtoch)

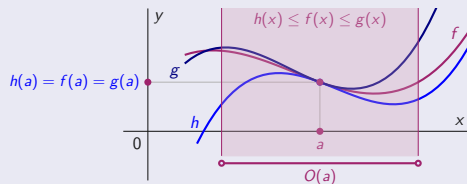
- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

Označme prienik definičných oborov $D(f) \cap D(g) \cap D(h) = D_{fgh}$.

Funkcie g a h sú spojité v bode $a \in D_{fgh}$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D_{fgh}$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- $h(a) = f(a) = g(a)$.



Vlastnosti spojitých funkcí – Veta o zovretí (o 2 policajtoch)

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

Označme prienik definičných oborov $D(f) \cap D(g) \cap D(h) = D_{fgh}$.

[Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

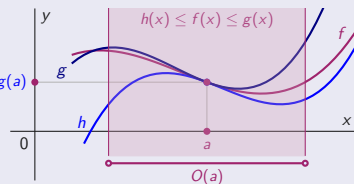
Funkcie g a h sú spojité v bode $a \in D_{fgh}$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D_{fgh}$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- $h(a) = f(a) = g(a)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f je spojitá v bode a .

$$h(a) = f(a) = g(a)$$



Vlastnosti spojitých funkcí – Veta o zovretí (o 2 policajtoch)

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

Označme prienik definičných oborov $D(f) \cap D(g) \cap D(h) = D_{fgh}$.

[Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

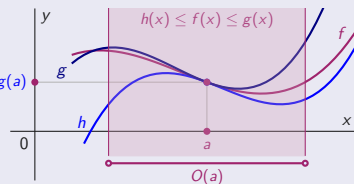
Funkcie g a h sú spojité v bode $a \in D_{fgh}$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D_{fgh}$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

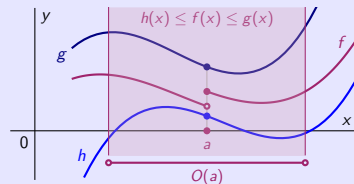
- $h(a) = f(a) = g(a)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f je spojité v bode a .

$$h(a) = f(a) = g(a)$$



- Predpoklad $h(a) = f(a) = g(a)$ je dôležitý.



Vlastnosti spojitých funkcí – Veta o zovretí (o 2 policajtoch)

- Spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$ charakterizuje lokálne vlastnosti funkcie v nejakom okolí $O(a)$.

Označme prienik definičných oborov $D(f) \cap D(g) \cap D(h) = D_{fgh}$.

[Veta o zovretí (o dvoch policajtoch).]

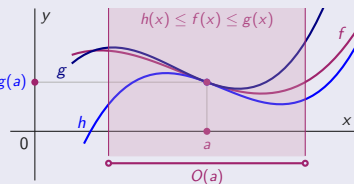
Funkcie g a h sú spojité v bode $a \in D_{fgh}$.

Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D_{fgh}$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

- $h(a) = f(a) = g(a)$.

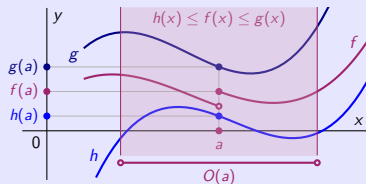
$\Rightarrow$ • Funkcia f je spojité v bode a .

$$h(a) = f(a) = g(a)$$



- Predpoklad $h(a) = f(a) = g(a)$ je dôležitý.

- Ak neplatí, funkcia f nemusí byť spojité v bode a .



Vlastnosti spojitých funkcií – Spojitosť vzhľadom na množinu

Funkcia f je spojitá v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.



Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť vzhľadom na množinu

Funkcia f je spojitá v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.

⇒ • Reštrikcia $g = f|_A$ je spojitá v bode a .

Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť vzhľadom na množinu

Funkcia f je spojitá v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Reštrikcia $g = f|_A$ je spojitá v bode a .

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$,

Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost vzhľadom na množinu

Funkcia f je spojitá v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Reštrikcia $g = f|_A$ je spojitá v bode a .

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$, ak:

- je spojité zúženie $f|_A$ v bode a .

Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost vzhľadom na množinu

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Reštrikcia $g = f|_A$ je **spojitá** v bode a .

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$, ak:

• je **spojité zúženie** $f|_A$ v bode a .

• Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost vzhľadom na množinu

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.

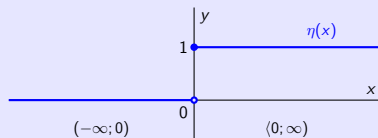
$\Rightarrow$ • Reštrikcia $g = f|_A$ je **spojitá** v bode a .

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$, ak:

• je **spojité zúženie** $f|_A$ v bode a .

• Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(a)$.

Heavisideova **jednotková funkcia** $\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; \infty \rangle, \\ 0 & \text{pre } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$



Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost vzhľadom na množinu

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Reštrikcia $g = f|_A$ je **spojitá** v bode a .

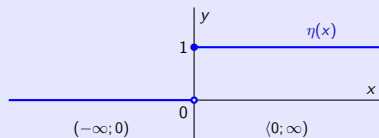
Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$, ak:

• je **spojité zúženie** $f|_A$ v bode a .

• Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(a)$.

Heavisideova **jednotková funkcia** $\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; \infty \rangle, \\ 0 & \text{pre } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$

[Heavisideova jednotková funkcia má veľký význam a často sa používa najmä v elektrotechnike.]



Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost vzhľadom na množinu

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Reštrikcia $g = f|_A$ je **spojitá** v bode a .

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$, ak:

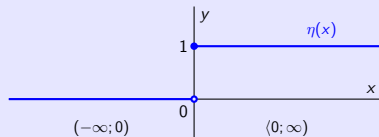
• je **spojité zúženie** $f|_A$ v bode a .

• Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(a)$.

Heavisideova **jednotková funkcia** $\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; \infty \rangle, \\ 0 & \text{pre } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$

[Heavisideova jednotková funkcia má veľký význam a často sa používa najmä v elektrotechnike.]

• Funkcia η je **spojitá** v každom bode $a \in D(\eta)$, $a \neq 0$.



Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost vzhľadom na množinu

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Reštrikcia $g = f|_A$ je **spojitá** v bode a .

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$, ak:

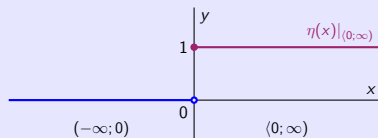
• je **spojité zúženie** $f|_A$ v bode a .

• Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(a)$.

Heavisideova **jednotková funkcia** $\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; \infty \rangle, \\ 0 & \text{pre } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$

[Heavisideova jednotková funkcia má veľký význam a často sa používa najmä v elektrotechnike.]

- Funkcia η je **spojitá** v každom bode $a \in D(\eta)$, $a \neq 0$.
- Funkcia η je v bode $a = 0$ **spojitá** vzhľadom na množinu $\langle 0; \infty \rangle$.



Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost vzhľadom na množinu

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Reštrikcia $g = f|_A$ je **spojitá** v bode a .

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$, ak:

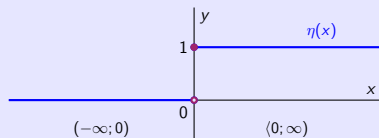
• je **spojité zúženie** $f|_A$ v bode a .

• Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(a)$.

Heavisideova **jednotková funkcia** $\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; \infty \rangle, \\ 0 & \text{pre } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$

[Heavisideova jednotková funkcia má veľký význam a často sa používa najmä v elektrotechnike.]

- Funkcia η je **spojitá** v každom bode $a \in D(\eta)$, $a \neq 0$.
- Funkcia η je v bode $a = 0$ **spojitá** vzhľadom na množinu $\langle 0; \infty \rangle$.
- Funkcia η je v bode $a = 0$ **nespojité**.



Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost vzhľadom na množinu

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Reštrikcia $g = f|_A$ je **spojitá** v bode a .

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$, ak:

• je **spojité zúženie** $f|_A$ v bode a .

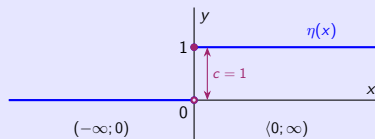
• Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(a)$.

Heavisideova **jednotková funkcia** $\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; \infty \rangle, \\ 0 & \text{pre } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$

[Heavisideova jednotková funkcia má veľký význam a často sa používa najmä v elektrotechnike.]

- Funkcia η je **spojitá** v každom bode $a \in D(\eta)$, $a \neq 0$.
- Funkcia η je v bode $a = 0$ **spojitá** vzhľadom na množinu $\langle 0; \infty \rangle$.
- Funkcia η je v bode $a = 0$ **nespojité**.

[Neodstrániteľná nespojitost 1. druhu, skok $c = 1$.]



Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost vzhľadom na množinu

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in A$, pričom $A \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Reštrikcia $g = f|_A$ je **spojitá** v bode a .

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$, ak:

• je **spojité zúženie** $f|_A$ v bode a .

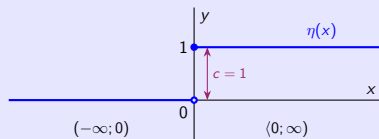
• Pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow f(a)$.

Heavisideova **jednotková funkcia** $\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; \infty \rangle, \\ 0 & \text{pre } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$

[Heavisideova jednotková funkcia má veľký význam a často sa používa najmä v elektrotechnike.]

- Funkcia η je **spojitá** v každom bode $a \in D(\eta)$, $a \neq 0$.
- Funkcia η je v bode $a = 0$ **spojitá** vzhľadom na množinu $\langle 0; \infty \rangle$.
- Funkcia η je v bode $a = 0$ **nespojité**.

[Neodstrániteľná nespojitost 1. druhu, skok $c = 1$.]



Vlastnosti spojitých funkcií – Jednostranná spojitosť

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

Vlastnosti spojitých funkcií – Jednostranná spojitosť

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme: • $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a] = \{x \in A; x \leq a\}$,

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme: • $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a]} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).

Vlastnosti spojitých funkcií – Jednostranná spojitosť

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a] = \{x \in A; x \leq a\},$
- $A_a^\oplus = A \cap [a; \infty) = \{x \in A; x \geq a\}.$

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a]} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).
- $f^\oplus(x) = f(x)|_{D(f) \cap [a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^\oplus}$ (zúženie napravo).

Vlastnosti spojitych funkcií – Jednostranná spojitosť

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

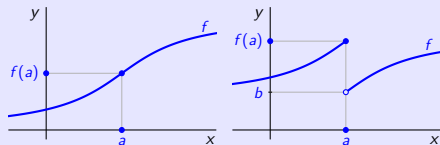
- $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a] = \{x \in A; x \leq a\}$,
- $A_a^\oplus = A \cap [a; \infty) = \{x \in A; x \geq a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a]} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).
- $f^\oplus(x) = f(x)|_{D(f) \cap [a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^\oplus}$ (zúženie napravo).

Funkcia f je **spojitá zľava** v bode $a \in D(f)$,

Funkcia f je **spojitá sprava** v bode $a \in D(f)$,



Vlastnosti spojitých funkcí – Jednostranná spojitost

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x \leq a\}$,
- $A_a^\oplus = A \cap \langle a; \infty) = \{x \in A; x \geq a\}$.

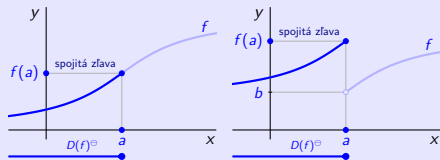
Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).
- $f^\oplus(x) = f(x)|_{D(f) \cap \langle a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^\oplus}$ (zúženie napravo).

Funkcia f je **spojitá zľava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojitá vzhľadom na množinu $D(f)_a^\ominus$ v bode a ,

Funkcia f je **spojitá sprava** v bode $a \in D(f)$,



Vlastnosti spojitych funkcií – Jednostranná spojitosť

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x \leq a\}$,
- $A_a^\oplus = A \cap \langle a; \infty) = \{x \in A; x \geq a\}$.

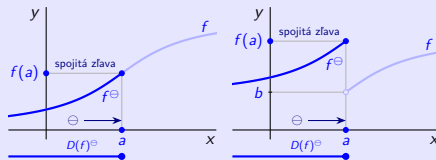
Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).
- $f^\oplus(x) = f(x)|_{D(f) \cap \langle a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^\oplus}$ (zúženie napravo).

Funkcia f je **spojitá zľava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\ominus$ v bode a , t. j.
- v bode a je spojité funkcia $f^\ominus(x)$.

Funkcia f je **spojitá sprava** v bode $a \in D(f)$,



Vlastnosti spojitych funkcií – Jednostranná spojitosť

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a] = \{x \in A; x \leq a\}$,
- $A_a^\oplus = A \cap [a; \infty) = \{x \in A; x \geq a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

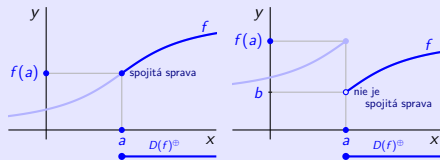
- $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a]} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).
- $f^\oplus(x) = f(x)|_{D(f) \cap [a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^\oplus}$ (zúženie napravo).

Funkcia f je **spojitá zľava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\ominus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\ominus(x)$.

Funkcia f je **spojitá sprava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\oplus$ v bode a ,



Vlastnosti spojitých funkcií – Jednostranná spojitost

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a] = \{x \in A; x \leq a\}$,
- $A_a^\oplus = A \cap [a; \infty) = \{x \in A; x \geq a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

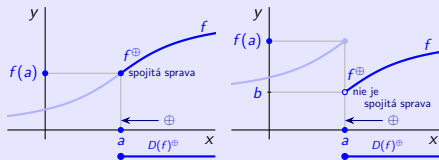
- $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a]} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).
- $f^\oplus(x) = f(x)|_{D(f) \cap [a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^\oplus}$ (zúženie napravo).

Funkcia f je **spojitá zľava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\ominus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\ominus(x)$.

Funkcia f je **spojitá sprava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\oplus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\oplus(x)$.



Vlastnosti spojitych funkcií – Jednostranná spojitosť

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a] = \{x \in A; x \leq a\}$,
- $A_a^\oplus = A \cap [a; \infty) = \{x \in A; x \geq a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a]} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).
- $f^\oplus(x) = f(x)|_{D(f) \cap [a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^\oplus}$ (zúženie napravo).

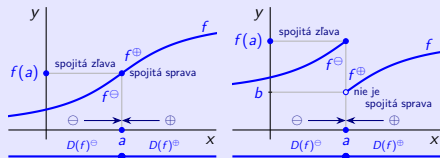
Funkcia f je **spojitá zľava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\ominus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\ominus(x)$.

Funkcia f je **spojitá sprava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\oplus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\oplus(x)$.

- f je v bode a



Vlastnosti spojitých funkcí – Jednostranná spojitost

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a] = \{x \in A; x \leq a\}$,
- $A_a^\oplus = A \cap [a; \infty) = \{x \in A; x \geq a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a]} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).
- $f^\oplus(x) = f(x)|_{D(f) \cap [a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^\oplus}$ (zúženie napravo).

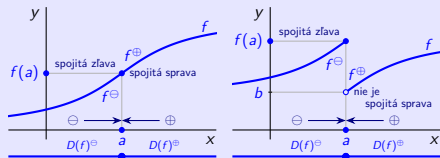
Funkcia f je **spojitá zľava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\ominus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\ominus(x)$.

Funkcia f je **spojitá sprava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\oplus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\oplus(x)$.

- f je v bode a $\left\{ \begin{array}{l} \text{spojitá zľava} \\ \text{spojitá sprava} \end{array} \right.$



Vlastnosti spojitých funkcí – Jednostranná spojitost

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a] = \{x \in A; x \leq a\}$,
- $A_a^\oplus = A \cap [a; \infty) = \{x \in A; x \geq a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a]} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).
- $f^\oplus(x) = f(x)|_{D(f) \cap [a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^\oplus}$ (zúženie napravo).

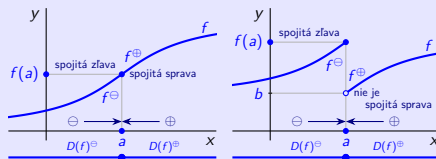
Funkcia f je **spojitá zľava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\ominus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\ominus(x)$.

Funkcia f je **spojitá sprava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\oplus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\oplus(x)$.

- f je v bode a
 - spojitá zľava
 - spojitá sprava
 - spojitá



Vlastnosti spojitych funkcií – Jednostranná spojitosť

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x < a\}$,
- $A_a^\oplus = A \cap (a; \infty) = \{x \in A; x > a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).
- $f^\oplus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^\oplus}$ (zúženie napravo).

Funkcia f je **spojitá zľava** v bode $a \in D(f)$, ak:

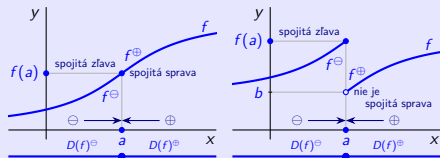
- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\ominus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\ominus(x)$.

Funkcia f je **spojitá sprava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\oplus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\oplus(x)$.

- f je v bode a

$\left\{ \begin{array}{l} \text{spojitá zľava} \\ \text{spojitá sprava} \\ \text{spojitá} \end{array} \right\}$	spojitá zľava	• Jednostranná spojitosť.
	spojitá sprava	
	spojitá	



Vlastnosti spojitych funkcií – Jednostranná spojitosť

Pre množinu $A \subset \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $A_a^\ominus = A \cap (-\infty; a) = \{x \in A; x < a\}$,
- $A_a^\oplus = A \cap (a; \infty) = \{x \in A; x > a\}$.

Pre funkciu f a bod $a \in \mathbb{R}$ označme:

- $f^\ominus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (-\infty; a)} = f(x)|_{D(f)_a^\ominus}$ (zúženie naľavo).
- $f^\oplus(x) = f(x)|_{D(f) \cap (a; \infty)} = f(x)|_{D(f)_a^\oplus}$ (zúženie napravo).

Funkcia f je **spojitá zľava** v bode $a \in D(f)$, ak:

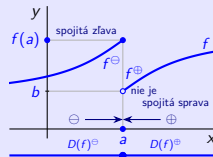
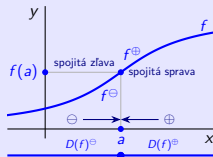
- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\ominus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\ominus(x)$.

Funkcia f je **spojitá sprava** v bode $a \in D(f)$, ak:

- je f spojité vzhľadom na množinu $D(f)_a^\oplus$ v bode a , t. j. • v bode a je spojité funkcia $f^\oplus(x)$.

- f je v bode a

{	spojitá zľava	}	• Jednostranná spojitosť.
	spojitá sprava		
	spojitá		



Vlastnosti spojitých funkcií – Spojitosť na množine

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

[Obojstranná spojitosť.]

Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť na množine

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

[Obojstranná spojitosť.]

$\Leftrightarrow$ • Funkcia f je spojitá zľava a súčasne spojitá sprava v bode a .

Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť na množine

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

[Obojstranná spojitosť.]

$\Leftrightarrow$ • Funkcia f je spojitá zľava a súčasne spojitá sprava v bode a .

Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$,

Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost na množině

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

[Obojstranná spojitost.]

$\Leftrightarrow$ • Funkcia f je spojitá zľava a súčasne spojitá sprava v bode a .

Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$,

ak je spojitá v každom bode $a \in A$.

Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost na množině

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

[Obojstranná spojitost.]

$\Leftrightarrow$ • Funkcia f je spojitá zľava a súčasne spojitá sprava v bode a .

Funkcia f je **spojitá** na množine $A \subset D(f)$,

ak je spojitá v každom bode $a \in A$.

• Funkcia f je **spojitá**,

Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť na množine

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

[Obojstranná spojitosť.]

$\Leftrightarrow$ • Funkcia f je spojitá zľava a súčasne spojitá sprava v bode a .

Funkcia f je **spojitá** na množine $A \subset D(f)$,

ak je spojitá v každom bode $a \in A$.

• Funkcia f je **spojitá**, ak je spojitá na celom svojom $D(f)$.

[f je spojitá v každom bode $a \in D(f)$.]

Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost na množině

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$.

[Obojstranná spojitosť.]

$\Leftrightarrow$ • Funkcia f je **spojitá zľava** a **súčasne spojité sprava** v bode a .

