Matematická analýza 1

2023/2024

9. Priebeh funkcie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou získate nápomoc.
Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

Monotónnosť a extrémy funkcie – Monotónnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje **konečná** derivácia $f'(x)$.

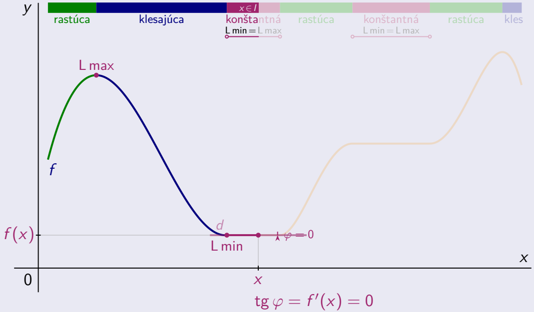
Funkcia f je na intervale I:

• konštantná,	$\Leftrightarrow$	pre všetky $x \in I$ platí	• $f'(x) = 0$,
• rastúca,	$\Leftarrow$		• $f'(x) > 0$,
• neklesajúca,	$\Leftrightarrow$		• $f'(x) \geq 0$,
• klesajúca,	$\Leftarrow$		• $f'(x) < 0$,
• nerastúca,	$\Leftrightarrow$		• $f'(x) \leq 0$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Monotónnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje **konečná** derivácia $f'(x)$.

Funkcia f je na intervale I: • konštantná. $\Leftrightarrow$ Pre všetky $x \in I$ platí: • $f'(x) = 0$.

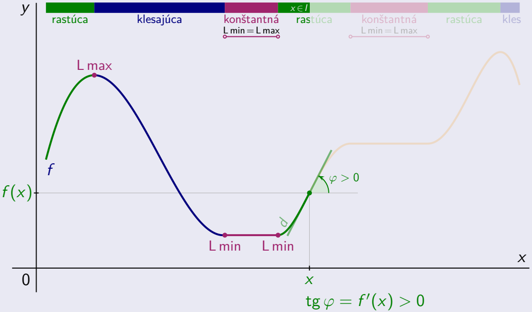


Monotónnosť a extrémy funkcie – Monotónnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$.

Funkcia f je na intervale I: $\qquad$ Pre všetky $x \in I$ platí:

- rastúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) > 0$.

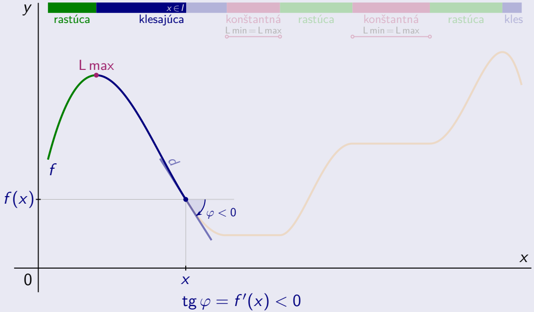


Monotónnosť a extrémy funkcie – Monotónnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$.

Funkcia f je na intervale I: Pre všetky $x \in I$ platí:

- klesajúca. $\Leftrightarrow$ • $f'(x) < 0$.

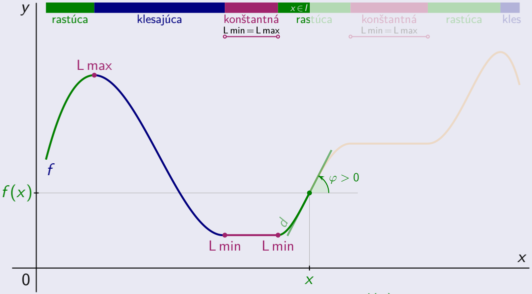


Monotónnosť a extrémy funkcie – Monotónnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$.

Funkcia f je na intervale I: Pre všetky $x \in I$ platí:

- rastúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) > 0$.
- neklesajúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$.

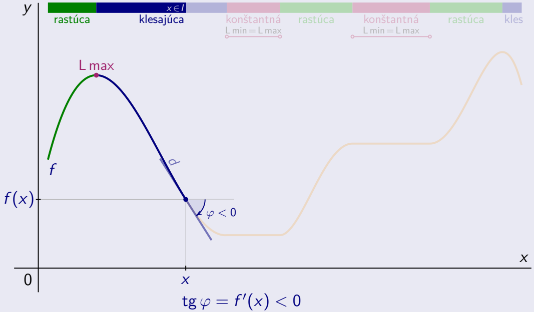


Monotónnosť a extrémy funkcie – Monotónnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje **konečná** derivácia $f'(x)$.

Funkcia f je na intervale I: Pre všetky $x \in I$ platí:

- konštantná. $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0$.
- rastúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) > 0$.
- neklesajúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$.
- klesajúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) < 0$.
- nerastúca. $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$.

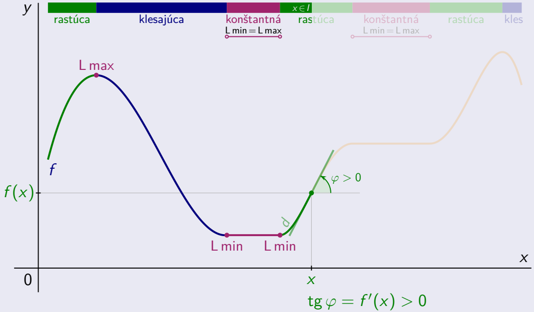


Monotónnosť a extrémy funkcie – Monotónnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$.

Funkcia f je na intervale I: ⇔ Pre všetky $x \in I$ platí:

- konštantná. ⇔ $f'(x) = 0$.
- rastúca. ⇔ $f'(x) > 0$.
- neklesajúca. ⇔ $f'(x) \geq 0$.
- klesajúca. ⇔ $f'(x) < 0$.
- nerastúca. ⇔ $f'(x) \leq 0$.



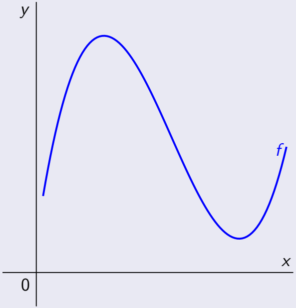
Monotónnosť a extrémy funkcie – NP$_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Monotónnosť a extrémy funkcie – NP$_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

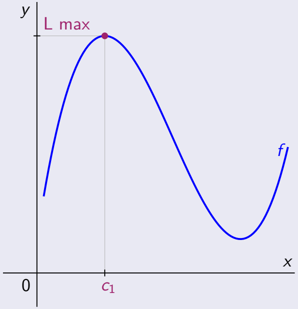
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$,



Monotónnosť a extrémy funkcie – NP$_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

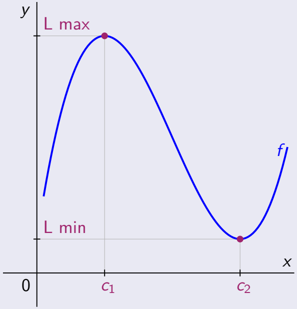
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – NP$_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

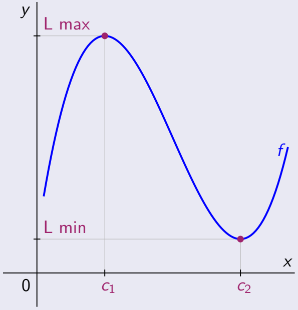
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.



Monotónnosť a extrémy funkcie – NP$_\Rightarrow$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.



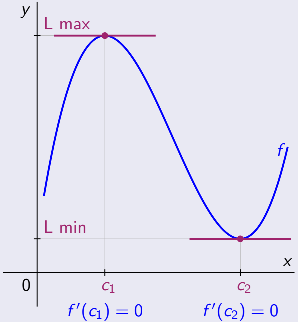
Monotónnosť a extrémy funkcie – $\text{NP}_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.

$\Rightarrow$

- $f'(c) = 0$. [Nulová derivácia.]



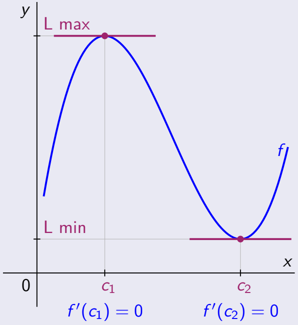
Monotónnosť a extrémy funkcie – NP$_\Rightarrow$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.

$\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$. [Nulová derivácia.]

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému. [Viď Pr I.]



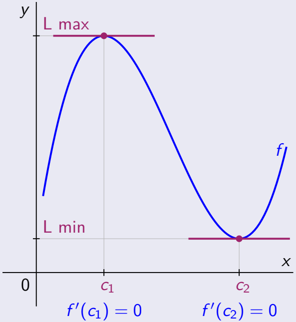
Monotónnosť a extrémy funkcie – NP$_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.

$\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$. [Nulová derivácia.]

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém, a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]



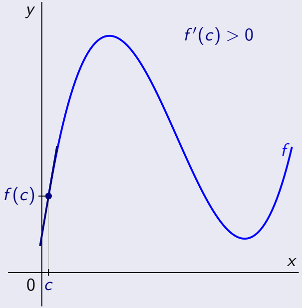
Monotónnosť a extrémy funkcie – NP$_{\Rightarrow}$ existencie lok extrému

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- V bode c existuje lokálny extrém (minimum, resp. maximum) funkcie f.
- V bode c existuje derivácia $f'(c)$.

$\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$. [Nulová derivácia.]

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém, a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.

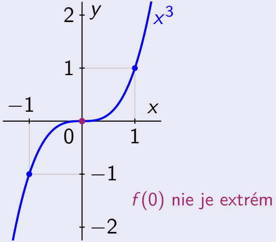
Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f(0) = 0$.

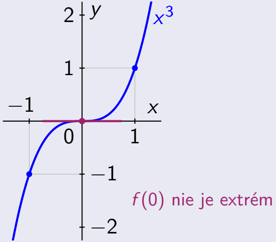
Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

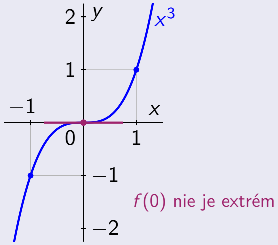
Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.

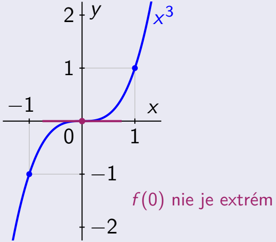
Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c)=0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

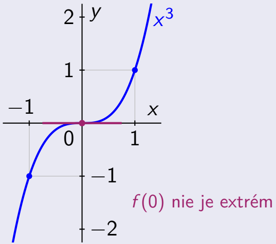
Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$,
ale v bode c nie je lokálny extrém.

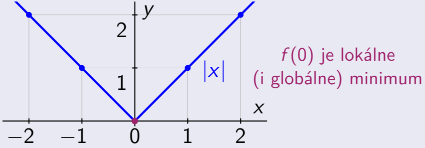


Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém,
ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



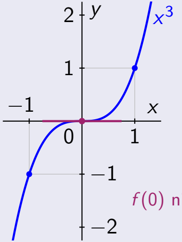
- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



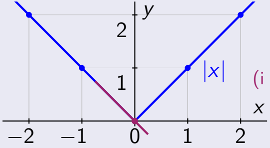
$f(0)$ nie je extrém

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



$f(0)$ je lokálne (i globálne) minimum

- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$.

$x \in (-\infty; 0\rangle$

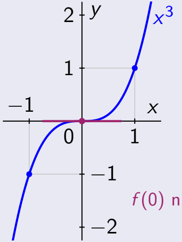
- $f'(x) = [-x]' = -1$.
- $f'_{-}(0) = -1$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



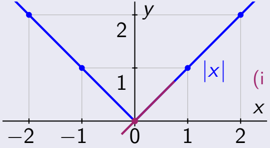
$f(0)$ nie je extrém

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



$f(0)$ je lokálne (i globálne) minimum

- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$.

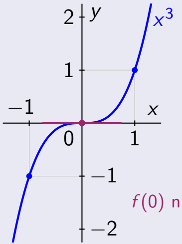
$x \in (-\infty; 0\rangle$	$x \in \langle 0; \infty)$
	• $f'(x) = [x]' = 1$. • $f'_+(0) = 1$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.

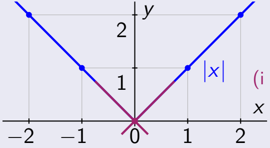


Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c)=0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$.

$x \in (-\infty; 0\rangle$	$x \in \langle 0; \infty)$
$f'(x) = [-x]' = -1$.	$f'(x) = [x]' = 1$.
$f'_-(0) = -1$.	$f'_+(0) = 1$.

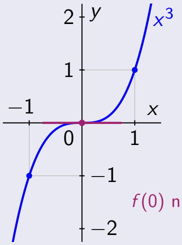
- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.



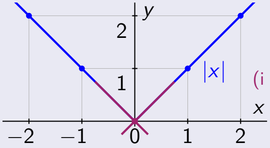
$f(0)$ nie je extrém

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c)=0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



$f(0)$ je lokálne (i globálne) minimum

- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$.

$x \in (-\infty; 0\rangle$	$x \in \langle 0; \infty)$
• $f'(x) = [-x]' = -1$.	• $f'(x) = [x]' = 1$.
• $f'_-(0) = -1$.	• $f'_+(0) = 1$.

- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

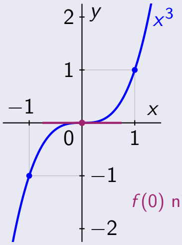
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

- Funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f'(c)$. $\Rightarrow$ • $f'(c) = 0$.

[Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c) = 0$, ale v bode c nie je lokálny extrém.

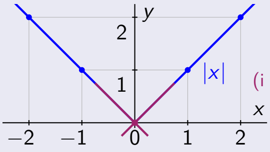


Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^3$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(x) = 3x^2$.
- $f'(0) = 0$.

- Platnosť $f'(c) = 0$ nezaručuje existenciu lokálneho extrému.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém. $\Rightarrow$ Platí $f'(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je lokálny extrém, ale derivácia $f'(c)$ neexistuje.



- $f(x) = |x|$, $x \in R$.
- $f(0) = 0$.

$x \in (-\infty; 0\rangle$	$x \in \langle 0; \infty)$
• $f'(x) = [-x]' = -1$.	• $f'(x) = [x]' = 1$.
• $f'_-(0) = -1$.	• $f'_+(0) = 1$.

- $f'(0)$ neexistuje, pretože $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.

- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť lokálny extrém a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.
- To znamená, že pri hľadaní lokálnych extrémov musíme overiť aj všetky body, v ktorých derivácia neexistuje.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f,

- v bode c existuje **derivácia** funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f, ak:

- V bode c existuje **derivácia** funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémy** funkcie f znamená:

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémy** funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body)

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémy** funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body)
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť lokálne extrémy funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body)
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje
  - Určiť všetky hraničné body c $D(f)$

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémy** funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémy** funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

    [V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémy** funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

    [V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

    [V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva **stacionárny bod** funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémy** funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.
    [V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť lokálne extrémy funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.
    [V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť globálne extrémy funkcie f

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť lokálne extrémy funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.
    [V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť globálne extrémy funkcie f znamená určiť všetky jej lokálne extrémy

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť lokálne extrémy funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.
    [V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť globálne extrémy funkcie f znamená určiť všetky jej lokálne extrémy a porovnať ich medzi sebou.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť lokálne extrémy funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.
    [V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť globálne extrémy funkcie f znamená určiť všetky jej lokálne extrémy a porovnať ich medzi sebou.
  [Globálne extrémy (pokiaľ existujú) funkcie f sú zhodné s príslušnými lokálnymi extrémami.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset R$. [Rastúca resp. klesajúca.]

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť **lokálne extrémy** funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

    [V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

    [V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

    [V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]
- Určiť **globálne extrémy** funkcie f znamená určiť všetky jej lokálne extrémy a porovnať ich medzi sebou.

  [Globálne extrémy (pokiaľ existujú) funkcie f sú zhodné s príslušnými lokálnymi extrémami.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset R$. [Rastúca resp. klesajúca.]

$\Rightarrow$ Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f'(x) = 0$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť lokálne extrémy funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.

    [V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.

    [V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.

    [V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť globálne extrémy funkcie f znamená určiť všetky jej lokálne extrémy a porovnať ich medzi sebou.

  [Globálne extrémy (pokiaľ existujú) funkcie f sú zhodné s príslušnými lokálnymi extrémami.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset R$. [Rastúca resp. klesajúca.]

$\Rightarrow$
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f'(x) = 0$.
- Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f'(x) = 0$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť lokálne extrémy funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.
    [V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť globálne extrémy funkcie f znamená určiť všetky jej lokálne extrémy a porovnať ich medzi sebou.
  [Globálne extrémy (pokiaľ existujú) funkcie f sú zhodné s príslušnými lokálnymi extrémami.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset R$. [Rastúca resp. klesajúca.]

$\Rightarrow$
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f'(x) = 0$.
- Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f'(x) = 0$.

[Môžu to byť iba samostatné body, ale nemôžu tvoriť interval.]

Monotónnosť a extrémy funkcie – Stacionárny bod

Bod $c \in D(f)$ sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak:

- V bode c existuje derivácia funkcie f a platí $f'(c) = 0$.

- Určiť lokálne extrémy funkcie f znamená:
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(c) = 0$ (stacionárne body) a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V stacionárnom bode funkcia f môže ale nemusí mať extrém.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, v ktorých $f'(c)$ neexistuje a overiť v nich existenciu extrémov.
    [V týchto bodoch môže byť funkcia f spojitá ale aj nespojitá.]
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$ a v bodoch $c \in D(f)$ overiť existenciu extrémov.
    [V hraničných bodoch funkcia f môže mať lokálny ale aj globálny extrém, ale extrém tam nemusí byť.]

- Určiť globálne extrémy funkcie f znamená určiť všetky jej lokálne extrémy a porovnať ich medzi sebou.
  [Globálne extrémy (pokiaľ existujú) funkcie f sú zhodné s príslušnými lokálnymi extrémami.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo monotónna na intervale $I \subset R$. [Rastúca resp. klesajúca.]

$\Rightarrow$
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f'(x) = 0$.
- Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f'(x) = 0$.

[Môžu to byť iba samostatné body, ale nemôžu tvoriť interval. Potom by bola funkcia na tomto podintervale konštantná a nie rýdzomonotónna.] [Viď Mon.]

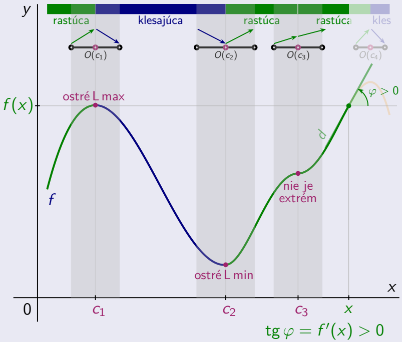
Monotónnosť a extrémy funkcie – PP$_{\Leftarrow}$ existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Monotónnosť a extrémy funkcie – PP$_{\Leftarrow}$ existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

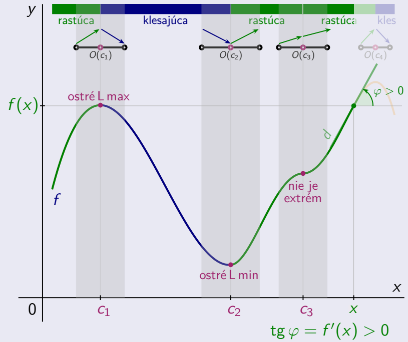
Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$,



Monotónnosť a extrémy funkcie – PP$_{\Leftarrow}$ existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$ platí:

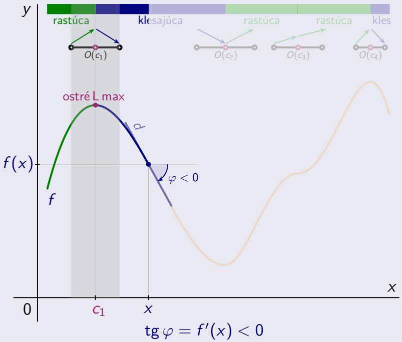


Monotónnosť a extrémy funkcie – PP$_\Leftarrow$ existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$ platí:

Pre $x < c$: • $f'(x) > 0$ a pre $c < x$: • $f'(x) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne maximum.



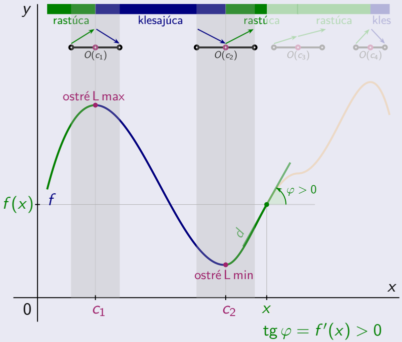
Monotónnosť a extrémy funkcie – PP$_{\Leftarrow}$ existencie lok extrému

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$ platí:

Pre $x < c$: • $f'(x) > 0$ a pre $c < x$: • $f'(x) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne maximum.

• $f'(x) < 0$ • $f'(x) > 0$. $\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne minimum.



Monotónnosť a extrémy funkcie – PP$_\Leftarrow$ existencie lok extrému

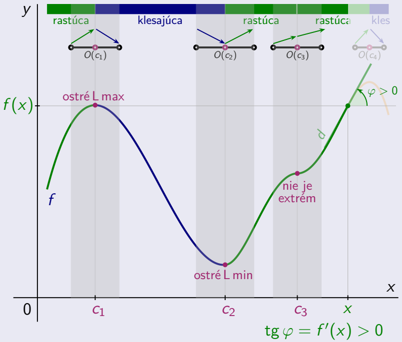
Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$ platí:

Pre $x < c$: • $f'(x) > 0$ a pre $c < x$: • $f'(x) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne maximum.

• $f'(x) < 0$ • $f'(x) > 0$. $\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne minimum.

Pre $x \neq c$: • $f'(x) > 0$, resp. • $f'(x) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(c)$ nie je lokálny extrém.



Monotónnosť a extrémy funkcie – PP$_{\Leftarrow}$ existencie lok extrému

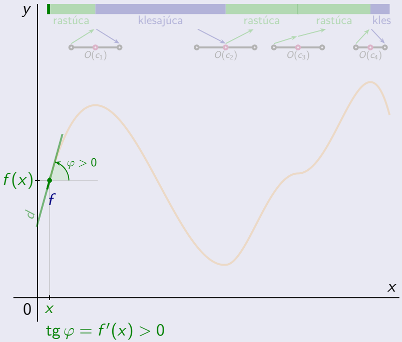
Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny, t. j. $f'(c) = 0$, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$ platí:

Pre $x < c$: • $f'(x) > 0$ a pre $c < x$: • $f'(x) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne maximum.

• $f'(x) < 0$ • $f'(x) > 0$. $\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne minimum.

Pre $x \neq c$: • $f'(x) > 0$, resp. • $f'(x) < 0$. $\Rightarrow$ • $f(c)$ nie je lokálny extrém.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

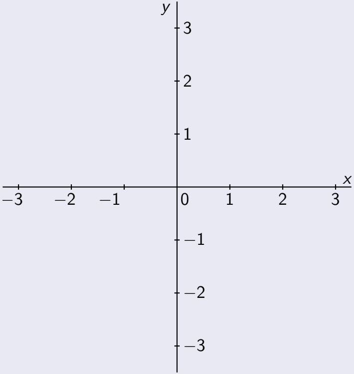
$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 02-Pr II.]

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

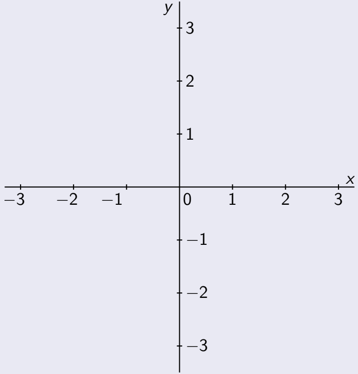
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.



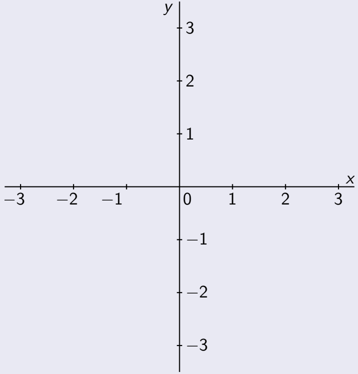
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

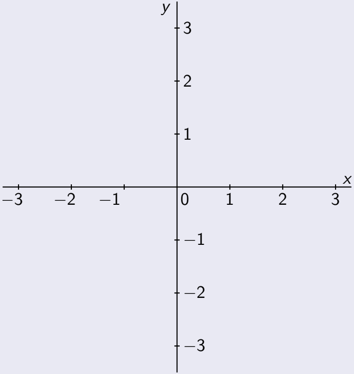
$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0$.

[$x = 0$, resp. $x = -2$.]



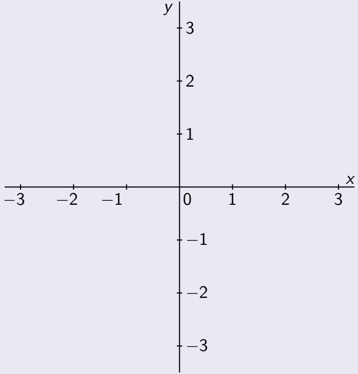
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x)-x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$,

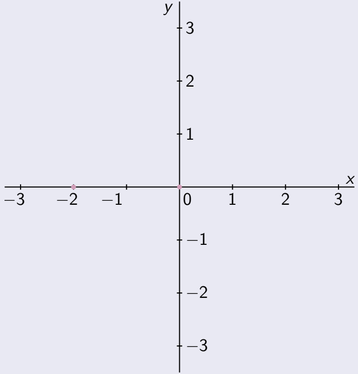


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x + x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

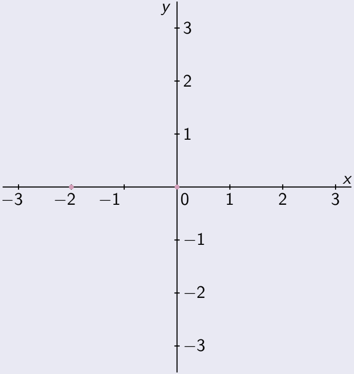
$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x)-x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$ $[x = 0,$ resp. $x = -2.]$
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

  $\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

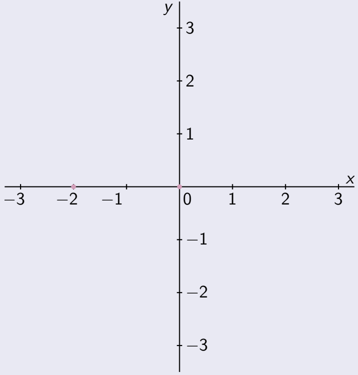
[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

  $\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

  [Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}, \; x \in R - \{-1\}.$ [Viď 02-Pr II.]

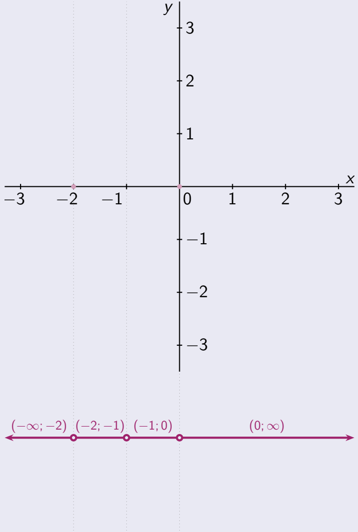
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$ $[x = 0,$ resp. $x = -2.]$
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

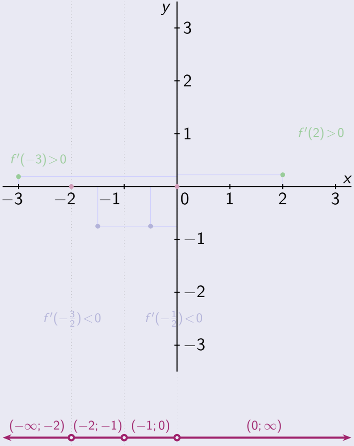
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x)-x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0$.	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$.	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0$.	$f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

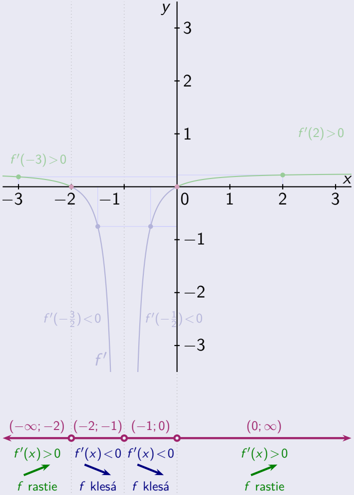
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x)-x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0.$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0.$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0.$	$f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0.$
$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

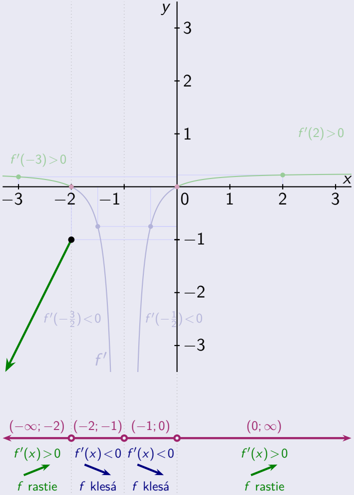
$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4\cdot 4} > 0.$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}} < 0.$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}} < 0.$	$f'(2) = \frac{4+4}{4\cdot 9} > 0.$
$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1.$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

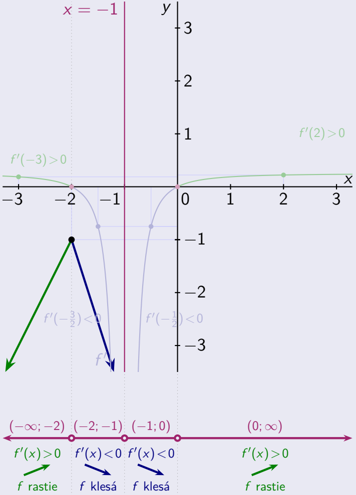
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4\cdot 4} > 0.$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}} < 0.$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}} < 0.$	$f'(2) = \frac{4+4}{4\cdot 9} > 0.$
$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1.$ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$



beerb@frcatel.fri.uniza.sk

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x)=\frac{x^2}{4+4x},\ x\in R-\{-1\}.$

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f)=R-\{-1\}=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.
- Derivácia $f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x\in D(f)$.

