

Matematická analýza 1

2024/2025

8. Derivácia funkcie – aplikácie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou  získate nápomoc.

Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

- 1 Vety o strednej hodnote
- 2 L'Hospitalovo pravidlo
- 3 Použitie L'Hospitalovho pravidla
- 4 Taylorov polynóm
- 5 Použitie Taylorovho polynómu
- 6 Aproximácia a presnosť

Vety o strednej hodnote – NP $\Rightarrow$ existencie lok extrému

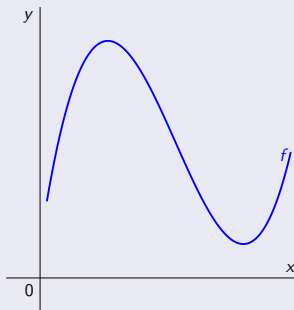
Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode



Vety o strednej hodnote – NP $\Rightarrow$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

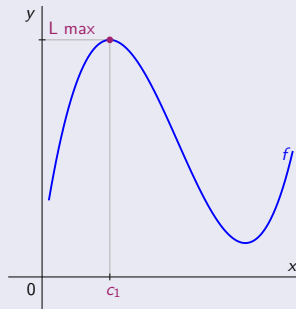
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$,



Vety o strednej hodnote – NP $\Rightarrow$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

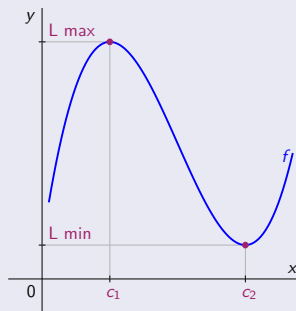
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.



Vety o strednej hodnote – NP $\Rightarrow$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

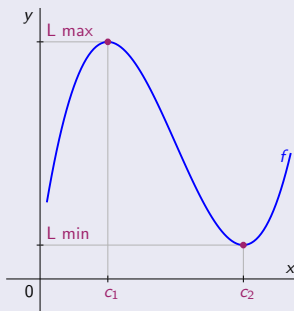
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .



Vety o strednej hodnote – NP $\Rightarrow$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

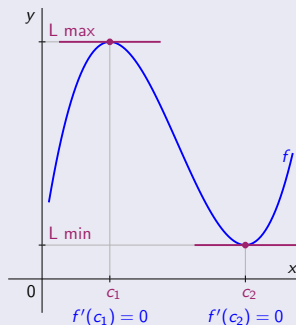
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.



Vety o strednej hodnote – NP $\Rightarrow$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .
 - V bode c existuje derivácia $f'(c)$.
- $$\left. \begin{array}{l} \bullet f'(c) = 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \bullet \text{ [Nulová derivácia.]}$$



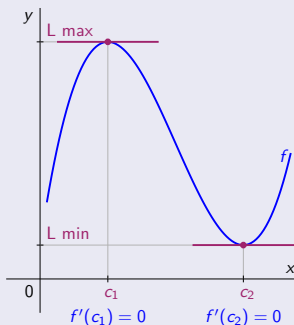
Vety o strednej hodnote – NP $\Rightarrow$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .
 - V bode c existuje derivácia $f'(c)$.
- $$\left. \right\} \Rightarrow \bullet f'(c) = 0. \quad [\text{Nulová derivácia.}]$$

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.

[Viď Pr.I.]



Vety o strednej hodnote – NP $\Rightarrow$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

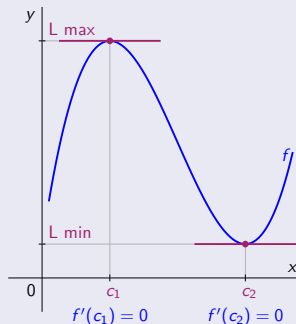
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .
 - V bode c existuje derivácia $f'(c)$.
- $$\left. \right\} \Rightarrow \bullet f'(c) = 0. \quad [\text{Nulová derivácia.}]$$

• Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.

[Viď PrI.]

• Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém, a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.

[Viď PrI.]



Vety o strednej hodnote – NP $\Rightarrow$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
 - V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f .
 - V bode c existuje derivácia $f'(c)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}} \right\} \Rightarrow \bullet f'(c) = 0. \quad [\text{Nulová derivácia.}]$$

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.

[Vid' PrI.]

- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém, a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.

[Vid' PrI.]



Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

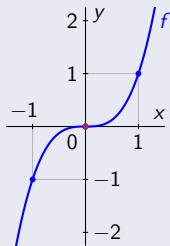
ale v bode c nie je lokálny extrém.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.



- $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}.$

- $f(0) = 0.$

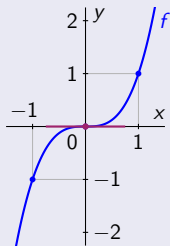
[$f(0)$ nie je extrém.]

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.



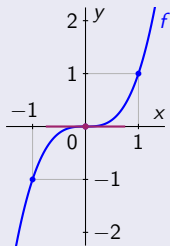
- $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$. • $f'(0) = 0$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.



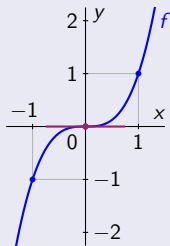
- $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.
 - $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
 - $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$. • $f'(0) = 0$.
-
- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrém.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.



- $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$. • $f'(0) = 0$.

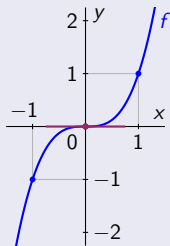
- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
 $\forall c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.



- $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$. • $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,

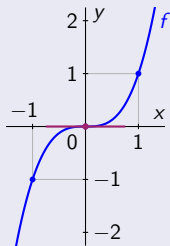
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.



- $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$. $f'(0) = 0$.

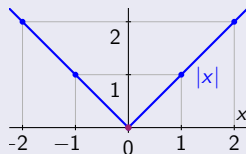
• Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.

• To znamená, že neplatí implikácia:

V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,

ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$.

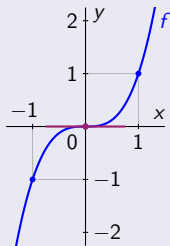
[$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.

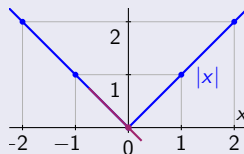


- $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$. $\bullet$ $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrém.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,

ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



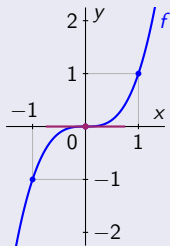
- $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]
- $x \leq 0: f'(x) = [-x]' = -1$. $\bullet$ $f'_-(0) = -1$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.

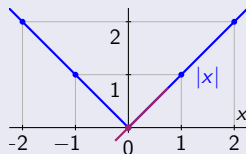


- $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$. $\bullet$ $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,

ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$.

[$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]

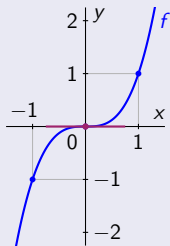
- $x \geq 0: f'(x) = [x]' = 1$. $\bullet$ $f'_+(0) = 1$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.

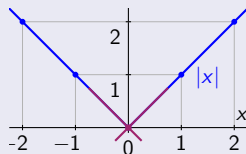


- $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$. $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrém.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,

ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



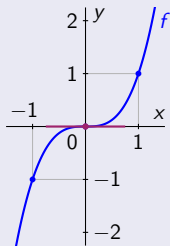
- $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]
- $x \leq 0: f'(x) = [-x]' = -1$. $f'_-(0) = -1$.
- $x \geq 0: f'(x) = [x]' = 1$. $f'_+(0) = 1$.
- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.

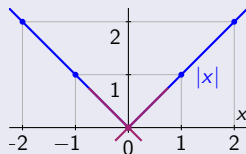


- $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$. $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,

ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]
- $x \leq 0: f'(x) = [-x]' = -1$. $f'_-(0) = -1$.
- $x \geq 0: f'(x) = [x]' = 1$. $f'_+(0) = 1$.
- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

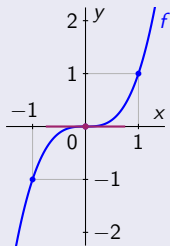
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém,
a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.

Vety o strednej hodnote – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ $f'(c) = 0$.

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,

ale v bode c nie je lokálny extrém.

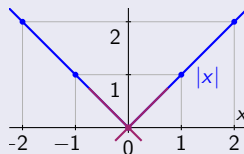


- $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ nie je extrém.]
- $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$. $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,

ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$. [$f(0)$ je lokálne (aj globálne) minimum.]
- $x \leq 0: f'(x) = [-x]' = -1$. $f'_-(0) = -1$.
- $x \geq 0: f'(x) = [x]' = 1$. $f'_+(0) = 1$.
- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém, a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.
- To znamená, že pri hľadaní lokálnych extrémov musíme overiť aj všetky body, v ktorých derivácia neexistuje.

Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

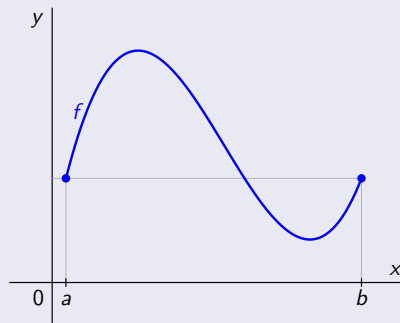
[1. veta o strednej hodnote.]

Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.

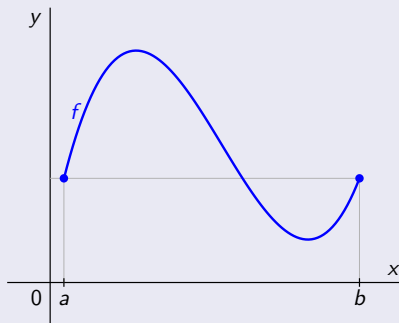


Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).

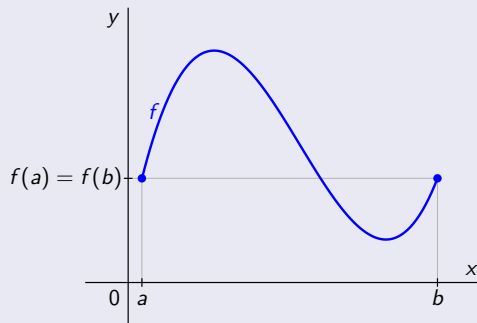


Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- Platí $f(a) = f(b)$.

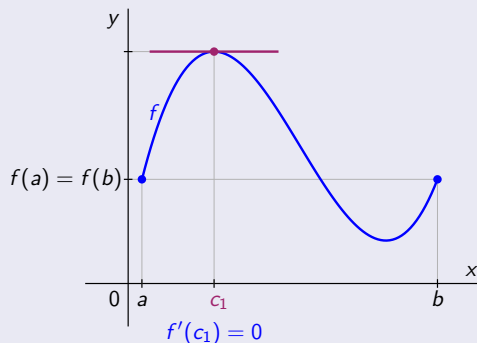


Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
 - Platí $f(a) = f(b)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \text{Existuje aspoň jedno } c \in (a; b) \text{ také, že } f'(c) = 0.$$

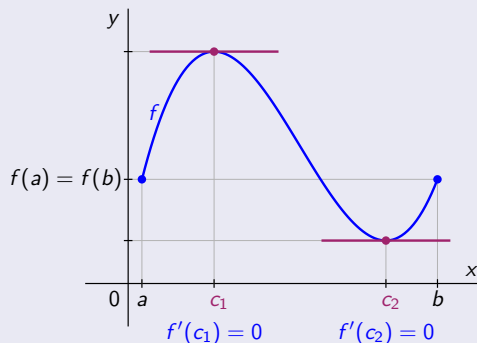


Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
 - Platí $f(a) = f(b)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \text{Existuje aspoň jedno } c \in (a; b) \text{ také, že } f'(c) = 0.$$



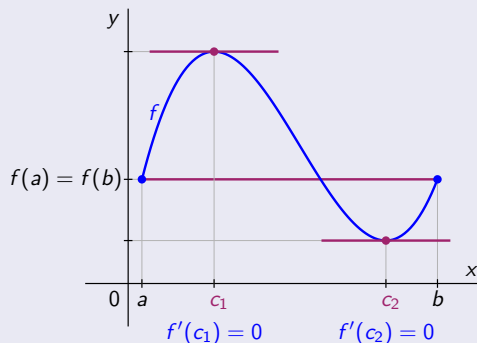
Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
 - Platí $f(a) = f(b)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \text{Existuje aspoň jedno } c \in (a; b) \text{ také, že } f'(c) = 0.$$

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$,



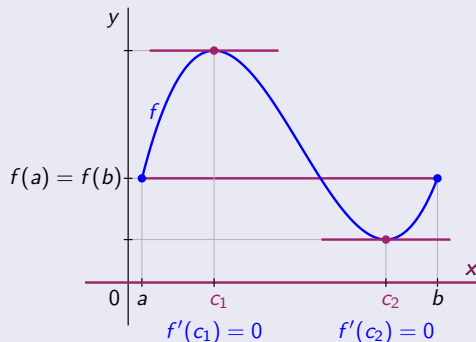
Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
 - Platí $f(a) = f(b)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \text{Existuje aspoň jedno } c \in (a; b) \text{ také, že } f'(c) = 0.$$

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$, t. j. s osou x .



Vety o strednej hodnote – 1. Rolleho veta

Rolleho veta

[1. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
 - Platí $f(a) = f(b)$.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \text{Existuje aspoň jedno } c \in (a; b) \text{ také, že } f'(c) = 0.$$

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$, t. j. s osou x .



Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

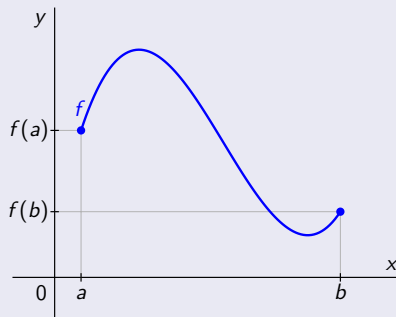
[2. veta o strednej hodnote.]

Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.

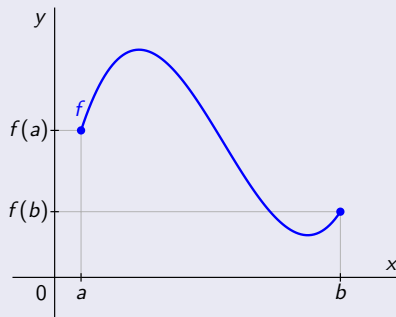


Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
- Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).

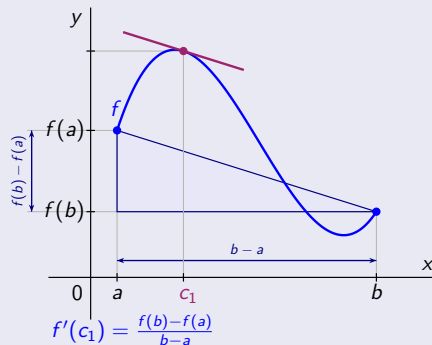


Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \text{Existuje aspoň jedno } c \in (a; b) \text{ také, že platí } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

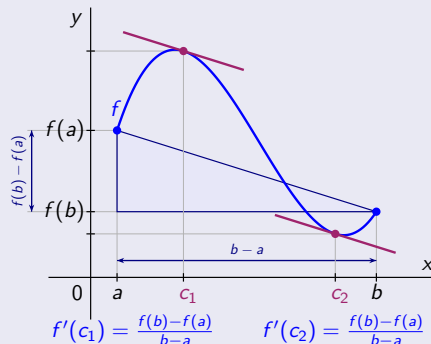


Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \text{Existuje aspoň jedno } c \in (a; b) \text{ také, že platí } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



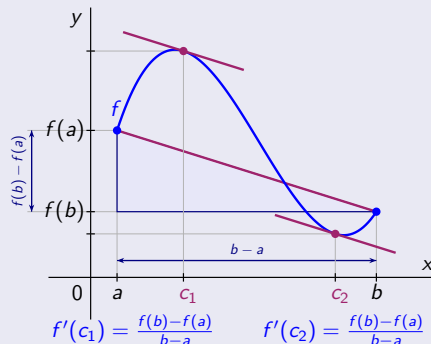
Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \text{Existuje aspoň jedno } c \in (a; b) \text{ také, že platí } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$.



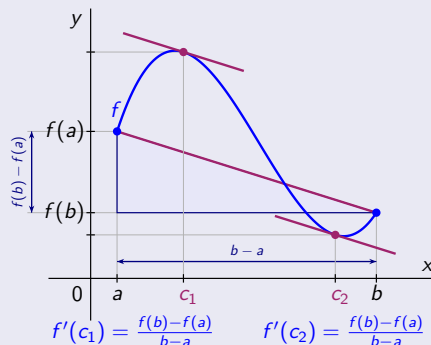
Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
 - Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \text{Existuje aspoň jedno } c \in (a; b) \text{ také, že platí } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$.
- Pre $f(a) = f(b)$ dostaneme Rolleho vetu o strednej hodnote.



Vety o strednej hodnote – 2. Lagrangeova veta

Lagrangeova veta

[2. veta o strednej hodnote.]

- Funkcia f je spojitá na intervale $\langle a; b \rangle$.
 • Pre všetky $x \in (a; b)$ existuje $f'(x)$ (aj nevlastná).
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \text{Existuje aspoň jedno } c \in (a; b) \text{ také,} \\ \text{že platí } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode c je rovnobežná s priamkou spájajúcou body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$.
- Pre $f(a) = f(b)$ dostaneme Rolleho vetu o strednej hodnote.



Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval,

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I .

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$
- Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.
- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval, potom platí:

• Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

• Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval, potom platí:

• Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

• Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

• $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.
- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$
- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval, potom platí:

• Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

• Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

• $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.

• $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$

• $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.

• Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.
- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$
- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.
- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$
- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle \cup (1; 2), \\ 2 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$ nie je konštantná.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.
- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$
- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle \cup (1; 2), \\ 2 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$ nie je konštantná.
- $I = \langle 0; 2 \rangle$ je interval.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.
- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$
- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle \cup (1; 2), \\ 2 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle \cup (1; 2), \\ \text{neexistuje} & \text{pre } x = 1. \end{cases}$
- $I = \langle 0; 2 \rangle$ je interval.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset \mathbb{R}$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.
- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$
- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle \cup (1; 2), \\ 2 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle \cup (1; 2), \\ \text{neexistuje} & \text{pre } x = 1. \end{cases}$
- $I = \langle 0; 2 \rangle$ je interval.
- Nie pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$,

Vety o strednej hodnote – Príklady

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$, pričom $I \subset R$ je interval, potom platí:

- Funkcia f je konštantná na intervale I . $\Leftrightarrow$ • Pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.
- Tvrdenie neplatí, ak množina I nie je interval alebo funkcia f nie je konštantná.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 1 \rangle$ a $f(x) = 2$ pre $x \in \langle 2; 4 \rangle$.