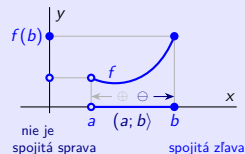
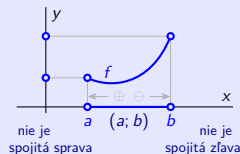
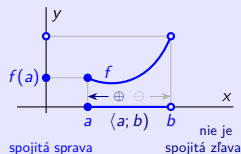
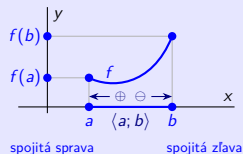
Funkcia f je **spojitá** na množine $A \subset D(f)$,

ak je **spojitá** v každom bode $a \in A$.

• Funkcia f je **spojitá**, ak je **spojitá** na celom svojom $D(f)$.

[f je spojité v každom bode $a \in D(f)$.]

• V krajných bodoch (polo)uzavretých intervalov **myslíme jednostrannú spojitosť** (zľava alebo sprava).



Vlastnosti spojitých funkcí – Spojitost na množině

Funkcia f je **spojitá** v bode $a \in D(f)$.

[Obojstranná spojitosť.]

$\Leftrightarrow$ • Funkcia f je **spojitá zľava** a **súčasne spojité sprava** v bode a .

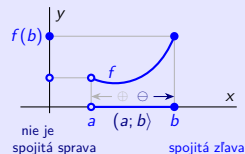
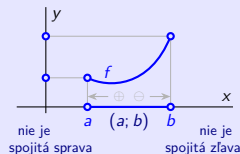
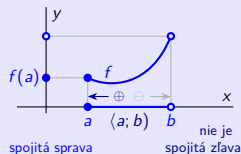
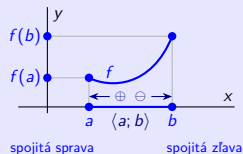
Funkcia f je **spojitá** na množine $A \subset D(f)$,

ak je **spojitá** v každom bode $a \in A$.

• Funkcia f je **spojitá**, ak je **spojitá** na celom svojom $D(f)$.

[f je spojité v každom bode $a \in D(f)$.]

• V krajných bodoch (polo)uzavretých intervalov **myslíme jednostrannú spojitosť** (zľava alebo sprava).



Funkcia f je **spojitá** na množine $A \subset D(f)$, množina $B \subset A$.

Vlastnosti spojitych funkcií – Spojitosť na množine

Funkcia f je spojité v bode $a \in D(f)$.

[Obojstranná spojitosť.]

$\Leftrightarrow$ • Funkcia f je spojité zľava a súčasne spojité sprava v bode a .

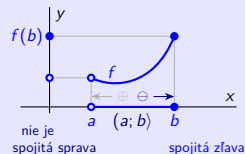
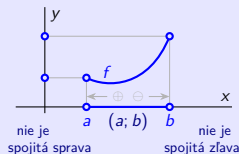
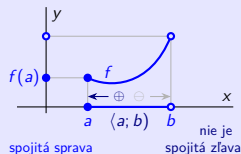
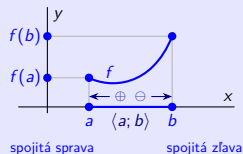
Funkcia f je spojité na množine $A \subset D(f)$,

ak je spojité v každom bode $a \in A$.

• Funkcia f je spojité, ak je spojité na celom svojom $D(f)$.

[f je spojité v každom bode $a \in D(f)$.]

• V krajných bodoch (polo)uzavretých intervalov myslíme jednostrannú spojitosť (zľava alebo sprava).



Funkcia f je spojité na množine $A \subset D(f)$, množina $B \subset A$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f je spojité na množine B .

Vlastnosti spojitých funkcií – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je po častiach spojitá na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in R$, $a < b$,

Vlastnosti spojitých funkcií – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ **konečný** počet **bodov** nespojitosti

Vlastnosti spojitých funkcií – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ **konečný** počet **bodov** nespojitosti

a **žiadny** **nie je** neodstrániteľný II. druhu.

Vlastnosti spojitých funkcií – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in R$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ **konečný počet bodov nespojitosti**
a **žiadny nie je neodstrániteľný II. druhu.**

[Všetky body nespojitosti (konečný počet) sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné I. druhu (skok).]

Vlastnosti spojitých funkcií – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in R$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ **konečný počet bodov nespojitosti**
a **žiadny nie je neodstrániteľný II. druhu.**

[Všetky body nespojitosti (konečný počet) sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné I. druhu (skok).]

- Spojitosť po častiach **môžeme rozšíriť** na ľubovoľný interval $I \subset D(f)$.

Vlastnosti spojitéch funkcí – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in R$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ konečný počet bodov nespojitosti
a žiadny nie je neodstrániteľný II. druhu.

[Všetky body nespojitosti (konečný počet) sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné I. druhu (skok).]

- Spojitosť po častiach môžeme rozšíriť na ľubovoľný interval $I \subset D(f)$.

Funkcia f je **po častiach spojitá** na intervale $I \subset D(f)$,

Vlastnosti spojitých funkcí – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in R$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ **konečný počet bodov nespojitosti**
a **žiadny nie je neodstrániteľný II. druhu**.

[Všetky body nespojitosti (konečný počet) sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné I. druhu (skok).]

- Spojitosť po častiach **môžeme rozšíriť** na ľubovoľný interval $I \subset D(f)$.

Funkcia f je **po častiach spojitá** na intervale $I \subset D(f)$,

ak je funkcia f po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset I$, kde $a, b \in R$, $a < b$.

Vlastnosti spojitych funkcií – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in R$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ **konečný počet bodov nespojitosti**
a **žiadny nie je neodstrániteľný II. druhu**.

[Všetky body nespojitosti (konečný počet) sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné I. druhu (skok).]

- Spojitosť po častiach **môžeme rozšíriť** na ľubovoľný interval $I \subset D(f)$.

Funkcia f je **po častiach spojitá** na intervale $I \subset D(f)$,

ak je funkcia f po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset I$, kde $a, b \in R$, $a < b$.

[Interval I môže byť aj neohraničený, napr. $R = (-\infty; \infty)$, $(0; \infty)$, $(-\infty; 0)$, ap.]

Vlastnosti spojitych funkcií – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in R$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ **konečný počet bodov nespojitosti**
a **žiadny nie je neodstrániteľný II. druhu**.

[Všetky body nespojitosti (konečný počet) sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné I. druhu (skok).]

- Spojitosť po častiach **môžeme rozšíriť** na ľubovoľný interval $I \subset D(f)$.

Funkcia f je **po častiach spojitá** na intervale $I \subset D(f)$,

ak je funkcia f po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset I$, kde $a, b \in R$, $a < b$.

[Interval I môže byť aj neohraničený, napr. $R = (-\infty; \infty)$, $(0; \infty)$, $(-\infty; 0)$, ap.]

Funkcia f je **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

Vlastnosti spojitých funkcií – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in R$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ **konečný počet bodov nespojitosti**
a **žiadny nie je neodstrániteľný II. druhu**.

[Všetky body nespojitosti (konečný počet) sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné I. druhu (skok).]

- Spojitosť po častiach **môžeme rozšíriť** na ľubovoľný interval $I \subset D(f)$.

Funkcia f je **po častiach spojitá** na intervale $I \subset D(f)$,

ak je funkcia f po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset I$, kde $a, b \in R$, $a < b$.

[Interval I môže byť aj neohraničený, napr. $R = (-\infty; \infty)$, $(0; \infty)$, $(-\infty; 0)$, ap.]

Funkcia f je **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f je po častiach spojitá na intervale I .

Vlastnosti spojitých funkcií – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in R$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ **konečný počet bodov nespojitosti**
a **žiadny nie je neodstrániteľný II. druhu**.

[Všetky body nespojitosti (konečný počet) sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné I. druhu (skok).]

- Spojitosť po častiach **môžeme rozšíriť** na ľubovoľný interval $I \subset D(f)$.

Funkcia f je **po častiach spojitá** na intervale $I \subset D(f)$,

ak je funkcia f po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset I$, kde $a, b \in R$, $a < b$.

[Interval I môže byť aj neohraničený, napr. $R = (-\infty; \infty)$, $(0; \infty)$, $(-\infty; 0)$, ap.]

Funkcia f je **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f je po častiach spojitá na intervale I . [f nemá body nespojitosti, t. j. má konečný počet bodov nespojitosti.]

Vlastnosti spojitých funkcií – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ **konečný počet bodov nespojitosti**
a **žiadny nie je neodstrániteľný II. druhu**.

[Všetky body nespojitosti (konečný počet) sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné I. druhu (skok).]

- Spojitosť po častiach **môžeme rozšíriť** na ľubovoľný interval $I \subset D(f)$.

Funkcia f je **po častiach spojitá** na intervale $I \subset D(f)$,

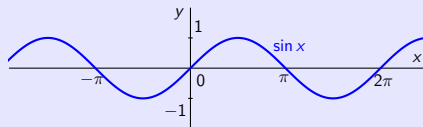
ak je funkcia f po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset I$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Interval I môže byť aj neohraničený, napr. $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$, $(0; \infty)$, $(-\infty; 0)$, ap.]

Funkcia f je **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f je po častiach spojitá na intervale I . [f nemá body nespojitosti, t. j. má konečný počet bodov nespojitosti.]

- $f: y = \sin x$ je spojitá na $\mathbb{R}$.



Vlastnosti spojitych funkcií – Po častiach spojitá funkcia

Funkcia f je **po častiach spojitá** na (uzavretom) intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

ak má funkcia f na intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ **konečný počet bodov nespojitosti**
a **žiadny nie je neodstrániteľný II. druhu**.

[Všetky body nespojitosti (konečný počet) sú odstrániteľné alebo neodstrániteľné I. druhu (skok).]

- Spojitosť po častiach **môžeme rozšíriť** na ľubovoľný interval $I \subset D(f)$.

Funkcia f je **po častiach spojitá** na intervale $I \subset D(f)$,

ak je funkcia f po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset I$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

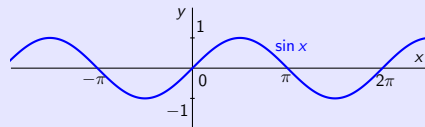
[Interval I môže byť aj neohraničený, napr. $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$, $(0; \infty)$, $(-\infty; 0)$, ap.]

Funkcia f je **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f je po častiach spojitá na intervale I . [f nemá body nespojitosti, t. j. má konečný počet bodov nespojitosti.]

- $f: y = \sin x$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

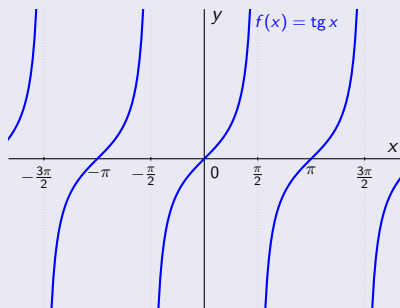
$\Rightarrow$ • f je po častiach spojitá na $\mathbb{R}$.



Vlastnosti spojitých funkcí – Příklady

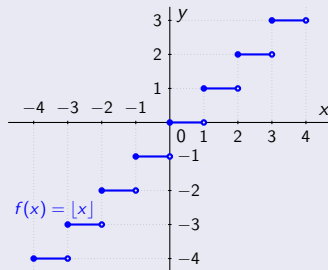
Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

[Funkcia tangens.]



Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$.

[Funkcia celá část.]

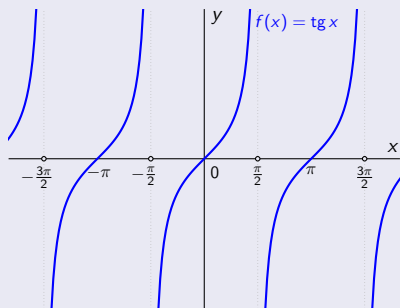


Vlastnosti spojitých funkcií – Príklady

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

[Funkcia tangens.]

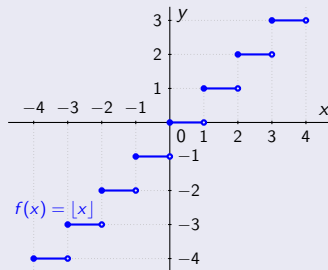
- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$



Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$.

[Funkcia celá časť.]

- $D(f) = R = (-\infty; \infty).$

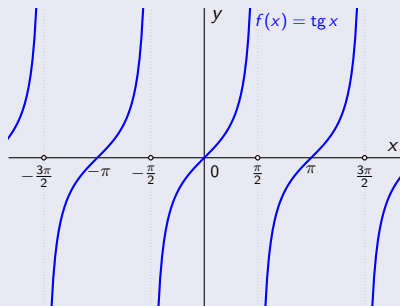


Vlastnosti spojitých funkcií – Príklady

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

[Funkcia tangens.]

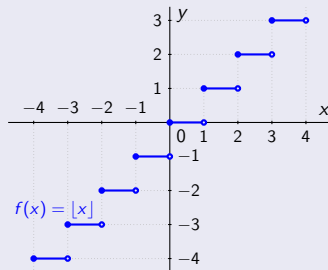
- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- f je spojitá na celom svojom $D(f)$.



Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$.

[Funkcia celá časť.]

- $D(f) = R = (-\infty; \infty)$.
- f nie je spojitá na svojom $D(f)$.

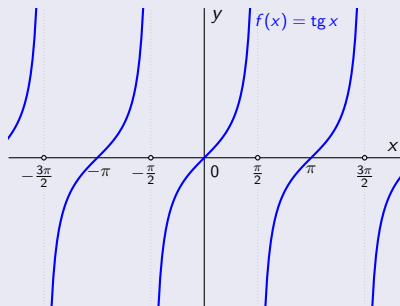


Vlastnosti spojitych funkcií – Príklady

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

[Funkcia tangens.]

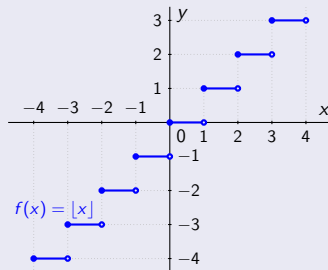
- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. [Nie je interval.]
- f je spojitá na celom svojom $D(f)$.
- f nie je po častiach spojitá na R .



Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$.

[Funkcia celá časť.]

- $D(f) = R = (-\infty; \infty)$. [Je interval.]
- f nie je spojitá na svojom $D(f)$.
- f je po častiach spojitá na $D(f) = R$.

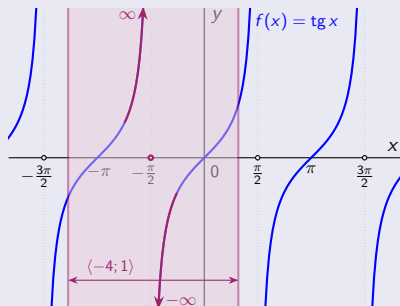


Vlastnosti spojitych funkcií – Príklady

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

[Funkcia tangens.]

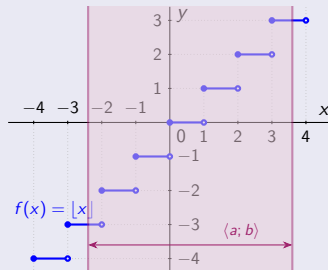
- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. [Nie je interval.]
- f je spojitá na celom svojom $D(f)$.
- f nie je po častiach spojitá na R .



Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$.

[Funkcia celá časť.]

- $D(f) = R = (-\infty; \infty)$. [Je interval.]
- f nie je spojitá na svojom $D(f)$.
- f je po častiach spojitá na $D(f) = R$.
- f je po častiach spojitá na každom $\langle a; b \rangle$, kde $a, b \in R$, $a < b$.



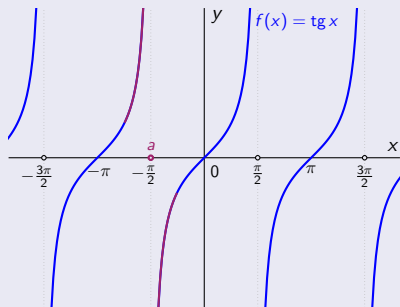
Vlastnosti spojitych funkcií – Príklady

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

[Funkcia tangens.]

- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. [Nie je interval.]
- f je spojitá na celom svojom $D(f)$.
- f nie je po častiach spojitá na R .

- $a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.

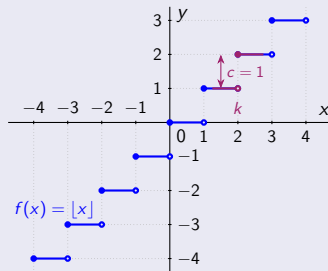


Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$.

[Funkcia celá časť.]

- $D(f) = R = (-\infty; \infty)$. [Je interval.]
- f nie je spojitá na svojom $D(f)$.
- f je po častiach spojitá na $D(f) = R$.

- f je po častiach spojitá na každom $\langle a; b \rangle$, kde $a, b \in R, a < b$.
- $k \in \mathbb{Z}$ sú body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu (skok $c = 1$).



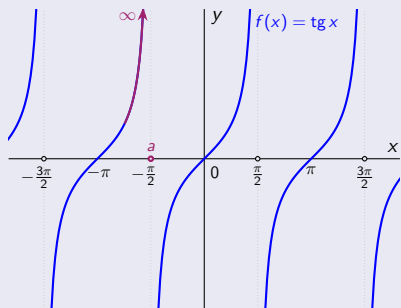
Vlastnosti spojitych funkcií – Príklady

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

[Funkcia tangens.]

- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. [Nie je interval.]
- f je spojitá na celom svojom $D(f)$.
- f nie je po častiach spojitá na R .

- $a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.
- $\lim_{x \rightarrow a^-} \operatorname{tg} x = \infty$.

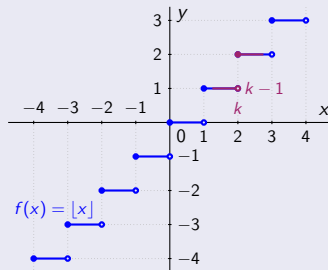


Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$.

[Funkcia celá časť.]

- $D(f) = R = (-\infty; \infty)$. [Je interval.]
- f nie je spojitá na svojom $D(f)$.
- f je po častiach spojitá na $D(f) = R$.

- f je po častiach spojitá na každom $\langle a; b \rangle$, kde $a, b \in R, a < b$.
- $k \in \mathbb{Z}$ sú body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu (skok $c = 1$).
- $\lim_{x \rightarrow k^-} \operatorname{tg} x = k - 1$.



Vlastnosti spojitych funkcií – Príklady

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

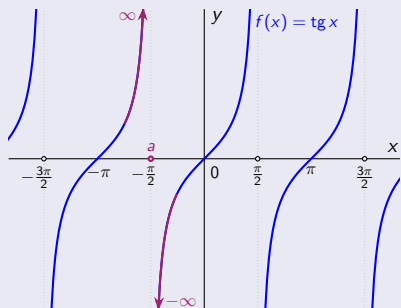
[Funkcia tangens.]

- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. [Nie je interval.]
- f je spojitá na celom svojom $D(f)$.
- f nie je po častiach spojitá na R .

• $a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.

• $\lim_{x \rightarrow a^-} \operatorname{tg} x = \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow a^+} \operatorname{tg} x = -\infty$.



Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$.

[Funkcia celá časť.]

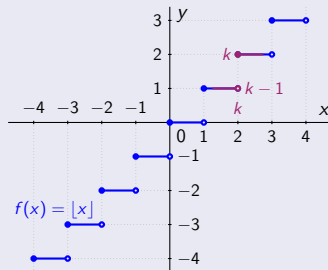
- $D(f) = R = (-\infty; \infty)$. [Je interval.]
- f nie je spojitá na svojom $D(f)$.
- f je po častiach spojitá na $D(f) = R$.

• f je po častiach spojitá na každom $\langle a; b \rangle$, kde $a, b \in R, a < b$.

• $k \in \mathbb{Z}$ sú body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu (skok $c = 1$).

• $\lim_{x \rightarrow k^-} \operatorname{tg} x = k - 1$.

• $\lim_{x \rightarrow k^+} \operatorname{tg} x = k$.



Vlastnosti spojitých funkcí – Příklady

Funkcia $f: y = \operatorname{tg} x$.