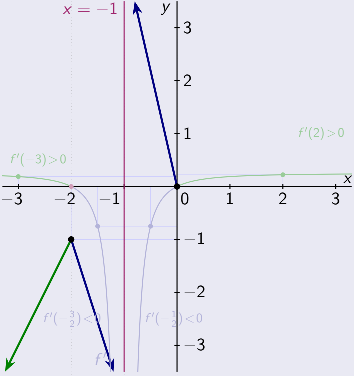
- $f'(x)=0. \Leftrightarrow$ • $2x+x^2=x(2+x)=0.$ [$x=0$, resp. $x=-2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2)=0$, • $f'(0)=0$, • $-1\notin D(f)$.

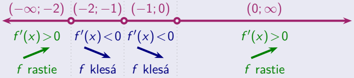
$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty;-2)$, $(-2;-1)$, $(-1;0)$ a $(0;\infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x\in(-\infty;-2)$	$x\in(-2;-1)$	$x\in(-1;0)$	$x\in(0;\infty)$
$f'(-3)=\frac{-6+9}{4\cdot 4}>0.$	$f'(-\frac{3}{2})=\frac{-3+\frac{9}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}}<0.$	$f'(-\frac{1}{2})=\frac{-1+\frac{1}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}}<0.$	$f'(2)=\frac{4+4}{4\cdot 9}>0.$
$f'(x)>0.$	$f'(x)<0.$	$f'(x)<0.$	$f'(x)>0.$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=\infty.$ $f(0)=\frac{0}{4-0}=0.$





Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x)=\frac{x^2}{4+4x},\ x\in R-\{-1\}.$

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f)=R-\{-1\}=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.
- Derivácia $f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x\in D(f)$.

- $f'(x)=0.$ $\Leftrightarrow$ • $2x+x^2=x(2+x)=0.$ [$x=0$, resp. $x=-2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2)=0$, • $f'(0)=0$, • $-1\notin D(f)$.

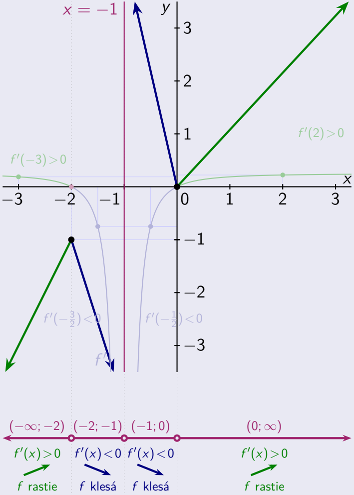
$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty;-2)$, $(-2;-1)$, $(-1;0)$ a $(0;\infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x\in(-\infty;-2)$	$x\in(-2;-1)$	$x\in(-1;0)$	$x\in(0;\infty)$
$f'(-3)=\frac{-6+9}{4\cdot 4}>0.$	$f'(-\frac{3}{2})=\frac{-3+\frac{9}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}}<0.$	$f'(-\frac{1}{2})=\frac{-1+\frac{1}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}}<0.$	$f'(2)=\frac{4+4}{4\cdot 9}>0.$
$f'(x)>0.$	$f'(x)<0.$	$f'(x)<0.$	$f'(x)>0.$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

$f(0)=\frac{0}{4-0}=0.$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\frac{4}{x}+4}=\infty.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

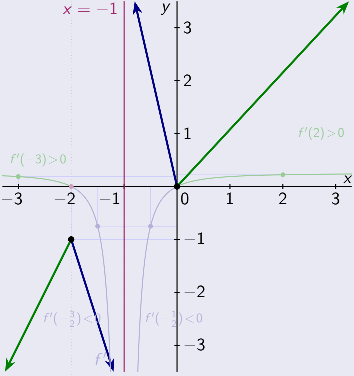
$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

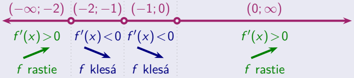
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4\cdot 4} > 0$.	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}} < 0$.	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}} < 0$.	$f'(2) = \frac{4+4}{4\cdot 9} > 0$.
$f'(x) > 0$.	$f'(x) < 0$.	$f'(x) < 0$.	$f'(x) > 0$.
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1$. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty$. $f(0) = \frac{0}{4-0} = 0$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty$. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty$.





Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$ $[x = 0,$ resp. $x = -2.]$
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

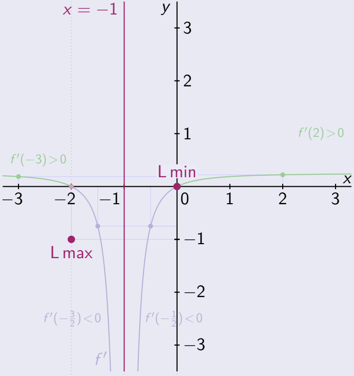
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

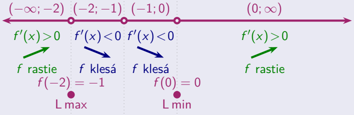
$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0.$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0.$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0.$	$f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0.$
$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1.$ $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty.$ $f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty.$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty.$

- $f(-2) = -1$ je lokálne max.
- $f(0) = 0$ je lokálne min.





Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x},\ x \in R - \{-1\}.$ [Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

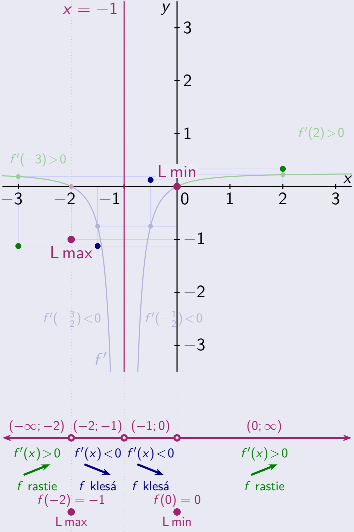
$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4\cdot 4} > 0.$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}} < 0.$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4\cdot\frac{1}{4}} < 0.$	$f'(2) = \frac{4+4}{4\cdot 9} > 0.$
$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1.$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty.$ $f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty.$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty.$

$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}.$ $f(-\frac{3}{2}) = \frac{\frac{9}{4}}{4-6} = -\frac{9}{8}.$ $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}}{4-2} = \frac{1}{8}.$ $f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$

- $f(-2) = -1$ je lokálne max.
- $f(0) = 0$ je lokálne min.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x},\ x \in R - \{-1\}.$

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0.$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0.$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0.$	$f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0.$
$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

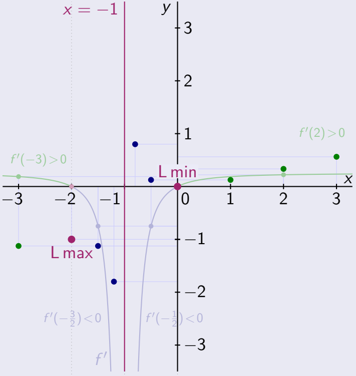
$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1.$ $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty.$ $f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$

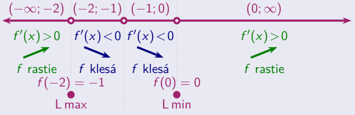
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty.$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty.$

$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}.$ $f(-\frac{3}{2}) = \frac{\frac{9}{4}}{4-6} = -\frac{9}{8}.$ $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}}{4-2} = \frac{1}{8}.$ $f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$

$f(-\frac{6}{5}) = \frac{\frac{36}{25}}{4-\frac{24}{5}} = -\frac{9}{5}.$ $f(-\frac{4}{5}) = \frac{\frac{16}{25}}{4-\frac{16}{5}} = \frac{4}{5}.$ $f(1) = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}.$ $f(3) = \frac{9}{4+12} = \frac{9}{16}.$

- $f(-2) = -1$ je lokálne max.
- $f(0) = 0$ je lokálne min.





Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 02-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $2x + x^2 = x(2+x) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = -2$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-2) = 0$, • $f'(0) = 0$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; -1)$	$x \in (-1; 0)$	$x \in (0; \infty)$
$f'(-3) = \frac{-6+9}{4 \cdot 4} > 0.$	$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{-3+\frac{9}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0.$	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} < 0.$	$f'(2) = \frac{4+4}{4 \cdot 9} > 0.$
$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$
f rastie.	f klesá.	f klesá.	f rastie.

$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1.$ $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty.$ $f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$

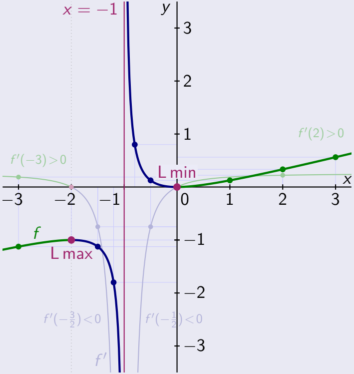
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty.$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty.$

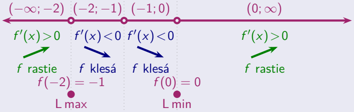
$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}.$ $f(-\frac{3}{2}) = \frac{\frac{9}{4}}{4-6} = -\frac{9}{8}.$ $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}}{4-2} = \frac{1}{8}.$ $f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$

$f(-\frac{6}{5}) = \frac{\frac{36}{25}}{4-\frac{24}{5}} = -\frac{9}{5}.$ $f(-\frac{4}{5}) = \frac{\frac{16}{25}}{4-\frac{16}{5}} = \frac{4}{5}.$ $f(1) = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}.$ $f(3) = \frac{9}{4+12} = \frac{9}{16}.$

- $f(-2) = -1$ je lokálne max.
- $f(0) = 0$ je lokálne min.

A na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.





Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

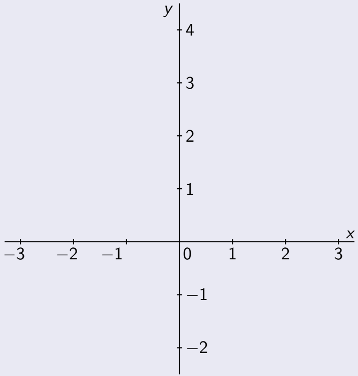
$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [Viď 02-Pr III.]

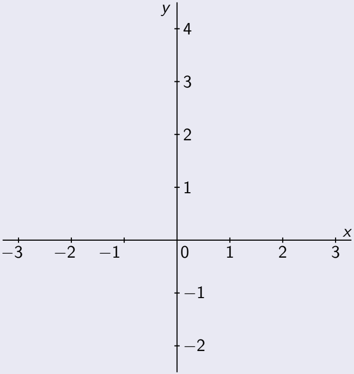
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2},\ x \in R.$ [Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.



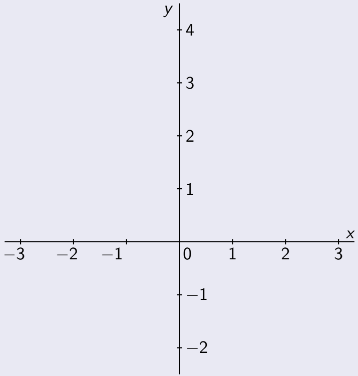
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$



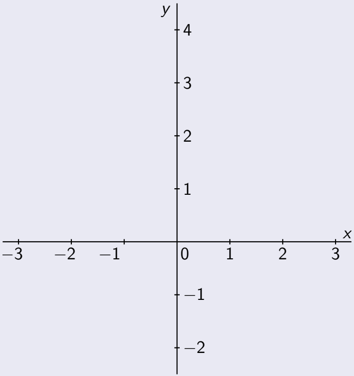
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ $[x = -1$, resp. $x = 1.]$



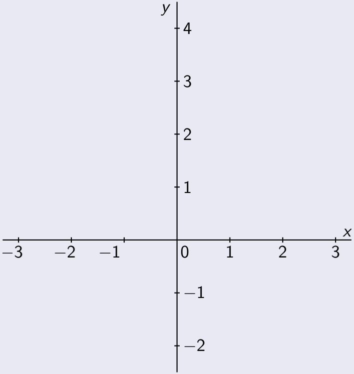
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$,



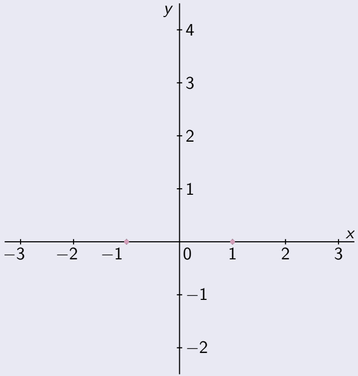
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

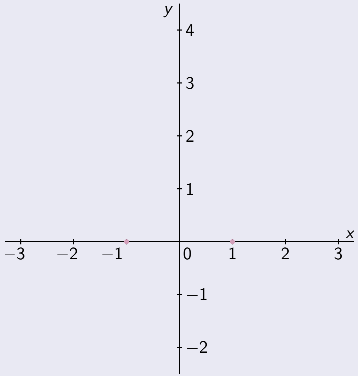
$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

  $\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

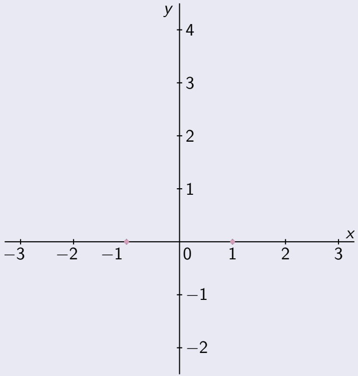
$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [Viď 02-Pr III.]

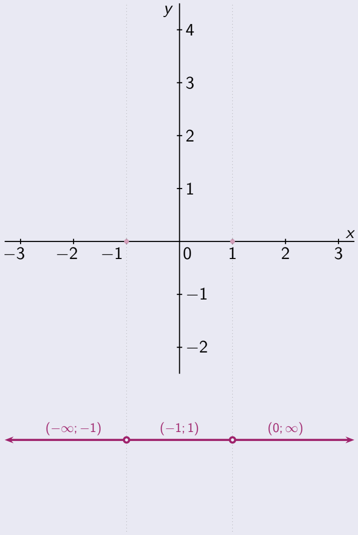
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

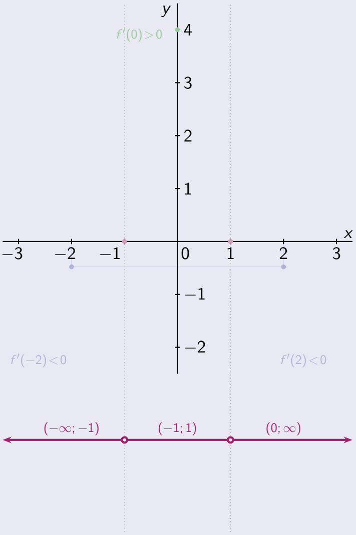
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-\frac{1}{6}}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2},\ x \in R.$

[Viď 02-Pr III.]

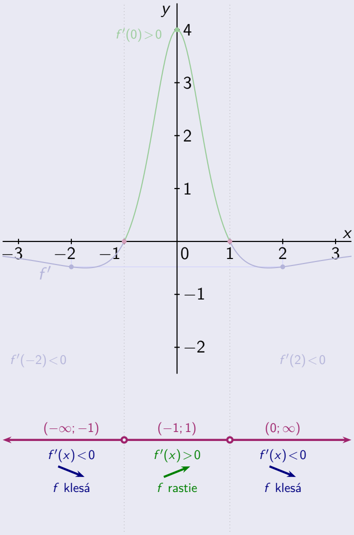
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-\frac{1}{6}}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$
f klesá.	f rastie.	f klesá.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

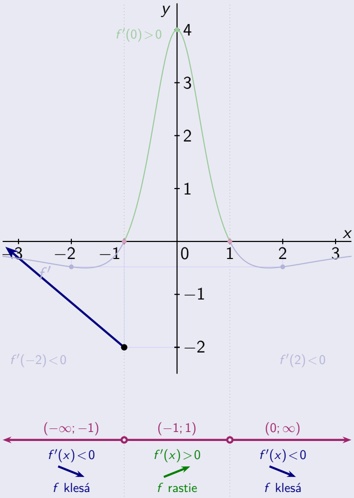
$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-\frac{1}{6}}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$ f klesá.	$f'(x) > 0.$ f rastie.	$f'(x) < 0.$ f klesá.

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

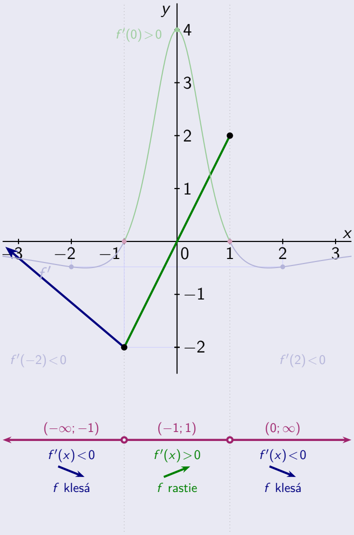
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-\frac{1}{6}}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$
f klesá.	f rastie.	f klesá.

$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$ $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$, $x\in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f)=R$.
- Derivácia $f'(x)=\frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x\in D(f)$.

- $f'(x)=0.$ $\Leftrightarrow$ • $1-x^2=(1-x)(1+x)=0.$ [$x=-1$, resp. $x=1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1)=0$, • $f'(1)=0$.

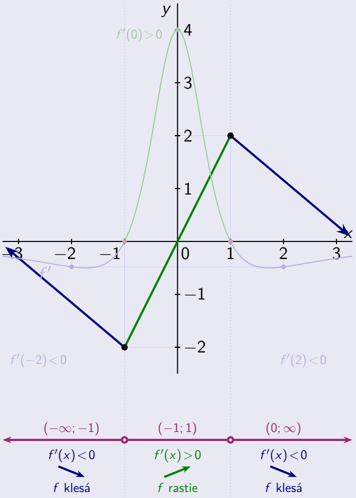
$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ a $(0;\infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x\in(-\infty;-1)$	$x\in(-1;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f'(-2)=\frac{4-16}{25}=-\frac{12}{25}<0.$	$f'(0)=\frac{4-0}{1}=4>0.$	$f'(2)=\frac{4-\frac{1}{6}}{25}=-\frac{12}{25}<0.$
$f'(x)<0.$	$f'(x)>0.$	$f'(x)<0.$
f klesá.	f rastie.	f klesá.

$f(1)=\frac{4}{1+1}=2.$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\frac{1}{x}+x}=0.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

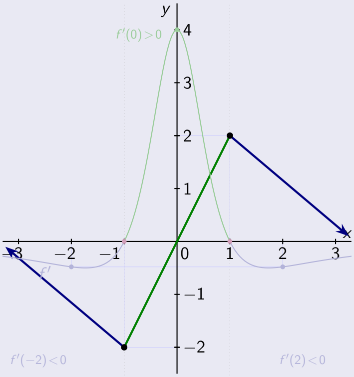
$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

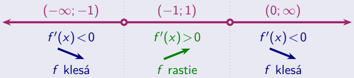
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-\frac{1}{6}}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$ f klesá.	$f'(x) > 0.$ f rastie.	$f'(x) < 0.$ f klesá.

$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$ $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$





Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

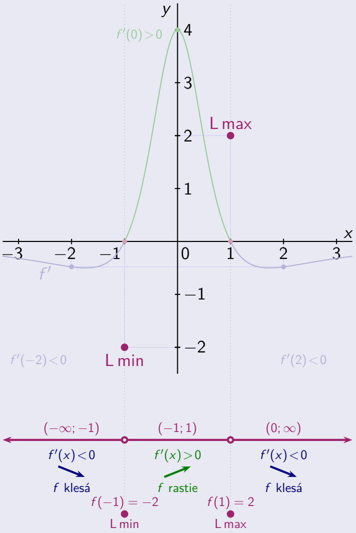
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-\frac{1}{6}}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$
f klesá.	f rastie.	f klesá.

$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$ $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$

- $f(-1) = -2$ je lokálne min.
- $f(1) = 2$ je lokálne max.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0,$ • $f'(1) = 0.$

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

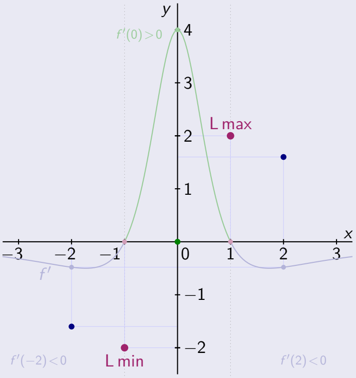
$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-\frac{1}{6}}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$
f klesá.	f rastie.	f klesá.

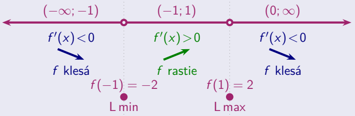
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$ $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$

$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}.$ $f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$ $f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$

- $f(-1) = -2$ je lokálne min. • $f(1) = 2$ je lokálne max.





Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-\frac{1}{6}}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$
f klesá.	f rastie.	f klesá.

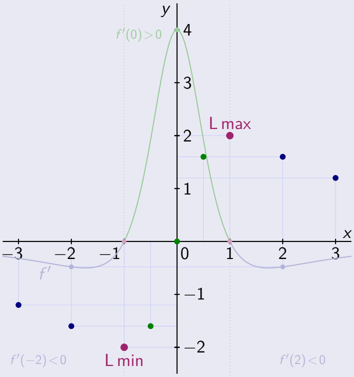
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$ $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$

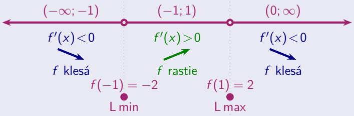
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$

$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}.$ $f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$ $f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$

$f(-3) = \frac{-12}{1+9} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}.$ $f(-\frac{1}{2}) = \frac{-2}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{8}{5}.$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{8}{5}.$ $f(3) = \frac{12}{1+9} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$

- $f(-1) = -2$ je lokálne min. • $f(1) = 2$ je lokálne max.





Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 - x^2 = (1-x)(1+x) = 0.$ [$x = -1$, resp. $x = 1$.]
- f' je spojitá na $D(f)$, • $f'(-1) = 0$, • $f'(1) = 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(0; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4-16}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$	$f'(0) = \frac{4-0}{1} = 4 > 0.$	$f'(2) = \frac{4-\frac{1}{6}}{25} = -\frac{12}{25} < 0.$
$f'(x) < 0.$	$f'(x) > 0.$	$f'(x) < 0.$
f klesá.	f rastie.	f klesá.

$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$ $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$

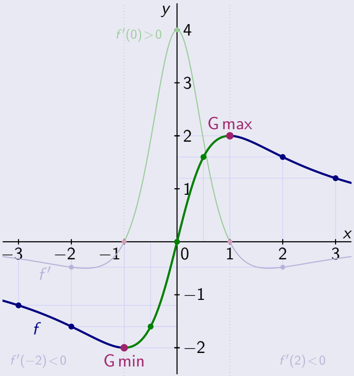
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$

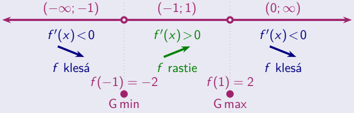
$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}.$ $f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$ $f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$

$f(-3) = \frac{-12}{1+9} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}.$ $f(-\frac{1}{2}) = \frac{-2}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{8}{5}.$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{8}{5}.$ $f(3) = \frac{12}{1+9} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$

• $f(-1) = -2$ je lokálne min. • $f(1) = 2$ je lokálne max.

Tieto extrémy sú súčasne aj globálne a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.





Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

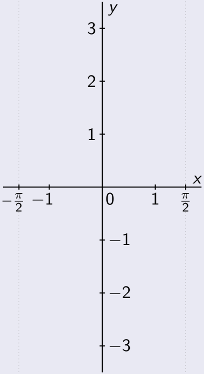
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

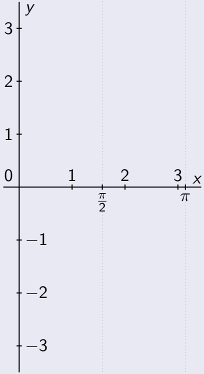
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

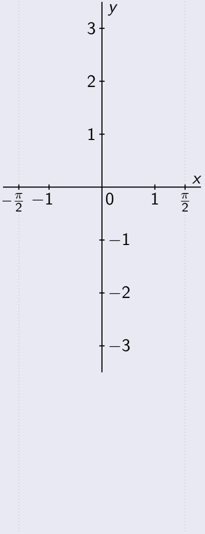
- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

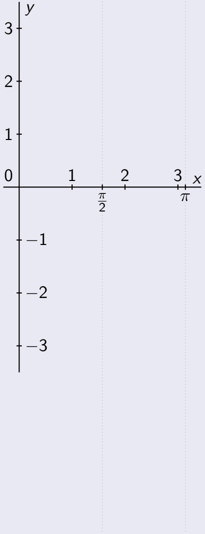
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

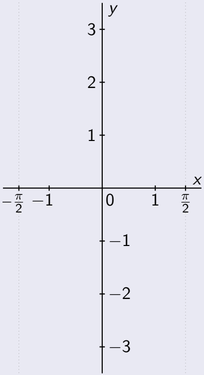
- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

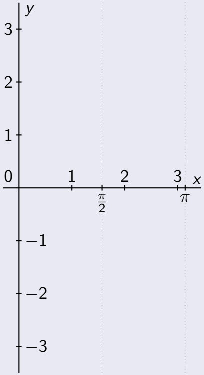
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$
- f je spojitá na celom $D(f).$
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f).$



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$

- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$
- f je spojitá na celom $D(f).$
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f).$

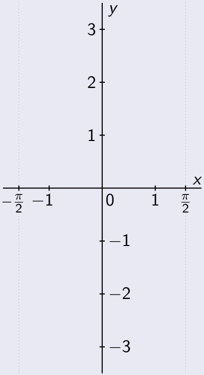


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

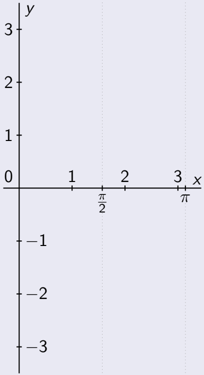
- f' je spojitá na $D(f)$.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$

- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.

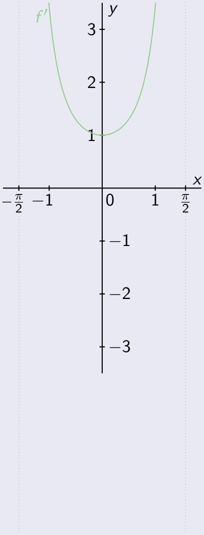


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

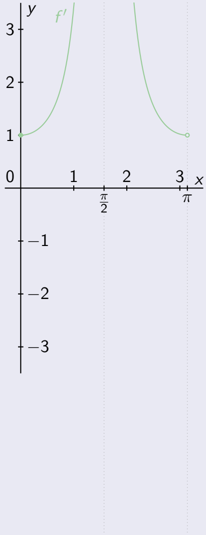
- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$

- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.

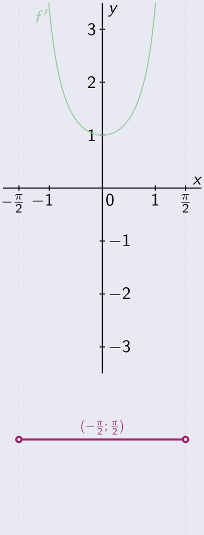


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

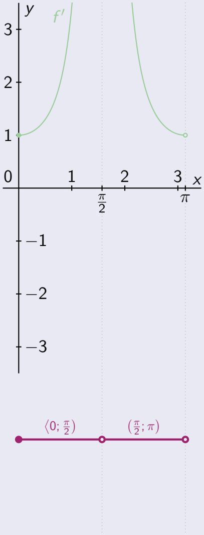
- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$.
- $\pi \notin D(f)$.