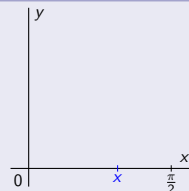
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ 2 & \text{pre } x \in (2; 4) \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in (0; 2), \\ [2]' = 0 & \text{pre } x \in (2; 4). \end{cases}$
- $I = (0; 2) \cup (2; 4)$ nie je interval.
- Ale pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$.

Funkcia $y = f(x)$, $x \in I$ definovaná vzťahmi $f(x) = 1$ pre $x \in \langle 0; 2 \rangle - \{1\}$ a $f(x) = 2$ pre $x = 1$.

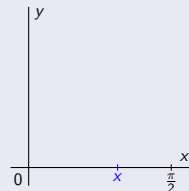
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle \cup (1; 2), \\ 2 & \text{pre } x = 1 \end{cases}$ nie je konštantná.
- $f'(x) = \begin{cases} [1]' = 0 & \text{pre } x \in \langle 0; 1 \rangle \cup (1; 2), \\ \text{neexistuje} & \text{pre } x = 1. \end{cases}$
- $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2}{x - 1} = \frac{-1}{0^-} = \infty$.
- $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - 2}{x - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$.
- $f'_-(1) \neq f'_+(1)$.
- $I = \langle 0; 2 \rangle$ je interval.
- Nie pre všetky $x \in I$ platí $f'(x) = 0$, neplatí pre $x = 1$.

Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.



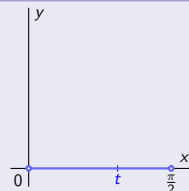
Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.



Vety o strednej hodnote – Príklady

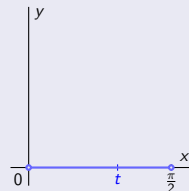
Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.



Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

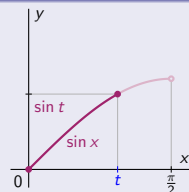


Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

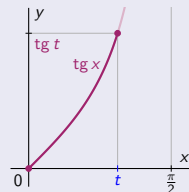
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.



Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.

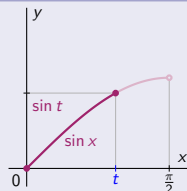


Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

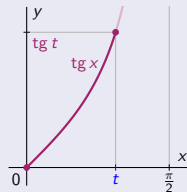
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$



Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

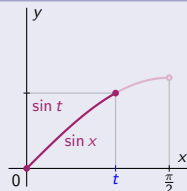


Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

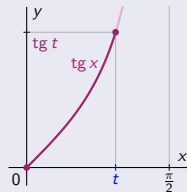
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$ a platí $0 < \cos x < 1$.



Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
a platí $0 < \cos x < 1$ a $0 < \cos^2 x < 1$ a $\frac{1}{\cos^2 x} > 1$.



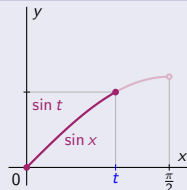
Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$ a platí $0 < \cos x < 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

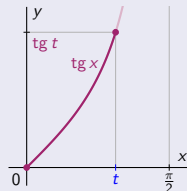


Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
a platí $0 < \cos x < 1$ a $0 < \cos^2 x < 1$ a $\frac{1}{\cos^2 x} > 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]



Vety o strednej hodnote – Príklady

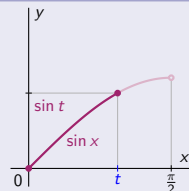
Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$ a platí $0 < \cos x < 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

⇒ • Existuje $c \in (0; t)$ také, že $f'(c) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$, t. j. $\cos c = \frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} = \frac{\sin t}{t}$.



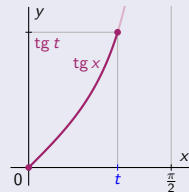
Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ a platí $0 < \cos x < 1$ a $0 < \cos^2 x < 1$ a $\frac{1}{\cos^2 x} > 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

⇒ • Existuje $c \in (0; t)$ také, že $f'(c) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$, t. j. $\frac{1}{\cos^2 c} = \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} 0}{t - 0} = \frac{\operatorname{tg} t}{t}$.



Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

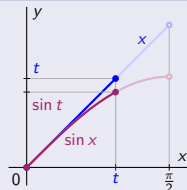
Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$ a platí $0 < \cos x < 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } c \in (0; t) \text{ také, že } f'(c) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}, \text{ t. j. } \cos c = \frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} = \frac{\sin t}{t}.$$

$$\Rightarrow \bullet \sin t = t \cdot \cos c < t \cdot 1 = t \text{ pre } t \in (0; \frac{\pi}{2}).$$



Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

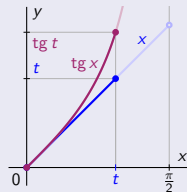
Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ a platí $0 < \cos x < 1$ a $0 < \cos^2 x < 1$ a $\frac{1}{\cos^2 x} > 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } c \in (0; t) \text{ také, že } f'(c) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}, \text{ t. j. } \frac{1}{\cos^2 c} = \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} 0}{t - 0} = \frac{\operatorname{tg} t}{t}.$$

$$\Rightarrow \bullet \operatorname{tg} t = \frac{t}{\cos^2 c} > \frac{t}{1} = t \text{ pre } t \in (0; \frac{\pi}{2}).$$



Vety o strednej hodnote – Príklady

Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x < x$.

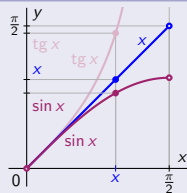
Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \cos x$ a platí $0 < \cos x < 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } c \in (0; t) \text{ také, že } f'(c) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}, \text{ t. j. } \cos c = \frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} = \frac{\sin t}{t}.$$

$$\Rightarrow \bullet \sin t = t \cdot \cos c < t \cdot 1 = t \text{ pre } t \in (0; \frac{\pi}{2}). \Rightarrow \bullet \sin x < x \text{ pre } x \in (0; \frac{\pi}{2}).$$



Pre všetky $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ platí $x < \operatorname{tg} x$.

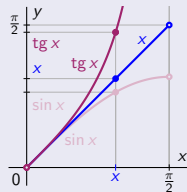
Zvoľme ľubovoľne $t \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je spojitá na intervale $\langle 0; t \rangle$.
- Pre všetky $x \in (0; t)$ existuje konečná $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ a platí $0 < \cos x < 1$ a $0 < \cos^2 x < 1$ a $\frac{1}{\cos^2 x} > 1$.

[Predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote sú splnené.]

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } c \in (0; t) \text{ také, že } f'(c) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}, \text{ t. j. } \frac{1}{\cos^2 c} = \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} 0}{t - 0} = \frac{\operatorname{tg} t}{t}.$$

$$\Rightarrow \bullet \operatorname{tg} t = \frac{t}{\cos^2 c} > \frac{t}{1} = t \text{ pre } t \in (0; \frac{\pi}{2}). \Rightarrow \bullet x < \operatorname{tg} x \text{ pre } x \in (0; \frac{\pi}{2}).$$



L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo

Bod $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$,

Bod $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

- Platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

- Platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. $[L'h \frac{\infty}{\infty}]$
- resp. • $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. $[L'h \frac{0}{0}]$

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

- Platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]
- resp. • $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. [L'h $\frac{0}{0}$]
- Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

• Platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a súčasne $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. [L'h $\frac{\infty}{\infty}$]

resp. • $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a súčasne $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. [L'h $\frac{0}{0}$]

• Pre všetky $x \in O(a)$, $x \neq a$ existujú derivácie $f'(x)$, $g'(x)$.

• Existuje limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

$$\left. \begin{array}{l}
 \bullet \text{ Platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [L'h \frac{\infty}{\infty}] \\
 \text{resp. } \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad [L'h \frac{0}{0}] \\
 \bullet \text{ Pre všetky } x \in O(a), x \neq a \text{ existujú derivácie } f'(x), g'(x). \\
 \bullet \text{ Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}.
 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

[T. j. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$]

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

$$\left. \begin{array}{l}
 \textcircled{1} \text{ Platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [L'h \frac{\infty}{\infty}] \\
 \text{resp. } \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad [L'h \frac{0}{0}] \\
 \textcircled{2} \text{ Pre všetky } x \in O(a), x \neq a \text{ existujú derivácie } f'(x), g'(x). \\
 \textcircled{3} \text{ Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}.
 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

[T. j. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$]

Predpoklad $\textcircled{1}$ sa overuje až počas výpočtu.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

$$\left. \begin{array}{l}
 \textcircled{1} \text{ Platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [L'h \frac{\infty}{\infty}] \\
 \text{resp. } \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad [L'h \frac{0}{0}] \\
 \textcircled{2} \text{ Pre všetky } x \in O(a), x \neq a \text{ existujú derivácie } f'(x), g'(x). \\
 \textcircled{3} \text{ Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}.
 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

[T. j. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$]

Predpoklad $\textcircled{1}$ sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [L'h \frac{\infty}{\infty}] \\ \text{resp. } \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad [L'h \frac{0}{0}] \\ \bullet \text{ Pre všetky } x \in O(a), x \neq a \text{ existujú derivácie } f'(x), g'(x). \\ \bullet \text{ Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

[T. j. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$]

Predpoklad $\bullet$ sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0-?,$$

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [L'h \frac{\infty}{\infty}] \\ \text{resp. } \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad [L'h \frac{0}{0}] \\ \bullet \text{ Pre všetky } x \in O(a), x \neq a \text{ existujú derivácie } f'(x), g'(x). \\ \bullet \text{ Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

[T. j. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$]

Predpoklad ① sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0-?,$$

t. j. limita neexistuje,

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [L'h \frac{\infty}{\infty}] \\ \text{resp. } \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad [L'h \frac{0}{0}] \\ \bullet \text{ Pre všetky } x \in O(a), x \neq a \text{ existujú derivácie } f'(x), g'(x). \\ \bullet \text{ Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

[T. j. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$]

Predpoklad $\bullet$ sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0-?,$$

t. j. limita neexistuje, pôvodná limita ale existuje.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in R \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [L'h \frac{\infty}{\infty}] \\ \text{resp. } \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad [L'h \frac{0}{0}] \\ \bullet \text{ Pre všetky } x \in O(a), x \neq a \text{ existujú derivácie } f'(x), g'(x). \\ \bullet \text{ Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R \cup \{\pm\infty\}. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

[T. j. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$]

Predpoklad $\bullet$ sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0-?,$$

t. j. limita neexistuje, pôvodná limita ale existuje.

Predpoklady sa niekedy nedajú overiť a pravidlo sa nedá použiť.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [L'h \frac{\infty}{\infty}] \\ \text{resp. } \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad [L'h \frac{0}{0}] \\ \bullet \text{ Pre všetky } x \in O(a), x \neq a \text{ existujú derivácie } f'(x), g'(x). \\ \bullet \text{ Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

[T. j. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.]

Predpoklad $\bullet$ sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0-?,$$

t. j. limita neexistuje, pôvodná limita ale existuje.

Predpoklady sa niekedy nedajú overiť a pravidlo sa nedá použiť.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = [L'h \frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = [L'h \frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [L'h \frac{\infty}{\infty}] \\ \text{resp. } \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad [L'h \frac{0}{0}] \\ \bullet \text{ Pre všetky } x \in O(a), x \neq a \text{ existujú derivácie } f'(x), g'(x). \\ \bullet \text{ Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

[T. j. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.]

Predpoklad $\bullet$ sa overuje až počas výpočtu.

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0-?,$$

t. j. limita neexistuje, pôvodná limita ale existuje.

Predpoklady sa niekedy nedajú overiť a pravidlo sa nedá použiť.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = [L'h \frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = [L'h \frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$

L'H pravidlo môžeme použiť opakovane.

L'Hospitalovo pravidlo – Definícia typ $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typ $\frac{0}{0}$

L'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\infty}{\infty}$, resp. typu $\frac{0}{0}$

Bod $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, okolie $O(a)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [L'h \frac{\infty}{\infty}] \\ \text{resp. } \bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ a súčasne } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad [L'h \frac{0}{0}] \\ \bullet \text{ Pre všetky } x \in O(a), x \neq a \text{ existujú derivácie } f'(x), g'(x). \\ \bullet \text{ Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

[T. j. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$]

Predpoklad $\bullet$ sa overuje až počas výpočtu. [PrI]

Všetky predpoklady sú dôležité, ak ich neoveríme, môžeme dostať nesprávny výsledok. [PrII]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0-?,$$

t. j. limita neexistuje, pôvodná limita ale existuje.

Predpoklady sa niekedy nedajú overiť a pravidlo sa nedá použiť. [PrII]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = [L'h \frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = [L'h \frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$

L'H pravidlo môžeme použiť opakovane. [PrIII, PrIV]

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

- $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

[V praxi předpoklady vždy overujeme, ale většinou ich nevypisujeme.]

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

[V praxi předpoklady vždy overujeme, ale většinou ich nevypisujeme.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right]$$

[V praxi předpoklady vždy overujeme, ale většinou ich nevypisujeme.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h \infty]$$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ a } g'(x) = [x]' = 1.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ④ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \quad \text{a} \quad g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h_{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ④ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \quad \text{a} \quad g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty}$$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ④ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \quad \text{a} \quad g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ④ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ a } g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h_{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[V praxi předpoklady vždy overujeme, ale většinou ich nevypisujeme. Posledný předpoklad ③ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ a } g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ③ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \quad \text{a} \quad g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[x]}'$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[V praxi předpoklady vždy overujeme, ale většinou ich nevypisujeme. Posledný předpoklad ④ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ a } g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h_{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ③ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ a } g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\bullet = [L'h_{\frac{0}{0}}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[V praxi předpoklady vždy overujeme, ale většinou ich nevypisujeme. Posledný předpoklad ④ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ a } g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ③ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \quad \text{a} \quad g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

pre $a > 0$.

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[V praxi predpoklady vždy overujeme, ale väčšinou ich nevypisujeme. Posledný predpoklad ③ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ a } g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{pre } a > 0.$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[a^x - 1]'}{[x]'} =$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h_{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[V praxi předpoklady vždy overujeme, ale většinou ich nevypisujeme. Posledný předpoklad ④ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ a } g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\bullet = [L'h_{\frac{0}{0}}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{pre } a > 0.$$

$$\bullet = [L'h_{\frac{0}{0}}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[a^x - 1]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \ln a - 0}{1}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h_{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[V praxi předpoklady vždy overujeme, ale většinou ich nevypisujeme. Posledný předpoklad ④ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ a } g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\bullet = [L'h_{\frac{0}{0}}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{pre } a > 0.$$

$$\bullet = [L'h_{\frac{0}{0}}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[a^x - 1]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \ln a - 0}{1} = \frac{a^0 \cdot \ln a}{1}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[V praxi předpoklady vždy overujeme, ale většinou ich nevypisujeme. Posledný předpoklad ③ overujeme počas výpočtu.]

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

$$\textcircled{2} \text{ Pre všetky } x > 0 \text{ existujú derivácie } f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ a } g'(x) = [x]' = 1.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \text{ pre } a > 0.$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[a^x - 1]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \ln a - 0}{1} = \frac{a^0 \cdot \ln a}{1} = \ln a.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right]$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí:

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x}.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = \quad - ?$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ neexistuje,}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = \quad - ?$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ neexistuje,}$$

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ platí:

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = \quad - ?$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ neexistuje,}$$

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ platí:

$$\bullet L_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 0}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \pi}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = \quad - ?$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ neexistuje,}$$

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 0}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1. \\ \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \pi}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned} \right\} \text{ t. j. } 1 \neq -1.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0 - ?, \text{ t. j. neexistuje.}$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ neexistuje,}$$

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 0}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1. \\ \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \pi}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned} \right\} \text{ t. j. } 1 \neq -1.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

[L'H pravidlo použít nemůžeme, protože limita podielu derivovaných funkcí neexistuje.]

$$\bullet = [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0 - ?, \text{ t. j. neexistuje.} \quad !!!$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ neexistuje,}$$

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{\frac{1}{2k\pi}}}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 2k\pi}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 0}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1. \\ \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{\frac{1}{\pi+2k\pi}}}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \pi}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned} \right\} \text{ t. j. } 1 \neq -1.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

[L'H pravidlo použít nemůžeme, protože limita podielu derivovaných funkcí neexistuje.]

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0 - ?, \text{ t. j. neexistuje.} \quad !!!$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ neexistuje,}$$

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{\frac{1}{2k\pi}}}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 2k\pi}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 0}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1. \\ \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{\frac{1}{\pi+2k\pi}}}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos (\pi+2k\pi)}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \pi}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned} \right\} \text{ t. j. } 1 \neq -1.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x} \right]$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

[L'H pravidlo použít nemůžeme, protože limita podielu derivovaných funkcí neexistuje.]

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0 - ?, \text{ t. j. neexistuje.} \quad !!!$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ neexistuje,}$$

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{\frac{1}{2k\pi}}}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 2k\pi}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1. \\ \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{\frac{1}{\pi+2k\pi}}}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \pi}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned} \right\} \text{ t. j. } 1 \neq -1.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \sin \frac{1}{x} \right]$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

[L'H pravidlo použít nemůžeme, protože limita podielu derivovaných funkcí neexistuje.]

$$\bullet = \left[\begin{smallmatrix} \text{L'h} & 0 \\ & 0 \end{smallmatrix} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0 - ?, \text{ t. j. neexistuje.} \quad !!!$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ neexistuje,}$$

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 0}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1. \\ \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \pi}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned} \right\} \text{ t. j. } 1 \neq -1.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \sin \frac{1}{x} \right]$$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \right] \left[\begin{aligned} x \in \mathbb{R}. \Rightarrow -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1. \Rightarrow -|x| \leq x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq |x|. \\ \Rightarrow 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} |x| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \sin \frac{1}{x} \right] \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \end{aligned} \right]$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

[L'H pravidlo použít nemůžeme, protože limita podielu derivovaných funkcí neexistuje.]

$$\bullet = \left[\begin{smallmatrix} \text{L'h} \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0 - ?, \text{ t. j. neexistuje.} \quad !!!$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ neexistuje,}$$

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 0}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1. \\ \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \pi}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned} \right\} \text{ t. j. } 1 \neq -1.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \sin \frac{1}{x} \right]$$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \right] \left[\begin{aligned} x \in \mathbb{R}. \Rightarrow -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1. \Rightarrow -|x| \leq x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq |x|. \\ \Rightarrow 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} |x| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \sin \frac{1}{x} \right] \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \end{aligned} \right] = 1 \cdot 0$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklad

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0.$$

[L'H pravidlo použít nemůžeme, protože limita podielu derivovaných funkcí neexistuje.]

$$\bullet = \left[\begin{smallmatrix} \text{L'h} & 0 \\ & 0 \end{smallmatrix} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \right] = 0 - ?, \text{ t. j. neexistuje.} \quad !!!$$

$$\bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = 0,$$

[Kedže $x \rightarrow 0$, postačí nám nejaké blízke okolie bodu 0, napr. $O(0) = (-1; 1)$.]

pretože pre všetky $x \in O(0) - \{0\}$ platí: $\bullet -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $-|x| \leq x \leq |x|$ a $\cos x > \cos 1 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet -\frac{2|x|}{\cos x} \leq \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \leq \frac{2|x|}{\cos x} \Rightarrow \bullet 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} \leq L_1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{\cos x} = 0.$$

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ neexistuje,}$$

pretože pre postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\pi+2k\pi}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$ platí:

$$\left. \begin{aligned} \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(2k\pi)}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos 0}{\cos \frac{1}{2k\pi}} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1. \\ \bullet L_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x_k}}{\cos x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi+2k\pi)}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos \pi}{\cos \frac{1}{\pi+2k\pi}} = \frac{-1}{\cos 0} = \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned} \right\} \text{ t. j. } 1 \neq -1.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \sin \frac{1}{x} \right]$$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \right] \left[\begin{aligned} x \in \mathbb{R}. \Rightarrow -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1. \Rightarrow -|x| \leq x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq |x|. \\ \Rightarrow 0 = -\lim_{x \rightarrow 0} |x| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \sin \frac{1}{x} \right] \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. \end{aligned} \right] = 1 \cdot 0 = 0.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\bullet = \left[\operatorname{L'h}_{\infty} \right]$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \infty \right]$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right]$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]}'$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = [L'h \frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = [L'h \frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[6x]'} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[6x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[6x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \left[\text{Posledný predpoklad} \right. \\ &\quad \left. \text{je overený až tu.} \right] \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[6x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \left[\begin{array}{l} \text{Posledný predpoklad} \\ \text{je overený až tu.} \end{array} \right] = \frac{\cos 0}{6} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1.$$

[L'H pravidlo použiť nemôžeme, pretože týmto spôsobom nedokážeme vypočítať limitu podielu derivovaných funkcií.]