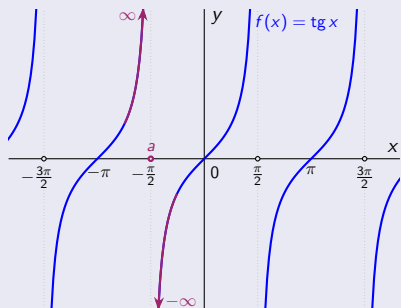
[Funkcia tangens.]

- $D(f) = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. [Nie je interval.]
- f je spojitá na celom svojom $D(f)$.
- f nie je po častiach spojitá na R .

• $a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.

• $\lim_{x \rightarrow a^-} \operatorname{tg} x = \infty$.

• $\lim_{x \rightarrow a^+} \operatorname{tg} x = -\infty$.



Funkcia $f: y = \lfloor x \rfloor$.

[Funkcia celá časť.]

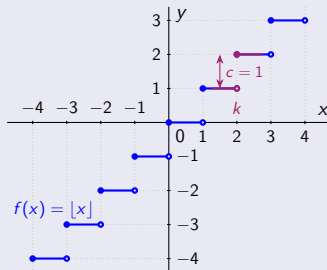
- $D(f) = R = (-\infty; \infty)$. [Je interval.]
- f nie je spojitá na svojom $D(f)$.
- f je po častiach spojitá na $D(f) = R$.

• f je po častiach spojitá na každom $\langle a; b \rangle$, kde $a, b \in R, a < b$.

• $k \in \mathbb{Z}$ sú body neodstrániteľnej nespojitosti I. druhu (skok $c = 1$).

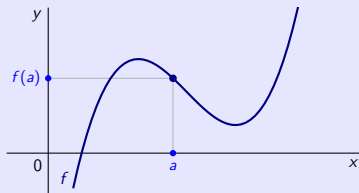
• $\lim_{x \rightarrow k^-} \operatorname{tg} x = k - 1$.

• $\lim_{x \rightarrow k^+} \operatorname{tg} x = k$.



Vlastnosti spojitých funkcí – Lokální ohraničenost

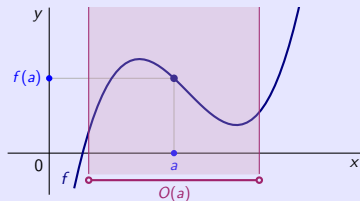
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.



Vlastnosti spojitych funkcií – Lokálna ohraničenosť

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$,

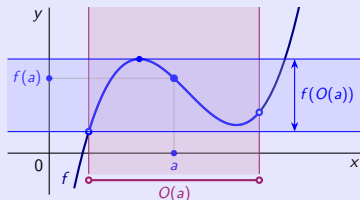


Vlastnosti spojitych funkcií – Lokálna ohraničenosť

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

⇒ • Existuje okolie $O(a)$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

[f je lokálne ohraničená v nejakom okolí $O(a)$.]



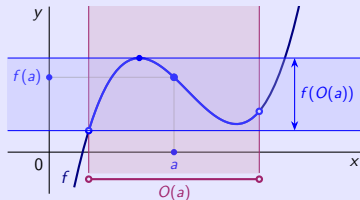
Vlastnosti spojitych funkcií – Lokálna ohraničenosť

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

⇒ • Existuje okolie $O(a)$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

[f je lokálne ohraničená v nejakom okolí $O(a)$.]

• Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$.



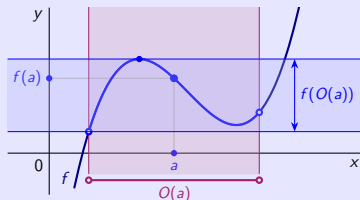
Vlastnosti spojitých funkcií – Lokálna ohraničenosť

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

[f je lokálne ohraničená v nejakom okolí $O(a)$.]

• Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$. $\Rightarrow$ • f nemusí byť ohraničená na množine A .



Vlastnosti spojitých funkcií – Lokálna ohraničenosť

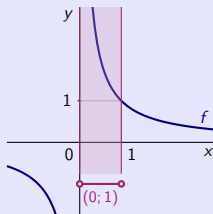
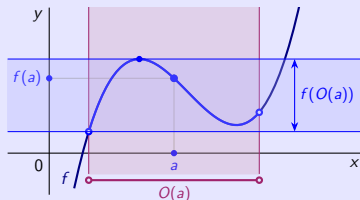
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

⇒ • Existuje okolie $O(a)$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

[f je lokálne ohraničená v nejakom okolí $O(a)$.]

• Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$. ⇒ • f nemusí byť ohraničená na množine A .

• Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ je spojitá na $(0; 1)$,



Vlastnosti spojitých funkcí – Lokální ohraničenost

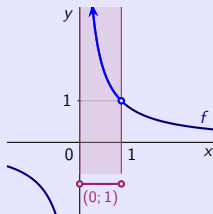
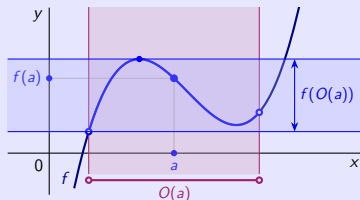
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

⇒ • Existuje okolie $O(a)$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

[f je lokálne ohraničená v nejakom okolí $O(a)$.]

• Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$. ⇒ • f nemusí byť ohraničená na množine A .

• Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ je spojitá na $(0; 1)$, ale nie je ohraničená na $(0; 1)$.



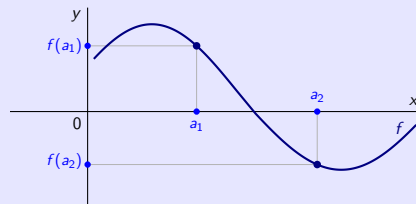
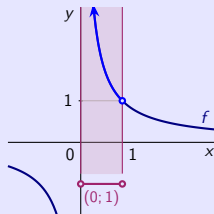
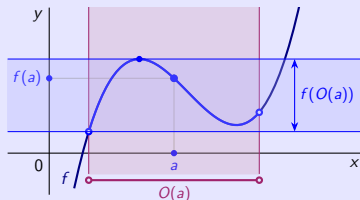
Vlastnosti spojitych funkcií – Lokálna ohraničenosť

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

[f je lokálne ohraničená v nejakom okolí $O(a)$.]

- Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$. $\Rightarrow$ • f nemusí byť ohraničená na množine A .
- Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ je spojitá na $(0; 1)$, ale nie je ohraničená na $(0; 1)$.



Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

Vlastnosti spojitých funkcí – Lokální ohraničenost

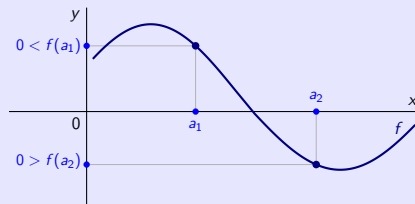
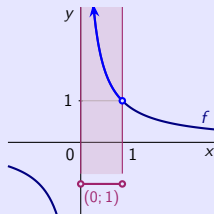
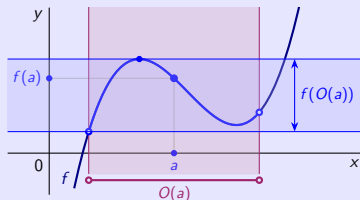
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

[f je lokálne ohraničená v nejakom okolí $O(a)$.]

• Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$. $\Rightarrow$ • f nemusí byť ohraničená na množine A .

• Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ je spojitá na $(0; 1)$, ale nie je ohraničená na $(0; 1)$.



Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

• $f(a) > 0$.

• $f(a) < 0$.

Vlastnosti spojitých funkcí – Lokálna ohraničenosť

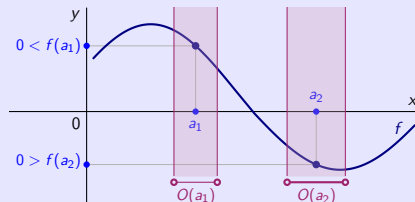
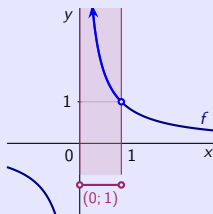
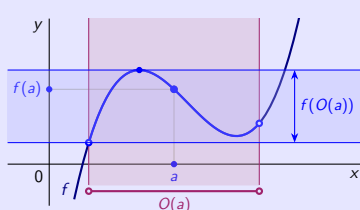
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

[f je lokálne ohraničená v nejakom okolí $O(a)$.]

• Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$. $\Rightarrow$ • f nemusí byť ohraničená na množine A .

• Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ je spojitá na $(0; 1)$, ale nie je ohraničená na $(0; 1)$.



Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

• $f(a) > 0$. $\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$

• $f(a) < 0$. $\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$

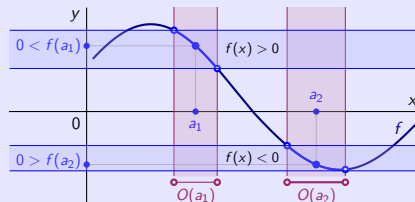
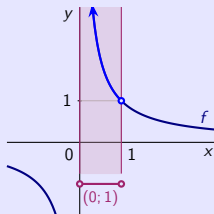
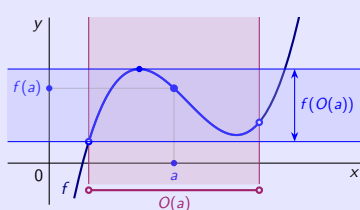
Vlastnosti spojitych funkcií – Lokálna ohraničenosť

Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

$\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$, v ktorom je funkcia f ohraničená.

[f je lokálne ohraničená v nejakom okolí $O(a)$.]

- Funkcia f je spojitá na množine $A \subset D(f)$. $\Rightarrow$ • f nemusí byť ohraničená na množine A .
- Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ je spojitá na $(0; 1)$, ale nie je ohraničená na $(0; 1)$.



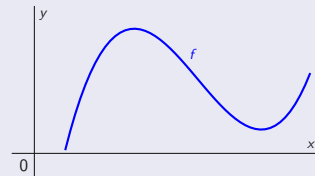
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$.

- $f(a) > 0$. $\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$ platí $f(x) > 0$.
- $f(a) < 0$. $\Rightarrow$ • Existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$ platí $f(x) < 0$.

Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f

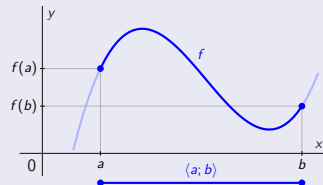
[Weierstrasseho veta.]



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

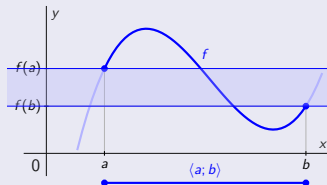


Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

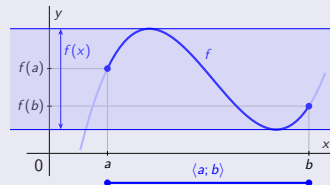


Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

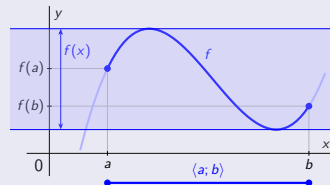


Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

- $\Rightarrow$
- f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrémny.

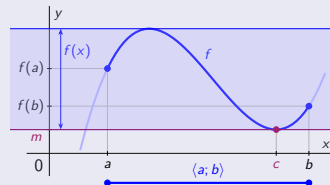


Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

- $\Rightarrow$
- f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrémny.
- $[c \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\},$



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

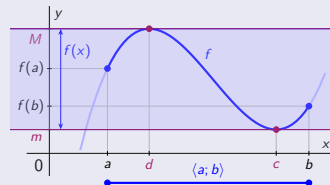
Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrémny.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

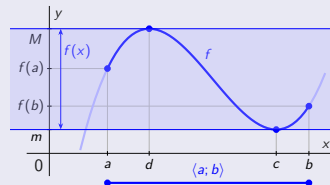
Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrémny.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$

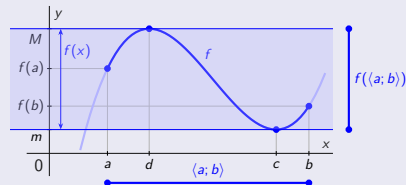


Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

- $\Rightarrow$
- f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrémny.
 $[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$
 - $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

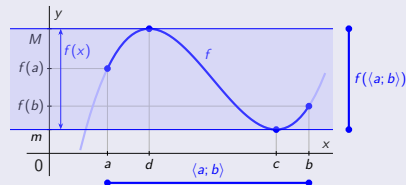
$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrémny.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$

• $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.

$[f(\langle a; b \rangle) = \langle m; M \rangle.]$



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

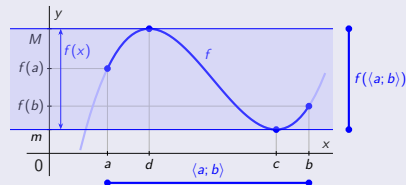
$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrémny.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$

• $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.

$[f(\langle a; b \rangle) = \langle m; M \rangle.]$



• Tvrdenia platia iba pre uzavretý interval I .

Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

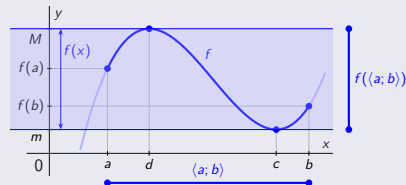
$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrémny.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$

• $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.

$[f(\langle a; b \rangle) = \langle m; M \rangle.]$



• Tvrdenia platia iba pre uzavretý interval I .

[Ak interval I nie je uzavretý, tvrdenia nemusia platiť.]

Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

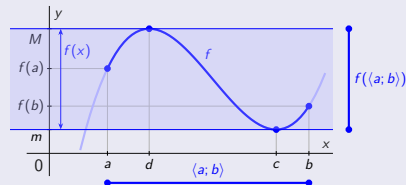
$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrémny.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$

• $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.

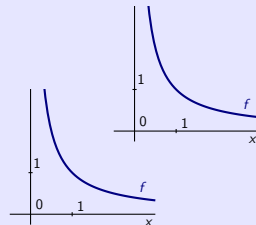
$[f(\langle a; b \rangle) = \langle m; M \rangle.]$



• Tvrdenia platia iba pre uzavretý interval I .

[Ak interval I nie je uzavretý, tvrdenia nemusia platiť.]

Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$ je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

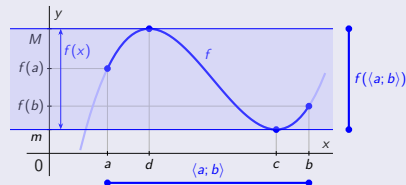
$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrém.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$

• $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.

$[f(\langle a; b \rangle) = \langle m; M \rangle.]$

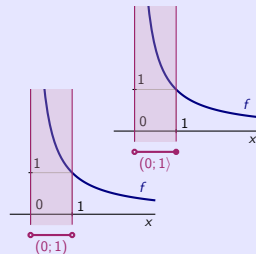


• Tvrdenia platia iba pre uzavretý interval I .

[Ak interval I nie je uzavretý, tvrdenia nemusia platiť.]

Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$ je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• f je spojitá na intervaloch $I_1 = (0; 1)$ a $I_2 = (0; 1)$.



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

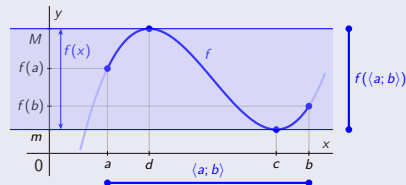
$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrém.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$

• $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.

$[f(\langle a; b \rangle) = \langle m; M \rangle.]$



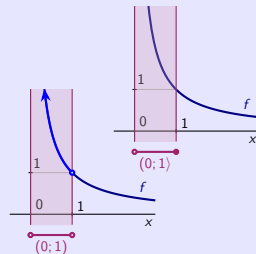
• Tvrdenia platia iba pre uzavretý interval I .

[Ak interval I nie je uzavretý, tvrdenia nemusia platiť.]

Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$ je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• f je spojitá na intervaloch $I_1 = (0; 1)$ a $I_2 = (0; 1)$.

• f nie je ohraničená na I_1



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

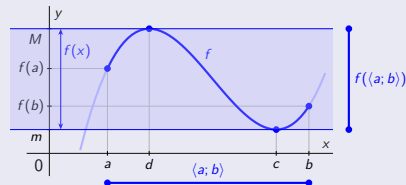
$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrém.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$

• $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.

$[f(\langle a; b \rangle) = \langle m; M \rangle.]$



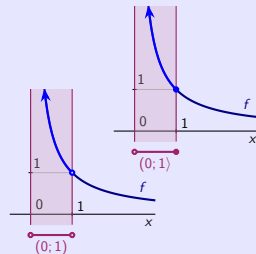
• Tvrdenia platia iba pre uzavretý interval I .

[Ak interval I nie je uzavretý, tvrdenia nemusia platiť.]

Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$ je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• f je spojitá na intervaloch $I_1 = (0; 1)$ a $I_2 = (1; \infty)$.

• f nie je ohraničená na I_1 a ani na I_2 .



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

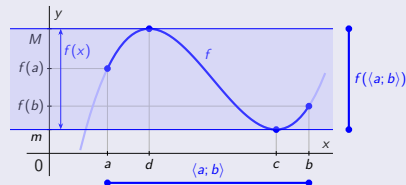
$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrém.

[$c, d \in \langle a; b \rangle$, $m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}$, $M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}$.]

• $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.

[$f(\langle a; b \rangle) = \langle m; M \rangle$.]



• Tvrdenia platia iba pre uzavretý interval I .

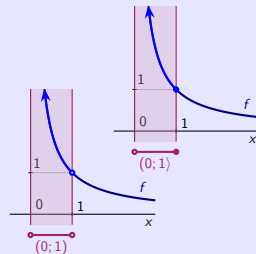
[Ak interval I nie je uzavretý, tvrdenia nemusia platiť.]

Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$ je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• f je spojitá na intervaloch $I_1 = (0; 1)$ a $I_2 = (0; 1)$.

• f nie je ohraničená na I_1 a ani na I_2 .

• f nenadobúda extrém na I_1 ,



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

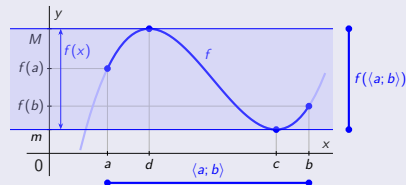
$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrém.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$

• $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.

$[f(\langle a; b \rangle) = \langle m; M \rangle.]$



• Tvrdenia platia iba pre uzavretý interval I .

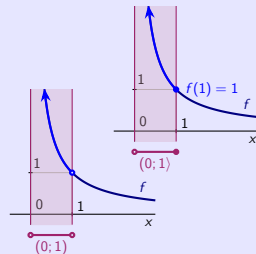
[Ak interval I nie je uzavretý, tvrdenia nemusia platiť.]

Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$ je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• f je spojitá na intervaloch $I_1 = (0; 1)$ a $I_2 = (1; \infty)$.

• f nie je ohraničená na I_1 a ani na I_2 .

• f nenadobúda extrém na I_1 , na I_2 nadobúda minimum, nie maximum.



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

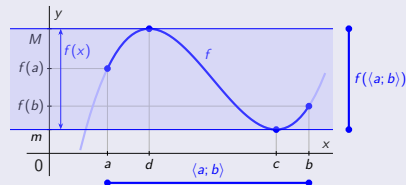
$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrém.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$

• $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.

$[f(\langle a; b \rangle) = \langle m; M \rangle.]$



• Tvrdenia platia iba pre uzavretý interval I .

[Ak interval I nie je uzavretý, tvrdenia nemusia platiť.]

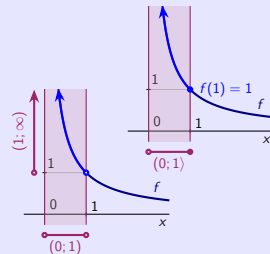
Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$ je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• f je spojitá na intervaloch $I_1 = (0; 1)$ a $I_2 = (1; \infty)$.

• f nie je ohraničená na I_1 a ani na I_2 .

• f nenadobúda extrém na I_1 , na I_2 nadobúda minimum, nie maximum.

• $f((0; 1)) = (1; \infty)$,



Spojitosť na intervaloch – Weierstrasseho veta

Funkcia f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \in D(f)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

[Weierstrasseho veta.]