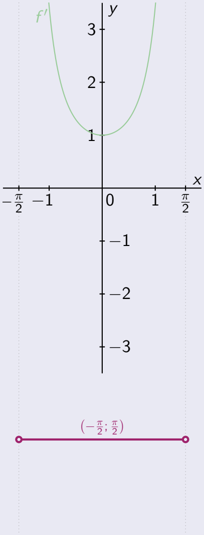
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie

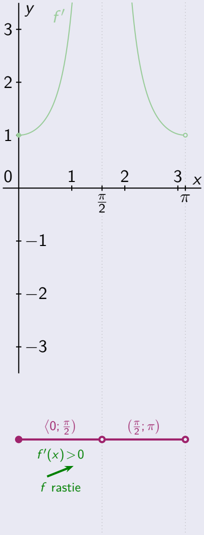


$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$

- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. • $\pi \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right)$



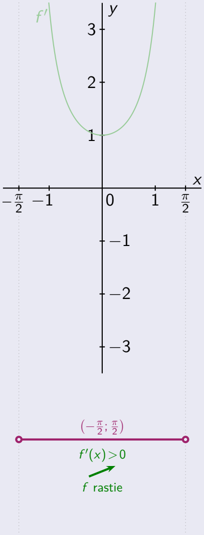
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

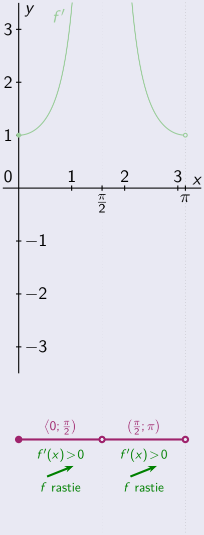


$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. • $\pi \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right)$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

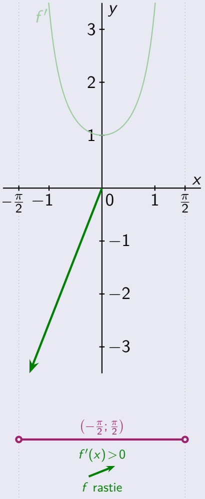
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$,



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

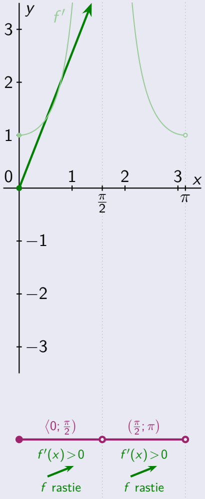
- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. • $\pi \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right)$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

$f(0) = 0$.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$,



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

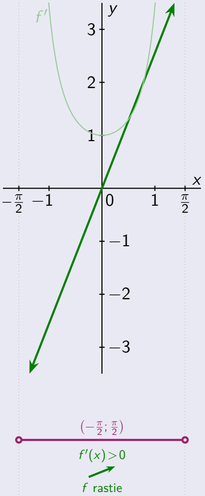
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty.$



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

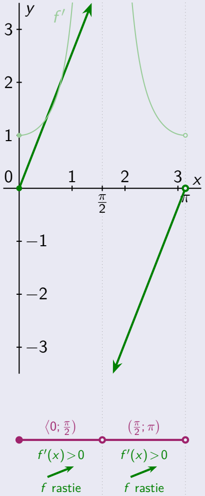
- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. • $\pi \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right)$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

$f(0) = 0. \qquad \lim_{x \to \pi^-} f(x) = \operatorname{tg} \pi = 0.$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

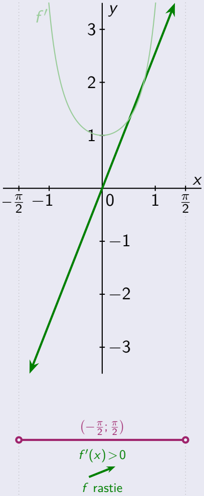
- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty.$

$\Rightarrow$ • Na $D(f)$ neexistujú extrémy.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

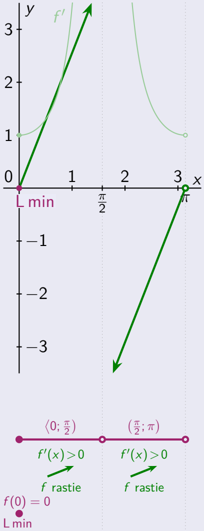
- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. • $\pi \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right)$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

$f(0) = 0. \qquad \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \operatorname{tg} \pi = 0.$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty.$

$\Rightarrow$ • $f(0) = 0$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

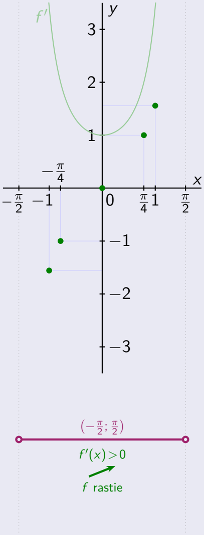
$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$.

$f(0) = 0$. $\quad f(\pm\frac{\pi}{4}) = \pm 1$.

$f(\pm 1) = \operatorname{tg}(\pm 1) \approx \pm 1{,}5574$.

$\Rightarrow$ • Na $D(f)$ neexistujú extrémy.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. • $\pi \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right)$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

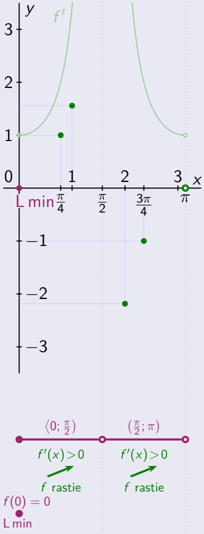
$f(0) = 0$. $\quad \lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = \operatorname{tg} \pi = 0$.

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$, $\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$.

$f(\frac{\pi}{4}) = 1$. $\quad f(1) = \operatorname{tg} 1 \approx 1{,}5574$.

$f(\frac{3\pi}{4}) = -1$. $\quad f(2) = \operatorname{tg} 2 \approx -2{,}1850$.

$\Rightarrow$ • $f(0) = 0$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je otvorená súvislá množina.

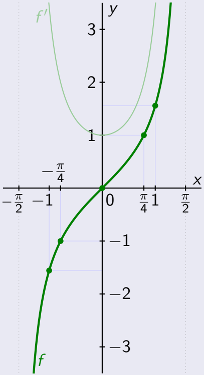
$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

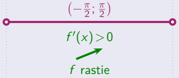
$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty.$

$f(0) = 0. \quad f\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm 1.$

$f(\pm 1) = \operatorname{tg}(\pm 1) \approx \pm 1{,}5574.$

$\Rightarrow$ • Na $D(f)$ neexistujú extrémy.





$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

- Definičný obor $D(f) = \langle 0; \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $\frac{\pi}{2} \notin D(f)$. • $\pi \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right)$ a na $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

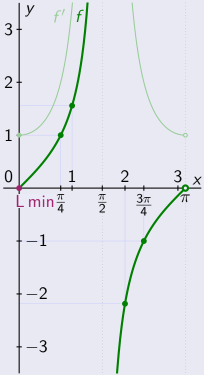
$f(0) = 0. \qquad \lim_{x \to \pi^-} f(x) = \operatorname{tg} \pi = 0.$

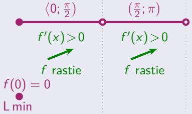
$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty.$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1. \quad f(1) = \operatorname{tg} 1 \approx 1{,}5574.$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1. \quad f(2) = \operatorname{tg} 2 \approx -2{,}1850.$

$\Rightarrow$ • $f(0) = 0$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.





Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

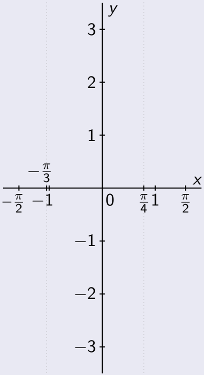
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right).$

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

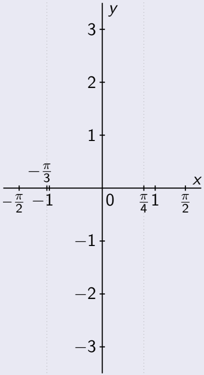
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle.$

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle.$



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}).$

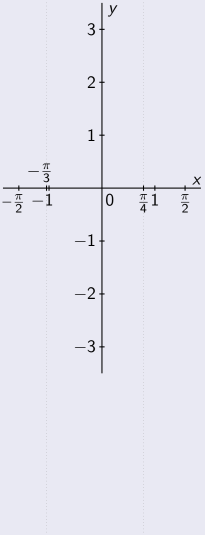
- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}).$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

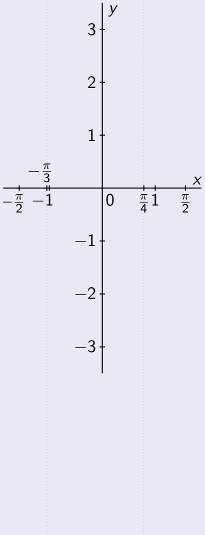
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle.$

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle.$
- f je spojitá na celom $D(f).$



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle.$

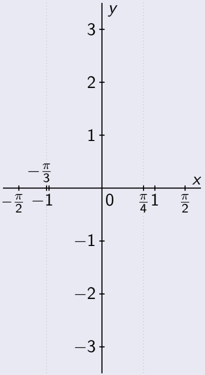
- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle.$
- f je spojitá na celom $D(f).$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

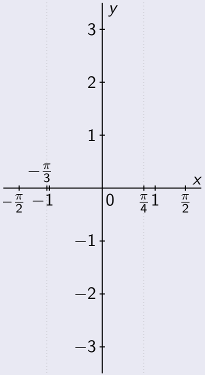
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

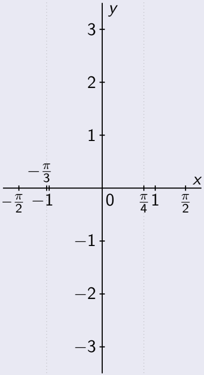


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

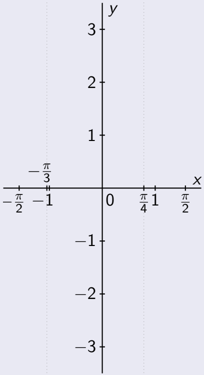
- f' je spojitá na $D(f)$.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.

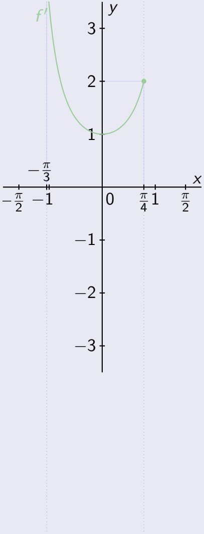


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

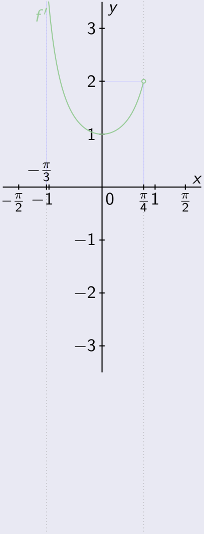
- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4})$.

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4})$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.

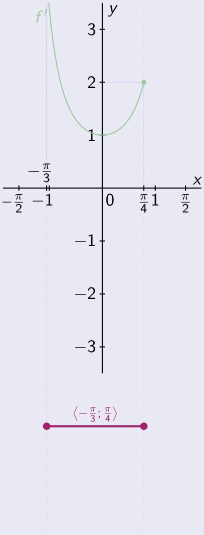


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle.$

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle.$
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

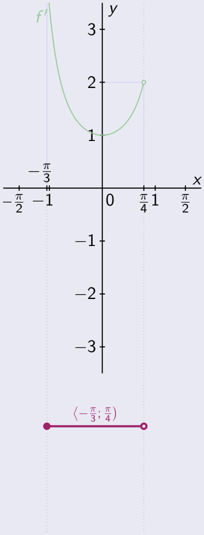
- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}).$

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}).$
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.



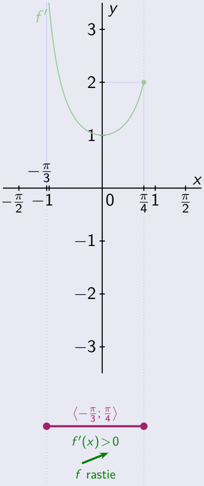
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

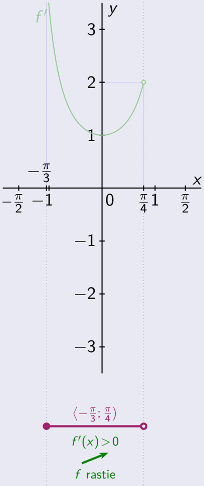


$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right)$.

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right)$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

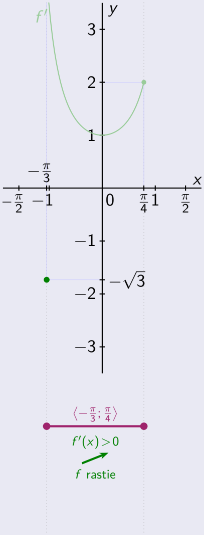
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}.$



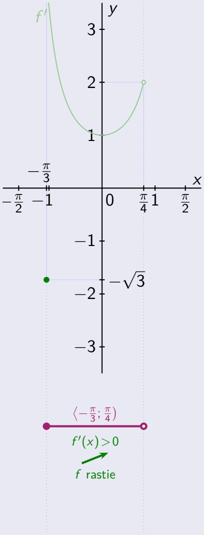
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right).$

- Definičný obor $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right).$
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

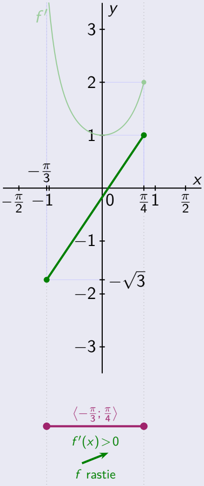
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$. $f(\frac{\pi}{4}) = 1$.



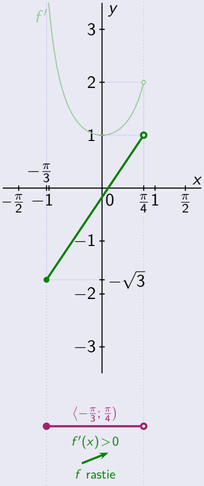
$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4})$.

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4})$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}-} f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

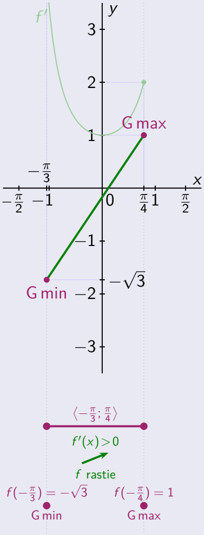
- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$. $\quad f(\frac{\pi}{4}) = 1$.

$\Rightarrow$ • $f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min.

• $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ je globálne (aj lokálne) max.



$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4})$.

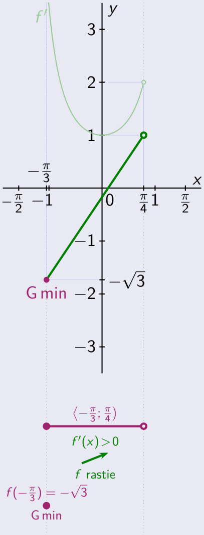
- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4})$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$. $\quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

$\Rightarrow$ • $f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle.$

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

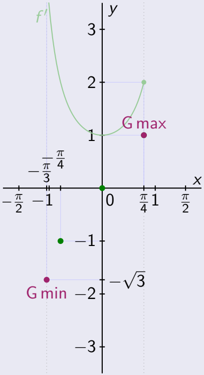
- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.

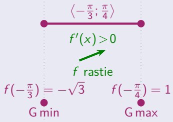
$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$. $\quad f(\frac{\pi}{4}) = 1$.
$f(0) = 0$. $\quad f(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

$\Rightarrow$ • $f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min.

• $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ je globálne (aj lokálne) max.





$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}).$

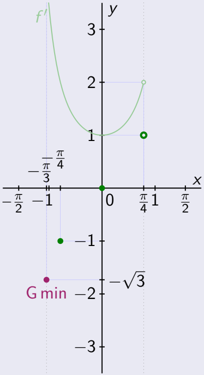
- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4})$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

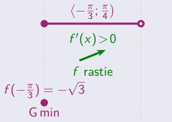
- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.

$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$. $\quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.
$f(0) = 0$. $\quad f(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

$\Rightarrow$ • $f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.





Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right\rangle.$

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je uzavretá súvislá množina.

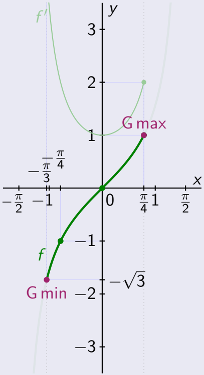
$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

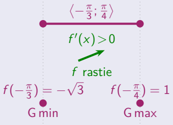
$f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$. $\quad f(\frac{\pi}{4}) = 1$.

$f(0) = 0$. $\quad f(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

$\Rightarrow$ • $f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min.

• $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ je globálne (aj lokálne) max.





$f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right).$

- Definičný obor $D(f) = \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4})$.
- f je spojitá na celom $D(f)$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pre $x \in D(f)$.

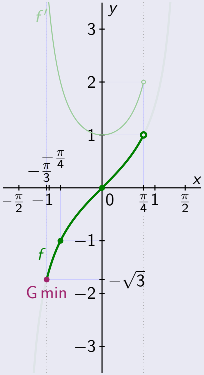
- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $D(f)$ je zľava uzavretá a sprava otvorená súvislá množina.

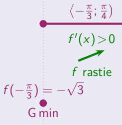
$\Rightarrow$ • f rastie na celom $D(f)$.

$f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$. $\quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

$f(0) = 0$. $\quad f(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

$\Rightarrow$ • $f(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ je globálne (aj lokálne) min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.





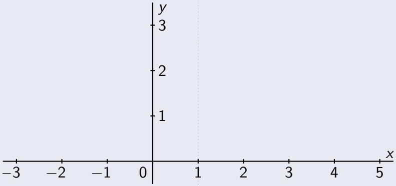
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

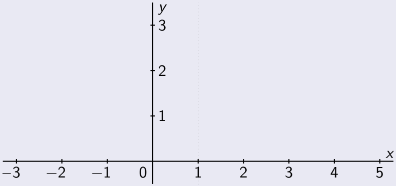
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
$= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

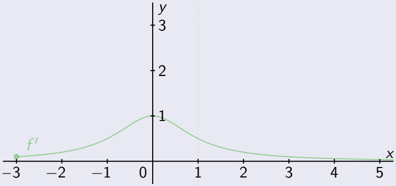
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.
- f' je spojitá na $D(f)$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.

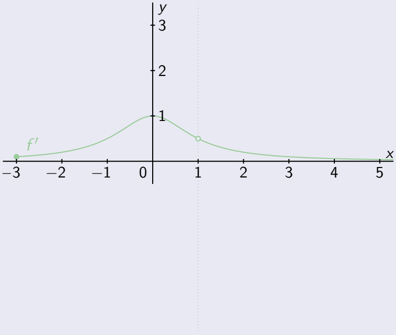


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1},\ x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$ $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$.
- $1 \notin D(f)$.



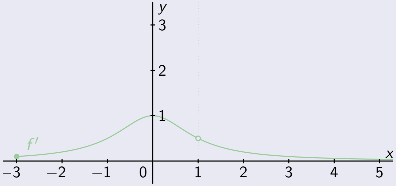
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$



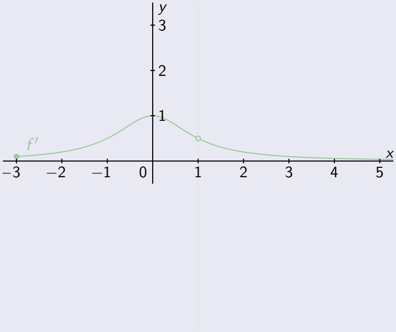
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

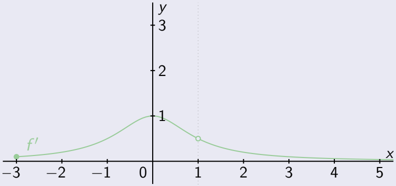
$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1},\ x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

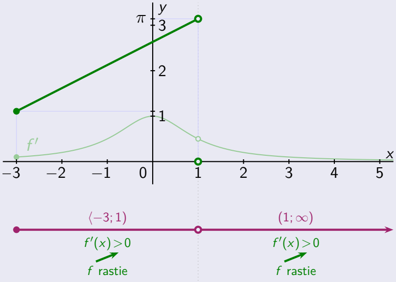
- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$

$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

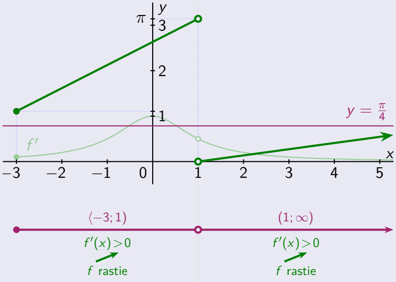
- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

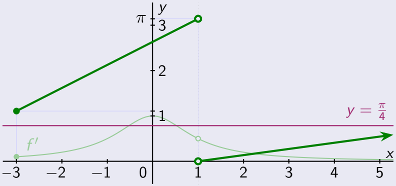
$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\dfrac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \dfrac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \dfrac{2}{2x^2+2} = \dfrac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071.$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi.$	$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$

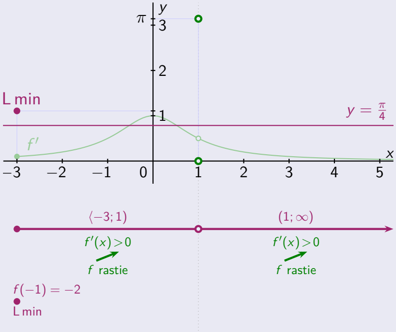
$$= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1} \text{ pre všetky } x \in D(f).$$

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071.$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi.$	$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$

$\Rightarrow$ • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$

$$= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1} \text{ pre všetky } x \in D(f).$$

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

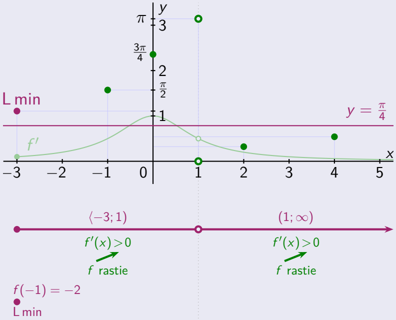
$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$

$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi$. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0$.

$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$. $f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. $f(2) = \operatorname{arccotg} 3$. $f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}$.

$\Rightarrow$ • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1},\ x \in \langle -3; \infty).$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

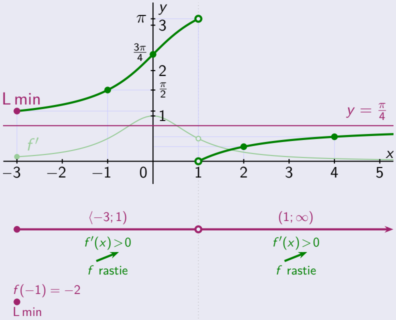
- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071.$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi.$	$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$

$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$. $f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. $f(2) = \operatorname{arccotg} 3$. $f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}$.

$\Rightarrow$ • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

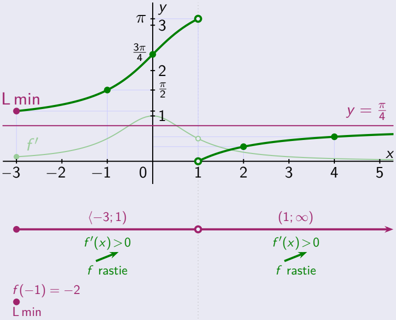
$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$

$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071$. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi$. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0$.

$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$. $f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. $f(2) = \operatorname{arccotg} 3$. $f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}$.

$\Rightarrow$ • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



$\chi(x) = 1$ pre racionálne $x \in Q$ a $\chi(x) = 0$ pre iracionálne $x \in R - Q$. [Dirichletova funkcia.]

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

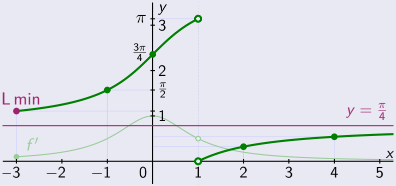
$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$

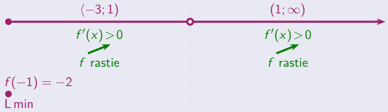
$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi$. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0$.

$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$. $f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. $f(2) = \operatorname{arccotg} 3$. $f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}$.

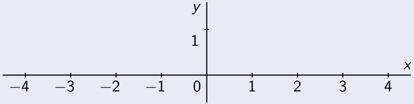
$\Rightarrow$ • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.





$\chi(x) = 1$ pre racionálne $x \in Q$ a $\chi(x) = 0$ pre iracionálne $x \in R - Q$. [Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = R$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1},\ x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\dfrac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
$= \dfrac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \dfrac{2}{2x^2+2} = \dfrac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

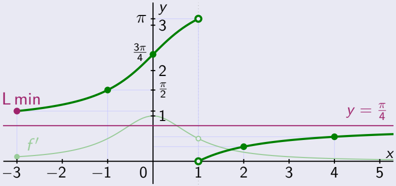
- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

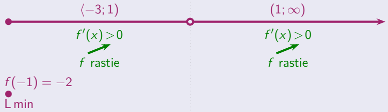
$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071$.	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi$.	$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0$.

$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$. $f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. $f(2) = \operatorname{arccotg} 3$. $f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}$.

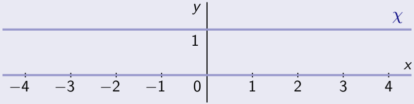
$\Rightarrow$ • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.





$\chi(x) = 1$ pre racionálne $x \in Q$ a $\chi(x) = 0$ pre iracionálne $x \in R - Q$. [Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = R$. • Funkcia χ nie je spojitá v každom bode $x \in D(\chi)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\dfrac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \dfrac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \dfrac{2}{2x^2+2} = \dfrac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

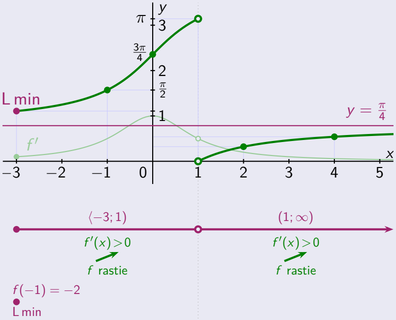
$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$

$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi.$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$

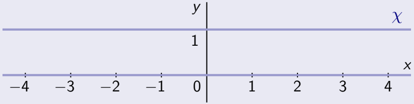
$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}.$ $f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$ $f(2) = \operatorname{arccotg} 3.$ $f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$

$\Rightarrow$ • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



$\chi(x) = 1$ pre racionálne $x \in Q$ a $\chi(x) = 0$ pre iracionálne $x \in R - Q$. [Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = R$. • Funkcia χ nie je spojitá v každom bode $x \in D(\chi)$.
- Pre všetky $x \in D(\chi)$ neexistuje $\chi'(x)$,



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

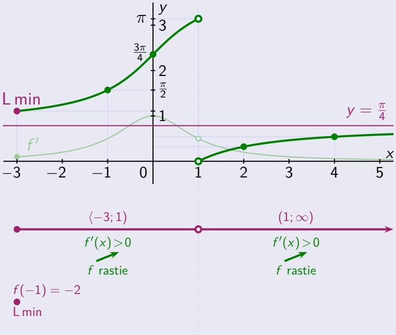
$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$

$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi$. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0$.

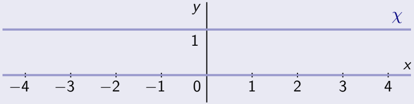
$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$. $f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. $f(2) = \operatorname{arccotg} 3$. $f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}$.

$\Rightarrow$ • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



$\chi(x) = 1$ pre racionálne $x \in Q$ a $\chi(x) = 0$ pre iracionálne $x \in R - Q$. [Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = R$. • Funkcia χ nie je spojitá v každom bode $x \in D(\chi)$.
- Pre všetky $x \in D(\chi)$ neexistuje $\chi'(x)$, t. j. extrémy pomocou derivácie $\chi'(x)$ nezistíme.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1}$, $x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$ $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

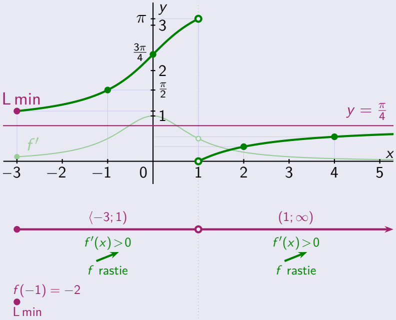
$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$

$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi.$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0.$

$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}.$ $f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$ $f(2) = \operatorname{arccotg} 3.$ $f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}.$

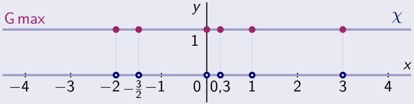
$\Rightarrow$ • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



$\chi(x) = 1$ pre racionálne $x \in Q$ a $\chi(x) = 0$ pre iracionálne $x \in R - Q$. [Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = R$. • Funkcia χ nie je spojitá v každom bode $x \in D(\chi)$.
- Pre všetky $x \in D(\chi)$ neexistuje $\chi'(x)$, t. j. extrémy pomocou derivácie $\chi'(x)$ nezistíme.