~~$$\bullet = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sinh x]'}{[\cosh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = [L'h \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\cosh x]'}{[\sinh x]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \dots$$~~

[Dostali sme pôvodnú limitu.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}}{1 + \frac{1}{e^{2 \cdot \infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{\infty}}}{1 + \frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \sin x]'}{[x^3]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - (-\sin x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= [L'h \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[6x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \left[\begin{array}{l} \text{Posledný predpoklad} \\ \text{je overený až tu.} \end{array} \right] = \frac{\cos 0}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[L'h_{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[L'h_{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1) x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{e^x}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$$

...

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x}$$

...

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1) x^{n-2}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \dots 2x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2x}{e^x} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1) x^{n-2}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \dots 2x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{e^x} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1) x^{n-2}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \dots 2x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1) x^{n-2}} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \dots 2x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1) x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \dots 2x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^7}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^7}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^7}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln 2}{7 \cdot 6x^5}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^7}$$

$$\bullet = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln 2}{7 \cdot 6x^5} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^2 2}{7 \cdot 6 \cdot 5x^4}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^7}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln 2}{7 \cdot 6x^5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^2 2}{7 \cdot 6 \cdot 5x^4} \\ &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^3 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4x^3} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^7}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln 2}{7 \cdot 6x^5} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^2 2}{7 \cdot 6 \cdot 5x^4} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^3 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4x^3} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^4 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3x^2} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^7}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln 2}{7 \cdot 6x^5} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^2 2}{7 \cdot 6 \cdot 5x^4} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^3 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4x^3} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^4 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3x^2} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^5 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^7}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln 2}{7 \cdot 6x^5} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^2 2}{7 \cdot 6 \cdot 5x^4} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^3 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4x^3} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^4 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3x^2} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^5 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^6 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^7}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln 2}{7 \cdot 6x^5} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^2 2}{7 \cdot 6 \cdot 5x^4} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^3 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4x^3} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^4 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3x^2} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^5 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^6 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2^\infty \ln^7 2}{7!} = \frac{\infty \cdot \ln^7 2}{7!} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^7}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln 2}{7 \cdot 6x^5} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^2 2}{7 \cdot 6 \cdot 5x^4} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^3 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4x^3} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^4 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3x^2} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^5 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^6 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2^\infty \ln^7 2}{7!} = \frac{\infty \cdot \ln^7 2}{7!} = \left[\ln 2 \approx 0,693147 > 0 \right] = \frac{\infty}{7!} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo – Příklady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{e^\infty}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

[L'H pravidlo sme použili n -krát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\ &\dots = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2x}{e^x} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^\infty} = \frac{n!}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^7} = \infty.$$

[L'H pravidlo sme použili sedemkrát opakovane.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{7x^6} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln 2}{7 \cdot 6x^5} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^2 2}{7 \cdot 6 \cdot 5x^4} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^3 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4x^3} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^4 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3x^2} = \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^5 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2 \cdot \ln^6 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2^\infty \ln^7 2}{7!} = \frac{\infty \cdot \ln^7 2}{7!} = \left[\ln 2 \approx 0,693147 > 0 \right] = \frac{\infty}{7!} = \infty. \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť
aj na výpočet iných neurčitých výrazov,

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. • $\pm\infty \cdot 0$, • $\infty - \infty$, • ∞^0 , • 0^0 , • $1^{\pm\infty}$.

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. $\bullet \pm\infty \cdot 0$, $\bullet \infty - \infty$, $\bullet \infty^0$, $\bullet 0^0$, $\bullet 1^{\pm\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

[Typ $\pm\infty \cdot 0$.

.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. $\bullet \pm\infty \cdot 0$, $\bullet \infty - \infty$, $\bullet \infty^0$, $\bullet 0^0$, $\bullet 1^{\pm\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0$.]

- $\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. $\bullet \pm\infty \cdot 0$, $\bullet \infty - \infty$, $\bullet \infty^0$, $\bullet 0^0$, $\bullet 1^{\pm\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0. \end{cases}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. $\bullet \pm\infty \cdot 0$, $\bullet \infty - \infty$, $\bullet \infty^0$, $\bullet 0^0$, $\bullet 1^{\pm\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. $\bullet \pm\infty \cdot 0$, $\bullet \infty - \infty$, $\bullet \infty^0$, $\bullet 0^0$, $\bullet 1^{\pm\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0. \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. $\bullet \pm\infty \cdot 0$, $\bullet \infty - \infty$, $\bullet \infty^0$, $\bullet 0^0$, $\bullet 1^{\pm\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)], \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ $\pm\infty \cdot 0 \Rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0. \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty. \end{cases}$$

V tomto prípade použijeme [L'h $\frac{0}{0}$].

V tomto prípade použijeme [L'h $\frac{\infty}{\infty}$].

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. $\bullet \pm\infty \cdot 0$, $\bullet \infty - \infty$, $\bullet \infty^0$, $\bullet 0^0$, $\bullet 1^{\pm\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0 \Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0. & \text{V tomto prípade použijeme [L'h } \frac{0}{0} \text{].} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty. & \text{V tomto prípade použijeme [L'h } \frac{\infty}{\infty} \text{].} \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln x]$ [Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. $\bullet \pm\infty \cdot 0$, $\bullet \infty - \infty$, $\bullet \infty^0$, $\bullet 0^0$, $\bullet 1^{\pm\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0 \Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0. & \text{V tomto prípade použijeme [L'h } \frac{0}{0} \text{].} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty. & \text{V tomto prípade použijeme [L'h } \frac{\infty}{\infty} \text{].} \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln x]$ [Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-1}}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. $\bullet \pm\infty \cdot 0$, $\bullet \infty - \infty$, $\bullet \infty^0$, $\bullet 0^0$, $\bullet 1^{\pm\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0 \Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0. & \text{V tomto prípade použijeme [L'h } \frac{0}{0} \text{].} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty. & \text{V tomto prípade použijeme [L'h } \frac{\infty}{\infty} \text{].} \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln x]$ [Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-1}} = [\text{L'h } \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-2}}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = [\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. $\bullet \pm\infty \cdot 0$, $\bullet \infty - \infty$, $\bullet \infty^0$, $\bullet 0^0$, $\bullet 1^{\pm\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0 \Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0. & \text{V tomto prípade použijeme [L'h } \frac{0}{0} \text{].} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty. & \text{V tomto prípade použijeme [L'h } \frac{\infty}{\infty} \text{].} \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln x]$ [Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-1}} = [\text{L'h } \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-2}} \\ &= [\text{L'h } \frac{0}{0}] = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-2(\ln x)^{-3} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-3}} \end{aligned}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = [\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty \cdot 0$

Po vhodných úpravách môžeme L'Hospitalovo pravidlo použiť

aj na výpočet iných neurčitých výrazov, napr. $\bullet \pm\infty \cdot 0$, $\bullet \infty - \infty$, $\bullet \infty^0$, $\bullet 0^0$, $\bullet 1^{\pm\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. [Typ $\pm\infty \cdot 0 \Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$, resp. typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, & \text{pričom } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0. & \text{V tomto prípade použijeme [L'h } \frac{0}{0} \text{].} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, & \text{pokiaľ existuje } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \pm\infty. & \text{V tomto prípade použijeme [L'h } \frac{\infty}{\infty} \text{].} \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln x] = 0$. [Typ $0 \cdot (-\infty) \Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-1}} = [\text{L'h } \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-2}} \\ &= [\text{L'h } \frac{0}{0}] = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-2(\ln x)^{-3} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(\ln x)^{-3}} = \dots \end{aligned}$$

[L'H pravidlo v tomto tvare nemôžeme použiť.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = [\text{L'h } \frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)], \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $\infty - \infty$.

.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$.

[Typ $\infty - \infty$.

.]

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)], \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $\infty - \infty$.

.]

- $$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right]$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $\infty - \infty$.]

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $\infty - \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] = 0$.

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)], \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $\infty - \infty \Rightarrow$ Typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] = 0.$$

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $\infty - \infty \Rightarrow$ Typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] = 0$. [Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cotg x - \frac{1}{x} \right]$$

[Typ $\infty - \infty$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)], \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [\text{Typ } \infty - \infty. \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0.]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] = 0. \quad [\text{Dostaneme typ } \pm\infty \cdot 0.]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cotg x - \frac{1}{x} \right] \quad [\text{Typ } \infty - \infty.]$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right]$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right]$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $\infty - \infty \Rightarrow$ Typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] = 0$. [Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cotg x - \frac{1}{x} \right]$ [Typ $\infty - \infty \Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. [Typ $\infty - \infty \Rightarrow$ Typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] = 0$. [Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cotg x - \frac{1}{x} \right]$ [Typ $\infty - \infty \Rightarrow$ Typ $\frac{0}{0}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)], \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $\infty - \infty \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] = 0.$$

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cotg x - \frac{1}{x} \right]$$

[Typ $\infty - \infty \Rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)], \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $\infty - \infty \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] = 0.$$

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cotg x - \frac{1}{x} \right]$$

[Typ $\infty - \infty \Rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right] \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)], \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $\infty - \infty \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] = 0.$$

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cotg x - \frac{1}{x} \right]$$

[Typ $\infty - \infty \Rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)], \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [\text{Typ } \infty - \infty. \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0.]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] = 0.$ [Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0.$]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cotg x - \frac{1}{x} \right] \quad [\text{Typ } \infty - \infty. \Rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}.]$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= [\text{L'h } \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= [\text{L'h } \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= [\text{L'h } \frac{0}{0}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \right] = \frac{-0}{1+1} \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)], \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty. \quad [\text{Typ } \infty - \infty. \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0.]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right],$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right] = 0.$ [Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0.$]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cotg x - \frac{1}{x} \right] = 0. \quad [\text{Typ } \infty - \infty. \Rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}.]$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 0} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \right] = \frac{-0}{1+1} = 0. \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 .

.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

[Typ ∞^0 .

.]

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

[Typ ∞^0 .

.]

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

[Typ ∞^0 .

.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

[Typ ∞^0 .

.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

[Typ ∞^0 .

.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty$.

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty$.

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

[Typ ∞^0 .

]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

[Typ ∞^0 .

]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

[Typ ∞^0 .

]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'}} \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{x'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\} \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

[Typ 0^∞ .]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\} \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

[Typ 0^∞ .]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$$

[Typ 0^∞ .]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ $\infty^0 \Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1.$$

[Typ $\infty^0 \Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty \Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{x'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\} \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

[Typ 0^∞ .]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}$$

[Typ 0^∞ .]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln x}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ $\infty^0 \Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1.$$

[Typ $\infty^0 \Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty \Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= [L'h \frac{\infty}{\infty}] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\} \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

[Typ 0^∞ .]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \ln 0^+ = -\infty \right]$$

[Typ 0^∞ .]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\frac{1}{0^+} \cdot \ln 0^+}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ $\infty^0 \Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1.$$

[Typ $\infty^0 \Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty \Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\} \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

[Typ 0^∞ .]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \ln 0^+ = -\infty \right] = e^{\infty \cdot (-\infty)}$$

[Typ $0^\infty \Rightarrow$ Typ $\infty \cdot (-\infty)$]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\frac{1}{0^+} \cdot \ln 0^+} = e^{\infty \cdot (-\infty)}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln x]'}{[x]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\} \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

[Typ 0^∞ .]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \ln 0^+ = -\infty \right] = e^{\infty \cdot (-\infty)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty}$$

[Typ 0^∞ . $\Rightarrow$ Typ $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\frac{1}{0^+} \cdot \ln 0^+} = e^{\infty \cdot (-\infty)} = e^{-\infty}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ ∞^0 , ale nie typ 0^∞

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot \infty$.]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1.$$

[Typ ∞^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot \infty$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\} \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty. \quad [\text{Typ } 0^\infty.]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \ln 0^+ = -\infty \right] = e^{\infty \cdot (-\infty)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

[Typ 0^∞ . $\Rightarrow$ Typ $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$. V tomto prípade L'Hospitalovo pravidlo použiť nemôžeme.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\frac{1}{0^+} \cdot \ln 0^+} = e^{\infty \cdot (-\infty)} = e^{-\infty} = 0.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\}.$$

[Typ 0^0 .]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.
[Typ 0^0 .]

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.
[Typ 0^0 .]

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.
[Typ 0^0 .]

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.
[Typ 0^0 .]

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.
[Typ 0^0 .]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty$.

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty$.

[Dostaneme typ $0 \cdot (-\infty)$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\}.$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

[Typ 0^0 .]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x]^x$$

[Typ 0^0 .]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\}.$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

[Typ 0^0 .]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x]^x$$

[Typ 0^0 .]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln [\sin x]^x}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\}.$$

[Typ $0^0 \Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

[Typ $0^0 \Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x]^x$$

[Typ $0^0 \Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln [\sin x]^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \sin x}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\}.$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x]^x$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln [\sin x]^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty$.

[Dostaneme typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}}$$

$$= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x]^x$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln [\sin x]^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}}$$

$$= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln \sin x]'}{[x^{-1}]'}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty$.

[Dostaneme typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}}$$

$$= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x]^x$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln [\sin x]^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}}$$

$$= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln \sin x]'}{[x^{-1}]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\}.$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x]^x$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln [\sin x]^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln \sin x]'}{[x^{-1}]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [-x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x}]} \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $f(x) > 0$ pre $x \in O(a) - \{a\}$.

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty$.

[Dostaneme typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$.

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}}$$

$$= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = e^{-0} = e^0 = 1.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x]^x = 1$.

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln [\sin x]^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}}$$

$$= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln \sin x)'}{(x^{-1})'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [-x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x}]} = e^{-0 \cdot 1 \cdot 1} = e^0 = 1.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\}.$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = e^{-0} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

[O limitách $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^x$ a $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ nemá zmysel uvažovať,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x]^x = 1.$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln [\sin x]^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln \sin x]'}{[x^{-1}]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [-x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x}]} = e^{-0 \cdot 1 \cdot 1} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ 0^0

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } f(x) > 0 \text{ pre } x \in O(a) - \{a\}.$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty.$$

[Dostaneme typ $0 \cdot (-\infty)$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1.$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln x]'}{[x^{-1}]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = e^{-0} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

[O limitách $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^x$ a $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ nemá zmysel uvažovať, pretože funkcia $f(x) = x^x$ nie je definovaná pre $x < 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x]^x = 1.$$

[Typ 0^0 . $\Rightarrow$ Typ $0 \cdot (-\infty)$. $\Rightarrow$ Typ $\frac{-\infty}{\infty}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln [\sin x]^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln \sin x]'}{[x^{-1}]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [-x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x}]} = e^{-0 \cdot 1 \cdot 1} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty}$.

.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty}$.

.]

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty}$.

.]

- $$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty}$.

.]

- $$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$, pričom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$.

[Typ $1^{\pm\infty}$.

.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty}$.

.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = 0.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = 0.$$

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty}$. $\Rightarrow$ Typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = 0.$$

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

[Typ $1^{\pm\infty}$.]

]

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = 0.$$

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

[Typ $1^{\pm\infty}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = 0.$$

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \cos x}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = 0$.

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0 \Rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$.]

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \cos x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x}{x}}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x}}$$

pričom $\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = 0$.

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0 \Rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \cos x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln \cos x]'}{[x]'}} \end{aligned}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x}} = e$$

pričom $\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \left[\text{Subst. } t = \cos x - 1 \begin{matrix} x \rightarrow 0^+ \\ \cos x - 1 \leq 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t \rightarrow 0^- \end{matrix} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^-} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e,$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

pričom platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = 0$.

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0 \Rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \cos x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h} \frac{0}{0} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln \cos x]'}{[x]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{1}} \end{aligned}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x}} = e$$

pričom $\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \left[\text{Subst. } t = \cos x - 1 \mid \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ \cos x - 1 \leq 1 \end{array} \mid \begin{array}{l} t \rightarrow 0^- \\ t \rightarrow 0^- \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^-} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e,$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = 0.$$

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0 \Rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \cos x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln \cos x]'}{[x]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x}} \end{aligned}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x}} = e^0$$

$$\text{pričom } \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \left[\text{Subst. } t = \cos x - 1 \begin{matrix} x \rightarrow 0^+ \\ \cos x - 1 \leq 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t \rightarrow 0^- \\ t \rightarrow 0^- \end{matrix} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^-} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x - 0}{1} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = -\sin 0 = -0 = 0.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Typ $1^{\pm\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, \text{ pričom } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0$.]