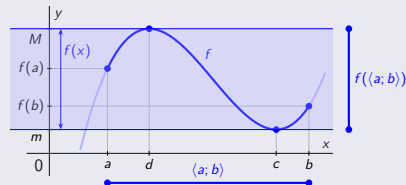
$\Rightarrow$ • f je ohraničená na intervale $\langle a; b \rangle$.

• f nadobúda na intervale $\langle a; b \rangle$ svoje extrém.

$[c, d \in \langle a; b \rangle, m = f(c) = \min \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}, M = f(d) = \max \{f(x), x \in \langle a; b \rangle\}.]$

• $f(\langle a; b \rangle)$ je uzavretý interval.

$[f(\langle a; b \rangle) = \langle m; M \rangle.]$



• Tvrdenia platia iba pre uzavretý interval I .

[Ak interval I nie je uzavretý, tvrdenia nemusia platiť.]

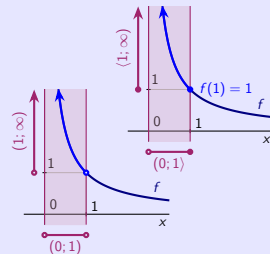
Funkcia $f: y = \frac{1}{x}$ je spojitá na svojom $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

• f je spojitá na intervaloch $I_1 = (0; 1)$ a $I_2 = (1; \infty)$.

• f nie je ohraničená na I_1 a ani na I_2 .

• f nenadobúda extrém na I_1 , na I_2 nadobúda minimum, nie maximum.

• $f((0; 1)) = (1; \infty)$, $f((1; \infty)) = (0; 1)$ nie sú uzavreté intervaly.



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojité funkcie zobrazujú intervaly na intervaly.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojité funkcie zobrazujú intervaly na intervaly.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse).]

Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojité funkcie zobrazujú intervaly na intervaly.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocijaký.]

Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocikáký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

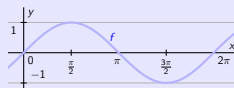
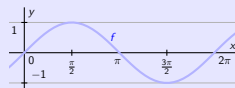
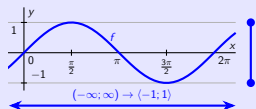
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocikáký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ zobrazuje interval $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

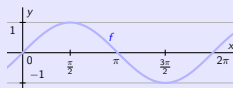
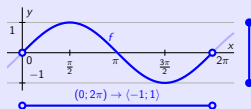
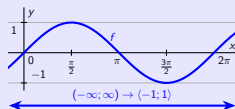
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojité funkcie zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocikáký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ zobrazuje interval $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

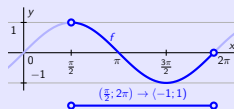
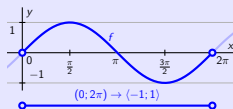
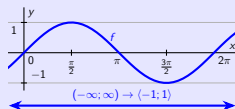
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocikáký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in R$ zobrazuje interval $R = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

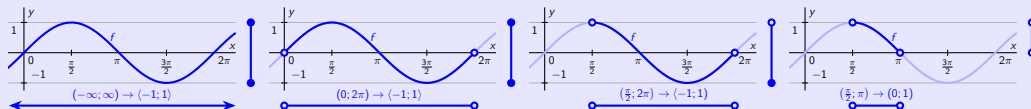
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocikáký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in R$ zobrazuje interval $R = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

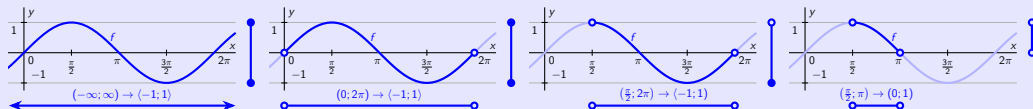
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

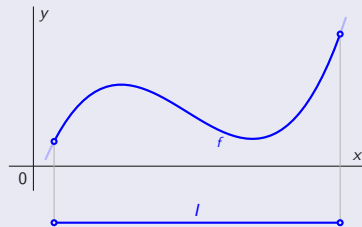
[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocikajký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ zobrazuje interval $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Veta o medzihodnote.]



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

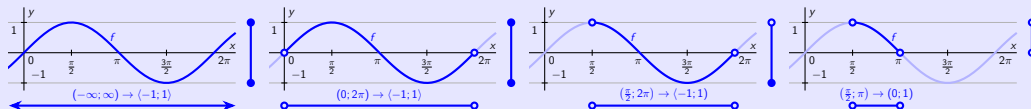
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

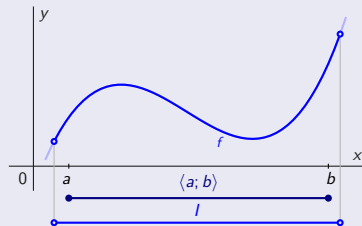
[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocijaký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ zobrazuje interval $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Body $a, b \in I, a < b$.

[Veta o medzihodnote.]



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

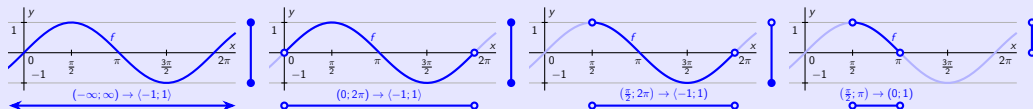
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

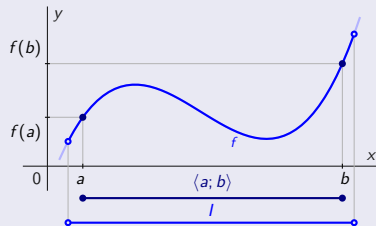
[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocikáký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ zobrazuje interval $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Body $a, b \in I, a < b$.

[Veta o medzihodnote.]



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

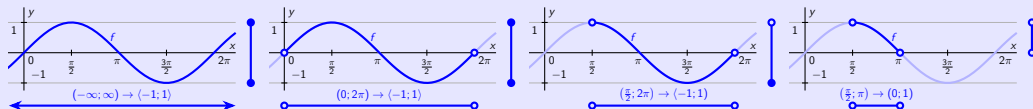
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocijaký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ zobrazuje interval $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.

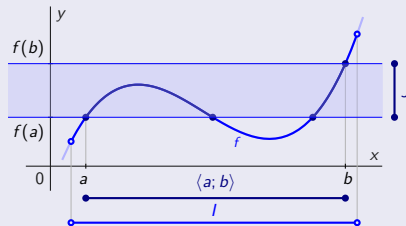


Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Body $a, b \in I, a < b$.

[Veta o medzihodnote.]

$\Rightarrow$ • f nadobúda všetky hodnoty z intervalu J

s koncovými bodmi $f(a), f(b)$.



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

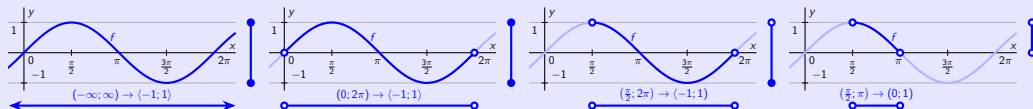
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocijaký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ zobrazuje interval $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



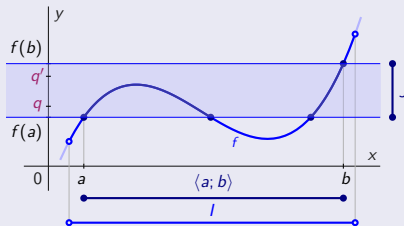
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Body $a, b \in I, a < b$.

[Veta o medzihodnote.]

$\Rightarrow$ • f nadobúda všetky hodnoty z intervalu J

s koncovými bodmi $f(a), f(b)$.

[Pre každé $q \in J$,



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

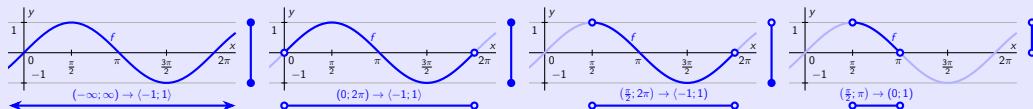
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocijaký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ zobrazuje interval $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



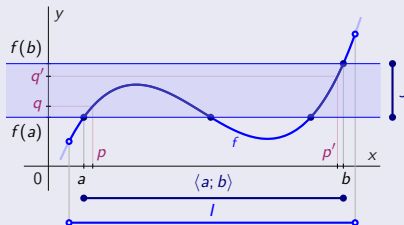
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Body $a, b \in I, a < b$.

[Veta o medzihodnote.]

$\Rightarrow$ • f nadobúda všetky hodnoty z intervalu J

s koncovými bodmi $f(a), f(b)$.

[Pre každé $q \in J$, existuje $p \in (a; b)$]



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

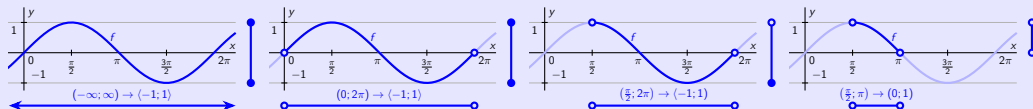
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocijaký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ zobrazuje interval $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



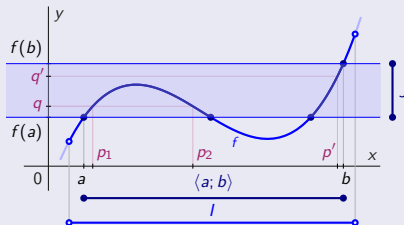
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Body $a, b \in I, a < b$.

[Veta o medzihodnote.]

$\Rightarrow$ • f nadobúda všetky hodnoty z intervalu J

s koncovými bodmi $f(a), f(b)$.

[Pre každé $q \in J$, existuje $p \in (a; b)$]



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

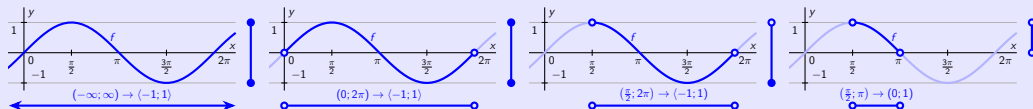
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocijaký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ zobrazuje interval $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



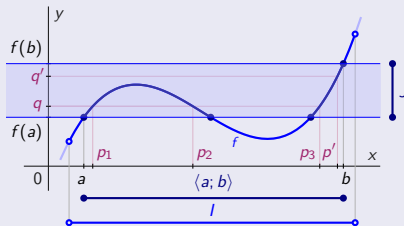
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Body $a, b \in I, a < b$.

[Veta o medzihodnote.]

$\Rightarrow$ • f nadobúda všetky hodnoty z intervalu J

s koncovými bodmi $f(a), f(b)$.

[Pre každé $q \in J$, existuje $p \in (a; b)$]



Spojitosť na intervaloch – Veta o medzihodnote

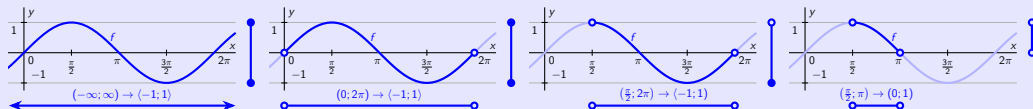
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

[Spojitá funkcia zobrazuje interval na interval.]

$\Rightarrow$ • $f(I)$ je interval.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse). Ak I nie je uzavretý, typ $f(I)$ môže byť hocijaký.]

• Funkcia $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ zobrazuje interval $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$ na interval $\langle -1; 1 \rangle$.



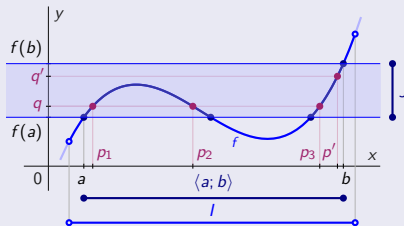
Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Body $a, b \in I, a < b$.

[Veta o medzihodnote.]

$\Rightarrow$ • f nadobúda všetky hodnoty z intervalu J

s koncovými bodmi $f(a), f(b)$.

[Pre každé $q \in J$, existuje $p \in (a; b)$ také, že platí $f(p) = q$.]



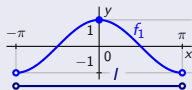
Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

- $f_1(x) = \cos x$:

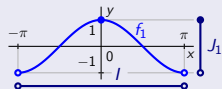


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

- $f_1(x) = \cos x$:

$$I \rightarrow J_1 = (-1; 1).$$



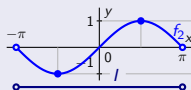
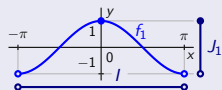
Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

- $f_1(x) = \cos x$:

- $f_2(x) = \sin x$:

$$I \rightarrow J_1 = (-1; 1).$$

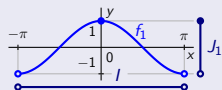


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

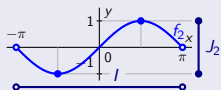
- $f_1(x) = \cos x$:

$$I \rightarrow J_1 = (-1; 1).$$



- $f_2(x) = \sin x$:

$$I \rightarrow J_2 = (-1; 1).$$

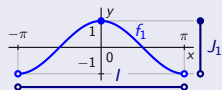


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

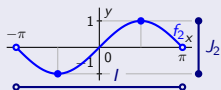
- $f_1(x) = \cos x:$

$$I \rightarrow J_1 = (-1; 1).$$

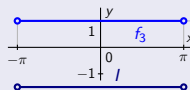


- $f_2(x) = \sin x:$

$$I \rightarrow J_2 = (-1; 1).$$



- $f_3(x) = 1:$

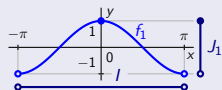


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

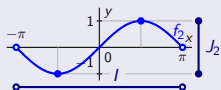
• $f_1(x) = \cos x$:

$I \rightarrow J_1 = (-1; 1)$.



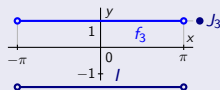
• $f_2(x) = \sin x$:

$I \rightarrow J_2 = \langle -1; 1 \rangle$.



• $f_3(x) = 1$:

$I \rightarrow J_3 = \{1\}$.

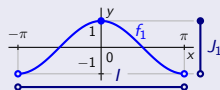


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

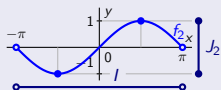
• $f_1(x) = \cos x$:

$I \rightarrow J_1 = (-1; 1)$.



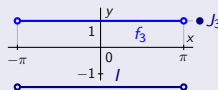
• $f_2(x) = \sin x$:

$I \rightarrow J_2 = \langle -1; 1 \rangle$.

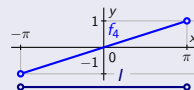


• $f_3(x) = 1$:

$I \rightarrow J_3 = \{1\}$.



• $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$:

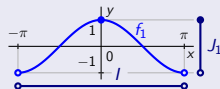


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

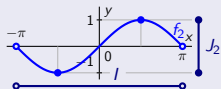
• $f_1(x) = \cos x$:

$I \rightarrow J_1 = (-1; 1)$.



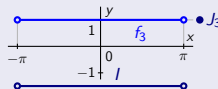
• $f_2(x) = \sin x$:

$I \rightarrow J_2 = \langle -1; 1 \rangle$.



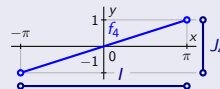
• $f_3(x) = 1$:

$I \rightarrow J_3 = \{1\}$.



• $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$:

$I \rightarrow J_4 = (-1; 1)$.

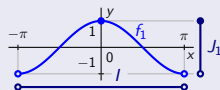


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

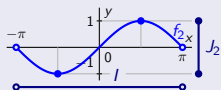
• $f_1(x) = \cos x$:

$I \rightarrow J_1 = (-1; 1)$.



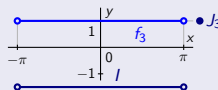
• $f_2(x) = \sin x$:

$I \rightarrow J_2 = \langle -1; 1 \rangle$.



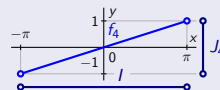
• $f_3(x) = 1$:

$I \rightarrow J_3 = \{1\}$.

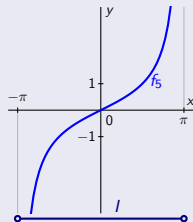


• $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$:

$I \rightarrow J_4 = (-1; 1)$.



• $f_5(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $I \rightarrow R$.

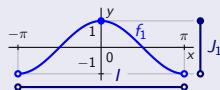


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

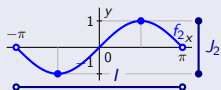
• $f_1(x) = \cos x$:

$I \rightarrow J_1 = (-1; 1)$.



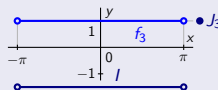
• $f_2(x) = \sin x$:

$I \rightarrow J_2 = (-1; 1)$.



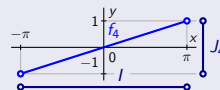
• $f_3(x) = 1$:

$I \rightarrow J_3 = \{1\}$.



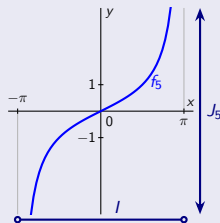
• $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$:

$I \rightarrow J_4 = (-1; 1)$.



• $f_5(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $I \rightarrow R$.

$I \rightarrow J_5 = (-\infty; \infty)$.

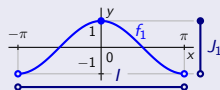


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

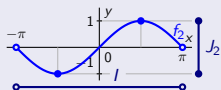
• $f_1(x) = \cos x$:

$I \rightarrow J_1 = (-1; 1)$.



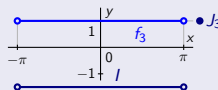
• $f_2(x) = \sin x$:

$I \rightarrow J_2 = \langle -1; 1 \rangle$.



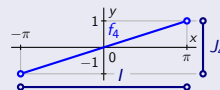
• $f_3(x) = 1$:

$I \rightarrow J_3 = \{1\}$.



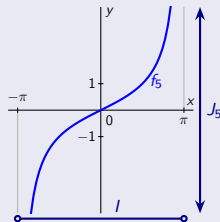
• $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$:

$I \rightarrow J_4 = (-1; 1)$.

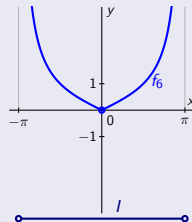


• $f_5(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $I \rightarrow R$.

$I \rightarrow J_5 = (-\infty; \infty)$.



• $f_6(x) = |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$:

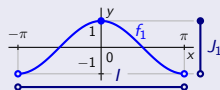


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

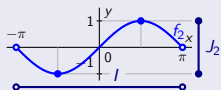
• $f_1(x) = \cos x$:

$I \rightarrow J_1 = (-1; 1)$.



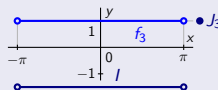
• $f_2(x) = \sin x$:

$I \rightarrow J_2 = \langle -1; 1 \rangle$.



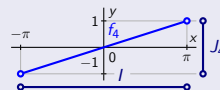
• $f_3(x) = 1$:

$I \rightarrow J_3 = \{1\}$.



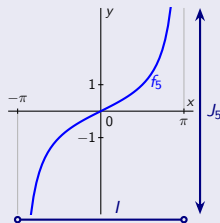
• $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$:

$I \rightarrow J_4 = (-1; 1)$.



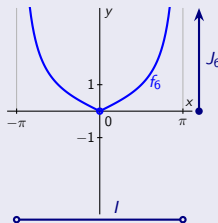
• $f_5(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $I \rightarrow R$.

$I \rightarrow J_5 = (-\infty; \infty)$.



• $f_6(x) = |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$:

$I \rightarrow J_6 = \langle 0; \infty \rangle$.

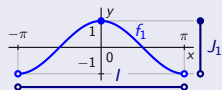


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

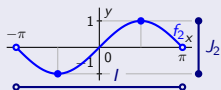
• $f_1(x) = \cos x$:

$I \rightarrow J_1 = (-1; 1)$.



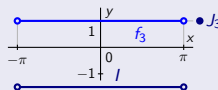
• $f_2(x) = \sin x$:

$I \rightarrow J_2 = \langle -1; 1 \rangle$.



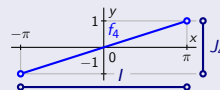
• $f_3(x) = 1$:

$I \rightarrow J_3 = \{1\}$.