- $\chi(x) = 1$ pre všetky $x \in Q$ je globálne (aj lokálne) max.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x+1}{x-1},\ x \in \langle -3; \infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3; 1) \cup (1; \infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
  $= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x \in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in D(f)$. • $1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3; 1)$ a na intervale $(1; \infty)$.

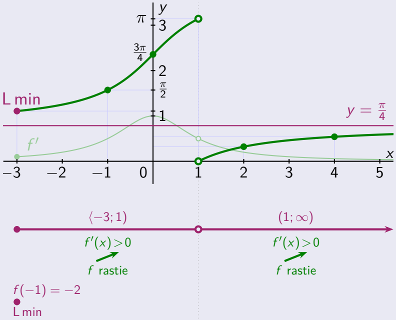
$x \in \langle -3; 1)$	$x \in (1; \infty)$

$f(-3) = \operatorname{arccotg} \frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \approx 1{,}1071$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi$. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg} \infty = 0$.

$f(-1) = \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$. $f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. $f(2) = \operatorname{arccotg} 3$. $f(4) = \operatorname{arccotg} \frac{5}{3}$.

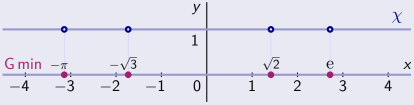
$\Rightarrow$ • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



$\chi(x) = 1$ pre racionálne $x \in Q$ a $\chi(x) = 0$ pre iracionálne $x \in R-Q$. [Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = R$. • Funkcia χ nie je spojitá v každom bode $x \in D(\chi)$.
- Pre všetky $x \in D(\chi)$ neexistuje $\chi'(x)$, t. j. extrémy pomocou derivácie $\chi'(x)$ nezistíme.

• $\chi(x) = 0$ pre všetky $x \in R-Q$ je globálne (aj lokálne) min.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = \operatorname{arccotg}\frac{x+1}{x-1}$, $x\in\langle -3;\infty)$.

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = \langle -3;1)\cup(1;\infty)$.
- Derivácia $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1-x-1)}{(x-1)^2+(x+1)^2}$
$= \frac{2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$ pre všetky $x\in D(f)$.

- f' je spojitá na $D(f)$. • $f'(x)>0$ pre všetky $x\in D(f)$. • $1\notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f rastie na intervale $\langle -3;1)$ a na intervale $(1;\infty)$.

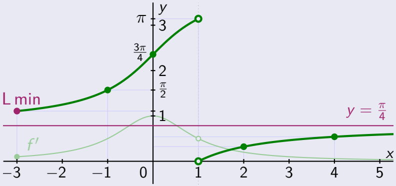
$x\in\langle -3;1)$	$x\in(1;\infty)$

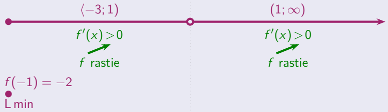
$f(-3) = \operatorname{arccotg}\frac{-2}{-4} = \operatorname{arccotg}\frac{1}{2} \approx 1{,}1071$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arccotg}1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \operatorname{arccotg}\frac{2}{0^-} = \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi$. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \operatorname{arccotg}\frac{2}{0^+} = \operatorname{arccotg}\infty = 0$.

$f(-1) = \operatorname{arccotg}0 = \frac{\pi}{2}$. $f(0) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. $f(2) = \operatorname{arccotg}3$. $f(4) = \operatorname{arccotg}\frac{5}{3}$.

$\Rightarrow$ • $f(-3)$ je lokálne min a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.

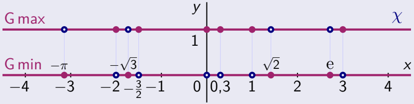




$\chi(x) = 1$ pre racionálne $x\in Q$ a $\chi(x) = 0$ pre iracionálne $x\in R-Q$. [Dirichletova funkcia.]

- $D(\chi) = R$. • Funkcia χ nie je spojitá v každom bode $x\in D(\chi)$.
- Pre všetky $x\in D(\chi)$ neexistuje $\chi'(x)$, t. j. extrémy pomocou derivácie $\chi'(x)$ nezistíme.

- $\chi(x) = 1$ pre všetky $x\in Q$ je globálne (aj lokálne) max.
- $\chi(x) = 0$ pre všetky $x\in R-Q$ je globálne (aj lokálne) min.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f''(c) < 0$.

$\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f''(c) > 0$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]

Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$

- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f''(c) < 0$. [$f''(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f''(c) > 0$. [$f''(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x$, $x \in R$.

a

Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

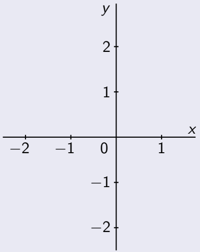
Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.

a



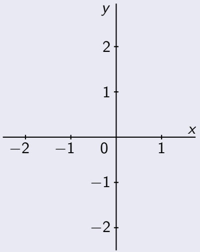
Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f''(c) < 0$. [$f''(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f''(c) > 0$. [$f''(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x-\frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.



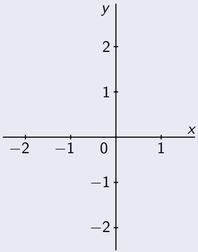
Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0,$ a



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

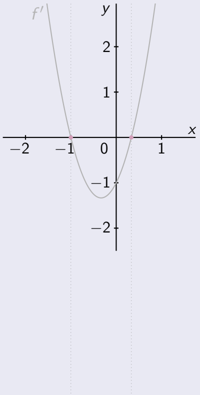
Bod $c \in D(f)$ je **stacionárny** funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f''(c) < 0$. [$f''(c) < 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f''(c) > 0$. [$f''(c) > 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.

- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]



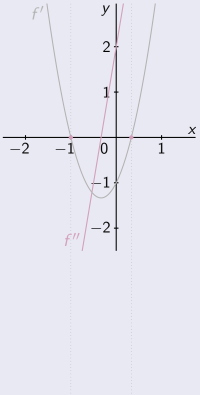
Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f''(c) < 0$. [$f''(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f''(c) > 0$. [$f''(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x$, $x \in R$.

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

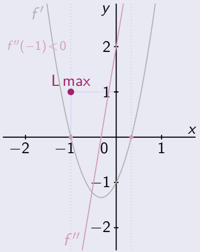
Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x$, $x \in R$.

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

  - $f''(-1) = -4 < 0$. $\Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

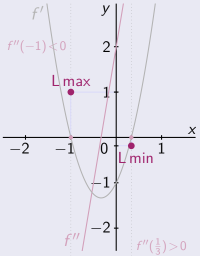
Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

- $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.
- $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.



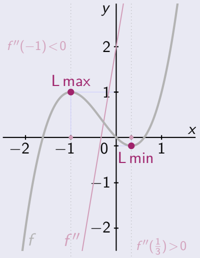
Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f''(c) < 0$. [$f'(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f''(c) > 0$. [$f'(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x$, $x \in R$.

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]
  - $f''(-1) = -4 < 0$. $\Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.
  - $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0$. $\Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

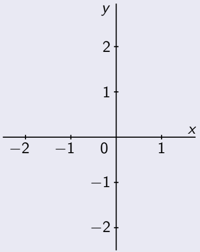
Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x$, $x \in R$.

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

- $f''(-1) = -4 < 0$. $\Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.
- $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0$. $\Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]

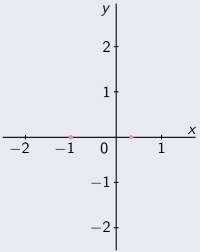
• $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

- $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.
- $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f''(c) < 0$. [$f''(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f''(c) > 0$. [$f''(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

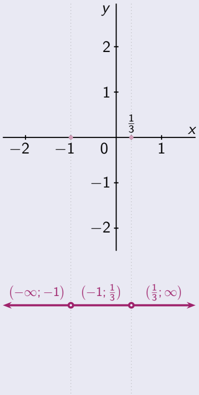
$f(x) = x^3 + x^2 - x$, $x \in R$.

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

- $f''(-1) = -4 < 0$. $\Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.
- $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0$. $\Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R.$

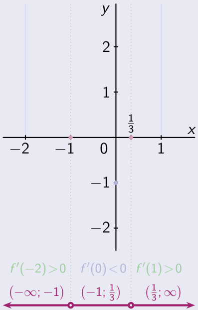
- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

• $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.

• $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0.$	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0.$	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x$, $x \in R$.

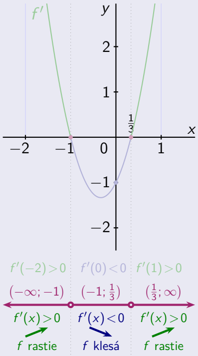
- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

• $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.

• $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0$.	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$.	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$.
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f''(c) < 0$. [$f'(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f''(c) > 0$. [$f'(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R.$

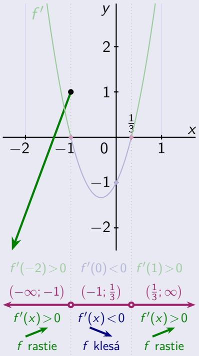
- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x-\frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $(x+1)(x-\frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

- $f''(-1) = -4 < 0$. $\Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.
- $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0$. $\Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0$.	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$.	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$.
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty(1 + 0 - 0) = -\infty$. $f(-1) = 1$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R.$

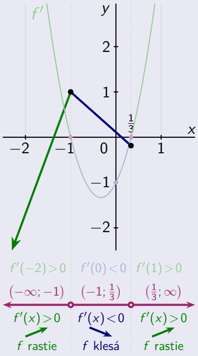
- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

- $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.
- $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0$.	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$.	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$.
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.

$f(-1) = 1$. $\quad f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f''(c) < 0$. [$f''(c) < 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f''(c) > 0$. [$f''(c) > 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R.$

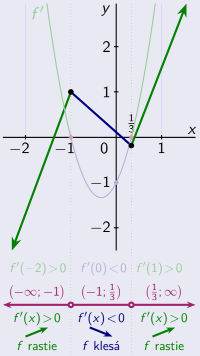
- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x+1)(x-\frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

- $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.
- $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0.$	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0.$	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0.$
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.

$f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$. $\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty(1 + 0 - 0) = \infty.$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R$.

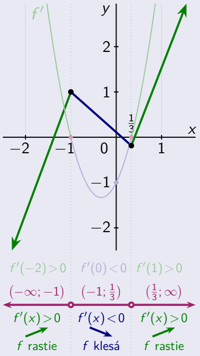
- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x-\frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $(x+1)(x-\frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

- $f''(-1) = -4 < 0. \Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.
- $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0$.	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0$.	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$.
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1+0-0) = -\infty$. $f(-1) = 1$. $f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty(1+0-0) = \infty$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R$.

- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x - \frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

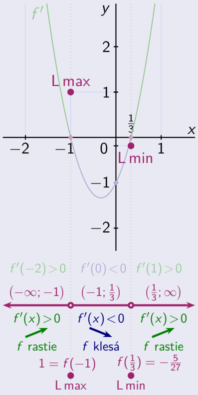
- $f''(-1) = -4 < 0.$ $\Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.
- $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0.$ $\Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0.$	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0.$	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0.$
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty(1 + 0 - 0) = -\infty.$ $f(-1) = 1.$ $f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}.$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty(1 + 0 - 0) = \infty.$

• $f(-1) = 1$ je lokálne max. • $f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$ je lokálne min.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c\in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c)=0$ a existuje konečná $f''(c)\neq 0$.

$\Rightarrow$ • $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c)<0$. [$f'(c)<0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]

• $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c)>0$. [$f'(c)>0. \Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x)=x^3+x^2-x,\ x\in R.$

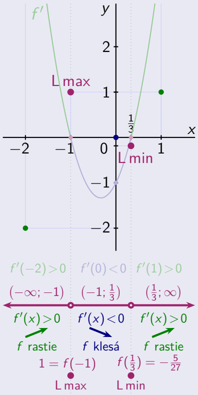
- Funkcia $f(x)=x^3+x^2-x=x^3(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f)=R$.
- Derivácia $f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)=3(x+1)(x-\frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x)=6x+2$ je definovaná pre všetky $x\in D(f)$.
- $f'(x)=0. \Leftrightarrow$ • $(x+1)(x-\frac{1}{3})=0$, t. j. $x=-1$, resp. $x=\frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x=-1$ a $x=1$.]

- $f''(-1)=-4<0. \Rightarrow$ • $f(-1)=-1+1-(-1)=1$ je ostré lokálne max.
- $f''(\frac{1}{3})=4>0. \Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-1=-\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty;-1)$, $(-1;\frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3};\infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x\in(-\infty;-1)$	$x\in(-1;\frac{1}{3})$	$x\in(\frac{1}{3};\infty)$
$f'(-2)=12-4=7>0.$	$f'(0)=0+0-1=-1<0.$	$f'(1)=3+2-1=4>0.$
$f'(x)>0$, t. j. f rastie.	$f'(x)<0$, t. j. f klesá.	$f'(x)>0$, t. j. f rastie.
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty(1+0-0)=-\infty.$	$f(-1)=1.$ $f(\frac{1}{3})=-\frac{5}{27}.$	$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty(1+0-0)=\infty.$
$f(-2)=-8+4-(-2)=-2.$	$f(0)=0+0-0=0.$	$f(1)=1+1-1=1.$

• $f(-1)=1$ je lokálne max. • $f(\frac{1}{3})=-\frac{5}{27}$ je lokálne min.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Lokálne extrémy

Bod $c \in D(f)$ je stacionárny funkcie f, t. j. $f'(c) = 0$ a existuje konečná $f''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lokálne maximum pre $f'(c) < 0$. [$f'(c) < 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne max.]
- $f(c)$ je ostré lokálne minimum pre $f'(c) > 0$. [$f'(c) > 0$. $\Rightarrow$ V bode c je ostré lokálne min.]

$f(x) = x^3 + x^2 - x,\ x \in R.$

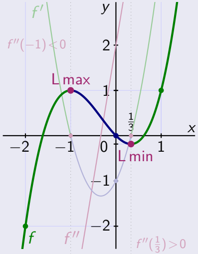
- Funkcia $f(x) = x^3 + x^2 - x = x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1) = 3(x+1)(x-\frac{1}{3})$ je spojitá na $D(f)$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x + 2$ je definovaná pre všetky $x \in D(f)$.
- $f'(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $(x+1)(x-\frac{1}{3}) = 0$, t. j. $x = -1$, resp. $x = \frac{1}{3}$. [Stacionárne body $x = -1$ a $x = 1$.]

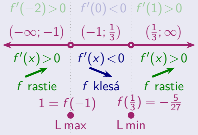
- $f''(-1) = -4 < 0.$ $\Rightarrow$ • $f(-1) = -1 + 1 - (-1) = 1$ je ostré lokálne max.
- $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0.$ $\Rightarrow$ • $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{5}{27}$ je ostré lokálne min.

Funkcia f' nemení znamienko na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$. [Stačí overiť v jednom bode intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f'(-2) = 12 - 4 = 7 > 0.$	$f'(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0.$	$f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 > 0.$
$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.	$f'(x) < 0$, t. j. f klesá.	$f'(x) > 0$, t. j. f rastie.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty(1 + 0 - 0) = -\infty.$	$f(-1) = 1.$ $\quad f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}.$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty(1 + 0 - 0) = \infty.$
$f(-2) = -8 + 4 - (-2) = -2.$	$f(0) = 0 + 0 - 0 = 0.$	$f(1) = 1 + 1 - 1 = 1.$

- $f(-1) = 1$ je lokálne max.
- $f(\frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$ je lokálne min.





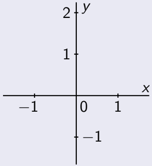
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

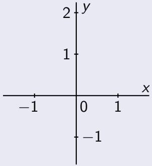
- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$

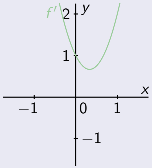


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$

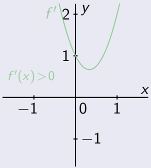
$$= 3(x - \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{6}{9} \geq \tfrac{6}{9} = \tfrac{2}{3}$$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

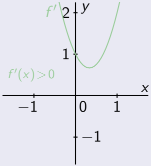
- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$ $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

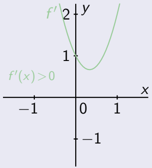


- Stacionárne body neexistujú.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.



- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.

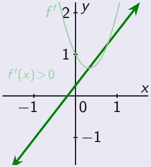
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$
- Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



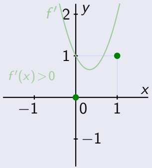
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1-1+1 = 1.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$
- Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

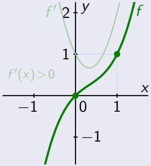
$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$

$$= 3(x - \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{6}{9} \geq \tfrac{6}{9} = \tfrac{2}{3} > 0$$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1-1+1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

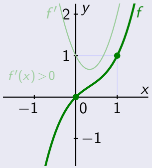
- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$
- Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.

$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2 + 1}{2},\ x \in R.$

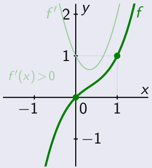
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

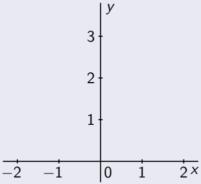
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $\quad f(0) = 0.$ $\quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2 + 1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 \text{ pre } x^2 \geq 1, \\ \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x \text{ pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).] \\ \end{cases}$



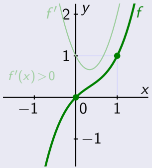
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
$= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$

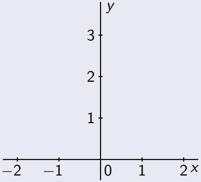
- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases}$

$[x \in (-1; 1).]$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

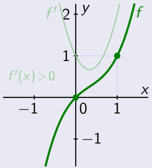
$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$

$$= 3(x - \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{6}{9} \geq \tfrac{6}{9} = \tfrac{2}{3} > 0$$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

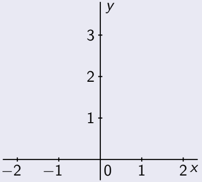
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. & [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. & [x \in (-1; 1).] \end{cases}$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

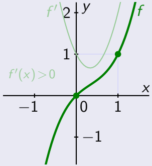
$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$

$$= 3(x - \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{6}{9} \geq \tfrac{6}{9} = \tfrac{2}{3} > 0$$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1-1+1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

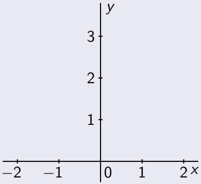
- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases}$ $[x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).]$ $[x \in (-1; 1).]$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

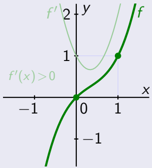
$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$

$$= 3(x - \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{6}{9} \geq \tfrac{6}{9} = \tfrac{2}{3} > 0$$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

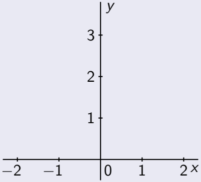
- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases}$ $[x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).]$ $[x \in (-1; 1).]$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.



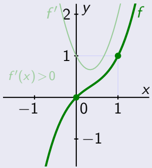
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3 \cdot \frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$

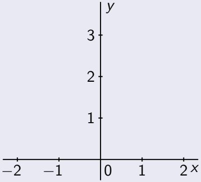
- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1).] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$.



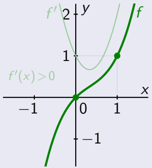
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

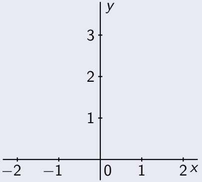
- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2 + 1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1).] \end{cases}$

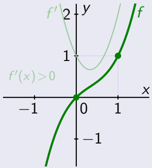
- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
$= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

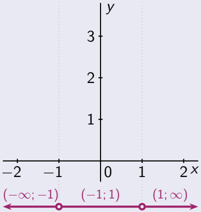
- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.

$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty).] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1;1).] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ a $(1;\infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x \in (-\infty;-1)$	$x \in (-1;1)$	$x \in (1;\infty)$



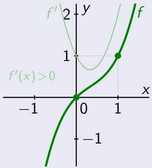
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1-1+1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.

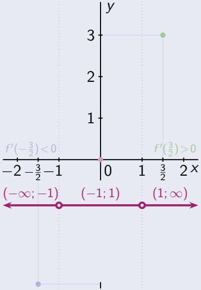


$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2 + 1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases}$ $[x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).]$ $[x \in (-1; 1).]$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0.$	$f'(x) = 0.$	$f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$



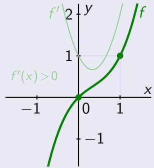
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.

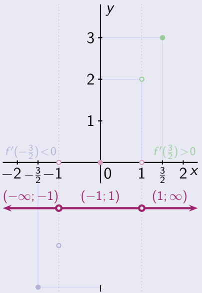


$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. & [x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty).] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. & [x\in(-1;1).] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ a $(1;\infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x\in(-\infty;-1)$	$x\in(-1;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0.$ $f'_-(-1) = -2.$	$f'_+(-1) = 0.$ $f'(x) = 0.$ $f'_-(1) = 0.$	$f'_+(1) = 2.$ $f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$



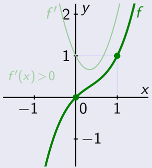
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1-1+1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.

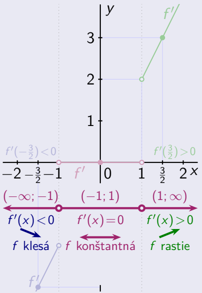


$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases}$ $[x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty).]$ $[x \in (-1;1).]$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ a $(1;\infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x \in (-\infty;-1)$	$x \in (-1;1)$	$x \in (1;\infty)$
$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0.$	$f'_-(-1) = -2.$ $f'_+(-1) = 0.$ $f'(x) = 0.$ $f'_-(1) = 0.$ $f'_+(1) = 2.$	$f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$
$f'(x) = 2x < 0$, t. j. f klesá.	f je konštantná.	$f'(x) = 2x > 0$, t. j. f rastie.



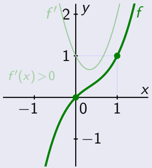
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $\quad f(0) = 0.$ $\quad f(1) = 1-1+1 = 1.$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1; 1).] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0.$	$f'_-(-1) = -2.$ $f'_+(-1) = 0.$ $f'(x) = 0.$ $f'_-(1) = 0.$ $f'_+(1) = 2.$	$f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$
$f'(x) = 2x < 0$, t. j. f klesá.	f je konštantná.	$f'(x) = 2x > 0$, t. j. f rastie.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$

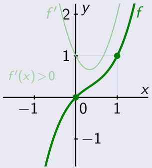
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0)=0.$ $f(1) = 1-1+1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

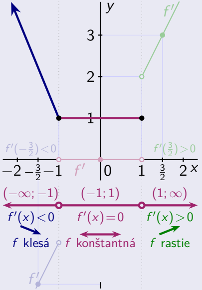
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. & [x \in (-\infty;-1)\cup(1;\infty).] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. & [x \in (-1;1).] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1.$ • $f(1) = 1.$
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ a $(1;\infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x \in (-\infty;-1)$	$x \in (-1;1)$	$x \in (1;\infty)$

$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0.$ $f'_-(-1) = -2.$ $f'_+(-1) = 0.$ $f'(x) = 0.$ $f'_-(1) = 0.$ $f'_+(1) = 2.$ $f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$

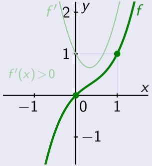
$f'(x) = 2x < 0$, t. j. f klesá. f je konštantná. $f'(x) = 2x > 0$, t. j. f rastie.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

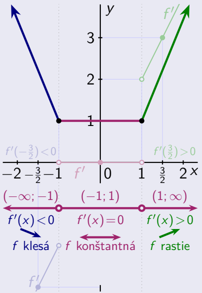


$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1 - 0 + 0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1 - 0 + 0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.

$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases}$ $[x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).]$ $[x \in (-1; 1).]$



- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0.$ $f'_-(-1) = -2.$	$f'_+(-1) = 0.$ $f'(x) = 0.$ $f'_-(1) = 0.$	$f'_+(1) = 2.$ $f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$
$f'(x) = 2x < 0$, t. j. f klesá.	f je konštantná.	$f'(x) = 2x > 0$, t. j. f rastie.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty.$

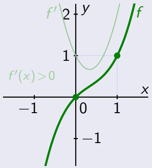
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



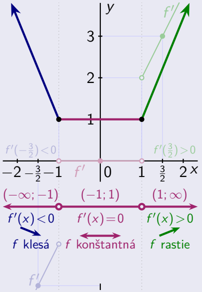
$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2 + 1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases}$ $[x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).]$ $[x \in (-1; 1).]$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0.$ $f'_-(-1) = -2.$	$f'_+(-1) = 0.$ $f'(x) = 0.$ $f'_-(1) = 0.$	$f'_+(1) = 2.$ $f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$
$f'(x) = 2x < 0$, t. j. f klesá.	f je konštantná.	$f'(x) = 2x > 0$, t. j. f rastie.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty.$



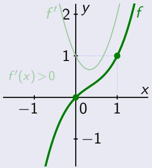
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



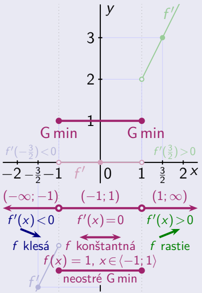
$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x \in (-\infty;-1)\cup(1;\infty).] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x \in (-1;1).] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ a $(1;\infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x \in (-\infty;-1)$	$x \in (-1;1)$	$x \in (1;\infty)$
$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0.$	$f'_-(-1) = -2.$ $f'_+(-1) = 0.$ $f'(x) = 0.$ $f'_-(1) = 0.$ $f'_+(1) = 2.$	$f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$
$f'(x) = 2x < 0$, t. j. f klesá.	f je konštantná.	$f'(x) = 2x > 0$, t. j. f rastie.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$ $f(x) = 1$ je neostré G min pre $x \in \langle -1; 1\rangle$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty.$



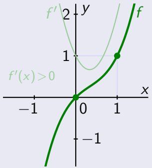
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $f(0) = 0.$ $f(1) = 1-1+1 = 1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



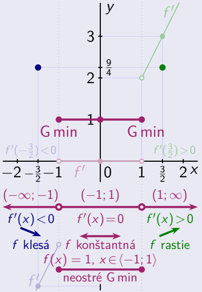
$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2+1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$ • $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \end{cases}$ $[x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty).]$ $[x \in (-1; 1).]$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0.$	$f'_-(-1) = -2.$ $f'_+(-1) = 0.$ $f'(x) = 0.$ $f'_-(1) = 0.$	$f'_+(1) = 2.$ $f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$
$f'(x) = 2x < 0$, t. j. f klesá.	f je konštantná.	$f'(x) = 2x > 0$, t. j. f rastie.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$ $f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}.$ $f(x) = 1$ je neostré G min pre $x \in \langle -1; 1 \rangle$. $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty.$



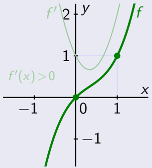
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

$f(x) = x^3 - x^2 + x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = x^3 - x^2 + x = x^3(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ je spojitá na $D(f) = R$.
- Derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}) + 1 - 3\cdot\frac{1}{9}$
  $= 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{6}{9} \geq \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$ je kladná a spojitá na $D(f)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty(1-0+0) = -\infty.$ $\quad f(0) = 0.$ $\quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1.$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty(1-0+0) = \infty.$

- Stacionárne body neexistujú. $\Rightarrow$ • Funkcia f rastie na celom svojim $D(f)$.



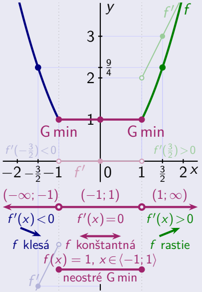
$f(x) = \frac{|x^2-1| + x^2 + 1}{2},\ x \in R.$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1+x^2+1}{2} = x^2 & \text{pre } x^2 \geq 1, \\ \frac{1-x^2+x^2+1}{2} = 1 & \text{pre } x^2 \leq 1. \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} [x^2]' = 2x & \text{pre } x^2 > 1. \quad [x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty).] \\ [0]' = 0 & \text{pre } x^2 < 1. \quad [x\in(-1;1).] \end{cases}$

- Funkcia $f(x) \geq 1$ je spojitá na $D(f) = R$. • $f(-1) = 1$. • $f(1) = 1$.
- Funkcia f' je spojitá a nemení znamienko na $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ a $(1;\infty)$. • $f'(\pm 1)$ neexistujú.