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)},$$

$$\text{pričom platí } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = 0.$$

[Dostaneme typ $\pm\infty \cdot 0$.]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

[Typ $1^{\pm\infty} \Rightarrow \text{Typ } \pm\infty \cdot 0 \Rightarrow \text{Typ } \frac{0}{0}$.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \cos x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x}{x}} \\ &= \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln \cos x]'}{[x]'}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x}} = e^{\frac{-0}{1}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right]^{\frac{\cos x - 1}{x}} = e^0 = 1,$$

$$\text{pričom } \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \left[\text{Subst. } t = \cos x - 1 \mid \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ \cos x - 1 \leq 1 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^-} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x - 0}{1} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = -\sin 0 = -0 = 0.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right]$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right]$$

- $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right]$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[L'h \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right]$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right]$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\text{L'h } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[L'h \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[L'h \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad \text{pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad \text{pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m x^{m-1} - 0}{n x^{n-1} - 0}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad \text{pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1} - 0}{nx^{n-1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad \text{pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1} - 0}{nx^{n-1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m \cdot 1^{m-1}}{n \cdot 1^{n-1}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n} \text{ pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1} - 0}{nx^{n-1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m \cdot 1^{m-1}}{n \cdot 1^{n-1}} = \frac{m}{n}.$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n} \text{ pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1} - 0}{nx^{n-1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m \cdot 1^{m-1}}{n \cdot 1^{n-1}} = \frac{m}{n}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \text{ pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{m}} - 1}{x^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n} \text{ pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1} - 0}{nx^{n-1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m \cdot 1^{m-1}}{n \cdot 1^{n-1}} = \frac{m}{n}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \text{ pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{m}} - 1}{x^{\frac{1}{n}} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m} - 1} - 0}{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} - 0}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n} \text{ pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1} - 0}{nx^{n-1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m \cdot 1^{m-1}}{n \cdot 1^{n-1}} = \frac{m}{n}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \text{ pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{m}} - 1}{x^{\frac{1}{n}} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m} - 1} - 0}{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{\frac{1}{m} - 1}}{mx^{\frac{1}{n} - 1}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n} \text{ pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1} - 0}{nx^{n-1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m \cdot 1^{m-1}}{n \cdot 1^{n-1}} = \frac{m}{n}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \text{ pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{m}} - 1}{x^{\frac{1}{n}} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m} - 1} - 0}{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{\frac{1}{m} - 1}}{mx^{\frac{1}{n} - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n \cdot 1^{\frac{1}{m} - 1}}{m \cdot 1^{\frac{1}{n} - 1}}$$

Použitie L'Hospitalovho pravidla – Príklady

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = 0.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-0 - 0}{1 + 1 - 0 \cdot 0} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x e^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{e^x + x e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + x e^x - 1} \\ = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0}{e^x + e^x + x e^x - 0} = \frac{1 - 0}{1 + 1 + 0 \cdot 1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n} \text{ pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1} - 0}{nx^{n-1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m \cdot 1^{m-1}}{n \cdot 1^{n-1}} = \frac{m}{n}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{n}{m} \text{ pre } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{m}} - 1}{x^{\frac{1}{n}} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m} - 1} - 0}{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} - 0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{\frac{1}{m} - 1}}{mx^{\frac{1}{n} - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n \cdot 1^{\frac{1}{m} - 1}}{m \cdot 1^{\frac{1}{n} - 1}} = \frac{n}{m}.$$

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0) \cdot (x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n}{n!}, \quad x \in O(x_0). \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

$$\begin{aligned} \bullet T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0) \cdot (x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n}{n!}, \quad x \in O(x_0). \end{aligned}$$

Ak označíme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom $h \in O(0)$

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0) \cdot (x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n}{n!}, \quad x \in O(x_0). \end{aligned}$$

Ak označíme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom $h \in O(0)$ a dostaneme tvar:

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= T_n(x_0 + h) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0) \cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot h^n}{n!}, \quad h \in O(0). \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0) \cdot (x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n}{n!}, \quad x \in O(x_0). \end{aligned}$$

Ak označíme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom $h \in O(0)$ a dostaneme tvar:

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= T_n(x_0 + h) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0) \cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot h^n}{n!}, \quad h \in O(0). \end{aligned}$$

Taylorov polynóm (stupňa n) funkcie f so stredom $x_0 = 0$,

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0) \cdot (x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n}{n!}, \quad x \in O(x_0). \end{aligned}$$

Ak označíme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom $h \in O(0)$ a dostaneme tvar:

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= T_n(x_0 + h) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0) \cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot h^n}{n!}, \quad h \in O(0). \end{aligned}$$

Taylorov polynóm (stupňa n) funkcie f so stredom $x_0 = 0$, t. j. funkcia

$$\bullet \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0) \cdot x}{1!} + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}, \quad x \in O(0)$$

Taylorov polynóm – Definícia

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 nazývame funkciu (polynóm):

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0) \cdot (x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x-x_0)^n}{n!}, \quad x \in O(x_0). \end{aligned}$$

Ak označíme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom $h \in O(0)$ a dostaneme tvar:

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= T_n(x_0 + h) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot h^k}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0) \cdot h}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot h^n}{n!}, \quad h \in O(0). \end{aligned}$$

Taylorov polynóm (stupňa n) funkcie f so stredom $x_0 = 0$, t. j. funkcia

$$\bullet \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0) \cdot x}{1!} + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}, \quad x \in O(0)$$

sa nazýva **Maclaurinov polynóm (stupňa n)** funkcie f .

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, \quad x \in O(x_0).$$

[Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, x \in O(x_0).$

[Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, x \in O(x_0).$

[Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, x \in O(x_0).$

[Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, x \in O(x_0), \end{cases}$

[Lagrangeov tvar zvyšku.]

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, x \in O(x_0).$

[Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0) \cdot (x-\xi)^n}{n!}, & x \in O(x_0), \end{cases}$

[Cauchyho tvar zvyšku.]

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, x \in O(x_0).$

[Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, & x \in O(x_0), \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0) \cdot (x-\xi)^n}{n!}, & x \in O(x_0), \end{cases}$

[Lagrangeov tvar zvyšku.]

[Cauchyho tvar zvyšku.]

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, x \in O(x_0).$

[Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, & x \in O(x_0), \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0) \cdot (x-\xi)^n}{n!}, & x \in O(x_0), \end{cases}$

[Lagrangeov tvar zvyšku.]

[Cauchyho tvar zvyšku.]

pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, x \in O(x_0).$

[Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, & x \in O(x_0), \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0) \cdot (x-\xi)^n}{n!}, & x \in O(x_0), \end{cases}$

[Lagrangeov tvar zvyšku.]

[Cauchyho tvar zvyšku.]

[Bod ξ leží vo vnútri úsečky spájajúcej body x_0 a x .]

pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, x \in O(x_0).$

[Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, & x \in O(x_0), \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0) \cdot (x-\xi)^n}{n!}, & x \in O(x_0), \end{cases}$

[Lagrangeov tvar zvyšku.]

[Cauchyho tvar zvyšku.]

[Bod ξ leží vo vnútri úsečky spájajúcej body x_0 a x .]

pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

- Zvyšok $R_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie funkcie $f(x)$ pomocou $T_n(x)$ v okolí $O(x_0)$.

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, & x \in O(x_0), \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0) \cdot (x-\xi)^n}{n!}, & x \in O(x_0), \end{cases}$ [Lagrangeov tvar zvyšku.]
 [Cauchyho tvar zvyšku.]

[Bod ξ leží vo vnútri úsečky spájajúcej body x_0 a x .]

pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

- Zvyšok $R_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie funkcie $f(x)$ pomocou $T_n(x)$ v okolí $O(x_0)$.

Aproximácia funkcie $f(x)$ pomocou Taylorovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ v strede $x_0 \in D(f)$:

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, & x \in O(x_0), \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0) \cdot (x-\xi)^n}{n!}, & x \in O(x_0), \end{cases}$ [Lagrangeov tvar zvyšku.]
 [Cauchyho tvar zvyšku.]

[Bod ξ leží vo vnútri úsečky spájajúcej body x_0 a x .] pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

- Zvyšok $R_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie funkcie $f(x)$ pomocou $T_n(x)$ v okolí $O(x_0)$.

Aproximácia funkcie $f(x)$ pomocou Taylorovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ v strede $x_0 \in D(f)$:

- Má lokálny charakter v okolí $O(x_0)$.

Taylorov polynóm – Zvyšok polynómu

Funkcia f má konečné derivácie $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$ do rádu $n \in \mathbb{N}$,
 $O(x_0) \subset D(f)$ je okolie bodu x_0 .

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}{k!}, x \in O(x_0).$ [Taylorov polynóm stupňa n funkcie f so stredom v bode x_0 .]

Zvyškom Taylorovho polynómu (stupňa n) funkcie f nazývame rozdiel (môže mať rôzne tvary):

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, & x \in O(x_0), \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-x_0) \cdot (x-\xi)^n}{n!}, & x \in O(x_0), \end{cases}$ [Lagrangeov tvar zvyšku.]
 [Cauchyho tvar zvyšku.]

[Bod ξ leží vo vnútri úsečky spájajúcej body x_0 a x .] pričom bod $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, kde $\theta \in (0; 1)$.

- Zvyšok $R_n(x)$ vyjadruje chybu aproximácie funkcie $f(x)$ pomocou $T_n(x)$ v okolí $O(x_0)$.

Aproximácia funkcie $f(x)$ pomocou Taylorovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ v strede $x_0 \in D(f)$:

- Má lokálny charakter v okolí $O(x_0)$.
- Je najlepšia zo všetkých aproximácií funkcie f pomocou polynómov stupňa n .

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$,

Pre $c \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1$,

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1,$$

Pre $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1,$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6,$$

Pre $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6,$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in R$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_0(x) &= f(c) \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in R$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_1(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in R$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_2(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in R$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2x + 6cx + x - 3c^3 - 6c^2 - c) \\ &\quad + (3cx^2 + 3x^2 - 6c^2x - 6cx + 3c^3 + 3c^2) + (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3) \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in R$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2x + 6cx + x - 3c^3 - 6c^2 - c) \\ &\quad + (3cx^2 + 3x^2 - 6c^2x - 6cx + 3c^3 + 3c^2) + (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3) \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2x + 6cx + x - 3c^3 - 6c^2 - c) \\ &\quad + (3cx^2 + 3x^2 - 6c^2x - 6cx + 3c^3 + 3c^2) + (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3) \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2x + 6cx + x - 3c^3 - 6c^2 - c) \\ &\quad + (3cx^2 + 3x^2 - 6c^2x - 6cx + 3c^3 + 3c^2) + (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3) \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2x + 6cx + x - 3c^3 - 6c^2 - c) \\ &\quad + (3cx^2 + 3x^2 - 6c^2x - 6cx + 3c^3 + 3c^2) + (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3) \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in R$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2x + 6cx + x - 3c^3 - 6c^2 - c) \\ &\quad + (3cx^2 + 3x^2 - 6c^2x - 6cx + 3c^3 + 3c^2) + (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3) \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in R$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2x + 6cx + x - 3c^3 - 6c^2 - c) \\ &\quad + (3cx^2 + 3x^2 - 6c^2x - 6cx + 3c^3 + 3c^2) + (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3) \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in R$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2x + 6cx + x - 3c^3 - 6c^2 - c) \\ &\quad + (3cx^2 + 3x^2 - 6c^2x - 6cx + 3c^3 + 3c^2) + (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3) \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in R$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2x + 6cx + x - 3c^3 - 6c^2 - c) \\ &\quad + (3cx^2 + 3x^2 - 6c^2x - 6cx + 3c^3 + 3c^2) + (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3) \\ &= x^3 + 3x^2 + x + 1, x \in R. \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in R$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2x + 6cx + x - 3c^3 - 6c^2 - c) \\ &\quad + (3cx^2 + 3x^2 - 6c^2x - 6cx + 3c^3 + 3c^2) + (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3) \\ &= x^3 + 3x^2 + x + 1, x \in R. \end{aligned}$$

• Polynómy $f(x)$ a $T_3(x)$ sú rovnaké.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $x \in R$

nájdite Taylorov polynóm $T_3(x)$ stupňa 3 so stredom $x_0 = c$, kde $c \in R$ (ľubovoľné).

Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\bullet f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1, \bullet f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \bullet f''(x) = 6x + 6, \bullet f'''(x) = 6.$$

Pre $c \in R$ platí:

$$\bullet f(c) = c^3 + 3c^2 + c + 1, \bullet f'(c) = 3c^2 + 6c + 1, \bullet f''(c) = 6c + 6, \bullet f'''(c) = 6.$$

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(c) + \frac{f'(c) \cdot (x-c)}{1!} + \frac{f''(c) \cdot (x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c) \cdot (x-c)^3}{3!} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + \frac{(3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c)}{1} + \frac{(6c + 6) \cdot (x-c)^2}{2} + \frac{6 \cdot (x-c)^3}{6} \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2 + 6c + 1) \cdot (x-c) + (3c + 3) \cdot (x^2 - 2xc + c^2) + (x-c)^3 \\ &= (c^3 + 3c^2 + c + 1) + (3c^2x + 6cx + x - 3c^3 - 6c^2 - c) \\ &\quad + (3cx^2 + 3x^2 - 6c^2x - 6cx + 3c^3 + 3c^2) + (x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3) \\ &= x^3 + 3x^2 + x + 1, x \in R. \end{aligned}$$

• Polynómy $f(x)$ a $T_3(x)$ sú rovnaké.

• To znamená, že polynóm $T_3(x)$ najlepšie aproximuje danú funkciu (polynóm) $f(x)$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$,

pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$,
- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1},$

pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

$$\bullet f(x) = \ln x, \quad \bullet f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}, \quad \bullet f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2},$$

pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

$$\bullet f(x) = \ln x, \quad \bullet f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}, \quad \bullet f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}, \quad \bullet f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3},$$

pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
 - $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, pre všetky $x > 0$.
-

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
 - $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, $\dots$, pre všetky $x > 0$.
-

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, . . . , • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
 - $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, . . . , • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.
-
- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, $\dots$, • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, . . . , • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, . . . , • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! (x-1)^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, ..., • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! (x-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, ..., • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! (x-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}, \quad x \in O(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, ..., • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! (x-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}, \quad x \in O(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $f(x) = \ln x$, $x > 0$, $x_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, $\dots$, • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! (x-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}, \quad x \in O(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $f(x) = \ln x$, $x > 0$, $x_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.
- Ak položíme $x = t + 1$, t. j. $t = x - 1$,

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, ..., • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! (x-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}, \quad x \in O(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $f(x) = \ln x$, $x > 0$, $x_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

- Ak položíme $x = t + 1$, t. j. $t = x - 1$, potom platí $f(x) = f(t + 1) = \ln(t + 1)$, $t > -1$, $t_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, ..., • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! (x-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}, \quad x \in O(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $f(x) = \ln x$, $x > 0$, $x_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

- Ak položíme $x = t + 1$, t. j. $t = x - 1$, potom platí $f(x) = f(t + 1) = \ln(t + 1)$, $t > -1$, $t_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

- $t = x - 1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, ..., • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! (x-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}, \quad x \in O(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $f(x) = \ln x$, $x > 0$, $x_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

- Ak položíme $x = t + 1$, t. j. $t = x - 1$, potom platí $f(x) = f(t + 1) = \ln(t + 1)$, $t > -1$, $t_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

- $t = x - 1. \Rightarrow$ •
$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = T_n(t), \quad t \in O(0).$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

- $f(x) = \ln x$, • $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, • $f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}$, • $f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$, ..., • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > 0$.

- $f(1) = \ln 1 = 0$. • $f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! (x-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}, \quad x \in O(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $f(x) = \ln x$, $x > 0$, $x_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

- Ak položíme $x = t + 1$, t. j. $t = x - 1$, potom platí $f(x) = f(t + 1) = \ln(t + 1)$, $t > -1$, $t_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

- $t = x - 1 \Rightarrow$ •
$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = T_n(t), \quad t \in O(0).$$

To znamená, že **Maclaurinov polynóm** (Taylorov polynóm so stredom v bode 0) stupňa $n \in \mathbb{N}$

funkcie $f(x) = \ln(x + 1)$, $x > -1$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln x$, $x > 0$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ so stredom $x_0 = 1$.

$$\bullet f(x) = \ln x, \bullet f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}, \bullet f''(x) = -x^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{x^2}, \bullet f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3},$$

$$\bullet f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}, \dots, \bullet f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N} \text{ a pre všetky } x > 0.$$

$$\bullet f(1) = \ln 1 = 0. \bullet f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1} (k-1)! \text{ pre } k \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = f(1) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(1) \cdot (x-1)^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! (x-1)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n}, x \in O(1), n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet f(x) = \ln x, x > 0, x_0 = 1, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet \text{ Ak položíme } x = t + 1, \text{ t. j. } t = x - 1, \text{ potom platí } f(x) = f(t + 1) = \ln(t + 1), t > -1, t_0 = 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet t = x - 1. \Rightarrow \bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = T_n(t), t \in O(0).$$

To znamená, že **Maclaurinov polynóm** (Taylorov polynóm so stredom v bode 0) stupňa $n \in \mathbb{N}$

funkcie $f(x) = \ln(x + 1)$, $x > -1$ má tvar: $\bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, x \in O(0).$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$,

pre všetky $x > -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,

pre všetky $x > -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet f(x) = \ln(x+1), \quad \bullet f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad \bullet f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2},$$

pre všetky $x > -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet f(x) = \ln(x+1), \quad \bullet f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad \bullet f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}, \quad \bullet f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3},$$

pre všetky $x > -1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
 - $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, pre všetky $x > -1$.
-

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
 - $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, $\dots$, pre všetky $x > -1$.
-

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
 - $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, . . . , • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > -1$.
-

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, . . . , • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > -1$.
- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,

- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, $\dots$, • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet f(x) = \ln(x+1), \quad \bullet f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad \bullet f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}, \quad \bullet f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3},$$

$$\bullet f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}, \quad \dots, \quad \bullet f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k} \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N} \text{ a pre všetky } x > -1.$$

$$\bullet f(0) = \ln(0+1) = 0. \quad \bullet f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)! \text{ pre } k \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet f(x) = \ln(x+1), \quad \bullet f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad \bullet f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}, \quad \bullet f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3},$$

$$\bullet f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}, \quad \dots, \quad \bullet f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k} \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N} \text{ a pre všetky } x > -1.$$

$$\bullet f(0) = \ln(0+1) = 0. \quad \bullet f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)! \text{ pre } k \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! x^k}{k!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, $\dots$, • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, $\dots$, • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in O(0), n \in \mathbb{N}.$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, . . . , • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in O(0), n \in \mathbb{N}.$$

- $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, ..., • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in O(0), n \in \mathbb{N}.$$

- $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

- Ak položíme $t = x+1$, t. j. $x = t-1$,

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, ..., • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in O(0), n \in \mathbb{N}.$$

- $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.
- Ak položíme $t = x+1$, t. j. $x = t-1$, potom platí $f(x) = f(t-1) = \ln(t-1+1) = \ln t$, $t > 0$, $t_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

- $f(x) = \ln(x+1)$, • $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, • $f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}$, • $f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}$, ..., • $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x > -1$.