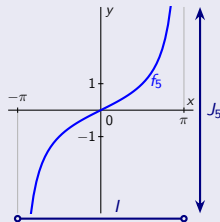
• $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$:

$I \rightarrow J_4 = (-1; 1)$.



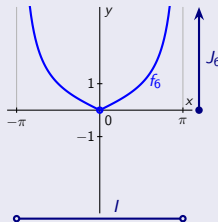
• $f_5(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $I \rightarrow R$.

$I \rightarrow J_5 = (-\infty; \infty)$.

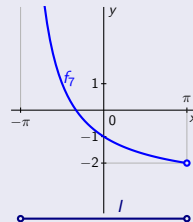


• $f_6(x) = |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$:

$I \rightarrow J_6 = \langle 0; \infty \rangle$.



• $f_7(x) = -\frac{3x+\pi}{x+\pi}$:

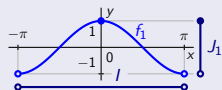


Spojitosť na intervaloch – Príklady

Príklady zobrazenia intervalu $I = (-\pi; \pi)$ spojitými funkciami.

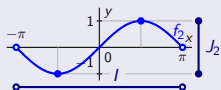
• $f_1(x) = \cos x$:

$I \rightarrow J_1 = (-1; 1)$.



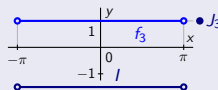
• $f_2(x) = \sin x$:

$I \rightarrow J_2 = \langle -1; 1 \rangle$.



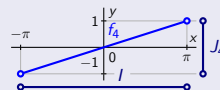
• $f_3(x) = 1$:

$I \rightarrow J_3 = \{1\}$.



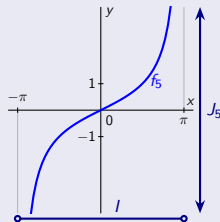
• $f_4(x) = \frac{x}{\pi}$:

$I \rightarrow J_4 = (-1; 1)$.



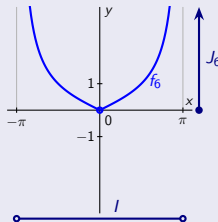
• $f_5(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: $I \rightarrow R$.

$I \rightarrow J_5 = (-\infty; \infty)$.



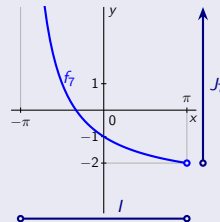
• $f_6(x) = |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$:

$I \rightarrow J_6 = \langle 0; \infty \rangle$.



• $f_7(x) = -\frac{3x+\pi}{x+\pi}$:

$I \rightarrow J_7 = (-2; \infty)$.



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

⇒ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

⇒ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$.

Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

- f je prostá na I .

Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).

Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

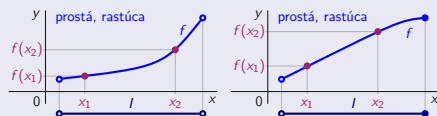
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

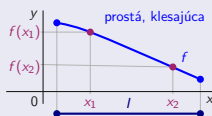
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

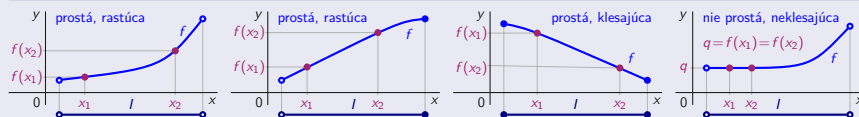
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

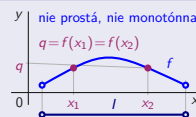
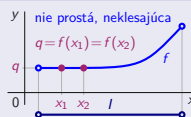
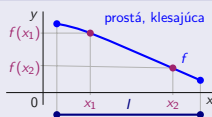
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

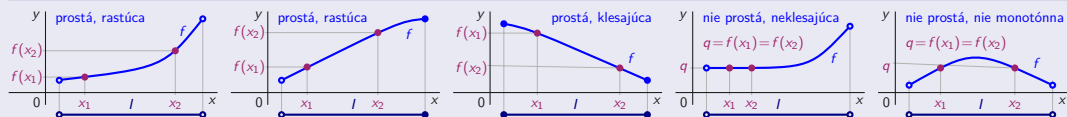
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).



• Ak množina I nie je interval, potom tvrdenie neplatí.

Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

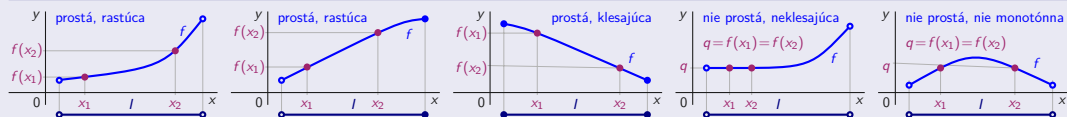
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).



• Ak množina I nie je interval, potom tvrdenie neplatí.

[Množinu I musíme rozdeliť na disjunktné intervaly.]

Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

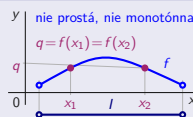
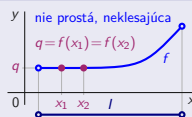
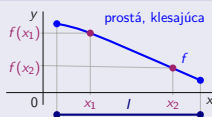
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

⇒ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

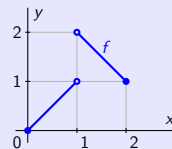
• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).



• Ak množina I nie je interval, potom tvrdenie neplatí.

[Množinu I musíme rozdeliť na disjunktné intervaly.]

Označme $f: y = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle, \\ 3-x & \text{pre } x \in \langle 1; 2 \rangle. \end{cases}$



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

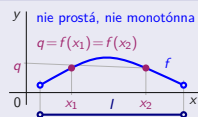
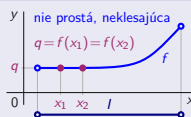
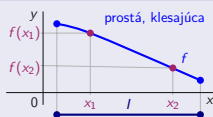
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

⇒ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).

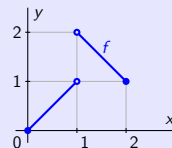


• Ak množina I nie je interval, potom tvrdenie neplatí.

[Množinu I musíme rozdeliť na disjunktné intervaly.]

Označme $f: y = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle, \\ 3-x & \text{pre } x \in \langle 1; 2 \rangle. \end{cases}$

• f je spojitá



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

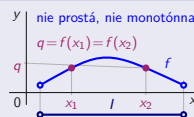
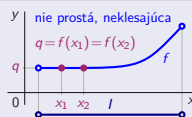
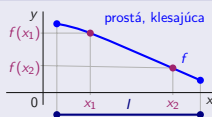
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

⇒ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).

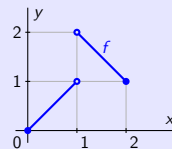


• Ak množina I nie je interval, potom tvrdenie neplatí.

[Množinu I musíme rozdeliť na disjunktné intervaly.]

Označme $f: y = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle, \\ 3-x & \text{pre } x \in \langle 1; 2 \rangle. \end{cases}$

• f je spojitá a prostá,



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

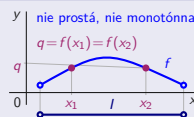
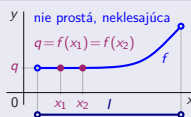
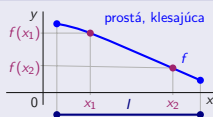
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).

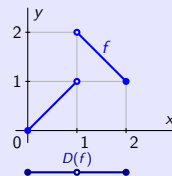


• Ak množina I nie je interval, potom tvrdenie neplatí.

[Množinu I musíme rozdeliť na disjunktné intervaly.]

Označme $f: y = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle, \\ 3-x & \text{pre } x \in (1; 2 \rangle. \end{cases}$

• f je spojitá a prostá, ale nie monotónna na svojom $D(f) = \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$.



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

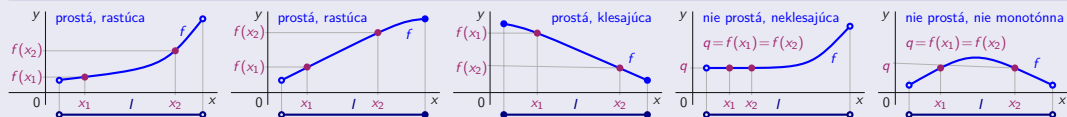
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

⇒ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).

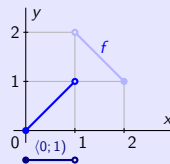


• Ak množina I nie je interval, potom tvrdenie neplatí.

[Množinu I musíme rozdeliť na disjunktné intervaly.]

Označme $f: y = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle, \\ 3-x & \text{pre } x \in (1; 2]. \end{cases}$

- f je spojitá a prostá, ale nie monotónna na svojom $D(f) = \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$.
- f je rastúca a prostá na $\langle 0; 1 \rangle$,



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

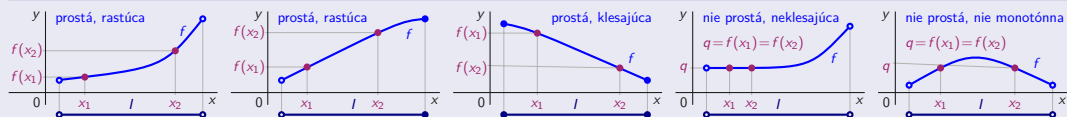
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

⇒ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).

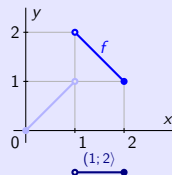


• Ak množina I nie je interval, potom tvrdenie neplatí.

[Množinu I musíme rozdeliť na disjunktné intervaly.]

Označme $f: y = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \langle 0; 1), \\ 3-x & \text{pre } x \in (1; 2). \end{cases}$

- f je spojitá a prostá, ale nie monotónna na svojom $D(f) = \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$.
- f je rastúca a prostá na $\langle 0; 1)$, klesajúca a prostá na $(1; 2)$.



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť a monotonnosť

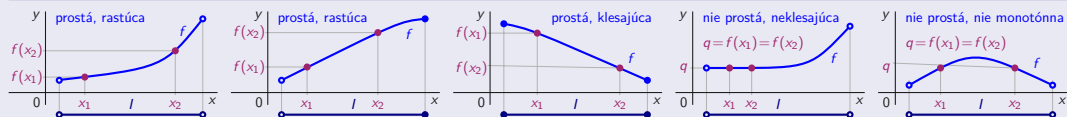
Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset D(f)$.

⇒ • Intervaly I a $f(I)$ majú rovnaký typ.

[Oba sú otvorené, resp. uzavreté, resp. z jednej strany otvorené a z druhej uzavreté.]

Funkcia f je spojitá na intervale $I \subset D(f)$. Potom platí:

• f je prostá na I . $\Leftrightarrow$ • f je rýdzo monotónna na I (rastúca alebo klesajúca).

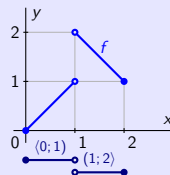


• Ak množina I nie je interval, potom tvrdenie neplatí.

[Množinu I musíme rozdeliť na disjunktné intervaly.]

Označme $f: y = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \langle 0; 1), \\ 3-x & \text{pre } x \in (1; 2). \end{cases}$

- f je spojitá a prostá, ale nie monotónna na svojom $D(f) = \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$.
- f je rastúca a prostá na $\langle 0; 1)$, klesajúca a prostá na $(1; 2)$.



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojité (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$

$(a; b)$



$\langle a; b)$



$(a; \infty)$



$\langle a; \infty)$



$(-\infty; \infty)$



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojitá (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$ na interval $f(I)$.

$I \mapsto f(I)$

$(a; b)$



$\langle a; b)$



$(a; \infty)$



$\langle a; \infty)$



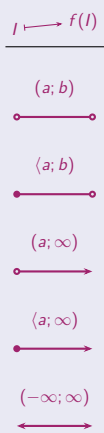
$(-\infty; \infty)$



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojitá (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$ na interval $f(I)$.

$f(I)$ môže byť:



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojité (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$ na interval $f(I)$.

$f(I)$ môže byť: • otvorený,

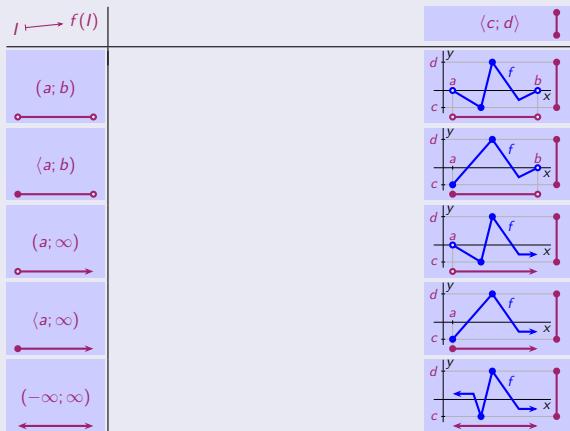


Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojitá (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$ na interval $f(I)$.

$f(I)$ môže byť:

- uzavretý,

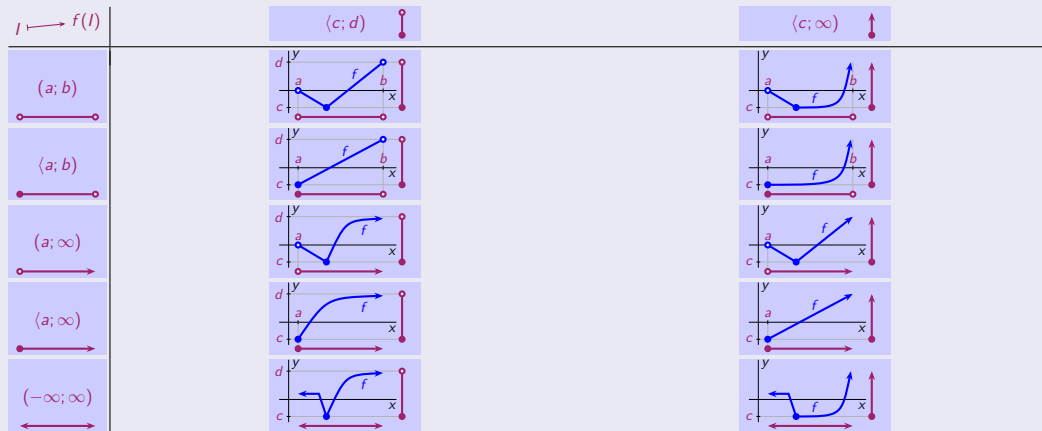


Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojitá (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$ na interval $f(I)$.

$f(I)$ môže byť:

- z jednej strany otvorený a z druhej uzavretý,

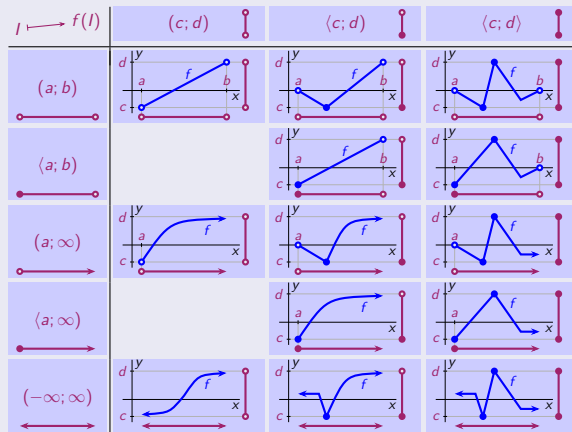


Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojitá (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$ na interval $f(I)$.

$f(I)$ môže byť:

- ohraničený,



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojitá (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$ na interval $f(I)$.

$f(I)$ môže byť:

- neohraničený zdola alebo zhora,



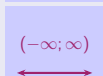
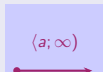
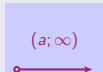
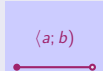
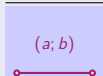
Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojitá (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$ na interval $f(I)$.

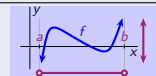
$f(I)$ môže byť:

- neohraničený zdola a aj zhora.

$I \mapsto f(I)$



$(-\infty; \infty)$



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojitá (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$ na interval $f(I)$.

$f(I)$ môže byť:

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse).]

$I \mapsto f(I)$

$(a; b)$



$\langle a; b \rangle$



$(a; \infty)$



$\langle a; \infty \rangle$



$(-\infty; \infty)$



Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojitá (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$ na interval $f(I)$.

$f(I)$ môže byť:

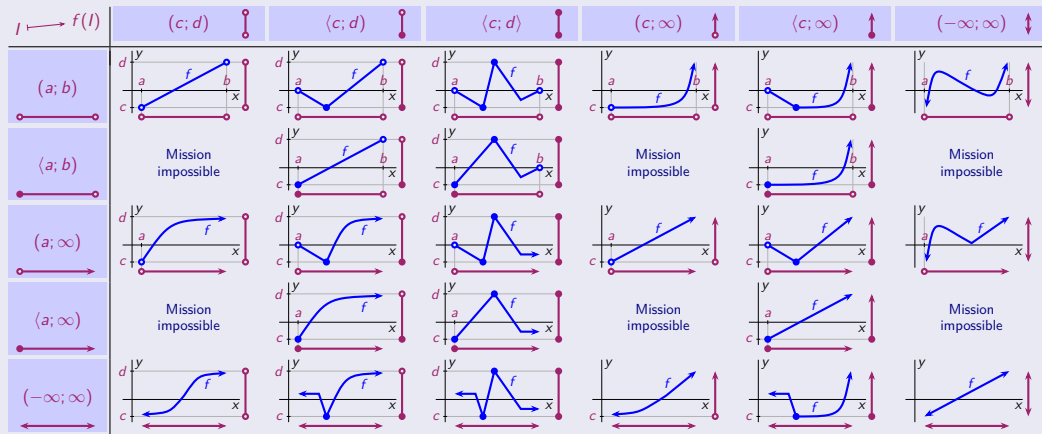
$I \mapsto f(I)$	$(c; d)$ 	$(c; \infty)$ 	$(-\infty; \infty)$ 
$(a; b)$ 			
$\langle a; b \rangle$ 	Mission impossible	Mission impossible	Mission impossible
$(a; \infty)$ 			
$\langle a; \infty \rangle$ 	Mission impossible	Mission impossible	Mission impossible
$(-\infty; \infty)$ 			

Spojitosť na intervaloch – Spojitosť na intervale (nie uzavretom)

Spojité (nekonštantná) funkcia f zobrazuje interval (neuzavretý) $I \subset D(f)$ na interval $f(I)$.

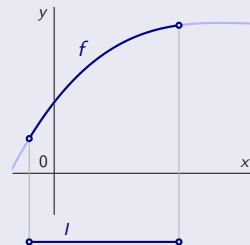
$f(I)$ môže byť: • otvorený, • uzavretý, • z jednej strany otvorený a z druhej uzavretý,
• ohraničený, • neohraničený zdola alebo zhora, • neohraničený zdola a aj zhora.

[Ak je I uzavretý, je aj $f(I)$ uzavretý interval (Weierstrasse).]



Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

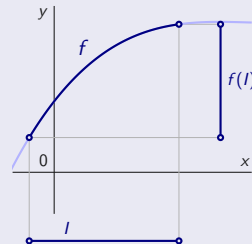
Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.



Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

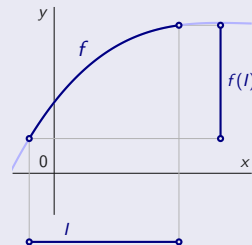
$[f: I \rightarrow f(I)]$ je spojité a prosté na intervale I .



Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$[f: I \rightarrow f(I)]$ je spojité a prosté na intervale I . $\Rightarrow f$ je rýdzo monotónna, t. j. rastúca alebo klesajúca na I .

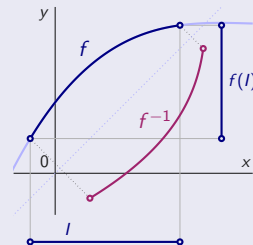


Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Inverzná funkcia f^{-1}

$[f: I \rightarrow f(I)]$ je spojitosť a prostá na intervale I . $\Rightarrow f$ je rýdzo monotónna, t. j. rastúca alebo klesajúca na I .

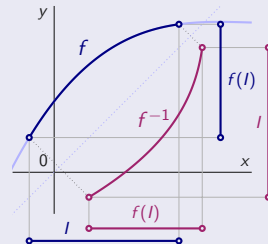


Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Inverzná funkcia f^{-1} je **spojitá** na intervale $f(I)$.