$x\in(-\infty;-1)$	$x\in(-1;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f'(-\frac{3}{2}) = -3 < 0.$	$f'_-(-1) = -2.$ $f'_+(-1) = 0.$ $f'(x) = 0.$ $f'_-(1) = 0.$ $f'_+(1) = 2.$	$f'(\frac{3}{2}) = 2 > 0.$
$f'(x) = 2x < 0$, t. j. f klesá.	f je konštantná.	$f'(x) = 2x > 0$, t. j. f rastie.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$ $\quad f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}.$ $\quad f(x) = 1$ je neostré G min pre $x \in \langle -1; 1\rangle$. $\quad f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}.$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty.$

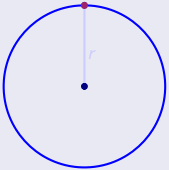


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

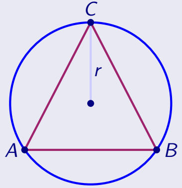
Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

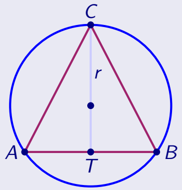
Označme: • Vpísaný trojuholník ABC.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

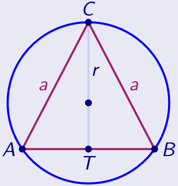
Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r>0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

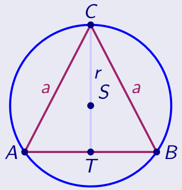
Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC|=|BC|=a\in(0;2r)$.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

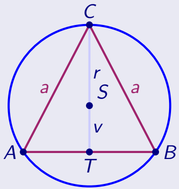
Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice.



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte **rovnoramenný trojuholník** s maximálnym obsahom P.

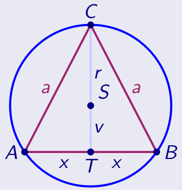
Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC.
- T stred základne AB.
- Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
- S stred opísanej kružnice.
- Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$



Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC.
- T stred základne AB.
- Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
- S stred opísanej kružnice.
- Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

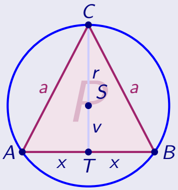


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC.
- T stred základne AB.
- Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
- S stred opísanej kružnice.
- Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka P

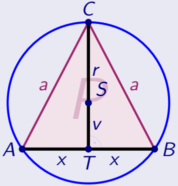


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

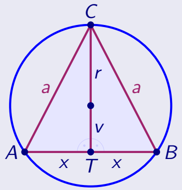


Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC.
- T stred základne AB.
- Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
- S stred opísanej kružnice.
- Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



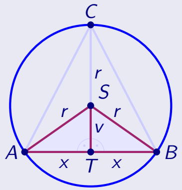
Trojuholníky ATC, BTC sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



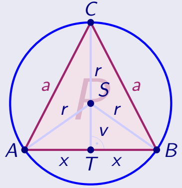
Trojuholníky ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:
• $v = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



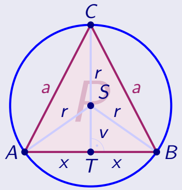
Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

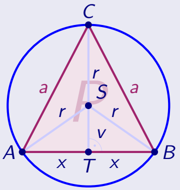


Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:
• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r>0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC|=|BC|=a\in(0;2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST|=v\in(0;r)$ a $|AT|=|BT|=x\in(0;r)$.
$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P=\frac{|CT|\cdot|AB|}{2}=\frac{2x(r+v)}{2}=x(r+v)$ pre $x,v\in(0;r)$.



Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

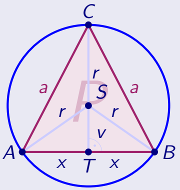
• $a=\sqrt{(r+v)^2+x^2}$. • $v=\sqrt{r^2-x^2}$. $\Rightarrow$ • $P=x(r+\sqrt{r^2-x^2})$ pre $x\in(0;r)$.

• max P znamená maximalizovať funkciu $P(x)=xr+x\sqrt{r^2-x^2}=xr+x(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x\in(0;r)$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.

• max P znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

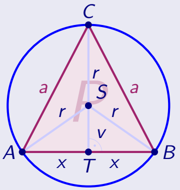
• $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + (r^2-x^2) - x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x \in (0; r)$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r>0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC.
- T stred základne AB.
- Ramená $|AC|=|BC|=a\in(0;2r)$.
- S stred opísanej kružnice.
- Dĺžky úsečiek $|ST|=v\in(0;r)$ a $|AT|=|BT|=x\in(0;r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P=\frac{|CT|\cdot|AB|}{2}=\frac{2x(r+v)}{2}=x(r+v)$ pre $x,v\in(0;r)$.



Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

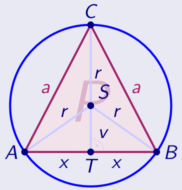
- $a=\sqrt{(r+v)^2+x^2}$. • $v=\sqrt{r^2-x^2}$. $\Rightarrow$ • $P=x(r+\sqrt{r^2-x^2})$ pre $x\in(0;r)$.
  - $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x)=xr+x\sqrt{r^2-x^2}=xr+x(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x\in(0;r)$.

- $P'(x)=r+(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{x\cdot(-2x)}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{r\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2)-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x\in(0;r)$.
- $P'(x)=0$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.

• $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

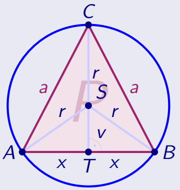
• $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + (r^2-x^2) - x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

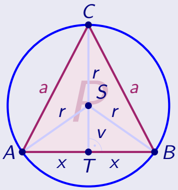


Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:
• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
• $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + (r^2-x^2) - x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x \in (0; r)$.
• $P'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.
$\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.



Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.

• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.

• $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.

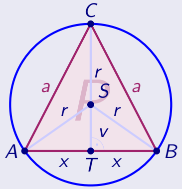
• $P'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.

$\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.

$\Rightarrow$ • Posledná rovnica má 4 riešenia 0, 0, $\pm\frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.



Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC.
- T stred základne AB.
- Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
- S stred opísanej kružnice.
- Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
  - $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

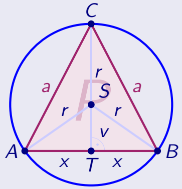
- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + (r^2-x^2) - x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.
  - $\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.
  - $\Rightarrow$ • Posledná rovnica má 4 riešenia $0,\ 0,\ \pm\frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.

- $P''(x) = \left[r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$

pre všetky $x \in (0; r)$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r>0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.



Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC|=|BC|=a\in(0;2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST|=v\in(0;r)$ a $|AT|=|BT|=x\in(0;r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P=\frac{|CT|\cdot|AB|}{2}=\frac{2x(r+v)}{2}=x(r+v)$ pre $x,v\in(0;r)$.

Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a=\sqrt{(r+v)^2+x^2}$. • $v=\sqrt{r^2-x^2}$. $\Rightarrow$ • $P=x(r+\sqrt{r^2-x^2})$ pre $x\in(0;r)$.

• $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x)=xr+x\sqrt{r^2-x^2}=xr+x(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x\in(0;r)$.

• $P'(x)=r+(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{x\cdot(-2x)}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{r\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2)-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x\in(0;r)$.

• $P'(x)=0.$ $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2=0.$ $\Leftrightarrow$ • $2x^2-r^2=r\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2(r^2-x^2)}$.

$\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4-4x^2r^2+r^4=r^4-r^2x^2$, t. j. $0=4x^4-3x^2r^2=x^2(x^2-3r^2)$.

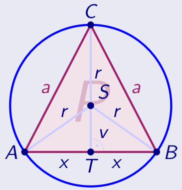
$\Rightarrow$ • Posledná rovnica má 4 riešenia $0,\ 0,\ \pm\frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x=\frac{\sqrt{3}r}{2}\in(0;r)$.

• $P''(x)=\left[r+(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]'=0+\frac{-2x}{2}(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-2x(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}-\left(-\frac{x^2\cdot(-2x)}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$

$=-x\sqrt{r^2-x^2}-\frac{2x}{\sqrt{r^2-x^2}}-\frac{x^3}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}}<0$ pre všetky $x\in(0;r)$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.



Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.

• max P znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + (r^2-x^2) - x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.

$\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.

$\Rightarrow$ • Posledná rovnica má 4 riešenia $0,\ 0,\ \pm\frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.

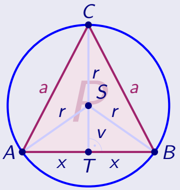
• $P''(x) = \left[r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$

$= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2-x^2}} - \frac{x^3}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.

• $x = \frac{\sqrt{3}r}{2}$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.



Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.

Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.

• $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + (r^2-x^2) - x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.

$\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.

$\Rightarrow$ • Posledná rovnica má 4 riešenia $0, 0, \pm\frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.

• $P''(x) = \left[r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$

$= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2-x^2}} - \frac{x^3}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.

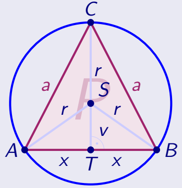
• $x = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. $\Rightarrow$ • $P'(x) = 0$. • $P''(x) < 0$.

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.

• $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.

$\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.

$\Rightarrow$ • Posledná rovnica má 4 riešenia $0, 0, \pm\frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.

• $P''(x) = \left[r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$

$= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.

• $x = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. $\Rightarrow$ • $P'(x) = 0$. • $P''(x) < 0$.

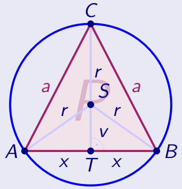
$\Rightarrow$ • Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je $P(x) = x(r+v)$

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.

• $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.

$\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.

$\Rightarrow$ • Posledná rovnica má 4 riešenia $0,\ 0,\ \pm\frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.

• $P''(x) = \left[r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$

$= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.

• $x = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. $\Rightarrow$ • $P'(x) = 0$. • $P''(x) < 0$. $\Rightarrow$ • $v^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}$, t. j. $v = \frac{r}{2}$.

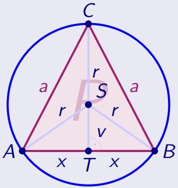
$\Rightarrow$ • Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je $P(x) = x(r+v)$

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme:
- Vpísaný trojuholník ABC.
- T stred základne AB.
- Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
- S stred opísanej kružnice.
- Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

- $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
- $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

- $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + (r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x \in (0; r)$.
- $P'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.

  $\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.

  $\Rightarrow$ • Posledná rovnica má 4 riešenia $0, 0, \pm\frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.

- $P''(x) = \left[r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$

  $= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2-x^2}} - \frac{x^3}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.

- $x = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. $\Rightarrow$ • $P'(x) = 0$. • $P''(x) < 0$. $\Rightarrow$ • $v^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}$, t. j. $v = \frac{r}{2}$.

$\Rightarrow$ • Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je $P(x) = x(r+v) = \frac{\sqrt{3}r}{2}\left(r + \frac{r}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$

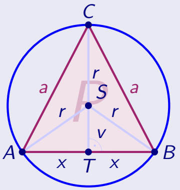
Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r>0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC|=|BC|=a\in(0;2r)$.

• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST|=v\in(0;r)$ a $|AT|=|BT|=x\in(0;r)$.

$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P=\frac{|CT|\cdot|AB|}{2}=\frac{2x(r+v)}{2}=x(r+v)$ pre $x,v\in(0;r)$.



Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a=\sqrt{(r+v)^2+x^2}$. • $v=\sqrt{r^2-x^2}$. $\Rightarrow$ • $P=x(r+\sqrt{r^2-x^2})$ pre $x\in(0;r)$.

• $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x)=xr+x\sqrt{r^2-x^2}=xr+x(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x\in(0;r)$.

• $P'(x)=r+(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{x\cdot(-2x)}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{r\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2)-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x\in(0;r)$.

• $P'(x)=0.$ $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2=0.$ $\Leftrightarrow$ • $2x^2-r^2=r\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2(r^2-x^2)}$.

$\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4-4x^2r^2+r^4=r^4-r^2x^2$, t. j. $0=4x^4-3x^2r^2=x^2(x^2-3r^2)$.

$\Rightarrow$ • Posledná rovnica má 4 riešenia $0,\ 0,\ \pm\frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x=\frac{\sqrt{3}r}{2}\in(0;r)$.

• $P''(x)=\left[r+(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]'=0+\frac{-2x}{2}(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-2x(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}-\left(-\frac{x^2\cdot(-2x)}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$

$=-x\sqrt{r^2-x^2}-\frac{2x}{\sqrt{r^2-x^2}}-\frac{x^3}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}}<0$ pre všetky $x\in(0;r)$.

• $x=\frac{\sqrt{3}r}{2}$. $\Rightarrow$ • $P'(x)=0$. • $P''(x)<0$. $\Rightarrow$ • $v^2=r^2-x^2=r^2-\frac{3r^2}{4}=\frac{r^2}{4}$, t. j. $v=\frac{r}{2}$.

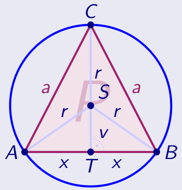
$\Rightarrow$ • $a^2=(r+\frac{r}{2})^2+\frac{3r^2}{4}=\frac{12r^2}{4}$, t. j. ramená $|AC|=|BC|=a=\sqrt{3}r$.

$\Rightarrow$ • Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je $P(x)=x(r+v)=\frac{\sqrt{3}r}{2}(r+\frac{r}{2})=\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.

Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC| = |BC| = a \in (0; 2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST| = v \in (0; r)$ a $|AT| = |BT| = x \in (0; r)$.
$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P = \frac{|CT| \cdot |AB|}{2} = \frac{2x(r+v)}{2} = x(r+v)$ pre $x, v \in (0; r)$.



Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:
• $a = \sqrt{(r+v)^2 + x^2}$. • $v = \sqrt{r^2 - x^2}$. $\Rightarrow$ • $P = x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$ pre $x \in (0; r)$.
• $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x) = xr + x\sqrt{r^2 - x^2} = xr + x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in (0; r)$.

• $P'(x) = r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + (r^2-x^2) - x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x \in (0; r)$.
• $P'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. $\Leftrightarrow$ • $2x^2 - r^2 = r\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2(r^2 - x^2)}$.
$\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4 - 4x^2r^2 + r^4 = r^4 - r^2x^2$, t. j. $0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(x^2 - 3r^2)$.
$\Rightarrow$ • Posledná rovnica má 4 riešenia $0, 0, \pm\frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x = \frac{\sqrt{3}r}{2} \in (0; r)$.

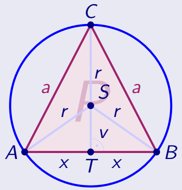
• $P''(x) = \left[r + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]' = 0 + \frac{-2x}{2}(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{x^2 \cdot (-2x)}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$
$= -x\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x}{\sqrt{r^2-x^2}} - \frac{x^3}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}} < 0$ pre všetky $x \in (0; r)$.

• $x = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. $\Rightarrow$ • $P'(x) = 0$. • $P''(x) < 0$. $\Rightarrow$ • $v^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4} = \frac{r^2}{4}$, t. j. $v = \frac{r}{2}$.
$\Rightarrow$ • $a^2 = (r + \frac{r}{2})^2 + \frac{3r^2}{4} = \frac{12r^2}{4}$, t. j. ramená $|AC| = |BC| = a = \sqrt{3}r$. • Podstava $|AB| = 2x = \sqrt{3}r$.

$\Rightarrow$ • Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je $P(x) = x(r+v) = \frac{\sqrt{3}r}{2}(r + \frac{r}{2}) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$

Monotónnosť a extrémy funkcie – Príklady

Do kružnice s polomerom $r>0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom P.



Označme: • Vpísaný trojuholník ABC. • T stred základne AB. • Ramená $|AC|=|BC|=a\in(0;2r)$.
• S stred opísanej kružnice. • Dĺžky úsečiek $|ST|=v\in(0;r)$ a $|AT|=|BT|=x\in(0;r)$.
$\Rightarrow$ • Obsah trojuholníka $P=\frac{|CT|\cdot|AB|}{2}=\frac{2x(r+v)}{2}=x(r+v)$ pre $x,v\in(0;r)$.

Trojuholníky ATC, BTC a ATS, BTS sú pravouhlé a na základe Pytagorovej vety platí:

• $a=\sqrt{(r+v)^2+x^2}$. • $v=\sqrt{r^2-x^2}$. $\Rightarrow$ • $P=x(r+\sqrt{r^2-x^2})$ pre $x\in(0;r)$.

• $\max P$ znamená maximalizovať funkciu $P(x)=xr+x\sqrt{r^2-x^2}=xr+x(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x\in(0;r)$.

• $P'(x)=r+(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{x\cdot(-2x)}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{r\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2)-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x\in(0;r)$.

• $P'(x)=0.$ $\Leftrightarrow$ • $r\sqrt{r^2-x^2}+r^2-2x^2=0.$ $\Leftrightarrow$ • $2x^2-r^2=r\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2(r^2-x^2)}$.
$\Rightarrow$ • Musí platiť: $4x^4-4x^2r^2+r^4=r^4-r^2x^2$, t. j. $0=4x^4-3x^2r^2=x^2(x^2-3r^2)$.
$\Rightarrow$ • Posledná rovnica má 4 riešenia $0,\ 0,\ \pm\frac{\sqrt{3}r}{2}$, z ktorých vyhovuje iba jeden koreň $x=\frac{\sqrt{3}r}{2}\in(0;r)$.

• $P''(x)=\left[r+(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-x^2(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]'=0+\frac{-2x}{2}(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-2x(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}-\left(-\frac{x^2\cdot(-2x)}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$
$=-x\sqrt{r^2-x^2}-\frac{2x}{\sqrt{r^2-x^2}}-\frac{x^3}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}}<0$ pre všetky $x\in(0;r)$.

• $x=\frac{\sqrt{3}r}{2}$. $\Rightarrow$ • $P'(x)=0$. • $P''(x)<0$. $\Rightarrow$ • $v^2=r^2-x^2=r^2-\frac{3r^2}{4}=\frac{r^2}{4}$, t. j. $v=\frac{r}{2}$.
$\Rightarrow$ • $a^2=(r+\frac{r}{2})^2+\frac{3r^2}{4}=\frac{12r^2}{4}$, t. j. ramená $|AC|=|BC|=a=\sqrt{3}r$. • Podstava $|AB|=2x=\sqrt{3}r$.

$\Rightarrow$ • Maximálny obsah rovnoramenného trojuholníka je $P(x)=x(r+v)=\frac{\sqrt{3}r}{2}(r+\frac{r}{2})=\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$ a trojuholník je rovnostranný.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje **konečná** derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje **konečná** derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:

- konvexná. $\Leftrightarrow$ Pre všetky $x \in I$ platí: $f''(x) > 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I: Pre všetky $x \in I$ platí:

- konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I: ⇔ Pre všetky $x \in I$ platí:

- konvexná. ⇔ $f''(x) > 0$.
- rýdzo konvexná. ⇔ $f''(x) \geq 0$.
- konkávna. ⇔ $f''(x) < 0$.
- rýdzo konkávna. ⇔ $f''(x) \leq 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:

- konvexná. $\Leftrightarrow$
- rýdzo konvexná. $\Leftrightarrow$
- konkávna. $\Leftrightarrow$
- rýdzo konkávna. $\Leftrightarrow$

Pre všetky $x \in I$ platí:

- $f''(x) > 0.$
- $f''(x) \geq 0.$
- $f''(x) < 0.$
- $f''(x) \leq 0.$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje **konečná** derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:

- konvexná. $\Leftrightarrow$
- rýdzo konvexná. $\Leftrightarrow$
- konkávna. $\Leftrightarrow$
- rýdzo konkávna. $\Leftrightarrow$

Pre všetky $x \in I$ platí:

- $f''(x) > 0$.
- $f''(x) \geq 0$.
- $f''(x) < 0$.
- $f''(x) \leq 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:
- konvexná. $\Leftrightarrow$ Pre všetky $x \in I$ platí: $f''(x) > 0$.
- rýdzo konvexná. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$.
- konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$.
- rýdzo konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:			Pre všetky $x \in I$ platí:
	• konvexná.	$\Leftrightarrow$	• $f''(x) > 0$.
	• rýdzo konvexná.	$\Leftrightarrow$	• $f''(x) \geq 0$.
	• konkávna.	$\Leftrightarrow$	• $f''(x) < 0$.
	• rýdzo konkávna.	$\Leftrightarrow$	• $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:

Funkcia f je na intervale I:		Pre všetky $x \in I$ platí:
• konvexná.	$\Leftrightarrow$	• $f''(x) > 0$.
• rýdzo konvexná.	$\Leftrightarrow$	• $f''(x) \geq 0$.
• konkávna.	$\Leftrightarrow$	• $f''(x) < 0$.
• rýdzo konkávna.	$\Leftrightarrow$	• $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:

- konvexná. $\Leftrightarrow$ Pre všetky $x \in I$ platí: $f''(x) > 0$.
- rýdzo konvexná. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$.
- konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$.
- rýdzo konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I: Pre všetky $x \in I$ platí:

- konvexná. $\Leftrightarrow$ $f''(x) > 0.$
- rýdzo konvexná. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0.$
- konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0.$
- rýdzo konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0.$

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:
- konvexná. $\Leftrightarrow$ Pre všetky $x \in I$ platí: $f''(x) > 0$.
- rýdzo konvexná. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$.
- konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$.
- rýdzo konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I: … ⇔ Pre všetky $x \in I$ platí:

- konvexná. ⇔ $f''(x) > 0$.
- rýdzo konvexná. ⇔ $f''(x) \geq 0$.
- konkávna. ⇔ $f''(x) < 0$.
- rýdzo konkávna. ⇔ $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko. [Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:

- konvexná. $\Leftrightarrow$ Pre všetky $x \in I$ platí: $f''(x) > 0$.
- rýdzo konvexná. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$.
- konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$.
- rýdzo konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

    [Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale $I \subset R$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:

- konvexná. $\Leftrightarrow$ Pre všetky $x \in I$ platí: $f''(x) > 0$.
- rýdzo konvexná. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$.
- konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$.
- rýdzo konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

    [Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale $I \subset R$.

$\Rightarrow$ • Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f''(x) = 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:

- konvexná. $\Leftrightarrow$ Pre všetky $x \in I$ platí: $f''(x) > 0$.
- rýdzo konvexná. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$.
- konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$.
- rýdzo konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko. [Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale $I \subset R$.

$\Rightarrow$
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f''(x) = 0$.
- Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f''(x) = 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I:

- konvexná. $\Leftrightarrow$ Pre všetky $x \in I$ platí: $f''(x) > 0$.
- rýdzo konvexná. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$.
- konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$.
- rýdzo konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

    [Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale $I \subset R$.

$\Rightarrow$
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f''(x) = 0$.
- Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f''(x) = 0$.

[Môžu to byť iba samostatné body, ale nemôžu tvoriť interval.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Konvexnosť a konkávnosť

Spojitá funkcia f na intervale $I \subset D(f)$, pre všetky $x \in I$ existuje konečná derivácia $f'(x)$ a existuje $f''(x)$.

Funkcia f je na intervale I: Pre všetky $x \in I$ platí:

- konvexná. $\Leftrightarrow$ $f''(x) > 0$.
- rýdzo konvexná. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$.
- konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) < 0$.
- rýdzo konkávna. $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$.

- Určiť intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti a určiť inflexné body funkcie f znamená:
  - Určiť všetky hraničné body c množiny $D(f)$.
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré platí $f''(c) = 0$. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Určiť všetky body $c \in D(f)$, pre ktoré $f''(c)$ neexistuje. [Takýto bod môže ale nemusí byť inflexný funkcie f.]
  - Tieto body určujú hranice intervalov, na ktorých funkcia f'' nemení znamienko.

    [Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.]

Funkcia f je spojitá a rýdzo konvexná, resp. rýdzo konkávna na intervale $I \subset R$.

$\Rightarrow$
- Môžu existovať body $x \in I$ také, že $f''(x) = 0$.
- Neexistuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f''(x) = 0$.

[Môžu to byť iba samostatné body, ale nemôžu tvoriť interval. Potom by bola funkcia na tomto podintervale síce konvexná, resp. konkávna, ale nie rýdzo.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

$\Rightarrow$

- $f''(c) = 0$.

[Nulová druhá derivácia.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

$\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Nulová druhá derivácia.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \text{Funkcia } y = f(x),\ x \in D(f),\ \text{vnútorný bod } c \in D(f). \\ \bullet \ \text{Funkcia } f \text{ má inflexiu v bode } c. \\ \bullet \ \text{V bode } c \text{ existuje druhá derivácia } f''(c). \end{array}\right\} \Rightarrow \bullet \ f''(c) = 0.$$

[Nulová druhá derivácia.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

$\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Nulová druhá derivácia.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f má inflexiu v bode c.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

$\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Nulová druhá derivácia.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f má inflexiu v bode c. [Bod c je inflexný.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

$\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Nulová druhá derivácia.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f má inflexiu v bode c. [Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

$\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Nulová druhá derivácia.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f má inflexiu v bode c. [Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c)$ je konečná,

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

$\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Nulová druhá derivácia.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f má inflexiu v bode c. [Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c)$ je konečná, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$, $x \neq c$ platí:

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

$\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Nulová druhá derivácia.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f má inflexiu v bode c. [Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c)$ je konečná, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$, $x \neq c$ platí:

Pre $x < c$: • $f''(x) > 0$ a pre $c < x$: • $f''(x) < 0$. $\Rightarrow$ • f má inflexiu v bode c.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

$\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Nulová druhá derivácia.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f má inflexiu v bode c. [Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c)$ je konečná, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$, $x \neq c$ platí:

Pre $x < c$: • $f''(x) > 0$ a pre $c < x$: • $f''(x) < 0$. $\Rightarrow$ • f má inflexiu v bode c.

• $f''(x) < 0$ • $f''(x) > 0$. $\Rightarrow$ • f má inflexiu v bode c.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Inflexný bod

Nutná podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$, vnútorný bod $c \in D(f)$.
- Funkcia f má inflexiu v bode c.
- V bode c existuje druhá derivácia $f''(c)$.

$\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Nulová druhá derivácia.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie. [Viď Pr I.]
- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia, a derivácia $f''(c)$ nemusí existovať. [Viď Pr I.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, existuje druhá derivácia $f''(c) = 0$ a existuje konečná $f'''(c) \neq 0$.

$\Rightarrow$ • Funkcia f má inflexiu v bode c. [Bod c je inflexný.]

Postačujúca podmienka existencie inflexie funkcie v danom bode

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f'(c)$ je konečná, okolie $O(c) \subset D(f)$ je také, že pre všetky $x \in O(c)$, $x \neq c$ platí:

Pre $x < c$: • $f''(x) > 0$ a pre $c < x$: • $f''(x) < 0$. $\Rightarrow$ • f má inflexiu v bode c.

• $f''(x) < 0$ • $f''(x) > 0$. $\Rightarrow$ • f má inflexiu v bode c.

Pre $x \neq c$: • $f''(x) > 0$, resp. • $f''(x) < 0$. $\Rightarrow$ • f nemá inflexiu v bode c.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

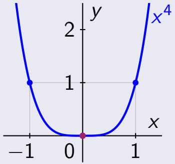
Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$
- $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



Pre všetky $x \in R$ platí:

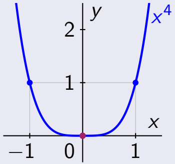
- $f(x) = x^4$.
- $f(0) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



Pre všetky $x \in R$ platí:

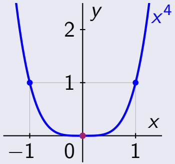
- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.

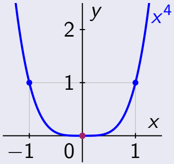
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

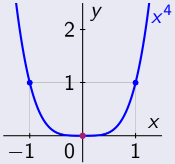
[Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

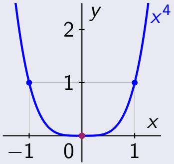
- f je konvexná na R.
  [Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na R.
  [Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

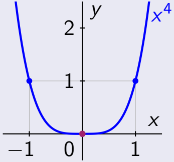
- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na R.
  [Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

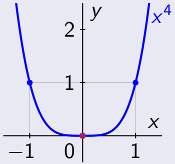
- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je inflexia. $\Rightarrow$ Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c\in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c)=0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c\in D(f)$ je vnútorný, $f''(c)=0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x\in R$ platí:

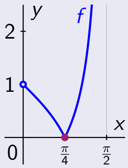
- $f(x)=x^4$.
- $f(x)=4x^3$.
- $f''(x)=12x^2$.
- $f(0)=0$.
- $f'(0)=0$.
- $f''(0)=0$.

- f je konvexná na R.
  [Pre všetky $x\in R-\{0\}$ platí $f''(x)=12x^2>0$.]

- Platnosť $f''(c)=0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c\in D(f)$ je inflexia. $\Rightarrow$ Platí $f''(c)=0$.