- $f(0) = \ln(0+1) = 0$. • $f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pre $k \in \mathbb{N}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in O(0), n \in \mathbb{N}.$$

- $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$, $x_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

- Ak položíme $t = x+1$, t. j. $x = t-1$, potom platí $f(x) = f(t-1) = \ln(t-1+1) = \ln t$, $t > 0$, $t_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

- $x = t - 1$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet f(x) = \ln(x+1), \bullet f'(x) = \frac{1}{x+1}, \bullet f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}, \bullet f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3},$$

$$\bullet f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}, \dots, \bullet f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k} \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N} \text{ a pre všetky } x > -1.$$

$$\bullet f(0) = \ln(0+1) = 0. \bullet f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)! \text{ pre } k \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in O(0), n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet f(x) = \ln(x+1), x > -1, x_0 = 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet \text{ Ak položíme } t = x+1, \text{ t. j. } x = t-1, \text{ potom platí } f(x) = f(t-1) = \ln(t-1+1) = \ln t, t > 0, t_0 = 1, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet x = t-1. \Rightarrow \bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (t-1)^k}{k} = T_n(t), t \in O(1).$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet f(x) = \ln(x+1), \bullet f'(x) = \frac{1}{x+1}, \bullet f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}, \bullet f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3},$$

$$\bullet f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}, \dots, \bullet f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k} \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N} \text{ a pre všetky } x > -1.$$

$$\bullet f(0) = \ln(0+1) = 0. \bullet f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)! \text{ pre } k \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in O(0), n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet f(x) = \ln(x+1), x > -1, x_0 = 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet \text{ Ak položíme } t = x+1, \text{ t. j. } x = t-1, \text{ potom platí } f(x) = f(t-1) = \ln(t-1+1) = \ln t, t > 0, t_0 = 1, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet x = t-1. \Rightarrow \bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (t-1)^k}{k} = T_n(t), t \in O(1).$$

To znamená, že Taylorov polynóm so stredom v bode 1 stupňa $n \in \mathbb{N}$

$$\text{funkcie } f(x) = \ln x, x > 0$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet f(x) = \ln(x+1), \bullet f'(x) = \frac{1}{x+1}, \bullet f''(x) = -(x+1)^{-2} = \frac{(-1)^1 1!}{(x+1)^2}, \bullet f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+1)^3},$$

$$\bullet f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2(x+1)^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+1)^4}, \dots, \bullet f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x+1)^k} \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N} \text{ a pre všetky } x > -1.$$

$$\bullet f(0) = \ln(0+1) = 0. \bullet f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1} (k-1)! \text{ pre } k \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! x^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in O(0), n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet f(x) = \ln(x+1), x > -1, x_0 = 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet \text{ Ak položíme } t = x+1, \text{ t. j. } x = t-1, \text{ potom platí } f(x) = f(t-1) = \ln(t-1+1) = \ln t, t > 0, t_0 = 1, n \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet x = t-1. \Rightarrow \bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (t-1)^k}{k} = T_n(t), t \in O(1).$$

To znamená, že Taylorov polynóm so stredom v bode 1 stupňa $n \in \mathbb{N}$

$$\text{funkcie } f(x) = \ln x, x > 0 \text{ má tvar: } \bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k}, x \in O(1).$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ v strede $x_0 = c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ v strede $x_0 = c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

- $f(x) = e^x$,

pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ v strede $x_0 = c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

- $f(x) = e^x$,
 - $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
-
-
-

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ v strede $x_0 = c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

- $f(x) = e^x$, • $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f^{(k)}(c) = e^c$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
-
-
-

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ v strede $x_0 = c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

- $f(x) = e^x$, • $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f^{(k)}(c) = e^c$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
 - $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c) \cdot (x-c)^k}{k!}$
-
-
-

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ v strede $x_0 = c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

- $f(x) = e^x$, • $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f^{(k)}(c) = e^c$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
 - $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c) \cdot (x-c)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{e^c (x-c)^k}{k!}$
-
-
-

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ v strede $x_0 = c \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné).

- $f(x) = e^x$, • $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
 - $f^{(k)}(c) = e^c$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
 - $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c) \cdot (x-c)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{e^c (x-c)^k}{k!} = e^c + \frac{e^c (x-c)}{1!} + \frac{e^c (x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{e^c (x-c)^n}{n!}$
-
-
-

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

• $f(x) = e^x$, • $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.

• $f^{(k)}(c) = e^c$ pre $k \in N \cup \{0\}$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c) \cdot (x-c)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{e^c (x-c)^k}{k!} = e^c + \frac{e^c (x-c)}{1!} + \frac{e^c (x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{e^c (x-c)^n}{n!} \\ &= e^c \left[1 + \frac{x-c}{1!} + \frac{(x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-c)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N. \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

- $f(x) = e^x$, • $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.
- $f^{(k)}(c) = e^c$ pre $k \in N \cup \{0\}$.
- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c) \cdot (x-c)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{e^c (x-c)^k}{k!} = e^c + \frac{e^c (x-c)}{1!} + \frac{e^c (x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{e^c (x-c)^n}{n!}$$

$$= e^c \left[1 + \frac{x-c}{1!} + \frac{(x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-c)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Špeciálne pre $x_0 = 1$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{(x-1)^k}}{k!} = e \left[1 + \frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

- $f(x) = e^x$, • $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.
- $f^{(k)}(c) = e^c$ pre $k \in N \cup \{0\}$.
- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c) \cdot (x-c)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{e^c (x-c)^k}{k!} = e^c + \frac{e^c (x-c)}{1!} + \frac{e^c (x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{e^c (x-c)^n}{n!}$$

$$= e^c \left[1 + \frac{x-c}{1!} + \frac{(x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-c)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Špeciálne pre $x_0 = 1$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e(x-1)^k}{k!} = e \left[1 + \frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Špeciálne pre $x_0 = -1$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1}(x+1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \left[1 + \frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+1)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

- $f(x) = e^x$, • $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.
- $f^{(k)}(c) = e^c$ pre $k \in N \cup \{0\}$.
- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c) \cdot (x-c)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{e^c (x-c)^k}{k!} = e^c + \frac{e^c (x-c)}{1!} + \frac{e^c (x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{e^c (x-c)^n}{n!}$$
$$= e^c \left[1 + \frac{x-c}{1!} + \frac{(x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-c)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Špeciálne pre $x_0 = 1$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{(x-1)^k}}{k!} = e \left[1 + \frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Špeciálne pre $x_0 = -1$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1} (x+1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \left[1 + \frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+1)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Špeciálne pre $x_0 = 0$ dostaneme Maclaurinov polynóm stupňa n :

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = e^x$, $x \in R$ nájdite Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ v strede $x_0 = c \in R$ (ľubovoľné).

- $f(x) = e^x$, • $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ pre všetky $k \in N$ a pre všetky $x \in R$.
- $f^{(k)}(c) = e^c$ pre $k \in N \cup \{0\}$.
- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c) \cdot (x-c)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{e^c (x-c)^k}{k!} = e^c + \frac{e^c (x-c)}{1!} + \frac{e^c (x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{e^c (x-c)^n}{n!}$$

$$= e^c \left[1 + \frac{x-c}{1!} + \frac{(x-c)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-c)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Špeciálne pre $x_0 = 1$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{(x-1)^k}}{k!} = e \left[1 + \frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Špeciálne pre $x_0 = -1$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1} (x+1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \left[1 + \frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+1)^n}{n!} \right] \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

Špeciálne pre $x_0 = 0$ dostaneme Maclaurinov polynóm stupňa n :

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \text{ pre } x \in R, n \in N.$$

[Maclaurinov polynóm sa používa v praxi najčastejšie.]

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$,

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

$$\bullet f(x) = \sin x, \quad \bullet f'(x) = \cos x \quad \bullet f''(x) = -\sin x \quad \bullet f'''(x) = -\cos x \quad \bullet f^{(4)}(x) = \sin x = f(x) \text{ pre } x \in R.$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

$$\bullet f(x) = \sin x, \quad \bullet f'(x) = \cos x \quad \bullet f''(x) = -\sin x \quad \bullet f'''(x) = -\cos x \quad \bullet f^{(4)}(x) = \sin x = f(x) \quad \text{pre } x \in R.$$

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

$$\bullet f(x) = \sin x, \quad \bullet f'(x) = \cos x \quad \bullet f''(x) = -\sin x \quad \bullet f'''(x) = -\cos x \quad \bullet f^{(4)}(x) = \sin x = f(x) \quad \text{pre } x \in R.$$

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

- $\bullet \sin x = f(x)$
- $\bullet \cos x = f'(x)$
- $\bullet -\sin x = f''(x)$
- $\bullet -\cos x = f'''(x)$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

$$\bullet f(x) = \sin x, \quad \bullet f'(x) = \cos x \quad \bullet f''(x) = -\sin x \quad \bullet f'''(x) = -\cos x \quad \bullet f^{(4)}(x) = \sin x = f(x) \quad \text{pre } x \in R.$$

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

- $\bullet \sin x = f(x) = f^{(4)}(x)$
- $\bullet \cos x = f'(x) = f^{(5)}(x)$
- $\bullet -\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x)$
- $\bullet -\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x)$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

$$\bullet f(x) = \sin x, \quad \bullet f'(x) = \cos x \quad \bullet f''(x) = -\sin x \quad \bullet f'''(x) = -\cos x \quad \bullet f^{(4)}(x) = \sin x = f(x) \quad \text{pre } x \in R.$$

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

- $\bullet \sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$
- $\bullet \cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$
- $\bullet -\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$
- $\bullet -\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

• $\sin x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$	$\Rightarrow$	• $f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0.$
• $\cos x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$		• $f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1.$
• $-\sin x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$		• $f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0.$
• $-\cos x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$		• $f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4j+0)}(x) = f^{(4j+0)}(0) = \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(0) = \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(0) = -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(0) = -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2 \cdot 1 + 1)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2 \cdot 1 + 1)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2 \cdot 1 + 1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2 \cdot 2 + 1)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2 \cdot 1 + 1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2 \cdot 2 + 1)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4j+0)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2 \cdot 1 + 1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2 \cdot 2 + 1)!} - \frac{(-1)^3 x^7}{(2 \cdot 3 + 1)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2 \cdot 1 + 1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2 \cdot 2 + 1)!} - \frac{(-1)^3 x^7}{(2 \cdot 3 + 1)!} + \dots \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \sin x &= f(x) = f^{(4j+0)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2 \cdot 1 + 1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2 \cdot 2 + 1)!} - \frac{(-1)^3 x^7}{(2 \cdot 3 + 1)!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \end{aligned}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\}$, $2i + 1 \leq n$ a $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4j+0)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2 \cdot 1 + 1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2 \cdot 2 + 1)!} - \frac{(-1)^3 x^7}{(2 \cdot 3 + 1)!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \end{aligned}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\}$, $2i + 1 \leq n$ a $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$, resp. $2n + 1$.

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sin x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \quad \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2 \cdot 1 + 1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2 \cdot 2 + 1)!} - \frac{(-1)^3 x^7}{(2 \cdot 3 + 1)!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \end{aligned}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\}$, $2i + 1 \leq n$ a $x \in R$.

To znamená, že Maclaurinov polynóm stupňa $2n + 1$, $n \in N$ funkcie $f(x) = \sin x$, $x \in R$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \sin x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$, resp. $2n + 1$.

• $f(x) = \sin x$, • $f'(x) = \cos x$ • $f''(x) = -\sin x$ • $f'''(x) = -\cos x$ • $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \sin x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet f^{(4j+0)}(0) &= \sin 0 = 0. \\ \bullet \cos x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet f^{(4j+1)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet -\sin x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet f^{(4j+2)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet -\cos x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet f^{(4j+3)}(0) &= -\cos 0 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0 + 1)!} - \frac{(-1)^1 x^3}{(2 \cdot 1 + 1)!} + \frac{(-1)^2 x^5}{(2 \cdot 2 + 1)!} - \frac{(-1)^3 x^7}{(2 \cdot 3 + 1)!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} \end{aligned}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\}$, $2i + 1 \leq n$ a $x \in R$.

To znamená, že Maclaurinov polynóm stupňa $2n + 1$, $n \in N$ funkcie $f(x) = \sin x$, $x \in R$

má tvar: • $T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pre $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$,

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

- $f(x) = \cos x$,
- $f'(x) = -\sin x$
- $f''(x) = -\cos x$
- $f'''(x) = \sin x$
- $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

$$\bullet f(x) = \cos x, \quad \bullet f'(x) = -\sin x \quad \bullet f''(x) = -\cos x \quad \bullet f'''(x) = \sin x \quad \bullet f^{(4)}(x) = \cos x = f(x) \quad \text{pre } x \in R.$$

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$,

$$\bullet f(x) = \cos x, \quad \bullet f'(x) = -\sin x \quad \bullet f''(x) = -\cos x \quad \bullet f'''(x) = \sin x \quad \bullet f^{(4)}(x) = \cos x = f(x) \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

- $\bullet \cos x = f(x)$
- $\bullet -\sin x = f'(x)$
- $\bullet -\cos x = f''(x)$
- $\bullet \sin x = f'''(x)$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x)$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x)$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x)$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x)$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

- $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$
- $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$
- $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$
- $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

- | | | |
|--|---------------|-----------------------------------|
| • $\cos x = f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x).$ | $\Rightarrow$ | • $f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1.$ |
| • $-\sin x = f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x).$ | | • $f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0.$ |
| • $-\cos x = f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x).$ | | • $f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1.$ |
| • $\sin x = f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x).$ | | • $f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0.$ |

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 \\ &= \frac{(-1)^0 x}{(2 \cdot 0)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} \\ &= \frac{(-1)^0 x^0}{(2 \cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2 \cdot 1)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 \\ &= \frac{(-1)^0 x^0}{(2 \cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2 \cdot 1)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} \\ &= \frac{(-1)^0 x^0}{(2 \cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2 \cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2 \cdot 2)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 \\ &= \frac{(-1)^0 x^0}{(2 \cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2 \cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2 \cdot 2)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4j+0)}(x) \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) = \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) = -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) = -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) = \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} \\ &= \frac{(-1)^0 x^0}{(2 \cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2 \cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2 \cdot 2)!} - \frac{(-1)^3 x^6}{(2 \cdot 3)!} \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ &= \frac{(-1)^0 x^0}{(2 \cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2 \cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2 \cdot 2)!} - \frac{(-1)^3 x^6}{(2 \cdot 3)!} + \dots \end{aligned}$$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \\ &= \frac{(-1)^0 x^0}{(2 \cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2 \cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2 \cdot 2)!} - \frac{(-1)^3 x^6}{(2 \cdot 3)!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \end{aligned}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\}$, $2i \leq n$ a $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$,

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \\ &= \frac{(-1)^0 x^0}{(2 \cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2 \cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2 \cdot 2)!} - \frac{(-1)^3 x^6}{(2 \cdot 3)!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \end{aligned}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\}$, $2i \leq n$ a $x \in R$.

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$, resp. $2n$.

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \cos x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet \quad f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet \quad -\sin x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet \quad -\cos x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \quad \sin x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet \quad f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \\ &= \frac{(-1)^0 x^0}{(2 \cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2 \cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2 \cdot 2)!} - \frac{(-1)^3 x^6}{(2 \cdot 3)!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \end{aligned}$$

pre všetky $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $2i \leq n$ a $x \in \mathbb{R}$.

To znamená, že Maclaurinov polynóm stupňa $2n$, $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$

Taylorov polynóm – Príklad

K funkcii $f(x) = \cos x$, $x \in R$ nájdite Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$, resp. $2n$.

• $f(x) = \cos x$, • $f'(x) = -\sin x$ • $f''(x) = -\cos x$ • $f'''(x) = \sin x$ • $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ pre $x \in R$.

Potom pre všetky $x \in R$ a pre všetky $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} \bullet \cos x &= f(x) = f^{(4j)}(x) = f^{(4j+0)}(x). & \Rightarrow \bullet f^{(4j+0)}(0) &= \cos 0 = 1. \\ \bullet -\sin x &= f'(x) = f^{(4j+1)}(x) = f^{(4j+1)}(x). & \bullet f^{(4j+1)}(0) &= -\sin 0 = 0. \\ \bullet -\cos x &= f''(x) = f^{(4j+2)}(x) = f^{(4j+2)}(x). & \bullet f^{(4j+2)}(0) &= -\cos 0 = -1. \\ \bullet \sin x &= f'''(x) = f^{(4j+3)}(x) = f^{(4j+3)}(x). & \bullet f^{(4j+3)}(0) &= \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \\ &= \frac{(-1)^0 x^0}{(2 \cdot 0)!} - \frac{(-1)^1 x^2}{(2 \cdot 1)!} + \frac{(-1)^2 x^4}{(2 \cdot 2)!} - \frac{(-1)^3 x^6}{(2 \cdot 3)!} + \dots + \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} \end{aligned}$$

pre všetky $i \in N \cup \{0\}$, $2i \leq n$ a $x \in R$.