[$f: I \rightarrow f(I)$ je spojité a prosté na intervale I . $\Rightarrow f$ je rýdzo monotónna, t. j. rastúca alebo klesajúca na I .]

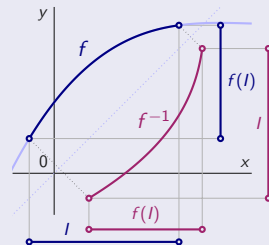


Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

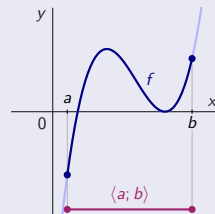
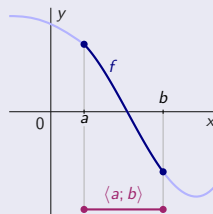
Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Inverzná funkcia f^{-1} je **spojitá** na intervale $f(I)$.

$[f: I \rightarrow f(I) \text{ je spojité a prosté na intervale } I. \Rightarrow f \text{ je rýdzo monotónna, t. j. rastúca alebo klesajúca na } I.]$



Funkcia f je **spojitá** na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$.

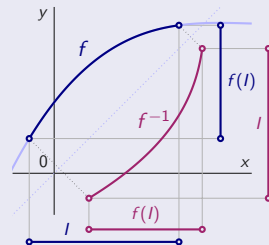


Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

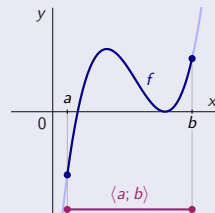
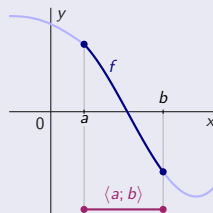
Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Inverzná funkcia f^{-1} je **spojitá** na intervale $f(I)$.

[$f: I \rightarrow f(I)$ je spojité a prosté na intervale I . $\Rightarrow f$ je rýdzo monotónna, t. j. rastúca alebo klesajúca na I .]



Funkcia f je **spojitá** na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$. Platí $f(a) \cdot f(b) < 0$.

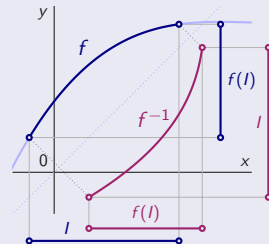


Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

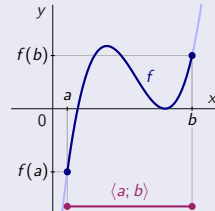
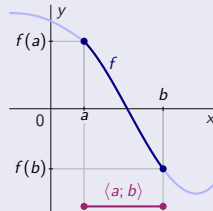
$\Rightarrow$ • Inverzná funkcia f^{-1} je **spojitá** na intervale $f(I)$.

[$f: I \rightarrow f(I)$ je spojité a prosté na intervale I . $\Rightarrow f$ je rýdzo monotónna, t. j. rastúca alebo klesajúca na I .]



Funkcia f je **spojitá** na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$. Platí $f(a) \cdot f(b) < 0$.

[Nerovnosť $f(a) \cdot f(b) < 0$ znamená jednu z možností:

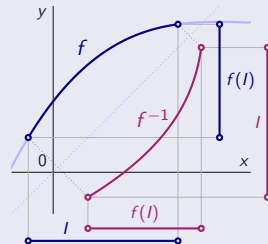


Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Inverzná funkcia f^{-1} je **spojitá** na intervale $f(I)$.

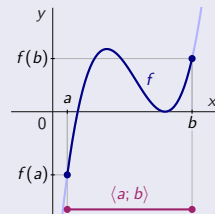
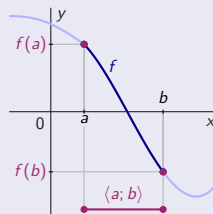
[$f: I \rightarrow f(I)$ je spojité a prosté na intervale I . $\Rightarrow f$ je rýdzo monotónna, t. j. rastúca alebo klesajúca na I .]



Funkcia f je **spojitá** na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$. Platí $f(a) \cdot f(b) < 0$.

[Nerovnosť $f(a) \cdot f(b) < 0$ znamená jednu z možností:

- $f(a) > 0 > f(b)$,

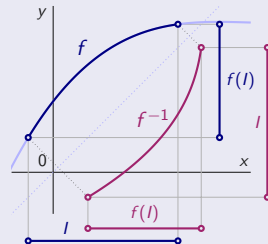


Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Inverzná funkcia f^{-1} je **spojitá** na intervale $f(I)$.

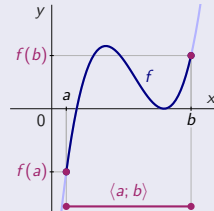
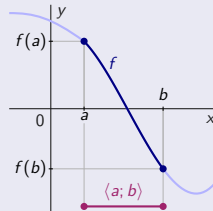
[$f: I \rightarrow f(I)$ je spojité a prosté na intervale I . $\Rightarrow f$ je rýdzo monotónna, t. j. rastúca alebo klesajúca na I .]



Funkcia f je **spojitá** na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$. Platí $f(a) \cdot f(b) < 0$.

[Nerovnosť $f(a) \cdot f(b) < 0$ znamená jednu z možností:

- $f(a) > 0 > f(b)$,
- $f(a) < 0 < f(b)$.]

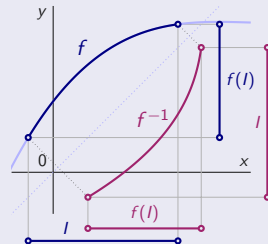


Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Inverzná funkcia f^{-1} je **spojitá** na intervale $f(I)$.

[$f: I \rightarrow f(I)$ je spojité a prosté na intervale I . $\Rightarrow f$ je rýdzo monotónna, t. j. rastúca alebo klesajúca na I .]

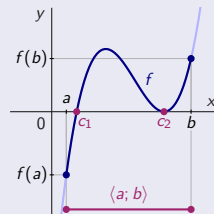
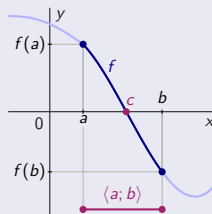


Funkcia f je **spojitá** na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$. Platí $f(a) \cdot f(b) < 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in (a; b)$ také, že $f(c) = 0$.

[Nerovnosť $f(a) \cdot f(b) < 0$ znamená jednu z možností:

- $f(a) > 0 > f(b)$,
- $f(a) < 0 < f(b)$.]

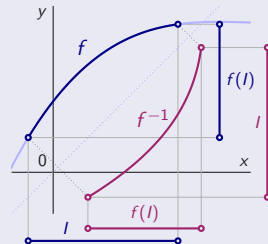


Spojitosť na intervaloch – Veta o nulovom bode

Funkcia f je **prostá** a **spojitá** na intervale $I \subset D(f)$.

$\Rightarrow$ • Inverzná funkcia f^{-1} je **spojitá** na intervale $f(I)$.

[$f: I \rightarrow f(I)$ je spojité a prosté na intervale I . $\Rightarrow f$ je rýdzo monotónna, t. j. rastúca alebo klesajúca na I .]



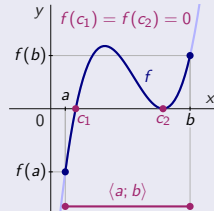
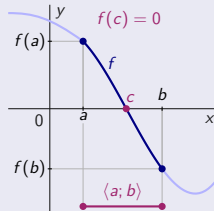
Funkcia f je **spojitá** na uzavretom intervale $\langle a; b \rangle \subset D(f)$. Platí $f(a) \cdot f(b) < 0$.

$\Rightarrow$ • Existuje $c \in (a; b)$ také, že $f(c) = 0$.

[Rovnica $f(x) = 0$ má reálny koreň, t. j. nulový bod na intervale $(a; b)$.]

[Nerovnosť $f(a) \cdot f(b) < 0$ znamená jednu z možností:

- $f(a) > 0 > f(b)$,
- $f(a) < 0 < f(b)$.]



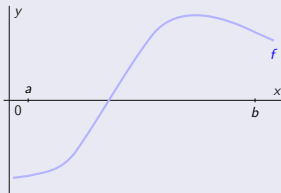
Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

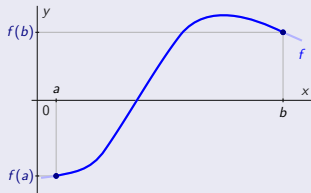
f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$,



Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$.



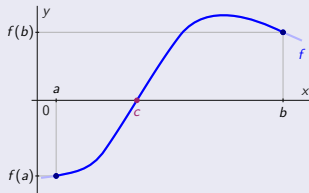
$$0 < f(b)$$

$$f(a) < 0$$

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.



$$0 < f(b)$$

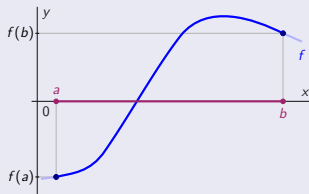
$$f(a) < 0$$

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.



$$0 < f(b)$$

$$f(a) < 0$$

$$d = b - a$$

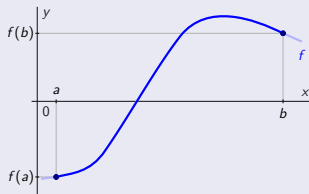
A horizontal red line segment representing the interval $[a, b]$ on the x-axis. The endpoints are labeled a and b , and the length is labeled $d = b - a$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.



$$\begin{aligned} 0 &< f(b) \\ f(a) &< 0 \end{aligned}$$

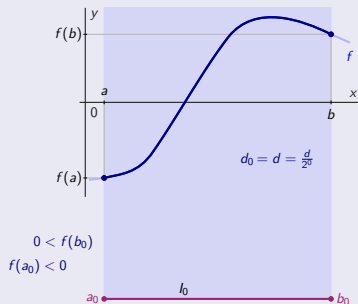
$$d = b - a$$

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



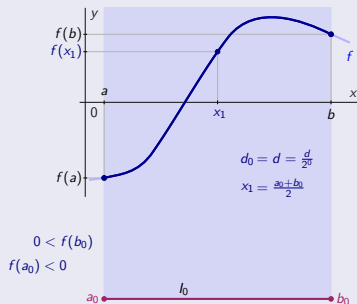
Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.

Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$



Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

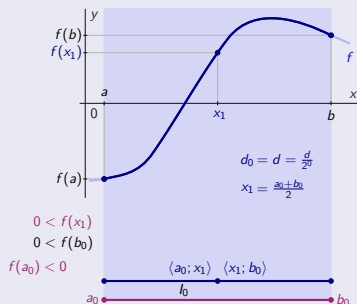
Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.

Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$,



Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

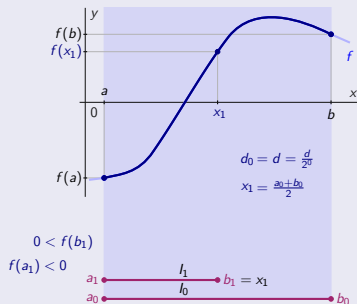
Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.

Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ a označme $l_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle, \langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.



Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

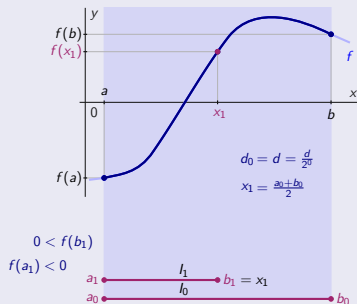
f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.

Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$



Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

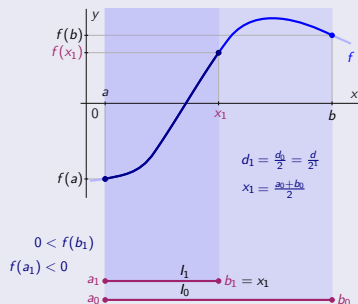
f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.

Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - c| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

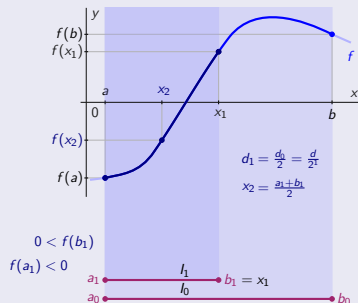


Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - c| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

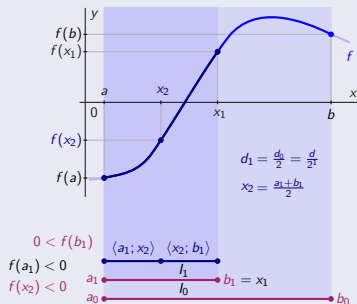
Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ a označme $l_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle, \langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $C \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ a označme $l_2 = \langle a_2; b_2 \rangle$

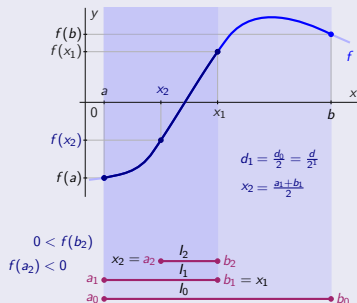
ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle, \langle x_2; b_1 \rangle,$

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $l_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

• $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - c| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ a označme $l_2 = \langle a_2; b_2 \rangle$

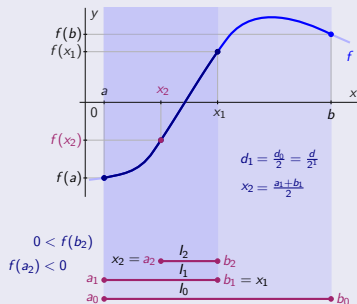
ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle$, $\langle x_2; b_1 \rangle$, aby platilo $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ a označme $l_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle, \langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $C \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

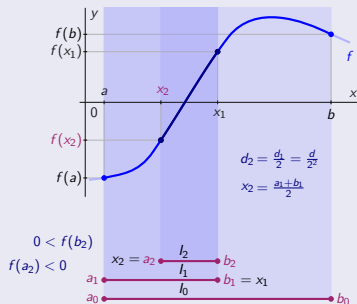
Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ a označme $l_2 = \langle a_2; b_2 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle$, $\langle x_2; b_1 \rangle$, aby platilo $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

- $C \approx X_2$

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

- Označme $d = b - a$ **délku intervalu** $\langle a; b \rangle$.
- Zvolme $\varepsilon > 0$ **tolerancií (presnost, chybu) výpočtu**.
- Označme $a_0 = a, b_0 = b, d_0 = b_0 - a_0 = d$.



ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle, \langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $C \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle, \langle x_2; b_1 \rangle$, aby platilo $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

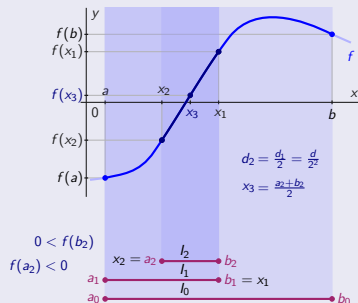
- $C \approx x_2$ s chybou $|x_2 - x| < d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d}{2^2}$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - c| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

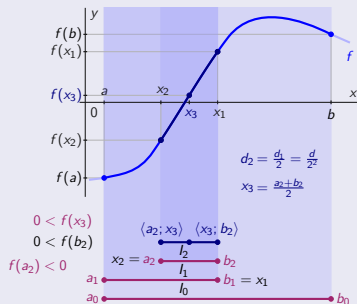
Krok 3 Označme $x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ a označme $l_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $C \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 3 Označme $x_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ a označme $I_3 = \langle a_3; b_3 \rangle$

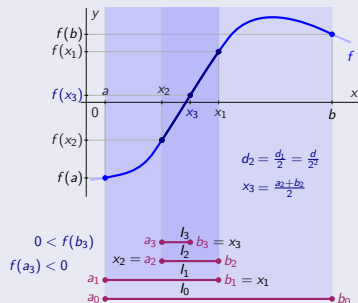
ten z intervalov $\langle a_2; x_3 \rangle, \langle x_3; b_2 \rangle,$

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

• $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - c| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 3 Označme $x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ a označme $I_3 = \langle a_3; b_3 \rangle$

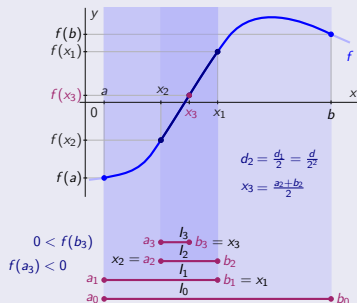
ten z intervalov $\langle a_2; x_3 \rangle$, $\langle x_3; b_2 \rangle$, aby platilo $f(a_3) \cdot f(b_3) < 0$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - c| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 3 Označme $x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ a označme $I_3 = \langle a_3; b_3 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_2; x_3 \rangle$, $\langle x_3; b_2 \rangle$, aby platilo $f(a_3) \cdot f(b_3) < 0$.

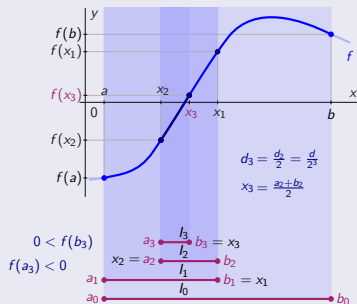
- $c \approx x_3$

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ a označme $l_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $C \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 3 Označme $x_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ a označme $I_3 = \langle a_3; b_3 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_2; x_3 \rangle$, $\langle x_3; b_2 \rangle$, aby platilo $f(a_3) \cdot f(b_3) < 0$.

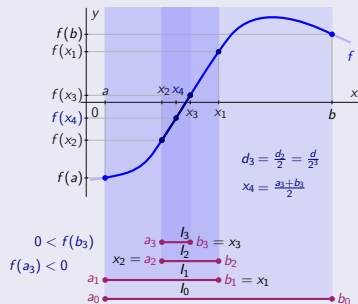
- $C \approx x_3$ s chybou $|x_3 - x| < d_3 = \frac{d_2}{2} = \frac{d}{2^3}$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $l_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

• $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - c| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

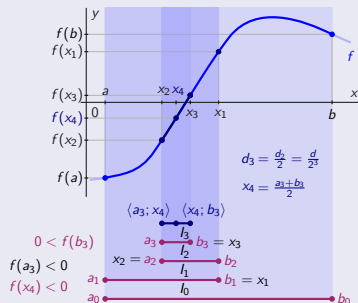
Krok 4 Označme $x_4 = \frac{a_3 + b_3}{2}$

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - c| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 4 Označme $x_4 = \frac{a_3 + b_3}{2}$ a označme $I_4 = \langle a_4; b_4 \rangle$

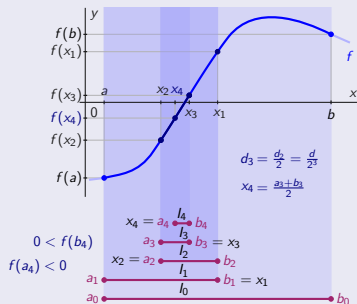
ten z intervalov $\langle a_3; x_4 \rangle$, $\langle x_4; b_3 \rangle$,

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ a označme $l_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $C \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 4 Označme $x_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$ a označme $l_4 = \langle a_4; b_4 \rangle$

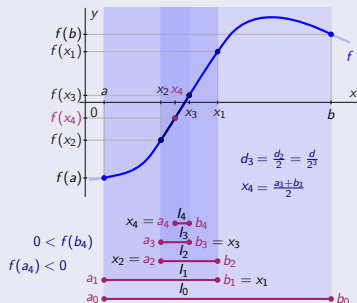
ten z intervalov $\langle a_3; x_4 \rangle$, $\langle x_4; b_3 \rangle$, aby platilo $f(a_4) \cdot f(b_4) < 0$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ a označme $l_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $C \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 4 Označme $x_4 = \frac{a_3+b_3}{2}$ a označme $l_4 = \langle a_4; b_4 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_3; x_4 \rangle$, $\langle x_4; b_3 \rangle$, aby platilo $f(a_4) \cdot f(b_4) < 0$.

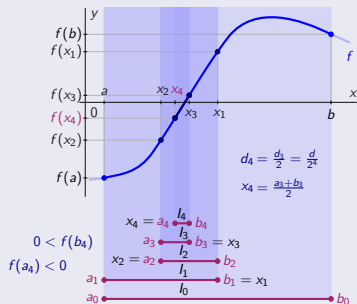
- $C \approx X_2$

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 4 Označme $x_4 = \frac{a_3 + b_3}{2}$ a označme $I_4 = \langle a_4; b_4 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_3; x_4 \rangle$, $\langle x_4; b_3 \rangle$, aby platilo $f(a_4) \cdot f(b_4) < 0$.