Vo vnútornom bode $c\in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

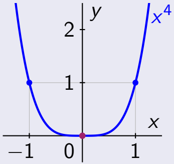
- $f(x)=|\mathrm{tg}\,x-1|$, $x\in(0;\frac{\pi}{2})$.
- $f(\frac{\pi}{4})=0$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in R$ platí:

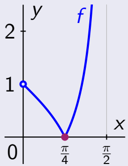
- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na R.
  [Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je inflexia. $\Rightarrow$ Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.

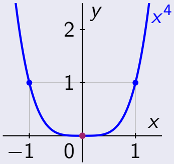


$x \in (0; \frac{\pi}{4})$	$x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in R$ platí:

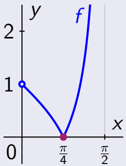
- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na R.
  [Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je inflexia. $\Rightarrow$ Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.

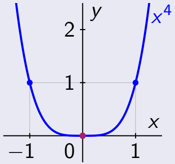


$x \in (0; \frac{\pi}{4})$	$x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$
$f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.	$f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c\in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c)=0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c\in D(f)$ je vnútorný, $f''(c)=0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x\in R$ platí:

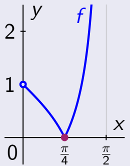
- $f(x)=x^4$.
- $f(x)=4x^3$.
- $f''(x)=12x^2$.
- $f(0)=0$.
- $f'(0)=0$.
- $f''(0)=0$.

- f je konvexná na R.
  [Pre všetky $x\in R-\{0\}$ platí $f''(x)=12x^2>0$.]

- Platnosť $f''(c)=0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c\in D(f)$ je inflexia. $\Rightarrow$ Platí $f''(c)=0$.

Vo vnútornom bode $c\in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x)=|\operatorname{tg} x-1|$, $x\in(0;\frac{\pi}{2})$.
- $f(\frac{\pi}{4})=0$.

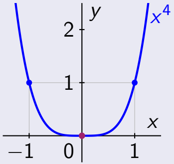


$x\in(0;\frac{\pi}{4})$	$x\in\langle\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$
$f(x)=1-\operatorname{tg} x$.	$f(x)=\operatorname{tg} x-1$.
$f'(x)=\frac{-1}{\cos^2 x}$.	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in R$ platí:

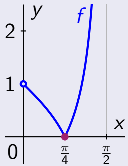
- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na R.
  [Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je inflexia. $\Rightarrow$ Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.



- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.
- $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

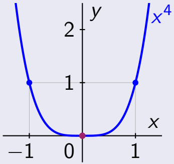
$x \in (0; \frac{\pi}{4})$	$x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$
$f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.	$f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
$f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$.	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
$f'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = -2$.	$f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$.

- $f'(\frac{\pi}{4}) \nexists$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^4$.
- $f(0) = 0$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na R.

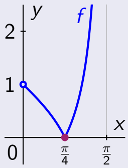
  [Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:

  V bode $c \in D(f)$ je inflexia. $\Rightarrow$ Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.



- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.
- $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

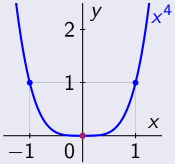
$x \in (0; \frac{\pi}{4})$	$x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$

- $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.
- $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$.
- $f'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = -2$.
- $f'(\frac{\pi}{4}) \nexists$.
- $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$.
- $f''(\frac{\pi}{4}) \nexists$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in R$ platí:

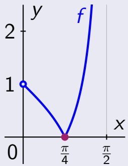
- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na R.
  [Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je inflexia. $\Rightarrow$ Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.



- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.
- $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

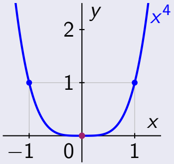
$x \in (0; \frac{\pi}{4})$	$x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$
• $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.	• $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
• $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$.	• $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
• $f'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = -2$.	• $f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2$.
• $f''(x) = \frac{-2\sin x}{\cos^2 x} < 0$.	• $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} > 0$.

- $f'(\frac{\pi}{4}) \nexists$.
- $f''(\frac{\pi}{4}) \nexists$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in R$ platí:

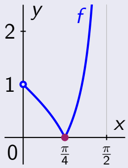
- $f(x) = x^4$. • $f(0) = 0$.
- $f(x) = 4x^3$. • $f'(0) = 0$.
- $f''(x) = 12x^2$. • $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na R.
  [Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je inflexia. $\Rightarrow$ Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.



- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$. • $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- Bod $\frac{\pi}{4}$ je inflexný.

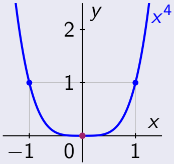
$x \in (0; \frac{\pi}{4})$	$x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$
• $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.	• $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
• $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$.	• $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
• $f'_{-}(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = -2$.	• $f'_{+}(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2$.
• $f''(x) = \frac{-2\sin x}{\cos^2 x} < 0$.	• $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} > 0$.
• f je konkávna.	• f je konvexná.

- $f'(\frac{\pi}{4}) \nexists$.
- $f''(\frac{\pi}{4}) \nexists$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in R$ platí:

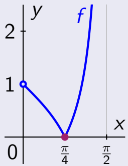
- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na R.
  [Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:
  V bode $c \in D(f)$ je inflexia. $\Rightarrow$ Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2})$.



- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.
- $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- Bod $\frac{\pi}{4}$ je inflexný.

$x \in (0; \frac{\pi}{4}\rangle$	$x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$

$x \in (0; \frac{\pi}{4}\rangle$:

- $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.
- $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$.
- $f'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = -2$.
- $f''(x) = \frac{-2\sin x}{\cos^2 x} < 0$.
- f je konkávna.

- $f'(\frac{\pi}{4}) \nexists$.
- $f''(\frac{\pi}{4}) \nexists$.

$x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$:

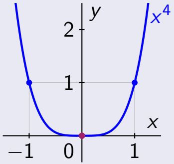
- $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$.
- $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} > 0$.
- f je konvexná.

- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

- Funkcia f má inflexiu vo vnútornom bode $c \in D(f)$ a existuje $f''(c)$. $\Rightarrow$ • $f''(c) = 0$. [Opačné tvrdenie neplatí.]

Bod $c \in D(f)$ je vnútorný, $f''(c) = 0$, ale v bode c nie je inflexia.



- Bod 0 nie je inflexný.

Pre všetky $x \in R$ platí:

- $f(x) = x^4$.
- $f(x) = 4x^3$.
- $f''(x) = 12x^2$.
- $f(0) = 0$.
- $f'(0) = 0$.
- $f''(0) = 0$.

- f je konvexná na R.

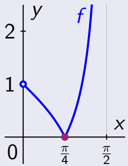
[Pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí $f''(x) = 12x^2 > 0$.]

- Platnosť $f''(c) = 0$ nezaručuje existenciu inflexie.
- To znamená, že neplatí implikácia:

V bode $c \in D(f)$ je inflexia. $\Rightarrow$ Platí $f''(c) = 0$.

Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ je inflexia, ale druhá derivácia $f''(c)$ neexistuje.

- $f(x) = |\operatorname{tg} x - 1|$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.



- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$.
- $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- Bod $\frac{\pi}{4}$ je inflexný.

$x \in (0; \frac{\pi}{4}\rangle$	$x \in \langle\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$
• $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$.	• $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$.
• $f'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}$.	• $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
• $f'_-(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = -2$.	• $f'_+(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2$.
• $f''(x) = \frac{-2\sin x}{\cos^2 x} < 0$.	• $f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} > 0$.
• f je konkávna.	• f je konvexná.

- $f'(\frac{\pi}{4})\ \nexists$.
- $f''(\frac{\pi}{4})\ \nexists$.

- Vo vnútornom bode $c \in D(f)$ môže byť inflexia a derivácia $f'(c)$ nemusí existovať.
- To znamená, že pri hľadaní inflexných bodov musíme overiť aj všetky body, v ktorých druhá derivácia neexistuje.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

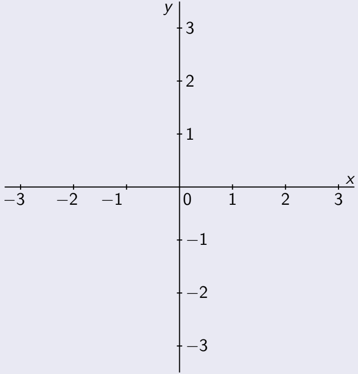
$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 01-Pr II.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.



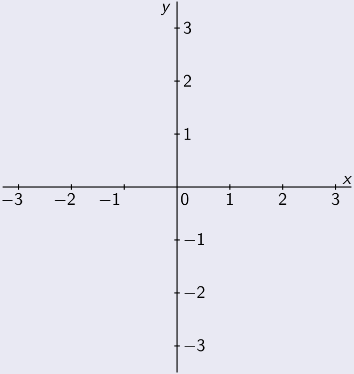
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

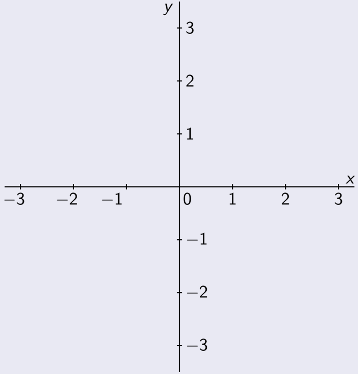
$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
  $= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

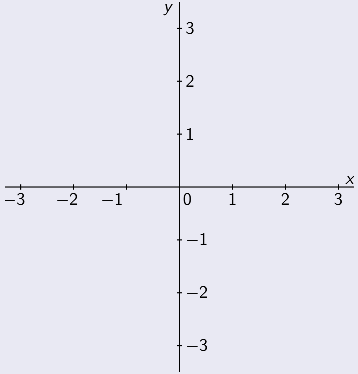
$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$ $= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$,



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

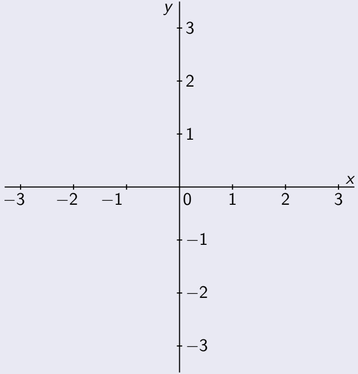
$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre deriváciе platí:

- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
$= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy.



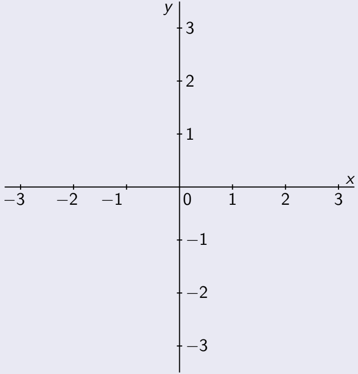
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

  Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
  $= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$
- $1 = 0$, t. j. nikdy.
- f'' je spojitá na $D(f)$,



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 01-Pr II.]

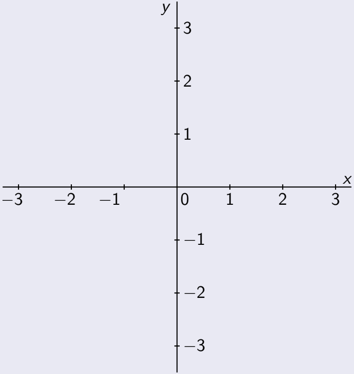
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$

$$= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$
- $1 = 0$, t. j. nikdy.
- f'' je spojitá na $D(f)$,
- $-1 \notin D(f)$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 01-Pr II.]

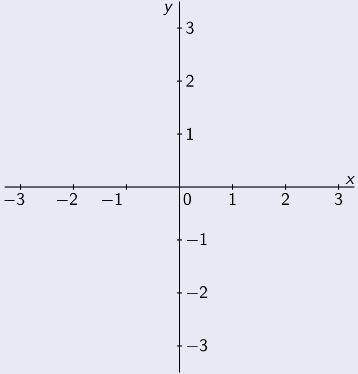
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

  Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$

  $= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

  $\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:

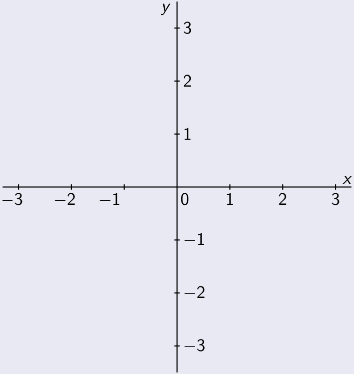
- $f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2 - (2x+x^2) \cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2 - 2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$

$$= \frac{(1+2x+x^2) - (2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

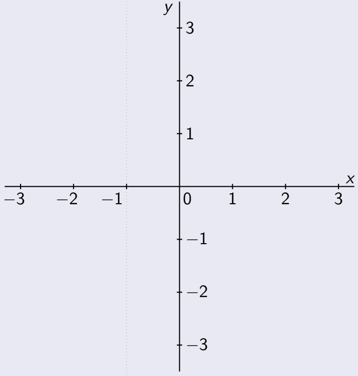
Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $$f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3} = \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

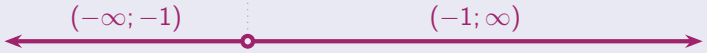
- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \infty)$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x},\ x \in R - \{-1\}.$

[Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$

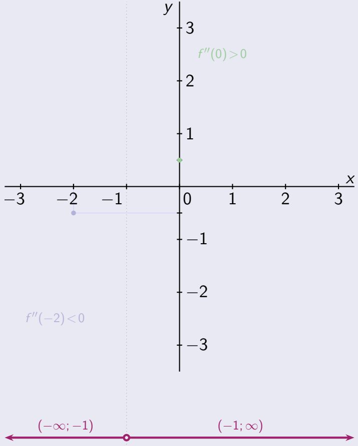
$$= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \infty)$
$f''(-2) = \frac{1}{2\cdot(-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$	$f''(0) = \frac{1}{2\cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:

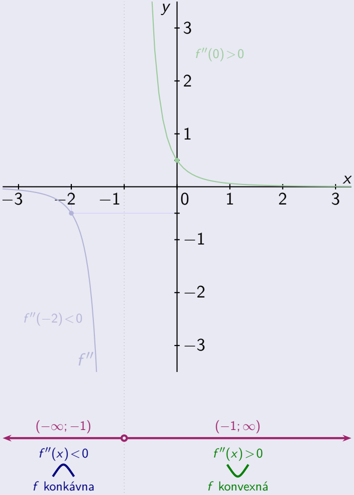
- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $$f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3} = \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \infty)$
$f''(-2) = \frac{1}{2\cdot(-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$	$f''(0) = \frac{1}{2\cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$

$$= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

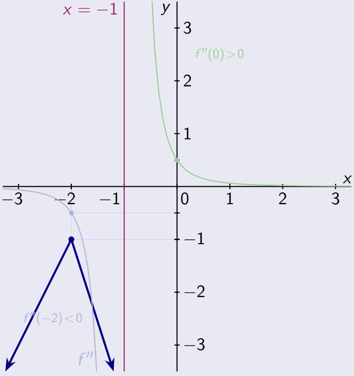
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

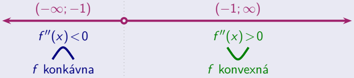
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \infty)$
$f''(-2) = \frac{1}{2\cdot(-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0$.	$f''(0) = \frac{1}{2\cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0$.
$f''(x) < 0$.	$f''(x) > 0$.
f je konkávna.	f je konvexná.

$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1$. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty$.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$
$= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

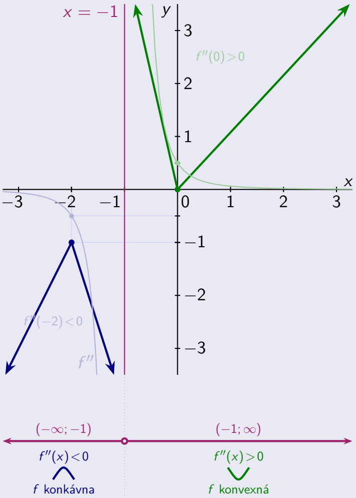
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \infty)$
$f''(-2) = \frac{1}{2\cdot(-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0$.	$f''(0) = \frac{1}{2\cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0$.
$f''(x) < 0$.	$f''(x) > 0$.
f je konkávna.	f je konvexná.

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty$. $f(0) = \frac{0}{4-0} = 0$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$

$$= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

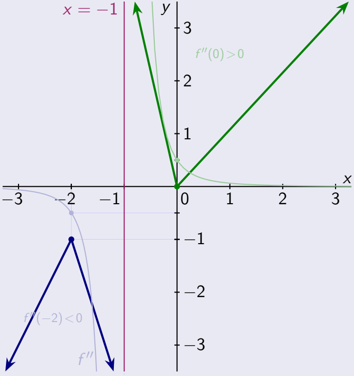
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

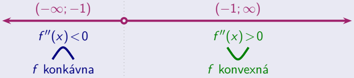
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \infty)$
$f''(-2) = \frac{1}{2\cdot(-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0$.	$f''(0) = \frac{1}{2\cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0$.
$f''(x) < 0$.	$f''(x) > 0$.
f je konkávna.	f je konvexná.

$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1$. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty$. $f(0) = \frac{0}{4-0} = 0$.

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty$. $\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty$.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$. [Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.

- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$

$$= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

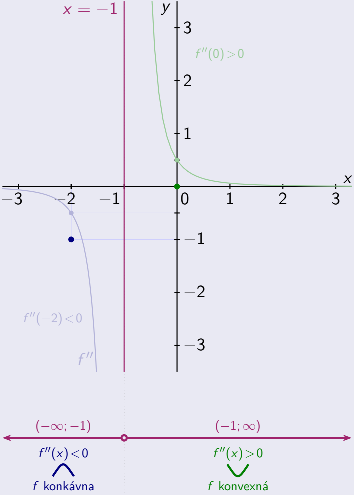
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \infty)$
$f''(-2) = \frac{1}{2\cdot(-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0$.	$f''(0) = \frac{1}{2\cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0$.
$f''(x) < 0$.	$f''(x) > 0$.
f je konkávna.	f je konvexná.

$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1$. $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty$. $f(0) = \frac{0}{4-0} = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty$.

Inflexné body na $D(f)$ neexistujú.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$.

[Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2 \cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$

$$= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

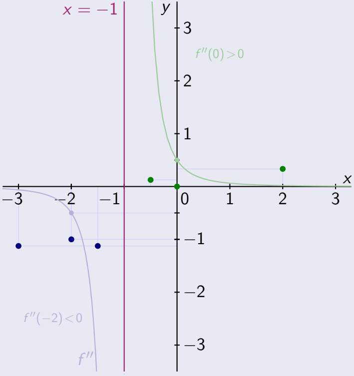
$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \infty)$
$f''(-2) = \frac{1}{2\cdot(-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$	$f''(0) = \frac{1}{2\cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.

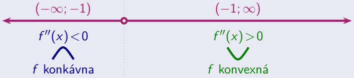
$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1$. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty$. $f(0) = \frac{0}{4-0} = 0$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty$. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty$.

$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}$. $f(-\frac{3}{2}) = \frac{\frac{9}{4}}{4-6} = -\frac{9}{8}$. $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}}{4-2} = \frac{1}{8}$. $f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}$.

Inflexné body na $D(f)$ neexistujú.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x},\ x \in R - \{-1\}.$

[Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}$.
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3} = \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \infty)$
$f''(-2) = \frac{1}{2\cdot(-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$	$f''(0) = \frac{1}{2\cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.

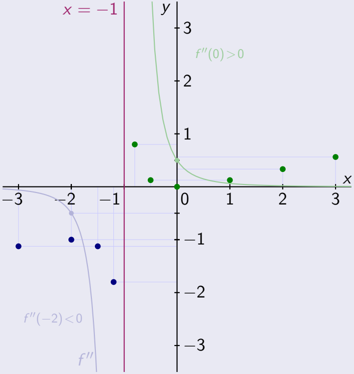
$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1.$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty.$ $f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$

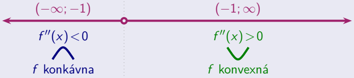
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty.$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty.$

$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}.$ $f(-\frac{3}{2}) = \frac{\frac{9}{4}}{4-6} = -\frac{9}{8}.$ $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}}{4-2} = \frac{1}{8}.$ $f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$

$f(-\frac{6}{5}) = \frac{\frac{36}{25}}{4-\frac{24}{5}} = -\frac{9}{5}.$ $f(-\frac{4}{5}) = \frac{\frac{16}{25}}{4-\frac{16}{5}} = \frac{4}{5}.$ $f(1) = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}.$ $f(3) = \frac{9}{4+12} = \frac{9}{16}.$

Inflexné body na $D(f)$ neexistujú.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{x^2}{4+4x},\ x \in R - \{-1\}.$ [Viď 01-Pr II.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-1\}$.

Pre všetky $x \in R - \{1\}$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{2x(1+x)-x^2\cdot 1}{4(1+x)^2} = \frac{2x+x^2}{4(1+x)^2}.$
- $f''(x) = \frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{4(1+x)^4} = \frac{2(1+x)^2-2(2x+x^2)}{4(1+x)^3}$

$$= \frac{(1+2x+x^2)-(2x+x^2)}{2(1+x)^3} = \frac{1}{2(1+x)^3}.$$

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $1 = 0$, t. j. nikdy. • f'' je spojitá na $D(f)$, • $-1 \notin D(f)$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko $(-\infty; -1)$ a $(-1; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; \infty)$
$f''(-2) = \frac{1}{2\cdot(-1)^3} = -\frac{1}{2} < 0.$	$f''(0) = \frac{1}{2\cdot 1^3} = \frac{1}{2} > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.

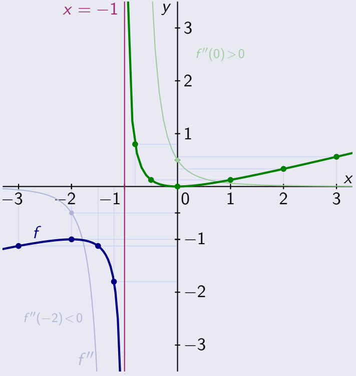
$f(-2) = \frac{4}{4-8} = -1.$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty.$ $f(0) = \frac{0}{4-0} = 0.$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = -\infty.$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{\frac{4}{x}+4} = \infty.$

$f(-3) = \frac{9}{4-12} = -\frac{9}{8}.$ $f(-\frac{3}{2}) = \frac{\frac{9}{4}}{4-6} = -\frac{9}{8}.$ $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}}{4-2} = \frac{1}{8}.$ $f(2) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}.$

$f(-\frac{6}{5}) = \frac{\frac{36}{25}}{4-\frac{24}{5}} = -\frac{9}{5}.$ $f(-\frac{4}{5}) = \frac{\frac{16}{25}}{4-\frac{16}{5}} = \frac{4}{5}.$ $f(1) = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}.$ $f(3) = \frac{9}{4+12} = \frac{9}{16}.$

Inflexné body na $D(f)$ neexistujú.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

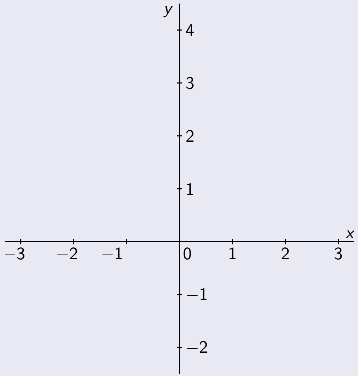
[Viď 01-Pr III.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

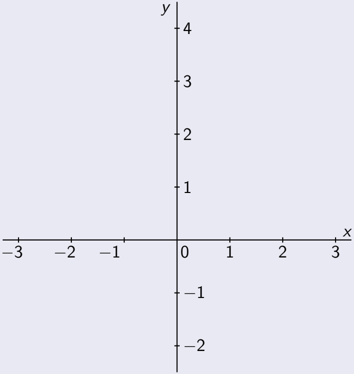
$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

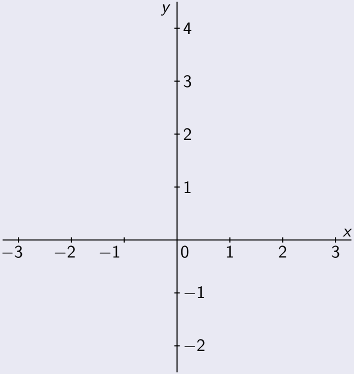
$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

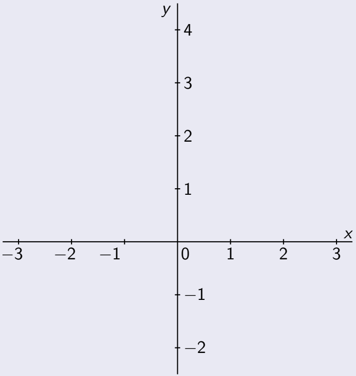
[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

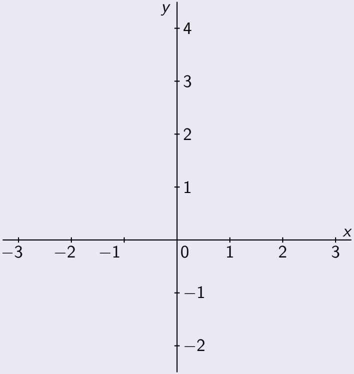
$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]



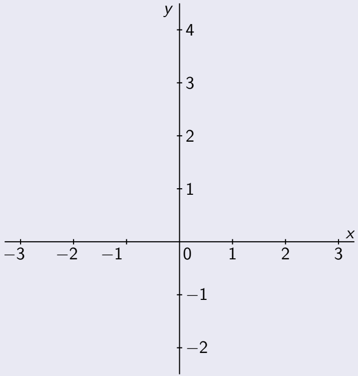
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$,

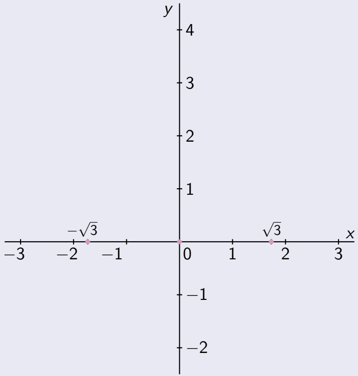


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
  Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x \cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$, $x\in R$.

[Viď 01-Pr III.]

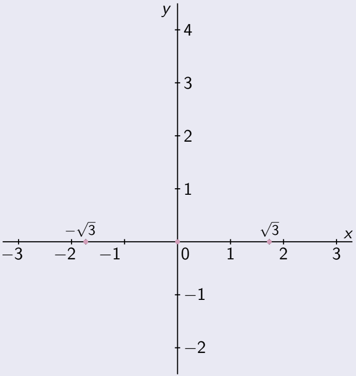
- Funkcia f je spojitá na $D(f)=R$.

Pre všetky $x\in R$ pre derivácie platí:

- $f'(x)=\frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2}=\frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x)=\frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}=\frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3}=\frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x)=0.$ $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3)=x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0.$ [$x=0$, resp. $x=\pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3})=0$, • $f''(0)=0$, • $f''(\sqrt{3})=0$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};0)$, $(0;\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3};\infty)$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [Viď 01-Pr III.]

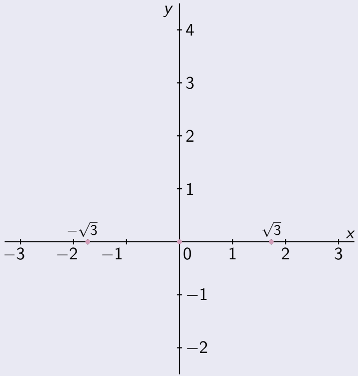
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:

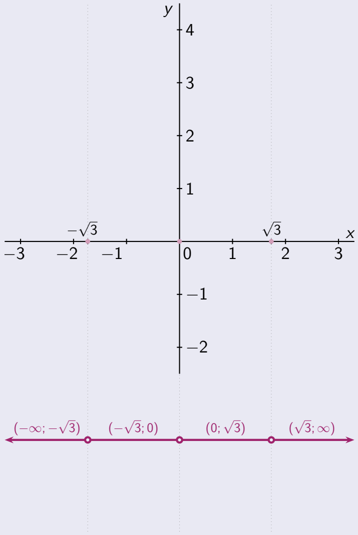
- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

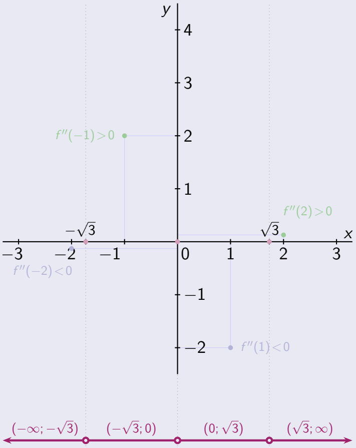
Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0.$	$f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0.$	$f''(1) = \frac{-16}{8} = -2 < 0.$	$f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

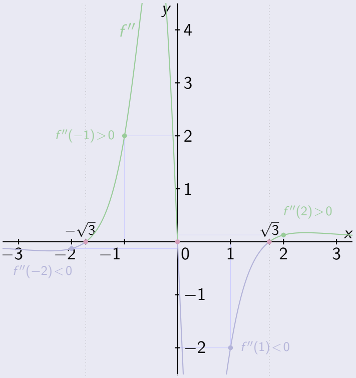
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

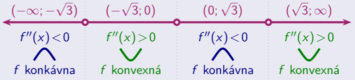
- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0.$	$f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0.$	$f''(1) = \frac{-16}{8} = -2 < 0.$	$f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$	$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.	f je konkávna.	f je konvexná.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2},\ x \in R.$

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

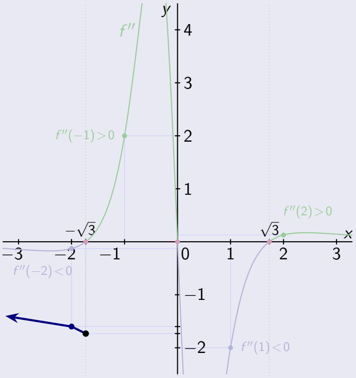
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

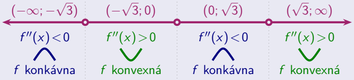
$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0.$	$f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0.$	$f''(1) = \frac{-16}{8} = -2 < 0.$	$f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$	$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.	f je konkávna.	f je konvexná.

