

Písomka číslo 05 – Funkcie viacerých reálnych premenných

V teste (a následne na skúške) sa môžu vyskytnúť taktiež príklady prepočítané na prednáške a na cvičeniach, prípadné domáce úlohy a príklady uverejnené v prezentáciách z prednášok. Príklady sú vzorové, to znamená, že v teste môžu byť v pozmenenom tvare.

K. Základné pojmy. Limita a spojitost' týchto funkcií.

1. Zostrojte a nakreslite v R^2 definičný obor $D(f)$ funkcie $z = f(x, y)$:

$$z = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{9-y^2}, \quad z = \frac{1}{\ln(x^2+y^2-4)} + \frac{1}{\arcsin(y^2+x+1)}, \quad z = \ln(x^2+y^2-4) + \arcsin(y^2+x+1),$$

$$z = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{9-y^2}, \quad z = \arcsin \frac{x}{x+y} + \arccos \frac{y}{x+y}, \quad z = \sqrt{x^2+y^2-4} + \arcsin(y^2+x+1),$$

2. Zostrojte a v rovine R^2 nakreslite vrstevnice H_c (t. j. rezy grafu funkcie $f(x, y)$ rovnobežné s rovinou xy , ktorých hodnota $f(x, y) = c$ pre body $c=0, c=1, c=2, c=4$, ak:

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1}, \quad f(x, y) = \sqrt{25 - |x| - |y|}.$$

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{(xy)^2},$

9. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$ ***

15. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)},$

4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy},$

10. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$ ***

16. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)},$

5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y+1}-1},$ *

11. $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$

17. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{\sin(x^2+y^2)},$ **

6. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1},$

12. $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3},$

18. $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{\sin(x^2+y^2)},$

7. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1},$ **

13. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2-y^2},$

19. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{\sin(x^2+y^2)},$

8. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x+y+1}-1},$ *

14. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 y^2}{x^2-y^2},$

20. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x - y}.$

L. Derivácia a diferenciál funkcie viacerých premenných. Parciálne derivácie podľa jednotlivých premenných. Derivácia zloženej funkcie a parciálne derivácie vyšších rádov.

21. Nech $f(X) = f(x, y) = \sin(x^2 + xy - y^2) : R^2 \rightarrow R, H = [1; 3], A = [2; -1]$. Vypočítajte:

$$f(A), f'(X), f'(A), f'_H(A), df(X, A), f''(X), f''(A), d^2 f(X, A).$$

22. Nech $f(X) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3 : R^3 \rightarrow R, H = [1; 2; 3], A = [3; 2; 1]$. Vypočítajte:

$$f(A), f'(X), f'(A), f'_H(A), df(X, A), f''(X), f''(A), d^2 f(X, A).$$

M. Nutná a postačujúca podmienka existencie extrém. Sylvesterovo kritérium.

23. Nájdite extrém funkcie $f(x, y) = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2 : R^2 \rightarrow R$.

24. Nájdite extrém funkcie $f(x, y) = x + y + 4 \sin x \cos x : R^2 \rightarrow R$.

25. Nájdite extrém funkcie $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{x^2 - y^2 - z^2} : R^3 \rightarrow R$.

26. Nájdite viazané extrém funkcie $f(x, y, z) = xy - x + y - 1 : R^3 \rightarrow R$, ak $x + y = 1$.

27. Nájdite viazané extrém funkcie $f(x, y) = x^3 + y^3 : R^2 \rightarrow R$, ak $x + y = 4$.

28. Nájdite viazané extrém funkcie $f(x, y, z) = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z : R^3 \rightarrow R$, ak $x + y + z = -\pi$.

29. Nájdite viazané extrém funkcie $f(x, y, z) = xyz : R^3 \rightarrow R$, ak $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

30. Do daného trojuholníka v rovine vpíšte obdĺžnik s maximálnym obsahom.

31. Zo všetkých valcových nádob s daným povrchom nájdite takú, ktorá má maximálny objem.

* Skúste rozšíriť zlomkom $\frac{x+y}{x+y}$. ** Skúste rozšíriť zlomkom $\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$. *** Skúste substitúciu $u = \min\{x, y\} \rightarrow 0, v = \max\{x, y\} \rightarrow 0$.