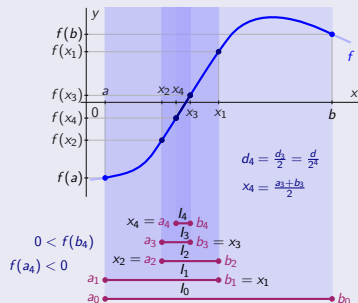
- $c \approx x_2$ s chybou $|x_4 - x| < d_4 = \frac{d_3}{2} = \frac{d}{2^4}$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 4 Označme $x_4 = \frac{a_3 + b_3}{2}$ a označme $I_4 = \langle a_4; b_4 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_3; x_4 \rangle$, $\langle x_4; b_3 \rangle$, aby platilo $f(a_4) \cdot f(b_4) < 0$.

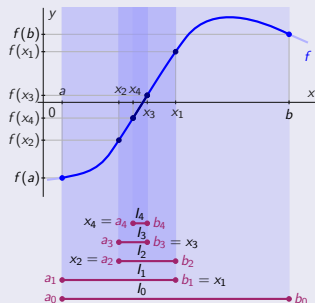
- $c \approx x_2$ s chybou $|x_4 - x| < d_4 = \frac{d_3}{2} = \frac{d}{2^4}$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ a označme $I_2 = \langle a_2; b_2 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle$, $\langle x_2; b_1 \rangle$, aby platilo $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

- $c \approx x_2$ s chybou $|x_2 - x| < d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d}{2^2}$.

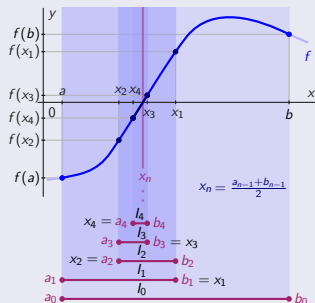
• • • Pokračujeme až po také n , aby bola splnená tolerancia $|x_n - x| \leq \varepsilon$, resp. $f(x_n) \leq \varepsilon$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ a označme $I_2 = \langle a_2; b_2 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle$, $\langle x_2; b_1 \rangle$, aby platilo $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

- $c \approx x_2$ s chybou $|x_2 - x| < d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d}{2^2}$.

• • • Pokračujeme až po také n , aby bola splnená tolerancia $|x_n - x| \leq \varepsilon$, resp. $f(x_n) \leq \varepsilon$.

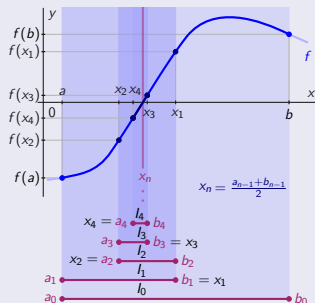
Krok n Označme $x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ a označme $I_2 = \langle a_2; b_2 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle$, $\langle x_2; b_1 \rangle$, aby platilo $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

- $c \approx x_2$ s chybou $|x_2 - x| < d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d}{2^2}$.

• • • Pokračujeme až po také n , aby bola splnená tolerancia $|x_n - x| \leq \varepsilon$, resp. $f(x_n) \leq \varepsilon$.

Krok n Označme $x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ a označme $I_n = \langle a_n; b_n \rangle$

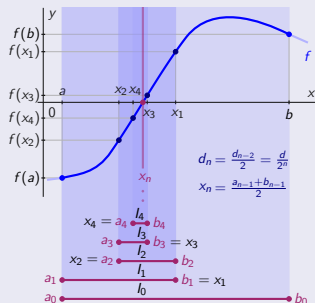
ten z intervalov $\langle a_{n-1}; x_n \rangle$, $\langle x_n; b_{n-1} \rangle$, aby $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



- Koreň aproximujeme hodnotou $c \approx x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$

Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ a označme $I_2 = \langle a_2; b_2 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle$, $\langle x_2; b_1 \rangle$, aby platilo $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

- $c \approx x_2$ s chybou $|x_2 - x| < d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d}{2^2}$.

• • • Pokračujeme až po také n , aby bola splnená tolerancia $|x_n - x| \leq \varepsilon$, resp. $f(x_n) \leq \varepsilon$.

Krok n Označme $x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ a označme $I_n = \langle a_n; b_n \rangle$

ten z intervalov $\langle a_{n-1}; x_n \rangle$, $\langle x_n; b_{n-1} \rangle$, aby $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

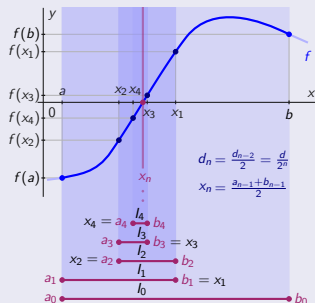
- $c \approx x_n$ s chybou $|x_n - x| < d_n = \frac{d_{n-1}}{2} = \frac{d}{2^n} \leq \varepsilon$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



- Koreň aproximujeme hodnotou $c \approx x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ tak, aby chyba $|c - x| < \varepsilon$.

Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ a označme $I_2 = \langle a_2; b_2 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle$, $\langle x_2; b_1 \rangle$, aby platilo $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

- $c \approx x_2$ s chybou $|x_2 - x| < d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d}{2^2}$.

• • • Pokračujeme až po také n , aby bola splnená tolerancia $|x_n - x| \leq \varepsilon$, resp. $f(x_n) \leq \varepsilon$.

Krok n Označme $x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ a označme $I_n = \langle a_n; b_n \rangle$

ten z intervalov $\langle a_{n-1}; x_n \rangle$, $\langle x_n; b_{n-1} \rangle$, aby $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

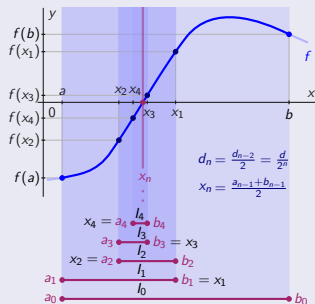
- $c \approx x_n$ s chybou $|x_n - x| < d_n = \frac{d_{n-1}}{2} = \frac{d}{2^n} \leq \varepsilon$.

Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



- Koreň aproximujeme hodnotou $c \approx x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$
tak, aby chyba $|c - x| < \varepsilon$, resp. $|f(c)| < \varepsilon$.

Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ a označme $l_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle, \langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $C \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ a označme $l_2 = \langle a_2; b_2 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle, \langle x_2; b_1 \rangle$, aby platilo $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

- $C \approx x_2$ s chybou $|x_2 - x| < d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d}{2^2}$.

- • • Pokračujeme až po také n , aby bola splnená tolerancia $|x_n - x| \leq \varepsilon$, resp. $f(x_n) \leq \varepsilon$.

Krok n Označme $x_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ a označme $I_n = \langle a_n; b_n \rangle$

ten z intervalov $\langle a_{n-1}; x_n \rangle, \langle x_n; b_{n-1} \rangle$, aby $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

- $C \approx x_n$ s chybou $|x_n - x| < d_n = \frac{d_{n-1}}{2} = \frac{d}{2^n} \leq \varepsilon$.

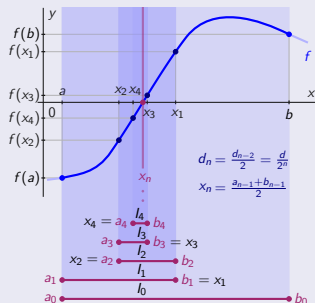
Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

[Najjednoduchší spôsob na hľadanie koreňov funkcie.]

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



- Koreň aproximujeme hodnotou $c \approx x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ tak, aby chyba $|c - x| < \varepsilon$, resp. $|f(c)| < \varepsilon$.
- Metóda je jednoduchá, ale prácna.

Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ a označme $I_2 = \langle a_2; b_2 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle$, $\langle x_2; b_1 \rangle$, aby platilo $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

- $c \approx x_2$ s chybou $|x_2 - x| < d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d}{2^2}$.

• • • Pokračujeme až po také n , aby bola splnená tolerancia $|x_n - x| \leq \varepsilon$, resp. $f(x_n) \leq \varepsilon$.

Krok n Označme $x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ a označme $I_n = \langle a_n; b_n \rangle$

ten z intervalov $\langle a_{n-1}; x_n \rangle$, $\langle x_n; b_{n-1} \rangle$, aby $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

- $c \approx x_n$ s chybou $|x_n - x| < d_n = \frac{d_{n-1}}{2} = \frac{d}{2^n} \leq \varepsilon$.

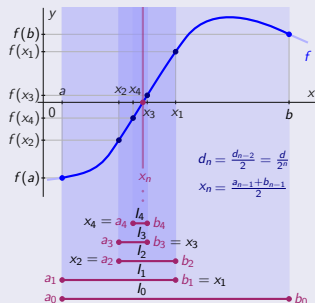
Spojitosť na intervaloch – Metóda bisekcie (polenia intervalu)

Metóda bisekcie (postupného polenia intervalu).

[Najjednoduchší spôsob na hľadanie koreňov funkcie.]

f je spojitá funkcia na intervale $\langle a; b \rangle$, pričom $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadáme koreň $c \in (a; b)$.

- Označme $d = b - a$ dĺžku intervalu $\langle a; b \rangle$.
- Zvoľme $\varepsilon > 0$ toleranciu (presnosť, chybu) výpočtu.
- Označme $a_0 = a$, $b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = d$.



- Koreň aproximujeme hodnotou $c \approx x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ tak, aby chyba $|c - x| < \varepsilon$, resp. $|f(c)| < \varepsilon$.

- Metóda je jednoduchá, ale prácna.

[Na spresnenie koreňa o jeden rád sú nutné asi 4 kroky.]

Krok 1 Označme $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ a označme $I_1 = \langle a_1; b_1 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; b_0 \rangle$, aby platilo $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

- $c \approx x_1$ s chybou $|x_1 - x| < d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{d}{2^1}$.

Krok 2 Označme $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ a označme $I_2 = \langle a_2; b_2 \rangle$

ten z intervalov $\langle a_1; x_2 \rangle$, $\langle x_2; b_1 \rangle$, aby platilo $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

- $c \approx x_2$ s chybou $|x_2 - x| < d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d}{2^2}$.

• • • Pokračujeme až po také n , aby bola splnená tolerancia $|x_n - x| \leq \varepsilon$, resp. $f(x_n) \leq \varepsilon$.

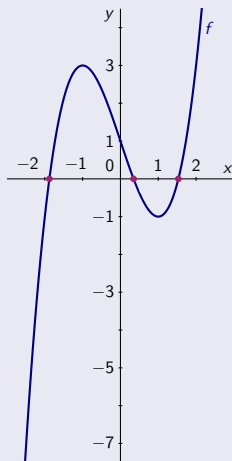
Krok n Označme $x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ a označme $I_n = \langle a_n; b_n \rangle$

ten z intervalov $\langle a_{n-1}; x_n \rangle$, $\langle x_n; b_{n-1} \rangle$, aby $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$.

- $c \approx x_n$ s chybou $|x_n - x| < d_n = \frac{d_{n-1}}{2} = \frac{d}{2^n} \leq \varepsilon$.

Spojitosť na intervaloch – Príklad

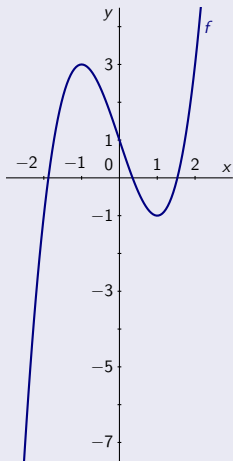
S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.



Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

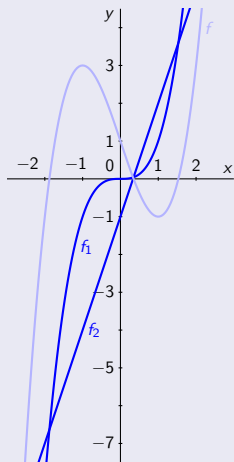
- $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$.



Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

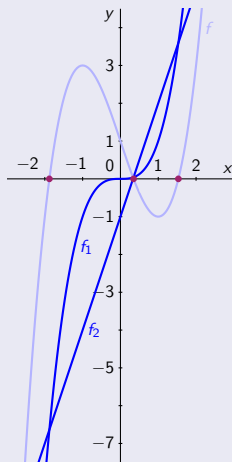


Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$

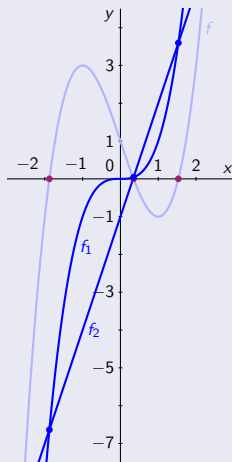


Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]

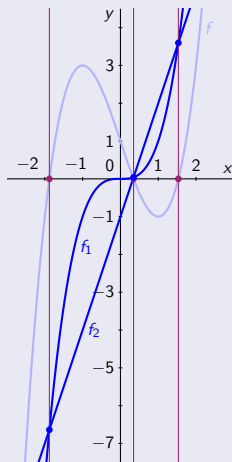


Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]

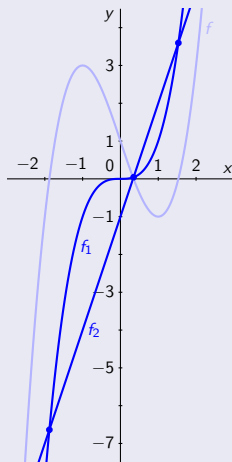


Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



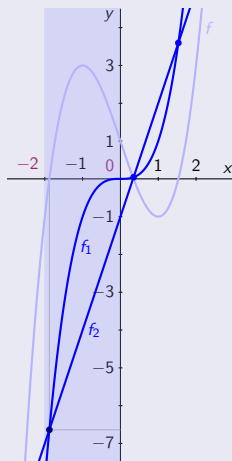
Z priesečníkov grafov funkcií f_1 , f_2 odhadneme korene:

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

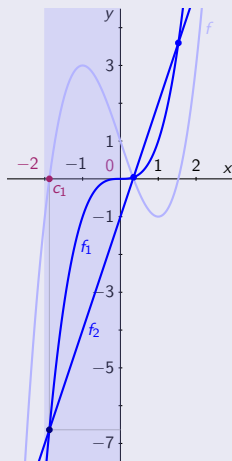
• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

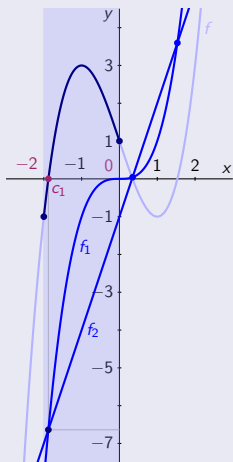
• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

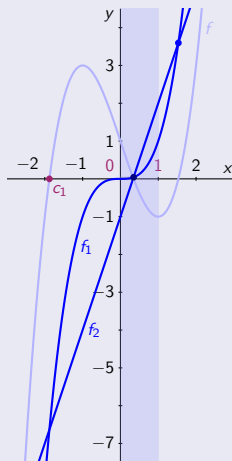
[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

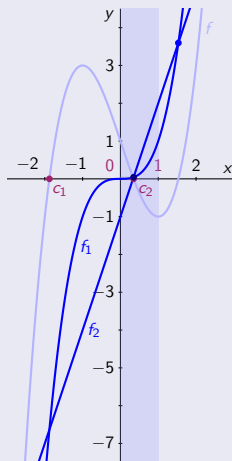
• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

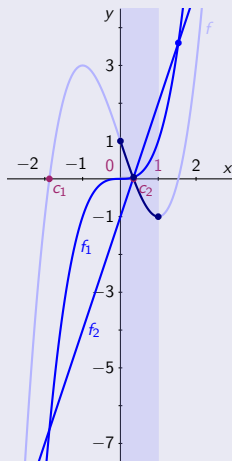
• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

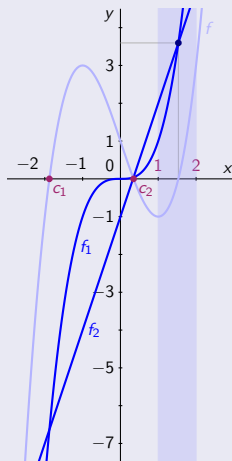
[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

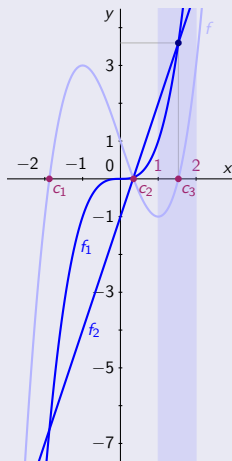
• $c_3 \in \langle 1; 2 \rangle$.

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

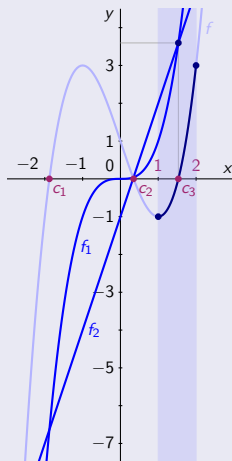
• $c_3 \in \langle 1; 2 \rangle$.

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

• $c_3 \in \langle 1; 2 \rangle$.

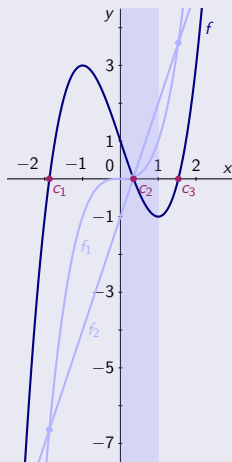
[Pre hraničné body platí $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 3$.]

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

• $c_3 \in \langle 1; 2 \rangle$.

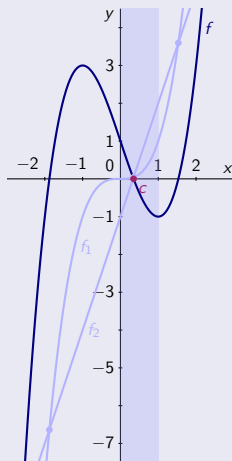
[Pre hraničné body platí $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 3$.]

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

• $c_3 \in \langle 1; 2 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 3$.]

• Metódou bisekcie nájdeme koreň c z intervalu $\langle a; b \rangle = \langle 0; 1 \rangle$.

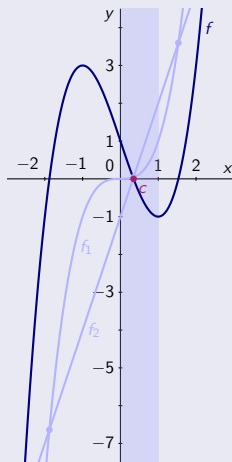
[Koreň c_2 .]

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

• $c_3 \in \langle 1; 2 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 3$.]

• Metódou bisekcie nájdeme koreň c z intervalu $\langle a; b \rangle = \langle 0; 1 \rangle$.

[Koreň c_2 .]

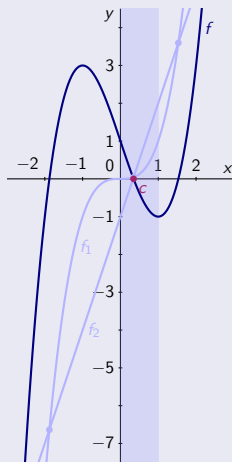
• Potrebujeme aspoň n krokov.

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

• $c_3 \in \langle 1; 2 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 3$.]

• Metódou bisekcie nájdeme koreň c z intervalu $\langle a; b \rangle = \langle 0; 1 \rangle$.

[Koreň c_2 .]

• Potrebujeme aspoň n krokov.

$$b_n - a_n$$

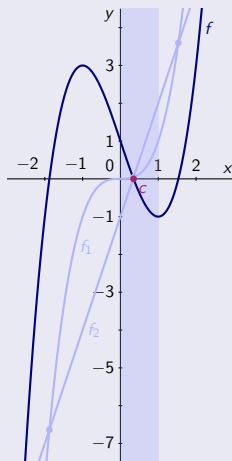
$$< \varepsilon = 0,01.$$

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

$$\bullet f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow \bullet x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1.$$

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

$$\bullet c_1 \in \langle -2; 0 \rangle.$$

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

$$\bullet c_2 \in \langle 0; 1 \rangle.$$

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

$$\bullet c_3 \in \langle 1; 2 \rangle.$$

[Pre hraničné body platí $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 3$.]