To znamená, že Maclaurinov polynóm stupňa $2n$, $n \in N$ funkcie $f(x) = \cos x$, $x \in R$

má tvar: • $T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ pre $x \in R$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí: • $f(x) = e^{(x^2)}$,

• $f(0) = 1,$

• $T_0(x) = 1$ $= 1$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí: • $f(x) = e^{(x^2)}$, • $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,

• $f(0) = 1$,

• $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,

• $T_1(x) = 1 + 0$

$= 1$

pre $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = e^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,

- $T_2(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} = 1 + \frac{x^2}{1}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = e^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{(x^2)}$,

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,

- $T_3(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 = 1 + \frac{x^2}{1}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí: • $f(x) = e^{(x^2)}$,

• $f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{(x^2)}$,

• $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,

• $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{(x^2)}$,

• $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,

• $f(0) = 1$,

• $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$, • $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,

• $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,

• $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,

• $T_4(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $f(x) = e^{(x^2)}$,
- $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,
- $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,
- $f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{(x^2)}$,
- $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{(x^2)}$,
- $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5) e^{(x^2)}$,

- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,
- $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0) \cdot 1 = 0$,

- $T_5(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí: • $f(x) = e^{(x^2)}$, • $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$, • $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,

• $f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{(x^2)}$, • $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{(x^2)}$,

• $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5) e^{(x^2)}$, • $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6) e^{(x^2)}$,

• $f(0) = 1$,

• $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$, • $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,

• $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,

• $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,

• $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0) \cdot 1 = 0$,

• $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0) \cdot 1 = 120$,

• $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^6}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:
- $f(x) = e^{(x^2)}$,
 - $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,
 - $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,
 - $f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6) e^{(x^2)}$, ...
-
- $f(0) = 1$,
 - $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
 - $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
 - $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,
 - $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,
 - $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0) \cdot 1 = 0$,
 - $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0) \cdot 1 = 120$, ... [Príliš práce.]
-
- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^6}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:
- $f(x) = e^{(x^2)}$,
 - $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,
 - $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,
 - $f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6) e^{(x^2)}$, ...
-
- $f(0) = 1$,
 - $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
 - $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
 - $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,
 - $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,
 - $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0) \cdot 1 = 0$,
 - $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0) \cdot 1 = 120$, ... [Príliš práce.]
-
- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^6}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Iné riešenie.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:
- $f(x) = e^{(x^2)}$,
 - $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,
 - $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,
 - $f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6) e^{(x^2)}$, ...
-
- $f(0) = 1$,
 - $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
 - $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
 - $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,
 - $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,
 - $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0) \cdot 1 = 0$,
 - $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0) \cdot 1 = 120$, ... [Príliš prácne.]
-
- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^6}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$ pre $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:
- $f(x) = e^{(x^2)}$,
 - $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,
 - $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,
 - $f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6) e^{(x^2)}$, ...
-
- $f(0) = 1$,
 - $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
 - $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
 - $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,
 - $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,
 - $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0) \cdot 1 = 0$,
 - $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0) \cdot 1 = 120$, ... [Príliš práce.]
-
- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^6}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \text{ pre } t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Ak položíme $t = x^2$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:
- $f(x) = e^{(x^2)}$,
 - $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,
 - $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,
 - $f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6) e^{(x^2)}$, ...
-
- $f(0) = 1$,
 - $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
 - $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
 - $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,
 - $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,
 - $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0) \cdot 1 = 0$,
 - $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0) \cdot 1 = 120$, ... [Príliš práce.]
-
- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^6}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$T'_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \text{ pre } t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:
- $f(x) = e^{(x^2)}$,
 - $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,
 - $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,
 - $f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6) e^{(x^2)}$, ...
- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,
- $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0) \cdot 1 = 0$,
- $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0) \cdot 1 = 120$, ... [Príliš práce.]
- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^6}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$T'_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \text{ pre } t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_{2n} funkcie f platí:

$$T_{2n}(x) = T'_n(x^2) = \sum_{k=0}^n \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{k!} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = e^{(x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:
- $f(x) = e^{(x^2)}$,
 - $f'(x) = 2x e^{(x^2)}$,
 - $f''(x) = (2 + 4x^2) e^{(x^2)}$,
 - $f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(5)}(x) = (120x + 160x^3 + 32x^5) e^{(x^2)}$,
 - $f^{(6)}(x) = (120 + 720x^2 + 480x^4 + 64x^6) e^{(x^2)}$, ...
- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$,
- $f''(0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$,
- $f'''(0) = (0 + 0) \cdot 1 = 0$,
- $f^{(4)}(0) = (12 + 0 + 0) \cdot 1 = 12$,
- $f^{(5)}(0) = (0 + 0 + 0) \cdot 1 = 0$,
- $f^{(6)}(0) = (120 + 0 + 0) \cdot 1 = 120$, ... [Príliš práce.]
- $T_6(x) = 1 + 0 + \frac{2x^2}{2!} + 0 + \frac{12x^4}{4!} + 0 + \frac{120x^6}{6!} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$T'_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \text{ pre } t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_{2n} funkcie f platí:

$$T_{2n}(x) = T'_n(x^2) = \sum_{k=0}^n \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{k!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = \ln(t + 1)$, $t > -1$ platí:

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in N.$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in N.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in N.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in N.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n}$ pre $t > -1$, $n \in N$.

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

- $T_n(x) = T'_n(-x)$

pre $x < 1$, $n \in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in N.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

$$\bullet T_n(x) = T'_n(-x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} (-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k}$$

pre $x < 1$, $n \in N$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in N$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in N.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

$$\begin{aligned} \bullet T_n(x) = T'_n(-x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} (-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} \text{ pre } x < 1, n \in N. \end{aligned}$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in \mathbb{N}.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

$$\begin{aligned} \bullet T_n(x) = T'_n(-x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} (-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} \text{ pre } x < 1, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in \mathbb{N}.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

$$\begin{aligned} \bullet T_n(x) = T'_n(-x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} (-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} \text{ pre } x < 1, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ak položíme $t = x^2$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in \mathbb{N}.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

$$\begin{aligned} \bullet T_n(x) = T'_n(-x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} (-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} \text{ pre } x < 1, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in \mathbb{N}.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

$$\begin{aligned} \bullet T_n(x) = T'_n(-x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} (-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} \text{ pre } x < 1, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_{2n} funkcie f platí:

$$\bullet T_{2n}(x) = T'_n(x^2)$$

[Maclaurinov polynóm $T_{2n}(x)$ má stupeň $2n$.]

pre $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in \mathbb{N}.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

$$\begin{aligned} \bullet T_n(x) = T'_n(-x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} (-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} \text{ pre } x < 1, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_{2n} funkcie f platí:

$$\bullet T_{2n}(x) = T'_n(x^2) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} (x^2)^k}{k}$$

[Maclaurinov polynóm $T_{2n}(x)$ má stupeň $2n$.]

pre $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, $t > -1$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \text{ pre } t > -1, n \in \mathbb{N}.$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(1-x)$, $x < 1$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

$$\begin{aligned} \bullet T_n(x) &= T'_n(-x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} (-x)^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1+k} x^k}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{2k-1} x^k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{-x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} \text{ pre } x < 1, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ak položíme $t = x^2$, potom $g(t) = g(x^2) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_{2n} funkcie f platí:

$$\begin{aligned} \bullet T_{2n}(x) &= T'_n(x^2) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} (x^2)^k}{k} \quad [\text{Maclaurinov polynóm } T_{2n}(x) \text{ má stupeň } 2n.] \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{k} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1},$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1},$

- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2},$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1},$
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3},$
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2},$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1},$
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3},$
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2},$
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4},$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1},$
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3},$
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5},$
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2},$
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4},$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1},$
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3},$
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}, \dots,$
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2},$
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4},$
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in \mathbb{N} \subset \{0\}.$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1},$
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3},$
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}, \dots,$
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2},$
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4},$
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in \mathbb{N} \subset \{0\}.$

Pre všetky $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!.$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}, \dots$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in \mathbb{N} \subset \{0\}$.

Pre všetky $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k! \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$ pre $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}, \dots$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in \mathbb{N} \subset \{0\}$.

Pre všetky $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k! \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$ pre $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ s kvocientom $x \in (-1; 1)$ má konečný súčet $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}, \dots$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in \mathbb{N} \subset \{0\}$.

Pre všetky $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k! \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$ pre $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ s kvocientom $x \in (-1; 1)$ má konečný súčet $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
- Rad je polynóm nekonečného stupňa

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}, \dots$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in \mathbb{N} \subset \{0\}$.

Pre všetky $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k! \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$ pre $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ s kvocientom $x \in (-1; 1)$ má konečný súčet $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
- Rad je polynóm nekonečného stupňa a jeho súčtom je funkčná hodnota $f(x)$ pre každé $x \in O(0) = (-1; 1)$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}, \dots$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in \mathbb{N} \subset \{0\}$.

Pre všetky $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k! \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$ pre $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ s kvocientom $x \in (-1; 1)$ má konečný súčet $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
- Rad je polynóm nekonečného stupňa a jeho súčtom je funkčná hodnota $f(x)$ pre každé $x \in O(0) = (-1; 1)$,
t. j. jeho konečný podpolynóm $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$
najlepšie aproximuje $f(x)$ zo všetkých polynómov stupňa $n \in \mathbb{N}$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}, \dots$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in \mathbb{N} \subset \{0\}$.

Pre všetky $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k! \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$ pre $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ s kvocientom $x \in (-1; 1)$ má konečný súčet $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
- Rad je polynóm nekonečného stupňa a jeho súčtom je funkčná hodnota $f(x)$ pre každé $x \in O(0) = (-1; 1)$,
t. j. jeho konečný podpolynóm $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$
najlepšie aproximuje $f(x)$ zo všetkých polynómov stupňa $n \in \mathbb{N}$ a je súčasne aj Maclaurinovým polynómom.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.

Pre všetky $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ platí:

- $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \frac{0!}{(1-x)^1}$,
- $f''(x) = -2 \cdot 1(1-x)^{-3}(-1) = \frac{2!}{(1-x)^3}$,
- $f^{(4)}(x) = -4 \cdot 3!(1-x)^{-4}(-1) = \frac{4!}{(1-x)^5}$, $\dots$,
- $f'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$,
- $f'''(x) = -3 \cdot 2!(1-x)^{-3}(-1) = \frac{3!}{(1-x)^4}$,
- $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ pre všetky $k \in \mathbb{N} \subset \{0\}$.

Pre všetky $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí: • $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} = \frac{k!}{1^{k+1}} = k!$.

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k! \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n \text{ pre } x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

[Pre praktické použitie a pre aproximácie má význam tento polynóm iba pre $x \in (-1; 1)$.]

Iné riešenie.

- Geometrický rad $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ s kvocientom $x \in (-1; 1)$ má konečný súčet $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
- Rad je polynóm nekonečného stupňa a jeho súčtom je funkčná hodnota $f(x)$ pre každé $x \in O(0) = (-1; 1)$,
t. j. jeho konečný podpolynóm $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ stupňa $n \in \mathbb{N}$
najlepšie aproximuje $f(x)$ zo všetkých polynómov stupňa $n \in \mathbb{N}$ a je súčasne aj Maclaurinovým polynómom.

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n \text{ pre } x \in (-1; 1).$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$

- e^x

-
- $\sin x$

-
- $\cos x$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy

- e^x
$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

- $\sin x$
$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x$
$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n + 1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n + 1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in R$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

- $\sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n + 1$.]

- $\cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

$$\bullet \sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

$$\bullet \cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

$$\bullet \sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

$$\bullet \cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

$$\bullet \sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

$$\bullet \cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

$$\bullet \sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

$$\bullet \cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

$$\bullet \sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

$$\bullet \cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

pričom $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

$$\bullet \sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

pričom $\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

$$\bullet \cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

pričom $\cos x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in \mathbb{R}$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkcie e^x , $\sin x$, $\cos x$ a ich Maclaurinove polynómy pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

pričom $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, t. j. $\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right] \mapsto e^x$.

[Maclaurinov polynóm stupňa n .]

$$\bullet \sin x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

pričom $\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, t. j. $\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \mapsto \sin x$.

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n+1$.]

$$\bullet \cos x \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

pričom $\cos x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, t. j. $\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right] \mapsto \cos x$.

[Maclaurinov polynóm stupňa $2n$.]

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$,

pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$,

pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$,
- $f'(x) = -e^{-x}$,
- $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$,

pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f(x) = e^{-x}, \quad \bullet f'(x) = -e^{-x}, \quad \bullet f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}, \quad \bullet f'''(x) = -e^{-x},$$

pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f(x) = e^{-x}, \quad \bullet f'(x) = -e^{-x}, \quad \bullet f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}, \quad \bullet f'''(x) = -e^{-x}, \quad \dots,$$

pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, . . . ,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, . . . ,
• $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.
- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\dots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!}$

pre $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\dots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!}$

pre $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\dots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

$$= 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$
 pre $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\dots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

$$= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$
 pre $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Iné riešenie.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\dots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

$$= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$
 pre $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$ pre $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\dots$,
- $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k \text{ pre } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \text{ pre } t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Ak položíme $t = -x$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f(x) = e^{-x}$, • $f'(x) = -e^{-x}$, • $f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$, • $f'''(x) = -e^{-x}$, $\dots$,
• $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k$ pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- $$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$
$$= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$
 pre $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ platí:

- $T'_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$ pre $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f(x) = e^{-x}, \bullet f'(x) = -e^{-x}, \bullet f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}, \bullet f'''(x) = -e^{-x}, \dots, \\ \bullet f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x} \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N} \text{ a pre všetky } x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k \text{ pre } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} \\ = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \text{ pre } t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

$$\bullet T_n(x) = T'_n(-x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

pre $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f(x) = e^{-x}, \bullet f'(x) = -e^{-x}, \bullet f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}, \bullet f'''(x) = -e^{-x}, \dots, \\ \bullet f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x} \text{ pre všetky } k \in \mathbb{N} \text{ a pre všetky } x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f^{(k)}(0) = (-1)^k e^0 = (-1)^k \text{ pre } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} \\ = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Iné riešenie.

Pre Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $g(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet T'_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^n}{n!} \text{ pre } t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Ak položíme $t = -x$, potom $g(t) = g(-x) = f(x)$ a pre Maclaurinov polynóm T_n funkcie f platí:

$$\bullet T_n(x) = T'_n(-x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} \\ = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$

- $\ln(x+1)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$

- $\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

- $$\ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

$$\bullet \ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

$$\bullet \ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k},$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

$$\bullet \ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right] \mapsto \ln(x+1)$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

$$\bullet \ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right] \mapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

$$\bullet \ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right] \mapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

$$\bullet \ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right] \mapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.

$$\bullet f(x) = \ln(x^2) = 2 \ln x$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

$$\bullet \ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right] \mapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.

$$\bullet f(x) = \ln(x^2) = 2 \ln x = \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x = t+1 \\ t = x-1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ t > -1 \end{array} \right] = 2 \ln(t+1) = 2g(t), \quad t > -1.$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

$$\bullet \ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right] \mapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.
- Použijeme Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, t. j. v strede $t_0 = 0$

$$\bullet f(x) = \ln(x^2) = 2 \ln x = \left[\text{Subst. } x = t+1 \mid \begin{matrix} x > 0 \\ t > -1 \end{matrix} \right] = 2 \ln(t+1) = 2g(t), \quad t > -1.$$

$$\Rightarrow \bullet T'_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k}$$

$$t \in (-1; 1),$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou Maclaurinovho polynómu $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej Maclaurinov polynóm stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

$$\bullet \ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right] \mapsto \ln(x+1)$.

Určte Taylorov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.
- Použijeme Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, t. j. v strede $t_0 = 0$

$$\bullet f(x) = \ln(x^2) = 2 \ln x = \left[\text{Subst. } x = t+1 \mid \begin{matrix} x > 0 \\ t > -1 \end{matrix} \right] = 2 \ln(t+1) = 2g(t), \quad t > -1.$$

$$\Rightarrow \bullet T'_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k}$$

$$t \in (-1; 1), \quad x \in (0; 2).$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklady

Funkciu $\ln(x+1)$ môžeme pomocou **Maclaurinovho polynómu** $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ aproximovať:

- v ľubovoľnom bode $x \in (-1; 1)$,
- s ľubovoľnou presnosťou, ktorá sa zlepšuje s rastúcim stupňom n .

Pre funkciu $\ln(x+1)$ a jej **Maclaurinov polynóm** stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

$$\bullet \ln(x+1) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, t. j. $\left[x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right] \mapsto \ln(x+1)$.

Určte **Taylorov polynóm** $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \ln(x^2)$, $x > 0$.

- Maclaurinov polynóm vypočítať nemôžeme, pretože funkcia f nie je definovaná v bode $x = 0$.
- Použijeme Maclaurinov polynóm $T'_n(t)$ funkcie $g(t) = \ln(t+1)$, t. j. v strede $t_0 = 0$
a dostaneme taylorov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \ln x$ v strede $x_0 = 1$.

$$\bullet f(x) = \ln(x^2) = 2 \ln x = \left[\text{Subst. } x = t+1 \mid \begin{matrix} x > 0 \\ t > -1 \end{matrix} \right] = 2 \ln(t+1) = 2g(t), \quad t > -1.$$

$$\Rightarrow \bullet T'_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k-1} (x-1)^k}{k} = T_n(x),$$

$t \in (-1; 1), \quad x \in (0; 2).$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x , $x \in \mathbb{R}$ a jej Maclaurinovho polynómu

môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x , $x \in \mathbb{R}$ a jej Maclaurinovho polynómu

môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in \mathbb{N}$

- $T_n(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x , $x \in \mathbb{R}$ a jej Maclaurinovho polynómu

môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

- $$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x , $x \in \mathbb{R}$ a jej Maclaurinovho polynómu

môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

pričom $\bullet f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x),$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x , $x \in \mathbb{R}$ a jej Maclaurinovho polynómu

môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

pričom $\bullet f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, t. j. $\bullet e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right].$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x , $x \in \mathbb{R}$ a jej Maclaurinovho polynómu

môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

pričom $\bullet f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, t. j. $\bullet e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right].$

Špeciálne pre $x = 1$ platí:

$$\bullet e^1$$

Špeciálne pre $x = -1$ platí:

$$\bullet e^{-1}$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x , $x \in \mathbb{R}$ a jej Maclaurinovho polynómu

môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

pričom $\bullet f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, t. j. $\bullet e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right].$

Špeciálne pre $x = 1$ platí:

$$\bullet e^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right],$$

Špeciálne pre $x = -1$ platí:

$$\bullet e^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right],$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou exponenciálnej funkcie e^x , $x \in \mathbb{R}$ a jej Maclaurinovho polynómu

môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = e^x$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

pričom $\bullet f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, t. j. $\bullet e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right].$

Špeciálne pre $x = 1$ platí:

$$\bullet e^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right],$$

t. j. $\bullet e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$

Špeciálne pre $x = -1$ platí:

$$\bullet e^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right],$$

t. j. $\bullet \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou **logaritmickej funkcie** $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1)$ a jej **Maclaurinovho polynómu** môžeme odvodiť niektoré **známe** číselné rady.

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou **logaritmickej funkcie** $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1)$ a jej Maclaurinovho polynómu
môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ funkcie $f(x) = \ln(x+1)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$

- $T_n(x)$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou **logaritmickej funkcie** $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1)$ a jej **Maclaurinovho polynómu** môžeme odvodiť niektoré známe **číselné rady**.

Pre **Maclaurinov polynóm** $T_n(x)$ **funkcie** $f(x) = \ln(x+1)$ **stupňa** $n \in \mathbb{N}$ **pre všetky** $x \in (-1; 1)$ **platí:**

- $$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou **logaritmickej funkcie** $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1)$ a jej **Maclaurinovho polynómu** môžeme odvodiť niektoré známe **číselné rady**.

Pre **Maclaurinov polynóm** $T_n(x)$ **funkcie** $f(x) = \ln(x+1)$ **stupňa** $n \in \mathbb{N}$ **pre všetky** $x \in (-1; 1)$ **platí:**

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\bullet f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x),$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou **logaritmickej funkcie** $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1)$ a jej **Maclaurinovho polynómu** môžeme odvodiť niektoré známe **číselné rady**.

Pre **Maclaurinov polynóm** $T_n(x)$ **funkcie** $f(x) = \ln(x+1)$ **stupňa** $n \in \mathbb{N}$ pre všetky $x \in (-1; 1)$ platí:

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\bullet f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, t. j. $\bullet \ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right].$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou **logaritmickej funkcie** $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1)$ a jej **Maclaurinovho polynómu** môžeme odvodiť niektoré známe **číselné rady**.