$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}.$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$

$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.

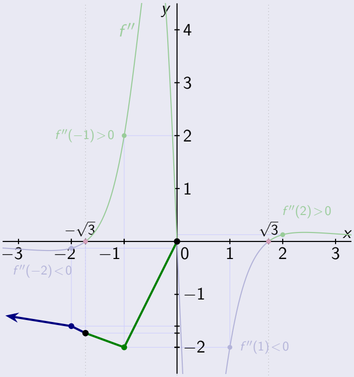
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

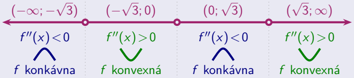
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0.$	$f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0.$	$f''(1) = \frac{-16}{8} = -2 < 0.$	$f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$	$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.	f je konkávna.	f je konvexná.

$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}.$ $f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$

$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.

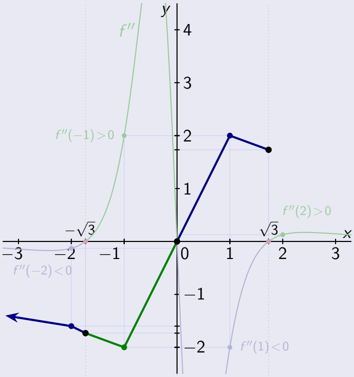
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

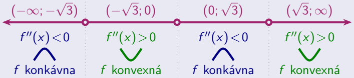
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0.$	$f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0.$	$f''(1) = \frac{-16}{8} = -2 < 0.$	$f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$	$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.	f je konkávna.	f je konvexná.

$f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$ $\qquad f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}.$

$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2},\ x \in R.$

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:
- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$. [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

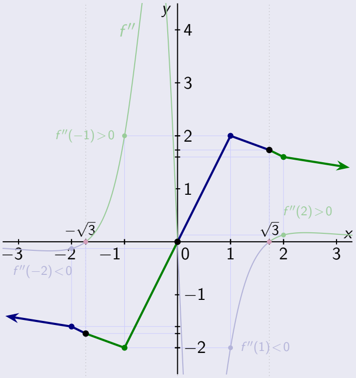
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

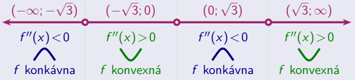
$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0$.	$f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0$.	$f''(1) = \frac{-16}{8} = -2 < 0$.	$f''(2) = \frac{16}{125} > 0$.
$f''(x) < 0$.	$f''(x) > 0$.	$f''(x) < 0$.	$f''(x) > 0$.
f je konkávna.	f je konvexná.	f je konkávna.	f je konvexná.

$f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0$.

$f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}$.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

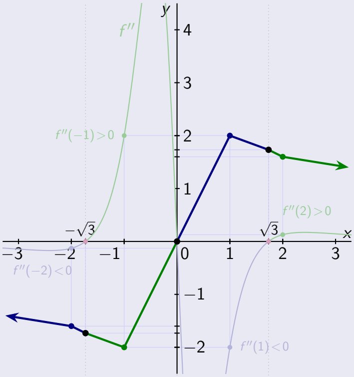
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

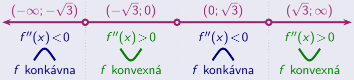
$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0.$	$f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0.$	$f''(1) = \frac{-16}{8} = -2 < 0.$	$f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$	$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.	f je konkávna.	f je konvexná.

$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}.$ $f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$ $f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}.$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$

$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}.$ $f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$ $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$ $f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$, $x\in R$.

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f)=R$.

Pre všetky $x\in R$ pre derivácie platí: • $f'(x)=\frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2}=\frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

- $f''(x)=\frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}=\frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3}=\frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x)=0.$ $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3)=x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0.$ [$x=0$, resp. $x=\pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3})=0$, • $f''(0)=0$, • $f''(\sqrt{3})=0$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};0)$, $(0;\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3};\infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x\in(-\infty;-\sqrt{3})$	$x\in(-\sqrt{3};0)$	$x\in(0;\sqrt{3})$	$x\in(\sqrt{3};\infty)$
$f''(-2)=-\frac{16}{125}<0.$	$f''(-1)=\frac{16}{8}=2>0.$	$f''(1)=\frac{-16}{8}=-2<0.$	$f''(2)=\frac{16}{125}>0.$
$f''(x)<0.$	$f''(x)>0.$	$f''(x)<0.$	$f''(x)>0.$
f je konkávna.	f je konvexná.	f je konkávna.	f je konvexná.

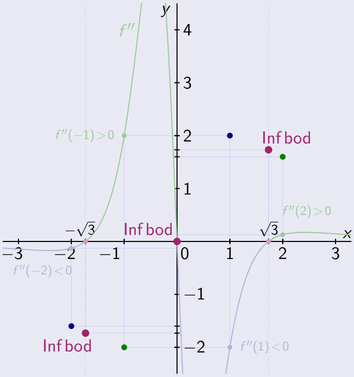
$f(-\sqrt{3})=\frac{-4\sqrt{3}}{1+3}=-\sqrt{3}.$ $f(0)=\frac{0}{1+0}=0.$ $f(\sqrt{3})=\frac{4\sqrt{3}}{1+3}=\sqrt{3}.$

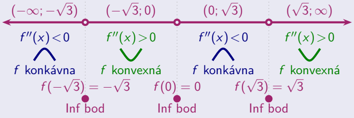
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{\frac{1}{x}+x}=0.$ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{\frac{1}{x}+x}=0.$

$f(-2)=\frac{-8}{1+4}=-\frac{8}{5}.$ $f(-1)=\frac{-4}{1+1}=-2.$ $f(1)=\frac{4}{1+1}=2.$ $f(2)=\frac{8}{1+4}=\frac{8}{5}.$

• $f(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}$, • $f(0)=0$, • $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}$

sú inflexné body a na $D(f)$ iné neexistujú.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí: • $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0.$ [$x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0.$	$f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0.$	$f''(1) = \frac{-16}{8} = -2 < 0.$	$f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$	$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.	f je konkávna.	f je konvexná.

$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}.$ $\quad f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$ $\quad f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}.$

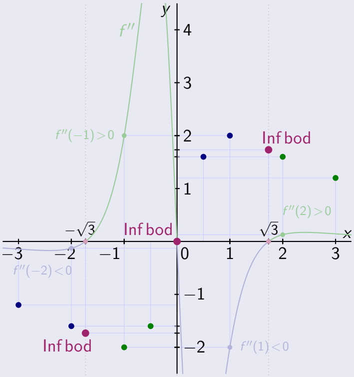
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$

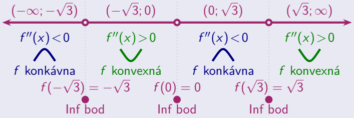
$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}.$ $\quad f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$ $\quad f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$ $\quad f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$

$f(-3) = \frac{-12}{1+9} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}.$ $\quad f(-\frac{1}{2}) = \frac{-2}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{8}{5}.$ $\quad f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{8}{5}.$ $\quad f(3) = \frac{12}{1+9} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$

- $f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$, • $f(0) = 0$, • $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

sú inflexné body a na $D(f)$ iné neexistujú.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2},\ x \in R.$

[Viď 01-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.

Pre všetky $x \in R$ pre derivácie platí:

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$
- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0.$ $[x = 0$, resp. $x = \pm\sqrt{3}.]$
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(-\sqrt{3}) = 0$, • $f''(0) = 0$, • $f''(\sqrt{3}) = 0.$

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = -\frac{16}{125} < 0.$	$f''(-1) = \frac{16}{8} = 2 > 0.$	$f''(1) = \frac{-16}{8} = -2 < 0.$	$f''(2) = \frac{16}{125} > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$	$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.	f je konkávna.	f je konvexná.

$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}.$ $f(0) = \frac{0}{1+0} = 0.$ $f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}.$

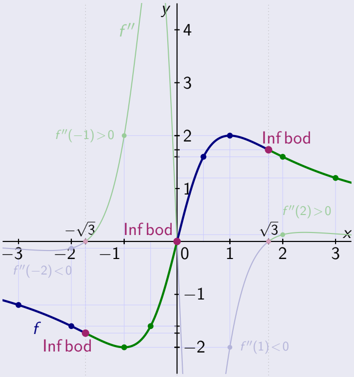
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = 0.$

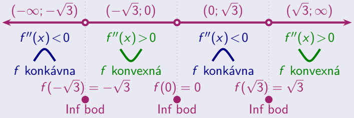
$f(-2) = \frac{-8}{1+4} = -\frac{8}{5}.$ $f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2.$ $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2.$ $f(2) = \frac{8}{1+4} = \frac{8}{5}.$

$f(-3) = \frac{-12}{1+9} = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}.$ $f(-\frac{1}{2}) = \frac{-2}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{8}{5}.$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{8}{5}.$ $f(3) = \frac{12}{1+9} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$

• $f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$, • $f(0) = 0$, • $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

sú inflexné body a na $D(f)$ iné neexistujú.





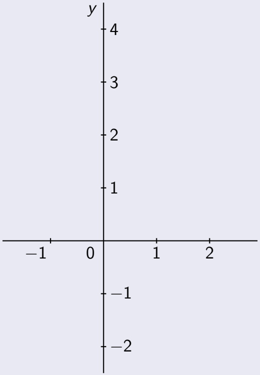
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

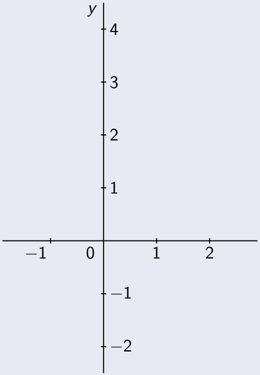
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

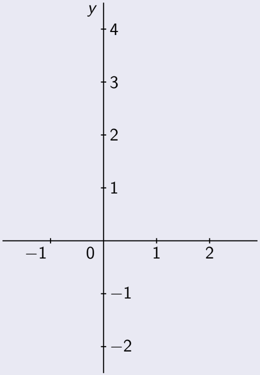
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

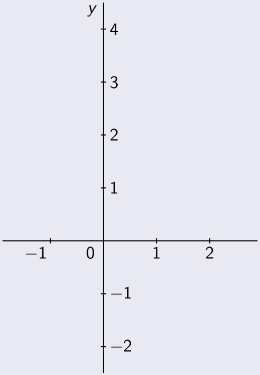


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$

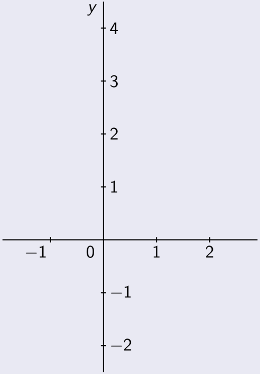


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]

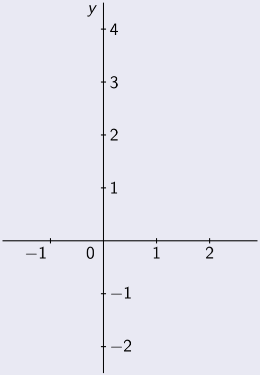


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$,

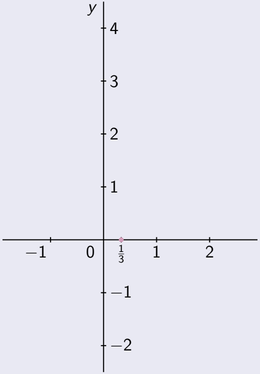


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

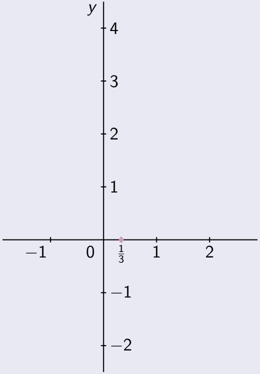


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$
  $\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

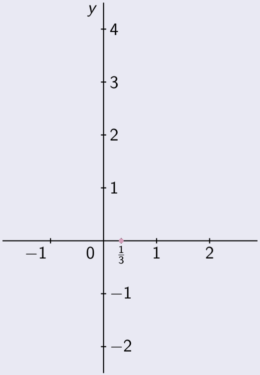
$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R.$
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R.$
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R.$

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

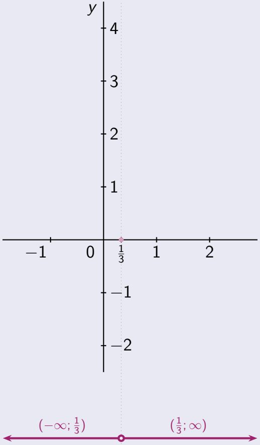
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

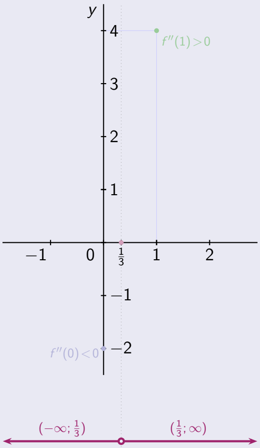
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$	$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

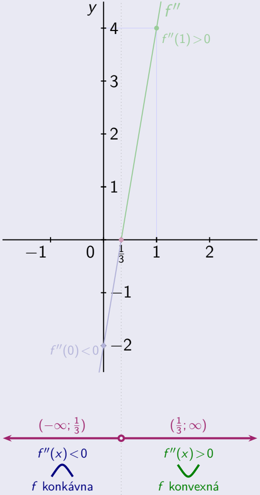
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$	$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

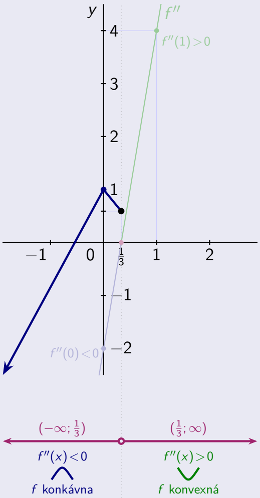
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$	$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.

$f(0) = 1.$ $\qquad f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = -\infty.$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

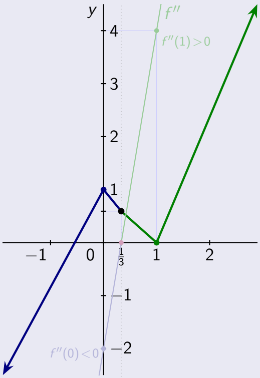
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.

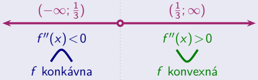
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$	$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.

$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$ $f(1) = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = \infty.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

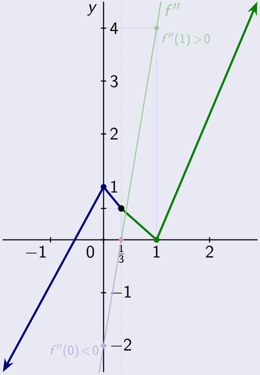
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.

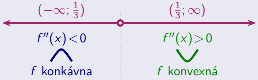
[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$	$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.

$f(0) = 1.$ $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$ $f(1) = 0.$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = -\infty.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = \infty.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

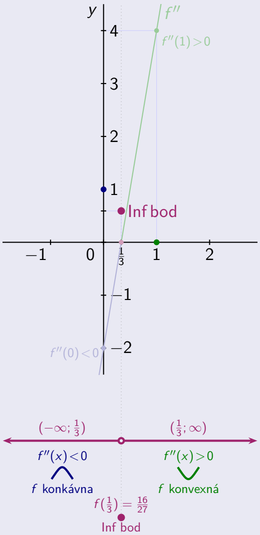
$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$	$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.

$f(0) = 1.$ $\quad f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$ $\quad f(1) = 0.$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = -\infty.$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = \infty.$

• $f(\frac{1}{3}) = \frac{16}{27}$ je inflexný bod

a na $D(f)$ iné inflexné body neexistujú.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x-1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$	$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.

$f(0) = 1.$ $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$ $f(1) = 0.$

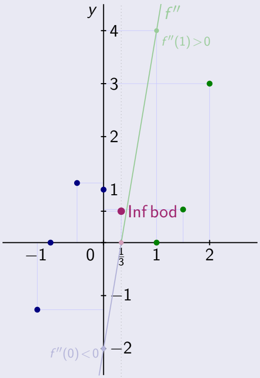
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = -\infty.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = \infty.$

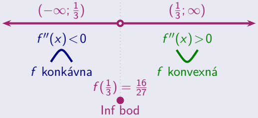
$f(-1) = -1 - 1 + 1 + 1 = 0.$ $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{8}.$ $f(2) = 8 - 4 - 2 + 1 = 3.$

$f(-\frac{5}{4}) = -\frac{125}{64} - \frac{25}{16} + \frac{5}{4} + 1 = -\frac{81}{64}.$ $f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{8}.$

- $f(\frac{1}{3}) = \frac{16}{27}$ je inflexný bod

a na $D(f)$ iné inflexné body neexistujú.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ x \in R.$

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
- Prvá derivácia $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x \in R$.
- Druhá derivácia $f''(x) = 6x - 2,\ x \in R$.

- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $6x - 2 = 2(3x - 1) = 0.$ [Jediné riešenie $x = \frac{1}{3}$.]
- f'' je spojitá na $D(f)$, • $f''(\frac{1}{3}) = 0.$

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na $(-\infty; \frac{1}{3})$ a $(\frac{1}{3}; \infty)$.

[Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z intervalu.]

$x \in (-\infty; \frac{1}{3})$	$x \in (\frac{1}{3}; \infty)$
$f''(0) = 0 - 2 = -2 < 0.$	$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0.$
$f''(x) < 0.$	$f''(x) > 0.$
f je konkávna.	f je konvexná.

$f(0) = 1.$ $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{27}.$ $f(1) = 0.$

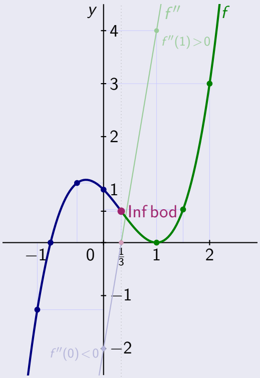
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = -\infty.$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = \infty.$

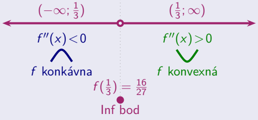
$f(-1) = -1 - 1 + 1 + 1 = 0.$ $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{8}.$ $f(2) = 8 - 4 - 2 + 1 = 3.$

$f(-\frac{5}{4}) = -\frac{125}{64} - \frac{25}{16} + \frac{5}{4} + 1 = -\frac{81}{64}.$ $f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{8}.$

• $f(\frac{1}{3}) = \frac{16}{27}$ je inflexný bod

a na $D(f)$ iné inflexné body neexistujú.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

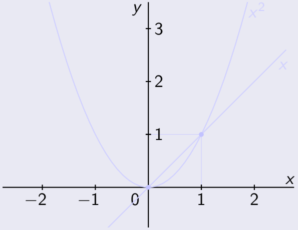
$f(x) = \max\{x, x^2\},\ x \in R.$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\}$, $x \in R$.

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.

- $f(0) = 0$.
- $f(1) = 1$.

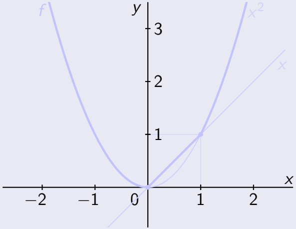


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\}$, $x \in R$.

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

- $f(0) = 0$.
- $f(1) = 1$.



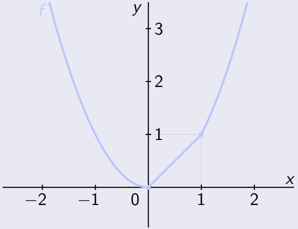
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\}$, $x \in R$.

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0\rangle$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$

- $f(0) = 0$.
- $f(1) = 1$.
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

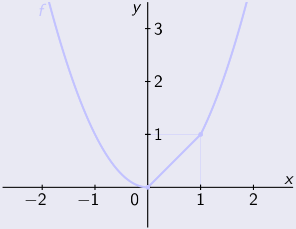
$f(x) = \max\{x, x^2\}$, $x \in R$.

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0\rangle$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$

- $f(0) = 0$.
- $f(1) = 1$.
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
  - Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú.

[$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]



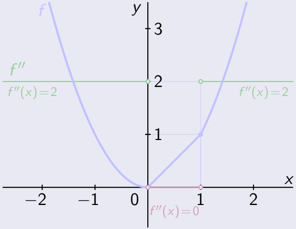
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\}$, $x \in R$.

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1-x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$
- $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$

- $f(0) = 0$.
- $f(1) = 1$.
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
  - Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú. [$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]
  - Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú. [Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]



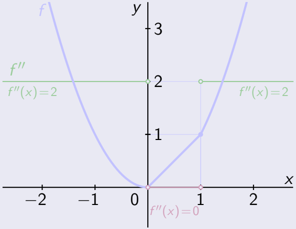
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\}, \; x \in R.$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1-x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$
- $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$

- $f(0) = 0$.
- $f(1) = 1$.
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
  - Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú. [$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]
  - Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú. [Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]
- $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in R - \{0,1\}$. [Funkcia f je spojitá na R.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

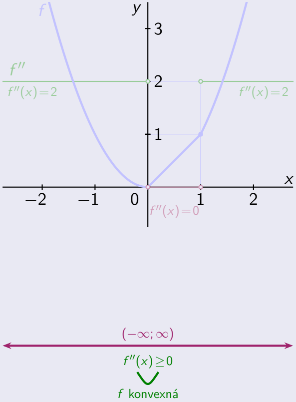
$f(x) = \max\{x, x^2\},\ x \in R.$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1-x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$
- $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$

- $f(0) = 0$.
- $f(1) = 1$.
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
  - Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú. [$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]
  - Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú. [Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]
- $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in R - \{0,1\}$. [Funkcia f je spojitá na R.]

$\Rightarrow$ • Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = R$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\}$, $x \in R$.

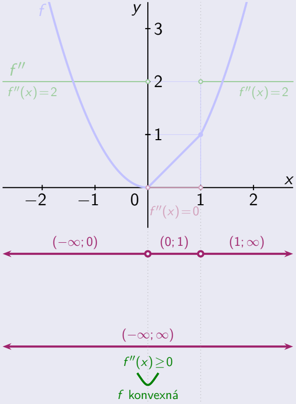
[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1-x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$
- $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$

- $f(0) = 0$.
- $f(1) = 1$.
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
  - Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú. [$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]
  - Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú. [Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]
- $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in R - \{0,1\}$. [Funkcia f je spojitá na R.]

$\Rightarrow$ • Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = R$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\},\ x \in R.$

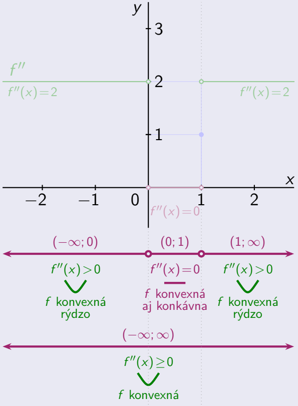
[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$
- $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$

- $f(0) = 0.$
- $f(1) = 1.$
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
  - Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú. [$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]
  - Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú. [Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]
- $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in R - \{0,1\}$. [Funkcia f je spojitá na R.]

$\Rightarrow$ • Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = R$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f''(x) = 2 > 0.$	$f''(x) = 0.$	$f''(x) = 2 > 0.$
f je rýdzo konvexná.	f je konvexná aj konkávna.	f je rýdzo konvexná.
	[Funkcia f je lineárna na $\langle 0; 1\rangle$.]	



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\},\ x \in R.$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1-x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$
- $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$

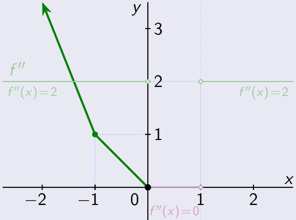
- $f(0) = 0.$
- $f(1) = 1.$
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
  - Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú. [$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]
  - Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú. [Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]
- $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in R - \{0, 1\}$. [Funkcia f je spojitá na R.]

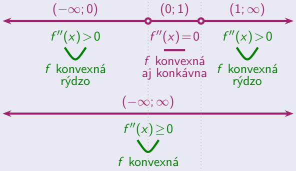
$\Rightarrow$ • Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = R$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f''(x) = 2 > 0.$	$f''(x) = 0.$	$f''(x) = 2 > 0.$
f je rýdzo konvexná.	f je konvexná aj konkávna.	f je rýdzo konvexná.
	[Funkcia f je lineárna na $\langle 0; 1\rangle$.]	

$f(-1) = 1.$ $\qquad f(0) = 0.$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty.$$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\},\ x \in R.$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1-x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0\rangle$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

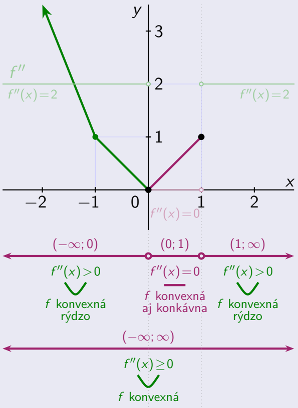
- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$
- $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$

- $f(0) = 0.$
- $f(1) = 1.$
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
  - Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú. [$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]
  - Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú. [Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]
- $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in R - \{0,1\}$. [Funkcia f je spojitá na R.]

$\Rightarrow$ Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = R$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f''(x) = 2 > 0.$	$f''(x) = 0.$	$f''(x) = 2 > 0.$
f je rýdzo konvexná.	f je konvexná aj konkávna.	f je rýdzo konvexná.
	[Funkcia f je lineárna na $\langle 0; 1\rangle$.]	

$f(0) = 0.$ $f(1) = 1.$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\},\ x \in R.$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1-x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$
- $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$

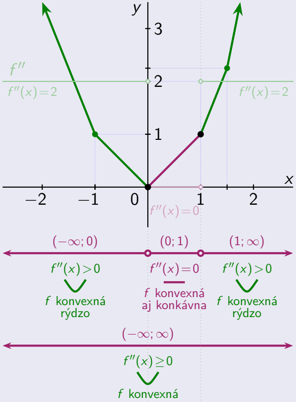
- $f(0) = 0.$
- $f(1) = 1.$
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
  - Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú. [$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]
  - Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú. [Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]
- $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in R - \{0,1\}$. [Funkcia f je spojitá na R.]

$\Rightarrow$ • Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = R$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f''(x) = 2 > 0$.	$f''(x) = 0$.	$f''(x) = 2 > 0$.
f je rýdzo konvexná.	f je konvexná aj konkávna.	f je rýdzo konvexná.
	[Funkcia f je lineárna na $\langle 0; 1\rangle$.]	

$f(1) = 1.$ $\quad f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty.$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\},\ x \in R.$

[Funkcie $y = x$, $y = x^2$ sa pretínajú v bodoch $x = 0$ a $x = 1$, pre ktoré platí $x = x^2$, t. j. korene rovnice $x - x^2 = x(1 - x) = 0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty; 0)$, $\langle 0; 1\rangle$ a $\langle 1; \infty)$.]

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0\rangle, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0; 1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 1 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2x & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$
- $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x \in (-\infty; 0), \\ 0 & \text{pre } x \in (0; 1), \\ 2 & \text{pre } x \in (1; \infty). \end{cases}$

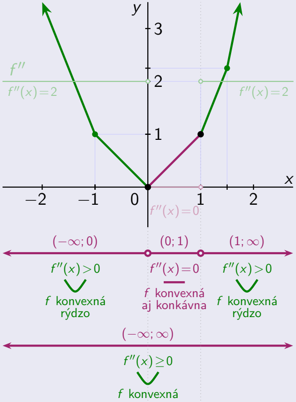
- $f(0) = 0.$
- $f(1) = 1.$
- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$.
  - Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú. [$f'_-(0) = 2$, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 2$.]
  - Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú. [Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]
- $f''(x) \geq 0$ pre všetky $x \in R - \{0{,}1\}$. [Funkcia f je spojitá na R.]