• Metódou bisekcie nájdeme koreň c z intervalu $\langle a; b \rangle = \langle 0; 1 \rangle$.

[Koreň c_2 .]

• Potrebujeme aspoň n krokov.

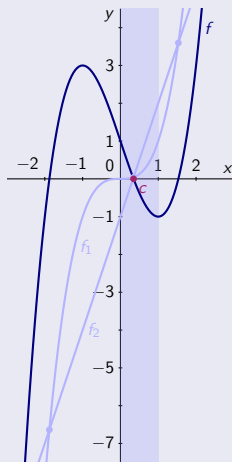
$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1-0}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01.$$

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

$$\bullet f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow \bullet x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1.$$

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

$$\bullet c_1 \in \langle -2; 0 \rangle.$$

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

$$\bullet c_2 \in \langle 0; 1 \rangle.$$

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

$$\bullet c_3 \in \langle 1; 2 \rangle.$$

[Pre hraničné body platí $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 3$.]

• Metódou bisekcie nájdeme koreň c z intervalu $\langle a; b \rangle = \langle 0; 1 \rangle$.

[Koreň c_2 .]

• Potrebujeme aspoň n krokov.

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1-0}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01.$$

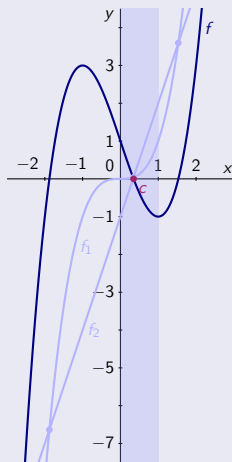
$$\frac{1}{2^n} < 0,01.$$

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

• $c_3 \in \langle 1; 2 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 3$.]

• Metódou bisekcie nájdeme koreň c z intervalu $\langle a; b \rangle = \langle 0; 1 \rangle$.

[Koreň c_2 .]

• Potrebujeme aspoň n krokov.

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1-0}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01.$$

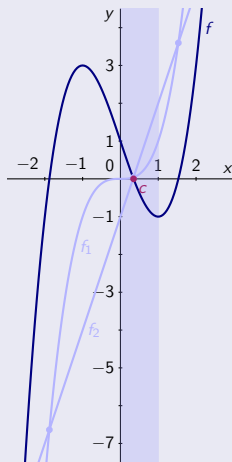
$$\frac{1}{2^n} < 0,01. \Leftrightarrow \frac{1}{0,01} = 100 < 2^n,$$

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

• $c_3 \in \langle 1; 2 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 3$.]

• Metódou bisekcie nájdeme koreň c z intervalu $\langle a; b \rangle = \langle 0; 1 \rangle$.

[Koreň c_2 .]

• Potrebujeme aspoň $n = 7$ krokov.

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1-0}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01.$$

$$\frac{1}{2^n} < 0,01. \Leftrightarrow \frac{1}{0,01} = 100 < 2^n, \text{ t. j. } n = 7.$$

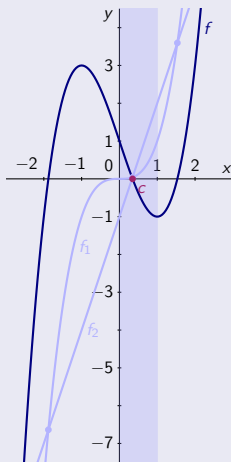
[Najmenšie $n \in \mathbb{N}$ je 7, pretože $2^6 = 64$ a $2^7 = 128$.]

Spojitosť na intervaloch – Príklad

S presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite (aspoň jeden) koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$.

• $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0. \Leftrightarrow$ • $x^3 = f_1(x) = f_2(x) = 3x - 1$.

[Korene funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ zodpovedajú bodom, kde sa pretínajú grafy funkcií $f_1: y = x^3$ a $f_2: y = 3x - 1$.]



Z priesečníkov grafov funkcií f_1, f_2 odhadneme korene:

• $c_1 \in \langle -2; 0 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(-2) = -1 < 0 < f(0) = 1$.]

• $c_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$.]

• $c_3 \in \langle 1; 2 \rangle$.

[Pre hraničné body platí $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 3$.]

• Metódou bisekcie nájdeme koreň c z intervalu $\langle a; b \rangle = \langle 0; 1 \rangle$.

[Koreň c_2 .]

• Potrebujeme aspoň $n = 7$ krokov.

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1-0}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01.$$

$$\frac{1}{2^n} < 0,01. \Leftrightarrow \frac{1}{0,01} = 100 < 2^n, \text{ t. j. } n = 7.$$

[Najmenšie $n \in \mathbb{N}$ je 7, pretože $2^6 = 64$ a $2^7 = 128$.]

• Dostaneme koreň $x_7 = 0,351\,562\,500$.

[Vid' nasledujúca tabuľka.]

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

n	a_n	$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$	b_n	$f(x_n)$	$b_n - a_n$

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0$, $b = b_0 = 1$, $b - a = 1$.

n	a_0	$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$	b_0	$f(x_n)$	$b_0 - a_0$
	0,0		1,0		1,0

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0$, $b = b_0 = 1$, $b - a = 1$.
- $f(a) = f(0) = 1 > 0$.
- $0 > -1 = f(1) = f(b)$.

n	$f(a_0) > 0$	a_0	$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$	b_0	$0 > f(b_0)$	$f(x_n)$	$b_0 - a_0$
	0,0			1,0			1,0

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N}. \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$

n	$f(a_0) > 0$ a_0	$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$	b_0 $0 > f(b_0)$	$f(x_n)$	$b_0 - a_0$
	0,0		1,0		1,0
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N}. \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_0) > 0$ a_0	$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$	b_0 $0 > f(b_0)$	$f(x_n)$	$b_0 - a_0$
1	0,0		1,0		1,0
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_0) > 0$	a_0	$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$	b_0	$0 > f(b_0)$	$f(x_1)$	$b_0 - a_0$
		0,0		1,0			1,0
1			0,5			-0,375 000	
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_1) > 0$	a_1	$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$	b_1 $0 > f(b_1)$	$f(x_1)$	$b_1 - a_1$
1	0,0	0,0	0,5	1,0	-0,375 000	1,0
2			→	0,5		$\frac{1}{2^1} = 0,5$
3						
4						
5						
6						
7						

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_1) > 0$	a_1	$x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$	b_1 $0 > f(b_1)$	$f(x_2)$	$b_1 - a_1$
	0,0			1,0		1,0
1	0,0		0,5	0,5	-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2			0,25		+0,265 625	
3						
4						
5						
6						
7						

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_2) > 0$	a_2	$x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$	b_2	$0 > f(b_2)$	$f(x_2)$	$b_2 - a_2$
		0,0		1,0			1,0
1		0,0	0,5	0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2		0,25	← 0,25	0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3							
4							
5							
6							
7							

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_2) > 0$	a_2	$x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$	b_2 $0 > f(b_2)$	$f(x_3)$	$b_2 - a_2$
		0,0		1,0		1,0
1	0,0		0,5 $\rightarrow$	0,5	-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2	0,25		$\leftarrow$ 0,25	0,50	+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3			0,375		-0,072 266	
4						
5						
6						
7						

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_3) > 0$	a_3	$x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$	b_3	$0 > f(b_3)$	$f(x_3)$	$b_3 - a_3$
		0,0		1,0			1,0
1		0,0	0,5	0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2		0,25	← 0,25	0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3		0,250	0,375	0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4							
5							
6							
7							

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_3) > 0$	a_3	$x_4 = \frac{a_3 + b_3}{2}$	b_3	$0 > f(b_3)$	$f(x_4)$	$b_3 - a_3$
		0,0		1,0			1,0
1		0,0	0,5	→	0,5	-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2		0,25	← 0,25		0,50	+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3		0,250	0,375	→	0,375	-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4			0,312 5			+0,093 018	
5							
6							
7							

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_n) > 0$	a_4	$x_4 = \frac{a_3 + b_3}{2}$	b_4	$0 > f(b_4)$	$f(x_4)$	$b_4 - a_4$
		0,0		1,0			1,0
1	0,0		0,5	0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2	0,25		← 0,25	0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3	0,250		0,375	0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4	0,3125		← 0,3125	0,3750		+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,0625$
5							
6							
7							

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_n) > 0$	a_4	$x_5 = \frac{a_4 + b_4}{2}$	b_4	$0 > f(b_4)$	$f(x_5)$	$b_4 - a_4$
		0,0		1,0			1,0
1	0,0		0,5	→ 0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2	0,25		← 0,25	0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3	0,250		0,375	→ 0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4	0,312 5		← 0,312 5	0,375 0		+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,062 5$
5			0,343 75			+0,009 369	
6							
7							

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_5) > 0$	a_5	$x_5 = \frac{a_4 + b_4}{2}$	b_5	$0 > f(b_5)$	$f(x_5)$	$b_5 - a_5$
		0,0		1,0			1,0
1		0,0	0,5	0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2		0,25	← 0,25	0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3		0,250	0,375	0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4		0,312 5	← 0,312 5	0,375 0		+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,062 5$
5		0,343 75	← 0,343 75	0,375 00		+0,009 369	$\frac{1}{2^5} = 0,031 25$
6							
7							

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_5) > 0$	a_5	$x_6 = \frac{a_5 + b_5}{2}$	b_5	$0 > f(b_5)$	$f(x_6)$	$b_5 - a_5$
		0,0		1,0			1,0
1		0,0	0,5	0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2		0,25	← 0,25	0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3		0,250	0,375	0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4		0,312 5	← 0,312 5	0,375 0		+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,062 5$
5		0,343 75	← 0,343 75	0,375 00		+0,009 369	$\frac{1}{2^5} = 0,031 25$
6			0,359 375			-0,031 712	
7							

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_n) > 0$	a_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	b_n	$0 > f(b_n)$	$f(x_n)$	$b_n - a_n$
		0,0		1,0			1,0
1	0,0		0,5	0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2	0,25		← 0,25	0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3	0,250		0,375	0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4	0,312 5		← 0,312 5	0,375 0		+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,062 5$
5	0,343 75		← 0,343 75	0,375 00		+0,009 369	$\frac{1}{2^5} = 0,031 25$
6	0,343 750		0,359 375	0,359 375		-0,031 712	$\frac{1}{2^6} = 0,015 625$
7							

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$

n	$f(a_6) > 0$	a_6	$x_7 = \frac{a_6 + b_6}{2}$	b_6 $0 > f(b_6)$	$f(x_7)$	$b_6 - a_6$
		0,0		1,0		1,0
1	0,0		0,5	0,5	-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2	0,25		← 0,25	0,50	+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3	0,250		0,375	0,375	-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4	0,312 5		← 0,312 5	0,375 0	+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,062 5$
5	0,343 75		← 0,343 75	0,375 00	+0,009 369	$\frac{1}{2^5} = 0,031 25$
6	0,343 750		0,359 375	0,359 375	-0,031 712	$\frac{1}{2^6} = 0,015 625$
7			0,351 562 5		-0,011 236	

- $n = 7 \Rightarrow$ • Vypočítaný koreň $c \approx x_7 = 0,351 562 50.$

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0$, $b = b_0 = 1$, $b - a = 1$.
- $f(a) = f(0) = 1 > 0$.
- $0 > -1 = f(1) = f(b)$.
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7$.
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01$.
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01$.

n	$f(a_n) > 0$	a_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	b_n	$0 > f(b_n)$	$f(x_n)$	$b_n - a_n$
		0,0		1,0			1,0
1	0,0		0,5	→ 0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2	0,25	← 0,25		0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3	0,250		0,375	→ 0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4	0,312 5	← 0,312 5		0,375 0		+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,062 5$
5	0,343 75	← 0,343 75		0,375 00		+0,009 369	$\frac{1}{2^5} = 0,031 25$
6	0,343 750		0,359 375	→ 0,359 375		-0,031 712	$\frac{1}{2^6} = 0,015 625$
7	0,343 750 0		0,351 562 5	→ 0,351 562 5		-0,011 236	$\frac{1}{2^7} = 0,007 812 5$

- $n = 7 \Rightarrow$
- Vypočítaný koreň $c \approx x_7 = 0,351 562 50$.
- Teoretická chyba $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = 0,007 812 50$.

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$
- $b_8 - a_8 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256} = 0,00390625 < 0,01.$

n	$f(a_n) > 0$	a_n	$x_8 = \frac{a_7 + b_7}{2}$	b_n	$0 > f(b_n)$	$f(x_8)$	$b_n - a_n$
		0,0		1,0			1,0
1	0,0		0,5	→ 0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2	0,25	← 0,25		0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3	0,250		0,375	→ 0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4	0,312 5	← 0,312 5		0,375 0		+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,062 5$
5	0,343 75	← 0,343 75		0,375 00		+0,009 369	$\frac{1}{2^5} = 0,031 25$
6	0,343 750		0,359 375	→ 0,359 375		-0,031 712	$\frac{1}{2^6} = 0,015 625$
7	0,343 750 0		0,351 562 5	→ 0,351 562 5		-0,011 236	$\frac{1}{2^7} = 0,007 812 5$
8			0,347 656 25			-0,000 949	

- $n = 7 \Rightarrow$ • Vypočítaný koreň $c \approx x_7 = 0,351 562 50.$
- Teoretická chyba $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = 0,007 812 50.$
- $n = 8 \Rightarrow$ • Vypočítaný koreň $c \approx x_8 = 0,347 656 25.$

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$
- $b_8 - a_8 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256} = 0,00390625 < 0,01.$

n	$f(a_n) > 0$	a_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	b_n	$0 > f(b_n)$	$f(x_n)$	$b_n - a_n$
		0,0		1,0			1,0
1	0,0		0,5	→ 0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2	0,25	← 0,25		0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3	0,250		0,375	→ 0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4	0,312 5	← 0,312 5		0,375 0		+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,062 5$
5	0,343 75	← 0,343 75		0,375 00		+0,009 369	$\frac{1}{2^5} = 0,031 25$
6	0,343 750		0,359 375	→ 0,359 375		-0,031 712	$\frac{1}{2^6} = 0,015 625$
7	0,343 750 0		0,351 562 5	→ 0,351 562 5		-0,011 236	$\frac{1}{2^7} = 0,007 812 5$
8	0,343 750 00		0,347 656 25	→ 0,347 656 25		-0,000 949	$\frac{1}{2^8} = 0,003 906 25$

- $n = 7 \Rightarrow$ • Vypočítaný koreň $c \approx x_7 = 0,351 562 50.$ • Teoretická chyba $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = 0,007 812 50.$
- $n = 8 \Rightarrow$ • Vypočítaný koreň $c \approx x_8 = 0,347 656 25.$ • Teoretická chyba $b_8 - a_8 = \frac{1}{2^8} = 0,003 906 25.$

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$
- $b_8 - a_8 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256} = 0,00390625 < 0,01.$

n	$f(a_n) > 0$	a_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	b_n	$0 > f(b_n)$	$f(x_n)$	$b_n - a_n$
		0,0		1,0			1,0
1	0,0		0,5	→ 0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2	0,25	← 0,25		0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3	0,250		0,375	→ 0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4	0,312 5	← 0,312 5		0,375 0		+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,062 5$
5	0,343 75	← 0,343 75		0,375 00		+0,009 369	$\frac{1}{2^5} = 0,031 25$
6	0,343 750		0,359 375	→ 0,359 375		-0,031 712	$\frac{1}{2^6} = 0,015 625$
7	0,343 750 0		0,351 562 5	→ 0,351 562 5		-0,011 236	$\frac{1}{2^7} = 0,007 812 5$
8	0,343 750 00		0,347 656 25	→ 0,347 656 25		-0,000 949	$\frac{1}{2^8} = 0,003 906 25$

- $n = 7 \Rightarrow$ • Vypočítaný koreň $c \approx x_7 = 0,351 562 50.$ • Teoretická chyba $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = 0,007 812 50.$
- $n = 8 \Rightarrow$ • Vypočítaný koreň $c \approx x_8 = 0,347 656 25.$ • Teoretická chyba $b_8 - a_8 = \frac{1}{2^8} = 0,003 906 25.$

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

[Presný koreň 0,347 296 355.]

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$
- $b_8 - a_8 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256} = 0,00390625 < 0,01.$

n	$f(a_n) > 0$	a_n	$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$	b_n	$0 > f(b_n)$	$f(x_n)$	$b_n - a_n$
		0,0		1,0			1,0
1	0,0		0,5	→ 0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2	0,25		← 0,25	0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3	0,250		0,375	→ 0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4	0,312 5		← 0,312 5	0,375 0		+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,062 5$
5	0,343 75		← 0,343 75	0,375 00		+0,009 369	$\frac{1}{2^5} = 0,031 25$
6	0,343 750		0,359 375	→ 0,359 375		-0,031 712	$\frac{1}{2^6} = 0,015 625$
7	0,343 750 0		0,351 562 5	→ 0,351 562 5		-0,011 236	$\frac{1}{2^7} = 0,007 812 5$
8	0,343 750 00		0,347 656 25	→ 0,347 656 25		-0,000 949	$\frac{1}{2^8} = 0,003 906 25$

- $n = 7 \Rightarrow$ • Vypočítaný koreň $c \approx x_7 = 0,351 562 50.$ • Teoretická chyba $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = 0,007 812 50.$ • Skutočná chyba $|c_7 - c| = 0,004 266 145.$
- $n = 8 \Rightarrow$ • Vypočítaný koreň $c \approx x_8 = 0,347 656 25.$ • Teoretická chyba $b_8 - a_8 = \frac{1}{2^8} = 0,003 906 25.$ • Skutočná chyba $|c_8 - c| = 0,000 359 895.$

Spojitosť na intervaloch – Príklad (výpočet)

Koreň funkcie $f: y = x^3 - 3x + 1$ z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s presnosťou $\varepsilon = 0,01$.

[Presný koreň 0,347 296 355.]

- $a = a_0 = 0, b = b_0 = 1, b - a = 1.$
- $f(a) = f(0) = 1 > 0.$
- $0 > -1 = f(1) = f(b).$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon = 0,01$ pre $n \geq 7.$
- $b_6 - a_6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 > 0,01.$
- $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128} = 0,0078125 < 0,01.$
- $b_8 - a_8 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256} = 0,00390625 < 0,01.$

n	$f(a_n) > 0$	a_n	$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$	b_n	$0 > f(b_n)$	$f(x_n)$	$b_n - a_n$
		0,0		1,0			1,0
1	0,0		0,5	0,5		-0,375 000	$\frac{1}{2^1} = 0,5$
2	0,25		← 0,25	0,50		+0,265 625	$\frac{1}{2^2} = 0,25$
3	0,250		0,375	0,375		-0,072 266	$\frac{1}{2^3} = 0,125$
4	0,312 5		← 0,312 5	0,375 0		+0,093 018	$\frac{1}{2^4} = 0,062 5$
5	0,343 75		← 0,343 75	0,375 00		+0,009 369	$\frac{1}{2^5} = 0,031 25$
6	0,343 750		0,359 375	0,359 375		-0,031 712	$\frac{1}{2^6} = 0,015 625$
7	0,343 750 0		0,351 562 5	0,351 562 5		-0,011 236	$\frac{1}{2^7} = 0,007 812 5$
8	0,343 750 00		0,347 656 25	0,347 656 25		-0,000 949	$\frac{1}{2^8} = 0,003 906 25$

- $n = 7 \Rightarrow$ • Vypočítaný koreň $c \approx x_7 = 0,351 562 50.$ • Teoretická chyba $b_7 - a_7 = \frac{1}{2^7} = 0,007 812 50.$ • Skutočná chyba $|c_7 - c| = 0,004 266 145.$
- $n = 8 \Rightarrow$ • Vypočítaný koreň $c \approx x_8 = 0,347 656 25.$ • Teoretická chyba $b_8 - a_8 = \frac{1}{2^8} = 0,003 906 25.$ • Skutočná chyba $|c_8 - c| = 0,000 359 895.$

[Pri zvýšení z $n = 7$ na $n = 8$ sa presnosť zvýšila o 0,003 906 25.]

Koniec 7. časti

Ďakujem za pozornosť.