Pre **Maclaurinov polynóm** $T_n(x)$ **funkcie** $f(x) = \ln(x+1)$ **stupňa** $n \in \mathbb{N}$ **pre všetky** $x \in (-1; 1)$ **platí:**

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\bullet f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, t. j. $\bullet \ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right].$

Špeciálne pre $x = 1$ platí:

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $x^k = 1^k = 1$, t. j. $(-1)^{k-1} \cdot 1^k = (-1)^{k-1}$.]

$$\bullet \ln 2 = \ln(1+1)$$

Špeciálne pre $x \rightarrow -1^+$ platí:

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $(-1)^{k-1} x^k = (-1)^{k-1} \cdot (-1)^k = (-1)^{2k-1} = -1$.]

$$\bullet -\infty = \ln(-1+1)^+ = \ln 0^+$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou **logaritmickej funkcie** $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1)$ a jej **Maclaurinovho polynómu** môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre **Maclaurinov polynóm** $T_n(x)$ **funkcie** $f(x) = \ln(x+1)$ **stupňa** $n \in \mathbb{N}$ **pre všetky** $x \in (-1; 1)$ **platí:**

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\bullet f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, t. j. $\bullet \ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right].$

Špeciálne pre $x = 1$ platí:

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $x^k = 1^k = 1$, t. j. $(-1)^{k-1} \cdot 1^k = (-1)^{k-1}$.]

$$\bullet \ln 2 = \ln(1+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right],$$

Špeciálne pre $x \rightarrow -1^+$ platí:

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $(-1)^{k-1} x^k = (-1)^{k-1} \cdot (-1)^k = (-1)^{2k-1} = -1$.]

$$\bullet -\infty = \ln(-1+1)^+ = \ln 0^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} \right],$$

Použitie Taylorovho polynómu – Príklad

Pomocou **logaritmickej funkcie** $\ln(x+1)$, $x \in (-1; 1)$ a jej **Maclaurinovho polynómu** môžeme odvodiť niektoré známe číselné rady.

Pre **Maclaurinov polynóm** $T_n(x)$ **funkcie** $f(x) = \ln(x+1)$ **stupňa** $n \in \mathbb{N}$ **pre všetky** $x \in (-1; 1)$ **platí:**

$$\bullet T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n},$$

pričom $\bullet f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, t. j. $\bullet \ln(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right].$

Špeciálne pre $x = 1$ platí:

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $x^k = 1^k = 1$, t. j. $(-1)^{k-1} \cdot 1^k = (-1)^{k-1}$]

$$\bullet \ln 2 = \ln(1+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right],$$

[Anharmonický rad.]

t. j. $\bullet \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$

Špeciálne pre $x \rightarrow -1^+$ platí:

[Pre všetky $k \in \mathbb{N}$ platí $(-1)^{k-1} x^k = (-1)^{k-1} \cdot (-1)^k = (-1)^{2k-1} = -1$]

$$\bullet -\infty = \ln(-1+1)^+ = \ln 0^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} \right],$$

[Harmonický rad.]

t. j. $\bullet \infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Pre všetky $x \in (-1; \infty)$

platí:

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty \rangle$ platí:

- $f(x) = \sqrt[u]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{u}},$

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty \rangle$

platí:

- $f(x) = \sqrt[u]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1} = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty \rangle$ platí:

- $f(x) = \sqrt[u]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1} = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{u} \cdot \frac{1-u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}-1} = \frac{1-u}{u^2}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[u]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \sqrt[u]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in N - \{1\}$.

Pre všetky $x \in (-1; \infty)$

platí:

- $f(x) = \sqrt[u]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{u}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1}{u}-1} = \frac{1}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{u} \cdot \frac{1-u}{u}(1+x)^{\frac{1-u}{u}-1} = \frac{1-u}{u^2}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,
- $f'''(x) = \frac{1-u}{u^2} \cdot \frac{1-2u}{u}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}-1} = \frac{(1-u)(1-2u)}{u^3}(1+x)^{\frac{1-3u}{u}}$,

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[n]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Pre všetky $x \in (-1; \infty)$, $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $f(x) = \sqrt[n]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{n}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1-0n}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-n}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}-1} = \frac{1-n}{n^2}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}}$,
- $f'''(x) = \frac{1-n}{n^2} \cdot \frac{1-2n}{n}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}-1} = \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3}(1+x)^{\frac{1-3n}{n}}$,
- ...
- $f^{(k)}(x) = \frac{(1-0n)(1-n)(1-2n)\cdots(1-(k-1)n)}{n^k}(1+x)^{\frac{1-kn}{n}}$,

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[n]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty \rangle$, $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $f(x) = \sqrt[n]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{n}}$, • $f(0) = 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1-n}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-n}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}-1} = \frac{1-n}{n^2}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}}$,
- $f'''(x) = \frac{1-n}{n^2} \cdot \frac{1-2n}{n}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}-1} = \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3}(1+x)^{\frac{1-3n}{n}}$,
- ...
- $f^{(k)}(x) = \frac{(1-n)(1-2n)\dots(1-(k-1)n)}{n^k}(1+x)^{\frac{1-kn}{n}}$,

$$\bullet T_0(x) = f(0) = 1$$

$$= 1 \quad \text{pre } x \geq -1.$$

Špeciálne pre $n = 2$ platí:

$$\bullet T_0(x) = 1 = 1 \quad \text{pre } x \in \langle -1; \infty \rangle.$$

Špeciálne pre $n = 3$ platí:

$$\bullet T_0(x) = 1 = 1 \quad \text{pre } x \in \langle -1; \infty \rangle.$$

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[n]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty \rangle$, $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $f(x) = \sqrt[n]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{n}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1-n}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-n}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}-1} = \frac{1-n}{n^2}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}}$,
- $f'''(x) = \frac{1-n}{n^2} \cdot \frac{1-2n}{n}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}-1} = \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3}(1+x)^{\frac{1-3n}{n}}$,
- ...
- $f^{(k)}(x) = \frac{(1-n)(1-n)(1-2n)\cdots(1-(k-1)n)}{n^k}(1+x)^{\frac{1-kn}{n}}$,
- $f^{(k)}(0) = \frac{(1-n)(1-n)(1-2n)\cdots(1-(k-1)n)}{n^k}$.

$$\bullet T_1(x) = f(0) + \sum_{k=1}^1 \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^1 \frac{(1-n)(1-n)(1-2n)\cdots(1-(k-1)n) \cdot x^k}{n^k k!}$$

$$= 1 + \frac{x}{n}$$

pre $x \geq -1$.

Špeciálne pre $n = 2$ platí:

$$[f'(0) = \frac{1}{2},$$

$$\bullet T_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

$$= 1 + \frac{x}{2}$$

pre $x \in \langle -1; \infty \rangle$.

Špeciálne pre $n = 3$ platí:

$$[f'(0) = \frac{1}{3},$$

$$\bullet T_1(x) = 1 + \frac{x}{3}$$

$$= 1 + \frac{x}{3}$$

pre $x \in \langle -1; \infty \rangle$.

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[3]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty \rangle$, $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}(1+x)^{\frac{1-3}{3}} = \frac{1-0u}{u}(1+x)^{\frac{1-2u}{u}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-3}{3}(1+x)^{\frac{1-3}{3}-1} = \frac{1-6}{u^2}(1+x)^{\frac{1-6u}{u}}$,
- $f'''(x) = \frac{1-6}{u^2} \cdot \frac{1-6}{u}(1+x)^{\frac{1-6}{u}-1} = \frac{(1-3u)(1-6u)}{u^3}(1+x)^{\frac{1-9u}{u}}$,
- ...
- $f^{(k)}(x) = \frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\dots(1-(k-1)u)}{u^k}(1+x)^{\frac{1-ku}{u}}$,
- $f^{(k)}(0) = \frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\dots(1-(k-1)u)}{u^k}$.

$$\begin{aligned} \bullet T_2(x) &= f(0) + \sum_{k=1}^2 \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^2 \frac{(1-0u)(1-u)(1-2u)\dots(1-(k-1)u) \cdot x^k}{u^k k!} \\ &= 1 + \frac{x}{u} + \frac{(1-u)x^2}{u^2 \cdot 2!} \end{aligned} \quad \text{pre } x \geq -1.$$

Špeciálne pre $u = 2$ platí:

$$[f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = \frac{-1}{2^2} = -\frac{1}{4}, \quad]$$

$$\bullet T_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{pre } x \in \langle -1; \infty \rangle.$$

Špeciálne pre $u = 3$ platí:

$$[f'(0) = \frac{1}{3}, \quad f''(0) = \frac{-2}{3^2} = -\frac{2}{9}, \quad]$$

$$\bullet T_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{9 \cdot 2!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \quad \text{pre } x \in \langle -1; \infty \rangle.$$

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[n]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, $x \geq -1$, $u \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty \rangle$, $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $f(x) = \sqrt[n]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{n}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1-0u}{n}(1+x)^{\frac{1-2u}{n}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-n}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}-1} = \frac{1-n}{n^2}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}}$,
- $f'''(x) = \frac{1-n}{n^2} \cdot \frac{1-2n}{n}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}-1} = \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3}(1+x)^{\frac{1-3n}{n}}$,
- ...
- $f^{(k)}(x) = \frac{(1-0n)(1-n)(1-2n)\dots(1-(k-1)n)}{n^k}(1+x)^{\frac{1-kn}{n}}$,
- $f(0) = 1$.
- $f'(0) = \frac{1}{n} = \frac{1-0u}{n}$.
- $f''(0) = \frac{1-n}{n^2}$.
- $f'''(0) = \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3}$.
- $f^{(k)}(0) = \frac{(1-0n)(1-n)(1-2n)\dots(1-(k-1)n)}{n^k}$.

$$\begin{aligned} \bullet T_3(x) &= f(0) + \sum_{k=1}^3 \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^3 \frac{(1-0n)(1-n)(1-2n)\dots(1-(k-1)n) \cdot x^k}{n^k k!} \\ &= 1 + \frac{x}{n} + \frac{(1-n)x^2}{n^2 \cdot 2!} + \frac{(1-n)(1-2n)x^3}{n^3 \cdot 3!} \end{aligned} \quad \text{pre } x \geq -1.$$

Špeciálne pre $u = 2$ platí:

$$[f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = \frac{-1}{2^2} = -\frac{1}{4}, \quad f'''(0) = \frac{-1(-3)}{2^3} = \frac{3}{8},]$$

$$\bullet T_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{3x^3}{8 \cdot 3!} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \quad \text{pre } x \in \langle -1; \infty \rangle.$$

Špeciálne pre $u = 3$ platí:

$$[f'(0) = \frac{1}{3}, \quad f''(0) = \frac{-2}{3^2} = -\frac{2}{9}, \quad f'''(0) = \frac{-2(-5)}{3^3} = \frac{10}{27},]$$

$$\bullet T_3(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{9 \cdot 2!} + \frac{10x^3}{27 \cdot 3!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} \quad \text{pre } x \in \langle -1; \infty \rangle.$$

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[n]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty \rangle$, $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $f(x) = \sqrt[n]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{n}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1-0n}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-n}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}-1} = \frac{1-n}{n^2}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}}$,
- $f'''(x) = \frac{1-n}{n^2} \cdot \frac{1-2n}{n}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}-1} = \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3}(1+x)^{\frac{1-3n}{n}}$,
- ...
- $f^{(k)}(x) = \frac{(1-0n)(1-n)(1-2n)\cdots(1-(k-1)n)}{n^k}(1+x)^{\frac{1-kn}{n}}$,
- $f(0) = 1$.
- $f'(0) = \frac{1}{n} = \frac{1-0n}{n}$.
- $f''(0) = \frac{1-n}{n^2}$.
- $f'''(0) = \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3}$.
- $f^{(k)}(0) = \frac{(1-0n)(1-n)(1-2n)\cdots(1-(k-1)n)}{n^k}$.

$$\begin{aligned} \bullet T_4(x) &= f(0) + \sum_{k=1}^4 \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^4 \frac{(1-0n)(1-n)(1-2n)\cdots(1-(k-1)n) \cdot x^k}{n^k k!} \\ &= 1 + \frac{x}{n} + \frac{(1-n)x^2}{n^2 \cdot 2!} + \frac{(1-n)(1-2n)x^3}{n^3 \cdot 3!} + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)x^4}{n^4 \cdot 4!} \quad \text{pre } x \geq -1. \end{aligned}$$

Špeciálne pre $n = 2$ platí:

$$[f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = \frac{-1}{2^2} = -\frac{1}{4}, \quad f'''(0) = \frac{-1(-3)}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad f^{(4)}(0) = \frac{-1(-3)(-5)}{2^4} = -\frac{15}{16}]$$

$$\bullet T_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{3x^3}{8 \cdot 3!} - \frac{15x^4}{16 \cdot 4!} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \quad \text{pre } x \in \langle -1; \infty \rangle.$$

Špeciálne pre $n = 3$ platí:

$$[f'(0) = \frac{1}{3}, \quad f''(0) = \frac{-2}{3^2} = -\frac{2}{9}, \quad f'''(0) = \frac{-2(-5)}{3^3} = \frac{10}{27}, \quad f^{(4)}(0) = \frac{-2(-5)(-8)}{3^4} = -\frac{80}{81}]$$

$$\bullet T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{9 \cdot 2!} + \frac{10x^3}{27 \cdot 3!} - \frac{80x^4}{81 \cdot 4!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} \quad \text{pre } x \in \langle -1; \infty \rangle.$$

Aproximácia a presnosť – Funkcia $\sqrt[n]{1+x}$

Určte Maclaurinov polynóm $T_n(x)$ stupňa $n \in \mathbb{N}$ funkcie $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Pre všetky $x \in \langle -1; \infty \rangle$, $k \in \mathbb{N}$ platí:

- $f(x) = \sqrt[n]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{n}}$,
- $f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1-0n}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}}$,
- $f''(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-n}{n}(1+x)^{\frac{1-n}{n}-1} = \frac{1-n}{n^2}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}}$,
- $f'''(x) = \frac{1-n}{n^2} \cdot \frac{1-2n}{n}(1+x)^{\frac{1-2n}{n}-1} = \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3}(1+x)^{\frac{1-3n}{n}}$,
- $\dots$
- $f^{(k)}(x) = \frac{(1-0n)(1-n)(1-2n)\dots(1-(k-1)n)}{n^k}(1+x)^{\frac{1-kn}{n}}$,
- $f(0) = 1$,
- $f'(0) = \frac{1}{n} = \frac{1-0n}{n}$,
- $f''(0) = \frac{1-n}{n^2}$,
- $f'''(0) = \frac{(1-n)(1-2n)}{n^3}$,
- $f^{(k)}(0) = \frac{(1-0n)(1-n)(1-2n)\dots(1-(k-1)n)}{n^k}$.

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(1-0n)(1-n)(1-2n)\dots(1-(k-1)n) \cdot x^k}{n^k k!} \\ &= 1 + \frac{x}{n} + \frac{(1-n)x^2}{n^2 \cdot 2!} + \frac{(1-n)(1-2n)x^3}{n^3 \cdot 3!} + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)x^4}{n^4 \cdot 4!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n^n n!} \quad \text{pre } x \geq -1. \end{aligned}$$

Špeciálne pre $n = 2$ platí:

$$[f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = \frac{-1}{2^2} = -\frac{1}{4}, \quad f'''(0) = \frac{-1(-3)}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad f^{(4)}(0) = \frac{-1(-3)(-5)}{2^4} = -\frac{15}{16}]$$

$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{3x^3}{8 \cdot 3!} - \frac{15x^4}{16 \cdot 4!} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \quad \text{pre } x \in \langle -1; \infty \rangle.$$

Špeciálne pre $n = 3$ platí:

$$[f'(0) = \frac{1}{3}, \quad f''(0) = \frac{-2}{3^2} = -\frac{2}{9}, \quad f'''(0) = \frac{-2(-5)}{3^3} = \frac{10}{27}, \quad f^{(4)}(0) = \frac{-2(-5)(-8)}{3^4} = -\frac{80}{81}]$$

$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{9 \cdot 2!} + \frac{10x^3}{27 \cdot 3!} - \frac{80x^4}{81 \cdot 4!} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} \quad \text{pre } x \in \langle -1; \infty \rangle.$$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

má tvar
$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}, \quad x > -1.$$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
 má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0,8}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
 má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0,8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{1-0,2} = f(-0,2)$



Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0,8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{1-0,2} = f(-0,2)$
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_1(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} = 0,933\ 333$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_1(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} = 0,933\ 333$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_1(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} = 0,933\ 333$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_1(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} = 0,933\ 333$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0,8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{1-0,2} = f(-0,2)$
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_1(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} = 0,933\ 333$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_2(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} = 0,928\ 889$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_2(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} = 0,928\ 889$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_2(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} = 0,928\ 889$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0,8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{1-0,2} = f(-0,2)$
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_1(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} = 0,933\ 333$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_2(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} = 0,928\ 889$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_3(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0,2)^3}{81} = 0,928\ 395$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_3(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0,2)^3}{81} = 0,928\ 395$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0,8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{1-0,2} = f(-0,2)$
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_1(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} = 0,933\ 333$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_2(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} = 0,928\ 889$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_3(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0,2)^3}{81} = 0,928\ 395$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_4(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0,2)^3}{81} - \frac{10 \cdot (-0,2)^4}{243} = 0,928\ 329$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0,8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{1-0,2} = f(-0,2)$
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_1(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} = 0,933\ 333$.
Teoretická chyba $|R_1(-0,2)| < \frac{0,2^2}{9 \cdot 0,8^2} = 0,006\ 944$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_2(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} = 0,928\ 889$.
Teoretická chyba $|R_2(-0,2)| < \frac{5 \cdot 0,2^3}{81 \cdot 0,8^3} = 0,000\ 965$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_3(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0,2)^3}{81} = 0,928\ 395$.
Teoretická chyba $|R_3(-0,2)| < \frac{10 \cdot 0,2^4}{243 \cdot 0,8^4} = 0,000\ 161$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_4(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0,2)^3}{81} - \frac{10 \cdot (-0,2)^4}{243} = 0,928\ 329$.
Teoretická chyba $|R_4(-0,2)| < \frac{22 \cdot 0,2^5}{729 \cdot 0,8^5} = 0,000\ 029$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0,8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{1-0,2} = f(-0,2) = 0,928\,318$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_1(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} = 0,933\,333$.
 Teoretická chyba $|R_1(-0,2)| < \frac{0,2^2}{9 \cdot 0,8^2} = 0,006\,944$. 
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_2(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} = 0,928\,889$.
 Teoretická chyba $|R_2(-0,2)| < \frac{5 \cdot 0,2^3}{81 \cdot 0,8^3} = 0,000\,965$. 
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_3(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0,2)^3}{81} = 0,928\,395$.
 Teoretická chyba $|R_3(-0,2)| < \frac{10 \cdot 0,2^4}{243 \cdot 0,8^4} = 0,000\,161$. 
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_4(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0,2)^3}{81} - \frac{10 \cdot (-0,2)^4}{243} = 0,928\,329$.
 Teoretická chyba $|R_4(-0,2)| < \frac{22 \cdot 0,2^5}{729 \cdot 0,8^5} = 0,000\,029$. 

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{0,8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{0,8}$.

- Platí $\sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{1-0,2} = f(-0,2) = 0,928\,318$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_1(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} = 0,933\,333$. $[S_n(x) = T_n(x) - f(x)$ pre $n = 1, 2, 3, 4$.]
 - Teoretická chyba $|R_1(-0,2)| < \frac{0,2^2}{9 \cdot 0,8^2} = 0,006\,944$.
 - Skutočná chyba $|S_1(-0,2)| = 0,005\,015$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_2(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} = 0,928\,889$.
 - Teoretická chyba $|R_2(-0,2)| < \frac{5 \cdot 0,2^3}{81 \cdot 0,8^3} = 0,000\,965$.
 - Skutočná chyba $|S_2(-0,2)| = 0,000\,571$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_3(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0,2)^3}{81} = 0,928\,395$.
 - Teoretická chyba $|R_3(-0,2)| < \frac{10 \cdot 0,2^4}{243 \cdot 0,8^4} = 0,000\,161$.
 - Skutočná chyba $|S_3(-0,2)| = 0,000\,077$.
- $\sqrt[3]{0,8} \approx T_4(-0,2) = 1 + \frac{-0,2}{3} - \frac{(-0,2)^2}{9} + \frac{5 \cdot (-0,2)^3}{81} - \frac{10 \cdot (-0,2)^4}{243} = 0,928\,329$.
 - Teoretická chyba $|R_4(-0,2)| < \frac{22 \cdot 0,2^5}{729 \cdot 0,8^5} = 0,000\,029$.
 - Skutočná chyba $|S_4(-0,2)| = 0,000\,011$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

má tvar
$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}, \quad x > -1.$$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
 má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1,2}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
 má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1,2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1,2} = \sqrt[3]{1+0,2} = f(0,2)$



Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1,2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1,2} = \sqrt[3]{1+0,2} = f(0,2)$
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\ 667$. 
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\ 667$. 
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\ 667$. 
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\ 667$. 

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1,2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1,2} = \sqrt[3]{1+0,2} = f(0,2)$
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\ 667$. 
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_2(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} = 1,062\ 222$. 
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_2(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} = 1,062\ 222$. 
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_2(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} = 1,062\ 222$. 

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1,2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1,2} = \sqrt[3]{1+0,2} = f(0,2)$
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\ 667$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_2(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} = 1,062\ 222$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_3(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} = 1,062\ 716$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_3(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} = 1,062\ 716$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1,2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1,2} = \sqrt[3]{1+0,2} = f(0,2)$
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\ 667$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_2(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} = 1,062\ 222$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_3(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} = 1,062\ 716$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_4(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} - \frac{10 \cdot 0,2^4}{243} = 1,062\ 650$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1,2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1,2} = \sqrt[3]{1+0,2} = f(0,2)$
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\ 667$.
Teoretická chyba $|R_1(0,2)| < \frac{0,2^2}{9} = 0,004\ 444$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_2(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} = 1,062\ 222$.
Teoretická chyba $|R_2(0,2)| < \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} = 0,000\ 494$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_3(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} = 1,062\ 716$.
Teoretická chyba $|R_3(0,2)| < \frac{10 \cdot 0,2^4}{243} = 0,000\ 066$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_4(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} - \frac{10 \cdot 0,2^4}{243} = 1,062\ 650$.
Teoretická chyba $|R_4(0,2)| < \frac{22 \cdot 0,2^5}{729} = 0,000\ 010$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1,2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1,2} = \sqrt[3]{1+0,2} = f(0,2) = 1,062\,659$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\,667$.
 • Teoretická chyba $|R_1(0,2)| < \frac{0,2^2}{9} = 0,004\,444$. 
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_2(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} = 1,062\,222$.
 • Teoretická chyba $|R_2(0,2)| < \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} = 0,000\,494$. 
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_3(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} = 1,062\,716$.
 • Teoretická chyba $|R_3(0,2)| < \frac{10 \cdot 0,2^4}{243} = 0,000\,066$. 
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_4(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} - \frac{10 \cdot 0,2^4}{243} = 1,062\,650$.
 • Teoretická chyba $|R_4(0,2)| < \frac{22 \cdot 0,2^5}{729} = 0,000\,010$. 

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1,2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{1,2}$.

- Platí $\sqrt[3]{1,2} = \sqrt[3]{1+0,2} = f(0,2) = 1,062\,659$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_1(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} = 1,066\,667$. $[S_n(x) = T_n(x) - f(x)$ pre $n = 1, 2, 3, 4$.]
 - Teoretická chyba $|R_1(0,2)| < \frac{0,2^2}{9} = 0,004\,444$.
 - Skutočná chyba $|S_1(0,2)| = 0,004\,008$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_2(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} = 1,062\,222$.
 - Teoretická chyba $|R_2(0,2)| < \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} = 0,000\,494$.
 - Skutočná chyba $|S_2(0,2)| = 0,000\,437$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_3(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} = 1,062\,716$.
 - Teoretická chyba $|R_3(0,2)| < \frac{10 \cdot 0,2^4}{243} = 0,000\,066$.
 - Skutočná chyba $|S_3(0,2)| = 0,000\,057$.
- $\sqrt[3]{1,2} \approx T_4(0,2) = 1 + \frac{0,2}{3} - \frac{0,2^2}{9} + \frac{5 \cdot 0,2^3}{81} - \frac{10 \cdot 0,2^4}{243} = 1,062\,650$.
 - Teoretická chyba $|R_4(0,2)| < \frac{22 \cdot 0,2^5}{729} = 0,000\,010$.
 - Skutočná chyba $|S_4(0,2)| = 0,000\,009$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

má tvar
$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}, \quad x > -1.$$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
 má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$



Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$
- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1,333\,333$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1,333\,333$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1,333\,333$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1,333\,333$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$
- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1,333\,333$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1,222\,222$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1,222\,222$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1,222\,222$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$
- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1,333\,333$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1,222\,222$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 1,283\,951$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 1,283\,951$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$
- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1,333\,333$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1,222\,222$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 1,283\,951$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_4(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} - \frac{10 \cdot 1^4}{243} = 1,242\,798$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1)$
- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1,333\,333$.
Teoretická chyba $|R_1(1)| < \frac{1^2}{9} = 0,111\,111$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1,222\,222$.
Teoretická chyba $|R_2(1)| < \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 0,061\,728$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 1,283\,951$.
Teoretická chyba $|R_3(1)| < \frac{10 \cdot 1^4}{243} = 0,041\,152$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_4(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} - \frac{10 \cdot 1^4}{243} = 1,242\,798$.
Teoretická chyba $|R_4(1)| < \frac{22 \cdot 1^5}{729} = 0,030\,178$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1) = 1,259\,921$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1,333\,333$.
 Teoretická chyba $|R_1(1)| < \frac{1^2}{9} = 0,111\,111$. 
- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1,222\,222$.
 Teoretická chyba $|R_2(1)| < \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 0,061\,728$. 
- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 1,283\,951$.
 Teoretická chyba $|R_3(1)| < \frac{10 \cdot 1^4}{243} = 0,041\,152$. 
- $\sqrt[3]{2} \approx T_4(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} - \frac{10 \cdot 1^4}{243} = 1,242\,798$.
 Teoretická chyba $|R_4(1)| < \frac{22 \cdot 1^5}{729} = 0,030\,178$. 

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{2}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{2}$.

- Platí $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{1+1} = f(1) = 1,259\,921$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{2} \approx T_1(1) = 1 + \frac{1}{3} = 1,333\,333$. [$S_n(x) = T_n(x) - f(x)$ pre $n = 1, 2, 3, 4$.]
 - Teoretická chyba $|R_1(1)| < \frac{1^2}{9} = 0,111\,111$.
 - Skutočná chyba $|S_1(1)| = 0,073\,412$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_2(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} = 1,222\,222$.
 - Teoretická chyba $|R_2(1)| < \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 0,061\,728$.
 - Skutočná chyba $|S_2(1)| = 0,037\,699$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_3(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} = 1,283\,951$.
 - Teoretická chyba $|R_3(1)| < \frac{10 \cdot 1^4}{243} = 0,041\,152$.
 - Skutočná chyba $|S_3(1)| = 0,024\,030$.
- $\sqrt[3]{2} \approx T_4(1) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} - \frac{10 \cdot 1^4}{243} = 1,242\,798$.
 - Teoretická chyba $|R_4(1)| < \frac{22 \cdot 1^5}{729} = 0,030\,178$.
 - Skutočná chyba $|S_4(1)| = 0,017\,123$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

má tvar
$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}, \quad x > -1.$$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
 má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2)$



Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2)$
- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1,666\ 667$. 
- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1,666\ 667$. 
- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1,666\ 667$. 
- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1,666\ 667$. 

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2)$
- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1,666\,667$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} = 1,222\,222$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} = 1,222\,222$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} = 1,222\,222$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2)$
- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1,666\,667$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} = 1,222\,222$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_3(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} = 1,716\,049$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_3(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} = 1,716\,049$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2)$
- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1,666\,667$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} = 1,222\,222$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_3(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} = 1,716\,049$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_4(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} - \frac{10 \cdot 2^4}{243} = 1,057\,613$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2)$
- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1,666\ 667$.
Teoretická chyba $|R_1(2)| < \frac{2^2}{9} = 0,444\ 444$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} = 1,222\ 222$.
Teoretická chyba $|R_2(2)| < \frac{5 \cdot 2^3}{81} = 0,493\ 827$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_3(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} = 1,716\ 049$.
Teoretická chyba $|R_3(2)| < \frac{10 \cdot 2^4}{243} = 0,658\ 436$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_4(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} - \frac{10 \cdot 2^4}{243} = 1,057\ 613$.
Teoretická chyba $|R_4(2)| < \frac{22 \cdot 2^5}{729} = 0,965\ 706$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2) = 1,442\,250$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1,666\,667$.
 Teoretická chyba $|R_1(2)| < \frac{2^2}{9} = 0,444\,444$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} = 1,222\,222$.
 Teoretická chyba $|R_2(2)| < \frac{5 \cdot 2^3}{81} = 0,493\,827$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_3(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} = 1,716\,049$.
 Teoretická chyba $|R_3(2)| < \frac{10 \cdot 2^4}{243} = 0,658\,436$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_4(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} - \frac{10 \cdot 2^4}{243} = 1,057\,613$.
 Teoretická chyba $|R_4(2)| < \frac{22 \cdot 2^5}{729} = 0,965\,706$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{3}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{3}$.

- Platí $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2} = f(2) = 1,442\,250$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{3} \approx T_1(2) = 1 + \frac{2}{3} = 1,666\,667$. [$S_n(x) = T_n(x) - f(x)$ pre $n = 1, 2, 3, 4$.]
 - Teoretická chyba $|R_1(2)| < \frac{2^2}{9} = 0,444\,444$.
 - Skutočná chyba $|S_1(2)| = 0,224\,417$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_2(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} = 1,222\,222$.
 - Teoretická chyba $|R_2(2)| < \frac{5 \cdot 2^3}{81} = 0,493\,827$.
 - Skutočná chyba $|S_2(2)| = 0,220\,027$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_3(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} = 1,716\,049$.
 - Teoretická chyba $|R_3(2)| < \frac{10 \cdot 2^4}{243} = 0,658\,436$.
 - Skutočná chyba $|S_3(2)| = 0,273\,800$.
- $\sqrt[3]{3} \approx T_4(2) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{9} + \frac{5 \cdot 2^3}{81} - \frac{10 \cdot 2^4}{243} = 1,057\,613$.
 - Teoretická chyba $|R_4(2)| < \frac{22 \cdot 2^5}{729} = 0,965\,706$.
 - Skutočná chyba $|S_4(2)| = 0,384\,636$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

má tvar
$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}, \quad x > -1.$$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
 má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3)$



Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3)$
- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2,000\,000$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2,000\,000$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2,000\,000$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2,000\,000$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3)$
- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2,000\,000.$
- $\sqrt[3]{4} \approx T_2(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} = 1,000\,000.$
- $\sqrt[3]{4} \approx T_2(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} = 1,000\,000.$
- $\sqrt[3]{4} \approx T_2(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} = 1,000\,000.$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3)$
- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2,000\,000$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_2(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} = 1,000\,000$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_3(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 2,666\,667$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_3(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 2,666\,667$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3)$
- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2,000\,000$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_2(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} = 1,000\,000$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_3(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 2,666\,667$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_4(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} - \frac{10 \cdot 3^4}{243} = -0,666\,667$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3)$
- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2,000\,000$.
Teoretická chyba $|R_1(3)| < \frac{3^2}{9} = 1,000\,000$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_2(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} = 1,000\,000$.
Teoretická chyba $|R_2(3)| < \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 1,666\,667$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_3(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 2,666\,667$.
Teoretická chyba $|R_3(3)| < \frac{10 \cdot 3^4}{243} = 3,333\,333$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_4(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} - \frac{10 \cdot 3^4}{243} = -0,666\,667$.
Teoretická chyba $|R_4(3)| < \frac{22 \cdot 3^5}{729} = 7,333\,333$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3) = 1,587\,401$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2,000\,000$.
 Teoretická chyba $|R_1(3)| < \frac{3^2}{9} = 1,000\,000$. 
- $\sqrt[3]{4} \approx T_2(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} = 1,000\,000$.
 Teoretická chyba $|R_2(3)| < \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 1,666\,667$. 
- $\sqrt[3]{4} \approx T_3(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 2,666\,667$.
 Teoretická chyba $|R_3(3)| < \frac{10 \cdot 3^4}{243} = 3,333\,333$. 
- $\sqrt[3]{4} \approx T_4(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} - \frac{10 \cdot 3^4}{243} = -0,666\,667$.
 Teoretická chyba $|R_4(3)| < \frac{22 \cdot 3^5}{729} = 7,333\,333$. 

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{4}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{4}$.

- Platí $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{1+3} = f(3) = 1,587\,401$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{4} \approx T_1(3) = 1 + \frac{3}{3} = 2,000\,000$. [$S_n(x) = T_n(x) - f(x)$ pre $n = 1, 2, 3, 4$.]
 - Teoretická chyba $|R_1(3)| < \frac{3^2}{9} = 1,000\,000$.
 - Skutočná chyba $|S_1(3)| = 0,412\,599$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_2(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} = 1,000\,000$.
 - Teoretická chyba $|R_2(3)| < \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 1,666\,667$.
 - Skutočná chyba $|S_2(3)| = 0,587\,401$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_3(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} = 2,666\,667$.
 - Teoretická chyba $|R_3(3)| < \frac{10 \cdot 3^4}{243} = 3,333\,333$.
 - Skutočná chyba $|S_3(3)| = 1,079\,266$.
- $\sqrt[3]{4} \approx T_4(3) = 1 + \frac{3}{3} - \frac{3^2}{9} + \frac{5 \cdot 3^3}{81} - \frac{10 \cdot 3^4}{243} = -0,666\,667$.
 - Teoretická chyba $|R_4(3)| < \frac{22 \cdot 3^5}{729} = 7,333\,333$.
 - Skutočná chyba $|S_4(3)| = 2,254\,068$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

má tvar
$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}, \quad x > -1.$$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
 má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7} = f(7)$

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_1(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7} = f(7)$
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3,333\,333$. 
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3,333\,333$. 
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3,333\,333$. 
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3,333\,333$. 

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_2(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7} = f(7)$
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3,333\,333$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2,111\,111$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2,111\,111$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2,111\,111$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_3(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7} = f(7)$
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3,333\,333$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2,111\,111$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_3(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5 \cdot 7^3}{81} = 19,061\,728$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_3(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5 \cdot 7^3}{81} = 19,061\,728$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7} = f(7)$
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3,333\,333$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2,111\,111$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_3(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5 \cdot 7^3}{81} = 19,061\,728$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_4(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5 \cdot 7^3}{81} - \frac{10 \cdot 7^4}{243} = -79,744\,856$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7} = f(7)$
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3,333\,333$.
Teoretická chyba $|R_1(7)| < \frac{7^2}{9} = 5,444\,444$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2,111\,111$.
Teoretická chyba $|R_2(7)| < \frac{5 \cdot 7^3}{81} = 21,172\,840$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_3(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5 \cdot 7^3}{81} = 19,061\,728$.
Teoretická chyba $|R_3(7)| < \frac{10 \cdot 7^4}{243} = 98,806\,584$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_4(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5 \cdot 7^3}{81} - \frac{10 \cdot 7^4}{243} = -79,744\,856$.
Teoretická chyba $|R_4(7)| < \frac{22 \cdot 7^5}{729} = 507,207\,133$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7} = f(7) = 2,000\,000$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3,333\,333$.
 Teoretická chyba $|R_1(7)| < \frac{7^2}{9} = 5,444\,444$. 
- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2,111\,111$.
 Teoretická chyba $|R_2(7)| < \frac{5 \cdot 7^3}{81} = 21,172\,840$. 
- $\sqrt[3]{8} \approx T_3(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5 \cdot 7^3}{81} = 19,061\,728$.
 Teoretická chyba $|R_3(7)| < \frac{10 \cdot 7^4}{243} = 98,806\,584$. 
- $\sqrt[3]{8} \approx T_4(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5 \cdot 7^3}{81} - \frac{10 \cdot 7^4}{243} = -79,744\,856$.
 Teoretická chyba $|R_4(7)| < \frac{22 \cdot 7^5}{729} = 507,207\,133$. 

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{8}$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.
- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[3]{8}$.

- Platí $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7} = f(7) = 2,000\,000$. [Presná hodnota na 6 desatinných miest.]
- $\sqrt[3]{8} \approx T_1(7) = 1 + \frac{7}{3} = 3,333\,333$. [$S_n(x) = T_n(x) - f(x)$ pre $n = 1, 2, 3, 4$.]
 - Teoretická chyba $|R_1(7)| < \frac{7^2}{9} = 5,444\,444$.
 - Skutočná chyba $|S_1(7)| = 1,333\,333$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_2(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} = -2,111\,111$.
 - Teoretická chyba $|R_2(7)| < \frac{5 \cdot 7^3}{81} = 21,172\,840$.
 - Skutočná chyba $|S_2(7)| = 4,111\,111$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_3(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5 \cdot 7^3}{81} = 19,061\,728$.
 - Teoretická chyba $|R_3(7)| < \frac{10 \cdot 7^4}{243} = 98,806\,584$.
 - Skutočná chyba $|S_3(7)| = 17,061\,728$.
- $\sqrt[3]{8} \approx T_4(7) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{7^2}{9} + \frac{5 \cdot 7^3}{81} - \frac{10 \cdot 7^4}{243} = -79,744\,856$.
 - Teoretická chyba $|R_4(7)| < \frac{22 \cdot 7^5}{729} = 507,207\,133$.
 - Skutočná chyba $|S_4(7)| = 81,744\,856$.

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1+x}$



- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$

má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.



- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

[Presnosť na 8 desatinných miest.]

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1+x}$, $x \in \langle -1; 2 \rangle$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
 má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.



- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

[Presnosť na 8 desatinných miest.]

Aproximácia a presnosť – Približná hodnota $\sqrt[3]{1+x}$, $x \in \langle -1; 8 \rangle$

- Maclaurinov polynóm $T_4(x)$ funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$
 má tvar $T_4(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$, $x > -1$.



- Pre $x \in O(0) \cap (-1; \infty)$ aproximujeme $f(x) \approx T_4(x)$, t. j. $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243}$.

[Presnosť na 8 desatinných miest.]

Koniec 8. časti (aplikácie)

Ďakujem za pozornosť.