$\Rightarrow$ • Funkcia f je konvexná na celom $D(f) = R$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f''(x) = 2 > 0.$	$f''(x) = 0.$	$f''(x) = 2 > 0.$
f je rýdzo konvexná.	f je konvexná aj konkávna. [Funkcia f je lineárna na $\langle 0; 1\rangle$.]	f je rýdzo konvexná.

$f(-1) = 1.$ $\quad f(0) = 0.$ $\quad f(1) = 1.$ $\quad f(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{9}{4}.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty.$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty.$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \max\{x, x^2\},\ x \in R.$

[Funkcie $y=x$, $y=x^2$ sa pretínajú v bodoch $x=0$ a $x=1$, pre ktoré platí $x=x^2$, t. j. korene rovnice $x-x^2=x(1-x)=0$.
Funkcia f je určená maximálnymi funkciami, ktoré sa nemenia na intervaloch $(-\infty;0)$, $\langle 0;1\rangle$ a $\langle 1;\infty)$.]

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre } x\in(-\infty;0\rangle, \\ x & \text{pre } x\in\langle 0;1\rangle, \\ x^2 & \text{pre } x\in\langle 1;\infty). \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x\in(-\infty;0), \\ 1 & \text{pre } x\in(0;1), \\ 2x & \text{pre } x\in(1;\infty). \end{cases}$
- $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{pre } x\in(-\infty;0), \\ 0 & \text{pre } x\in(0;1), \\ 2 & \text{pre } x\in(1;\infty). \end{cases}$

- $f(0)=0$.
- $f(1)=1$.
- Funkcia f je spojitá na $D(f)=R$.
  - Prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$ neexistujú. [$f'_-(0)=2$, $f'_+(0)=1$ a $f'_-(1)=1$, $f'_+(1)=2$.]
  - Druhé derivácie $f''(0)$, $f''(1)$ neexistujú. [Pretože neexistujú ani prvé derivácie $f'(0)$, $f'(1)$.]
- $f''(x)\geq 0$ pre všetky $x\in R-\{0,1\}$. [Funkcia f je spojitá na R.]

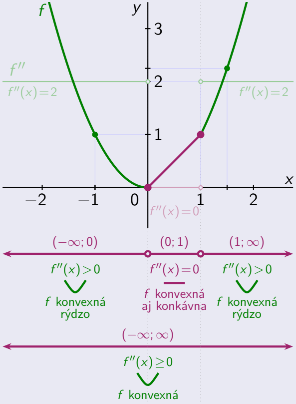
$\Rightarrow$ • Funkcia f je konvexná na celom $D(f)=R$. [Ale nie je rýdzo konvexná.]

$x\in(-\infty;0)$	$x\in(0;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f''(x)=2>0$.	$f''(x)=0$.	$f''(x)=2>0$.
f je rýdzo konvexná.	f je konvexná aj konkávna.	f je rýdzo konvexná.
	[Funkcia f je lineárna na $\langle 0;1\rangle$.]	

$f(-1)=1$. $\quad f(0)=0$. $\quad f(1)=1$. $\quad f(\tfrac{3}{2})=\tfrac{9}{4}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty$. $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

f je konvexná na $D(f)$ (nie rýdzo) a inflexné body na $D(f)$ neexistujú.



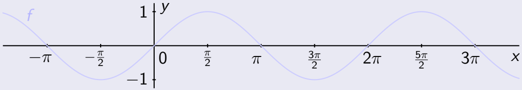
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

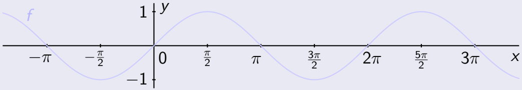
$f(x) = \sin x$, $x \in R$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.





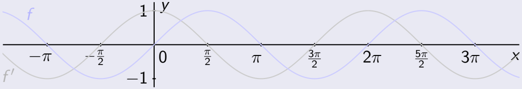
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

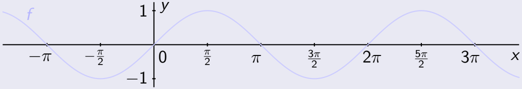
$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.

Pre derivácie platí:

- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.





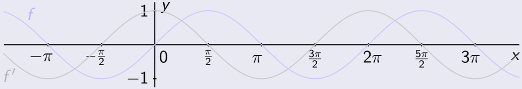
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

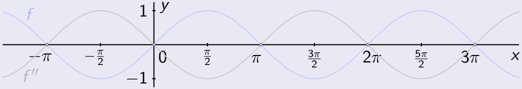
$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.

Pre derivácie platí:

- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.





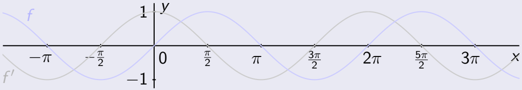
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

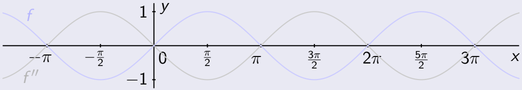
$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:

- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.





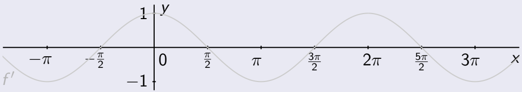
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

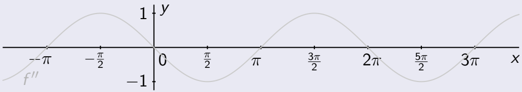
$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

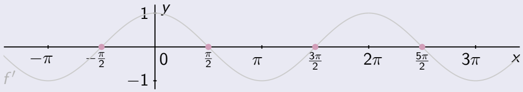
$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

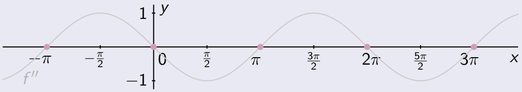
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = \cos x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\sin x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.





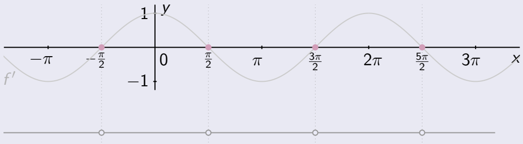
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

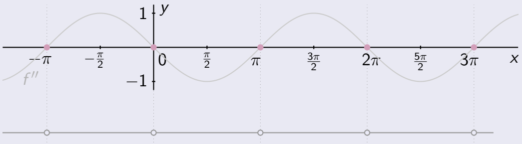
- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = \cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.
- $\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.
- $\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

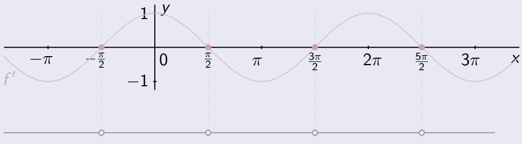
Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.

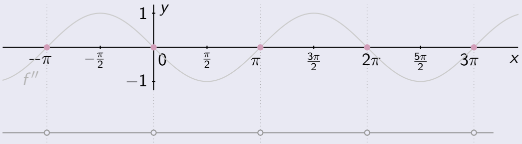
- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = \cos x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.
  $\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\sin x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.
  $\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = \cos x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

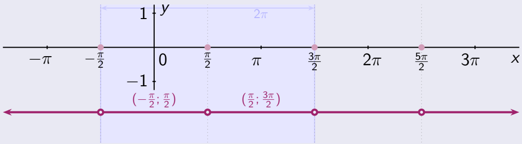
$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$	$x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) + 2k\pi$

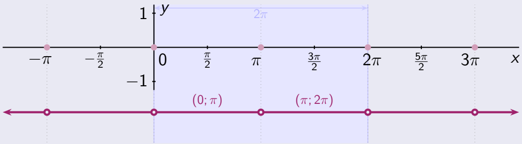
- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\sin x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = \cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.
  $\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

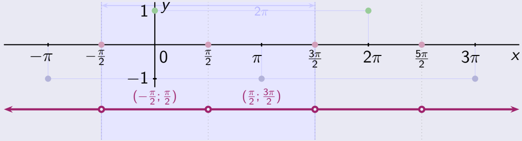
[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

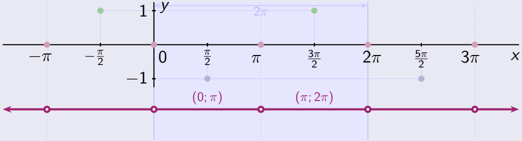
$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0.$	$f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0$

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.
  $\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi;\ \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$
$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = \cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

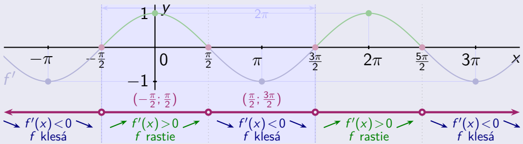
$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0.$	$f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0.$
$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.	$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.

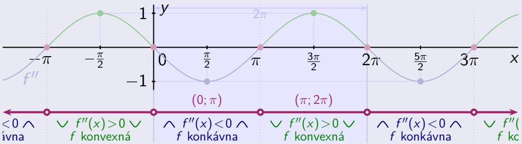
- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$
$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = \cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0.$	$f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0.$
$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.	$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.

$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$ $\quad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1.$

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

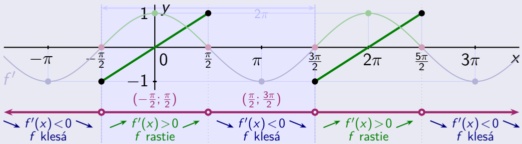
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

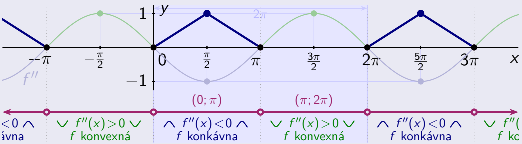
[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$
$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.

$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1.$

$f(0 + 2k\pi) = 0.$ $\quad f(\pi + 2k\pi) = 0.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = \cos x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.
  $\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0.$	$f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0.$
$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.	$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.

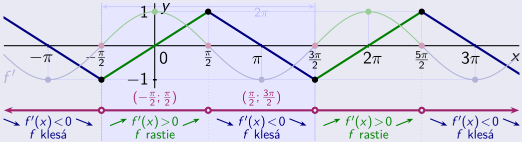
$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1.$ $f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$

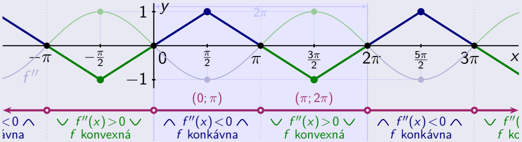
- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\sin x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.
  $\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$
$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.

. $f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$
$f(\pi + 2k\pi) = 0.$ $f(2\pi + 2k\pi) = 0.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = \cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0.$	$f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0.$
$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.	$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.

$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$ $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1.$ $f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$

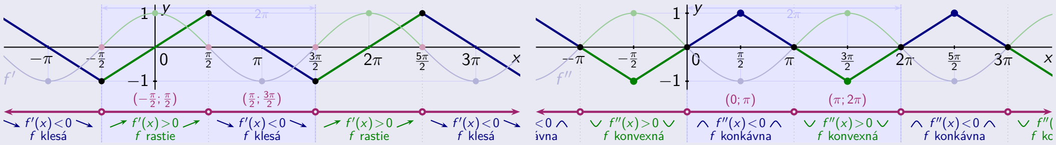
- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$
$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.

$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1.$ $f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$
$f(0 + 2k\pi) = 0.$ $f(\pi + 2k\pi) = 0.$ $f(2\pi + 2k\pi) = 0.$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R.$
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R.$
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R.$

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R.$
- $f'(x) = \cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$ kde $k \in Z.$

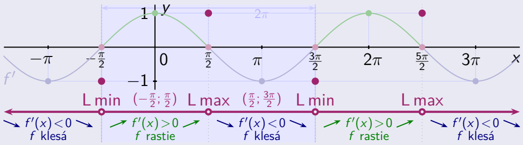
$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in Z.$

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0.$	$f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0.$
$f'(x) > 0,$ t. j. f je rastúca.	$f'(x) < 0,$ t. j. f je klesajúca.

$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$ $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1.$ $f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$

- $f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ sú lokálne min.
- $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ sú lokálne max.



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R.$
- $f''(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi,$ kde $k \in Z.$

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi),\ k \in Z.$

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

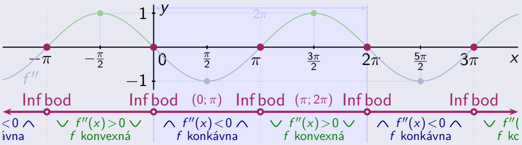
$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$
$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0,$ t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0,$ t. j. f je konvexná.

$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1.$ $f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$

$f(0 + 2k\pi) = 0.$ $f(\pi + 2k\pi) = 0.$ $f(2\pi + 2k\pi) = 0.$

- $f(0 + 2k\pi) = 0,$
- $f(\pi + 2k\pi) = 0$

sú inflexné body.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \sin x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \sin x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = \cos x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = \cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

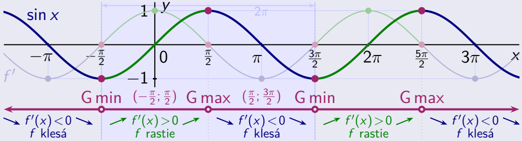
[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f'(0) = f'(0+2k\pi) = 1 > 0.$	$f'(\pi) = f'(\pi+2k\pi) = -1 < 0.$
$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.	$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.

$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$ $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1.$ $f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$

- $f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ sú lokálne min.
- $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ sú lokálne max.

Tieto extrémy sú súčasne aj globálne a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi;\ \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

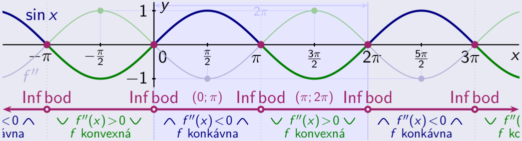
$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$
$f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.

$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1.$ $f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1.$

$f(0 + 2k\pi) = 0.$ $f(\pi + 2k\pi) = 0.$ $f(2\pi + 2k\pi) = 0.$

- $f(0 + 2k\pi) = 0$,
- $f(\pi + 2k\pi) = 0$

sú inflexné body.



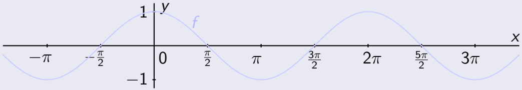
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

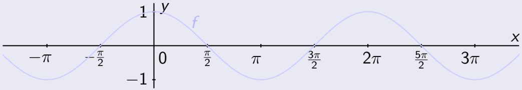
$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.





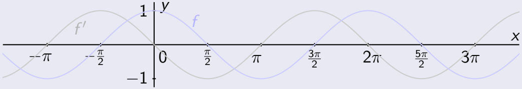
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

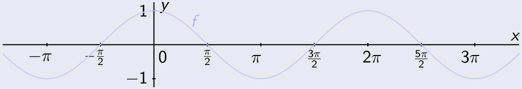
$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.

Pre derivácie platí:

- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.





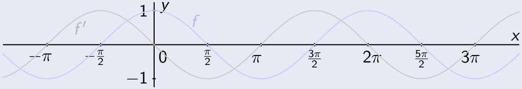
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

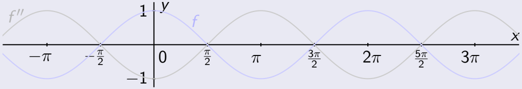
$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.

Pre derivácie platí:

- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.





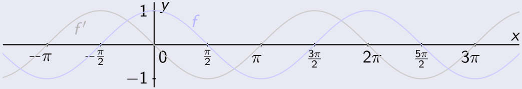
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

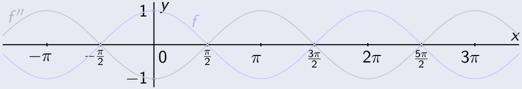
$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:

- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

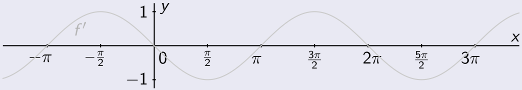
$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

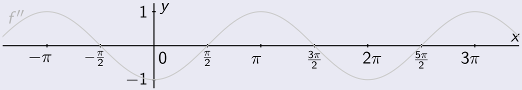
- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:

- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

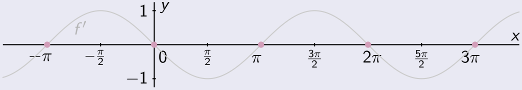
$f(x) = \cos x, \; x \in R.$

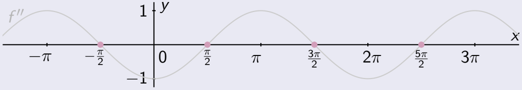
- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

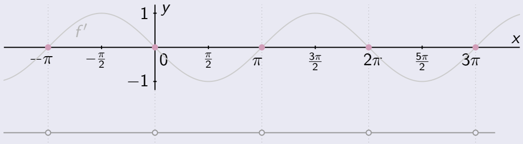
Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

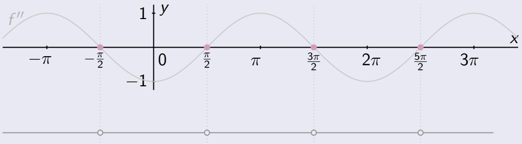
- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

  $\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

  $\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

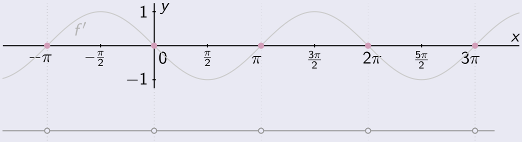
$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

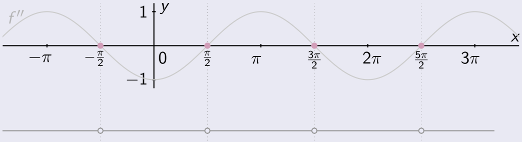
[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

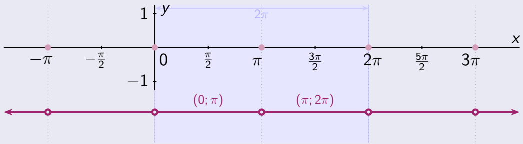
- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.
  $\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

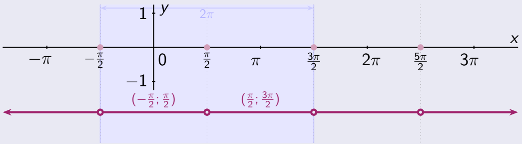
$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.
  $\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.

  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

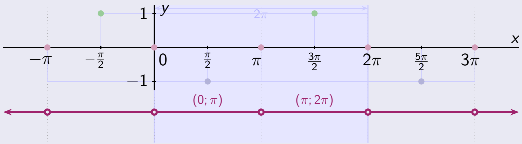
Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

  $\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0;\pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$
$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0.$	$f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0.$

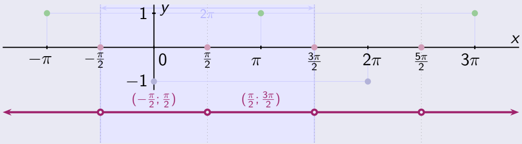


- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

  $\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f''(0) = f''(0 + 2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\pi) = f''(\pi + 2k\pi) = 1 > 0$



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.
  $\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

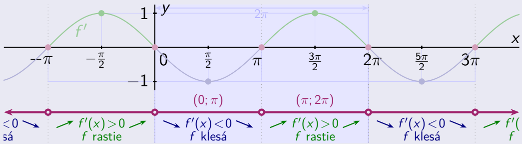
[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

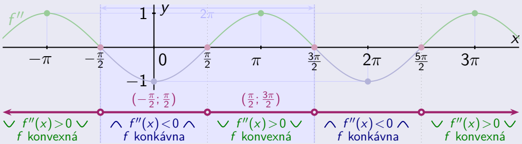
$x \in (0;\pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi;2\pi) + 2k\pi$
$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$
$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.	$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.
  $\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f''(0) = f''(0+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\pi) = f''(\pi+2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$
$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1 < 0.$	$f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 1 > 0.$
$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.	$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.

$f(0 + 2k\pi) = 1.$ $\qquad f(\pi + 2k\pi) = -1.$

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

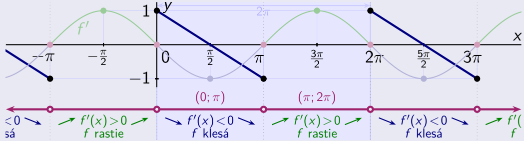
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

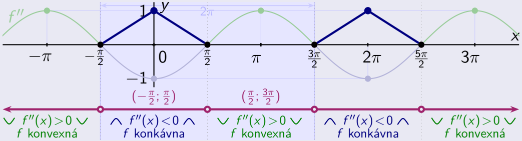
[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f''(0) = f''(0 + 2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\pi) = f''(\pi + 2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.

$f(0 + 2k\pi) = 1.$

$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$ $\qquad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$
$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$
$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.	$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.

$f(\pi + 2k\pi) = -1.$ $f(2\pi + 2k\pi) = 1.$

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

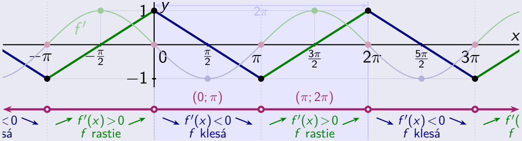
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

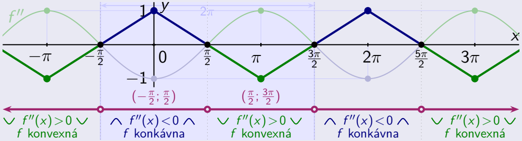
[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f''(0) = f''(0+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\pi) = f''(\pi+2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.

$f(\pi + 2k\pi) = -1.$

$f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$ $f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0; \pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi; 2\pi) + 2k\pi$
$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$
$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.	$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.

$f(0 + 2k\pi) = 1.$ $\quad f(\pi + 2k\pi) = -1.$ $\quad f(2\pi + 2k\pi) = 1.$

- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

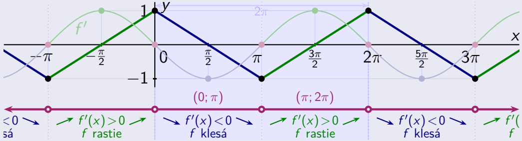
$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

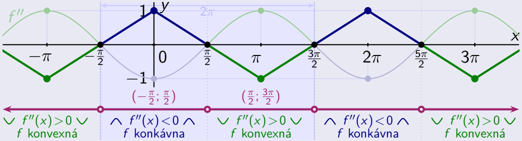
[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f''(0) = f''(0+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\pi) = f''(\pi+2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.

$f(0 + 2k\pi) = 1.$ $\quad f(\pi + 2k\pi) = -1.$

$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$ $\quad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$ $\quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

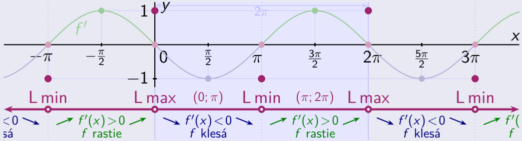
$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0;\pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi;2\pi) + 2k\pi$
$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$
$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.	$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.

$f(0 + 2k\pi) = 1.$ $\quad f(\pi + 2k\pi) = -1.$ $\quad f(2\pi + 2k\pi) = 1.$

- $f(0 + 2k\pi) = 1$ sú lokálne max.
- $f(\pi + 2k\pi) = -1$ sú lokálne min.



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

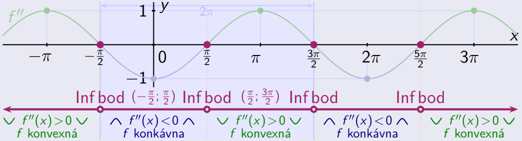
$x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f''(0) = f''(0+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\pi) = f''(\pi+2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.

$f(0 + 2k\pi) = 1.$ $\quad f(\pi + 2k\pi) = -1.$

$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$ $\quad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$ $\quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$

- $f(0 + 2k\pi) = 0,$
- $f(\pi + 2k\pi) = 0$

sú inflexné body.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklad

$f(x) = \cos x,\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = \cos x$ je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
  [Funkciu postačí vyšetrovať na ľubovoľnom intervale s dĺžkou 2π.]

Pre derivácie platí:
- $f'(x) = -\sin x$ pre všetky $x \in R$.
- $f''(x) = -\cos x$ pre všetky $x \in R$.

- f' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f'(x) = -\sin x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0 + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f' nemení znamienko na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$.

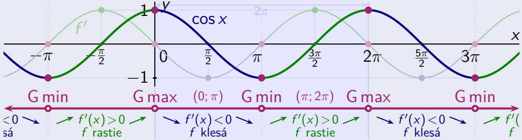
[Na zistenie znamienka postačí overiť $f'(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (0;\pi) + 2k\pi$	$x \in (\pi;2\pi) + 2k\pi$
$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -1 < 0.$	$f'(\frac{3\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = 1 > 0.$
$f'(x) < 0$, t. j. f je klesajúca.	$f'(x) > 0$, t. j. f je rastúca.

$f(0 + 2k\pi) = 1.$ $\quad f(\pi + 2k\pi) = -1.$ $\quad f(2\pi + 2k\pi) = 1.$

- $f(0 + 2k\pi) = 1$ sú lokálne max.
- $f(\pi + 2k\pi) = -1$ sú lokálne min.

Tieto extrémy sú súčasne aj globálne a na $D(f)$ iné extrémy neexistujú.



- f'' je spojitá a periodická s periódou 2π na $D(f) = R$.
- $f''(x) = -\cos x = 0. \Leftrightarrow$ • $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$.

$\Rightarrow$ • f'' nemení znamienko na intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$.

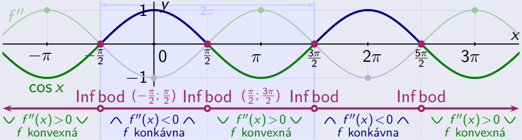
[Na zistenie znamienka postačí overiť $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x intervalu.]

$x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) + 2k\pi$	$x \in (\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$
$f''(0) = f''(0+2k\pi) = -1 < 0.$	$f''(\pi) = f''(\pi+2k\pi) = 1 > 0.$
$f''(x) < 0$, t. j. f je konkávna.	$f''(x) > 0$, t. j. f je konvexná.

$f(0 + 2k\pi) = 1.$ $\quad f(\pi + 2k\pi) = -1.$

$f(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$ $\quad f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$ $\quad f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 0.$

- $f(0 + 2k\pi) = 0$, • $f(\pi + 2k\pi) = 0$ sú inflexné body.



Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

Funkcia f, rád $n \in N$, pre bod $c \in D(f)$ platí $f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Funkcia f, rád $n \in N - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí $f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

Funkcia f, rád $n \in N$, pre bod $c \in D(f)$ platí
$f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

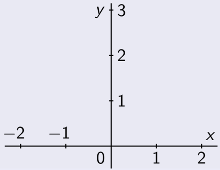
Funkcia f, rád $n \in N - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
$f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

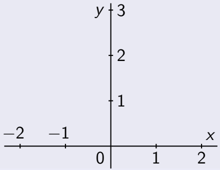
[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujíma.]

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

Funkcia f, rád $n \in N$, pre bod $c \in D(f)$ platí $f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

- n je nepárne.
- n je párne.



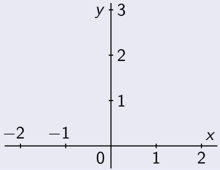


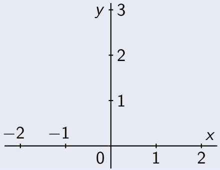
n nepárne $\quad$ n párne

Funkcia f, rád $n \in N - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí $f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujíma.]

- n je nepárne.
- n je párne.





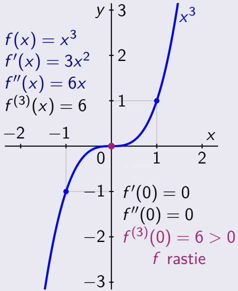
n nepárne $\quad$ n párne

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

Funkcia f, rád $n \in N$, pre bod $c \in D(f)$ platí $f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

- n je nepárne.

$\Rightarrow$
- Funkcia f rastie v bode c pre $f^{(n)}(c) > 0$.
- Funkcia f klesá v bode c pre $f^{(n)}(c) < 0$.

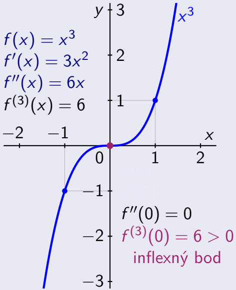


Funkcia f, rád $n \in N - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí $f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujíma.]

- n je nepárne.

$\Rightarrow$
- Bod c je inflexný.

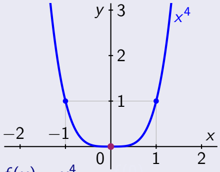


Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

Funkcia f, rád $n \in N$, pre bod $c \in D(f)$ platí $f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

- n je párne.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lok min pre $f^{(n)}(c) > 0$.
- $f(c)$ je ostré lok max pre $f^{(n)}(c) < 0$.



$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = 12x^2$ $\quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = 24x$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = 24$ $\quad f^{(4)}(0) = 24 > 0$

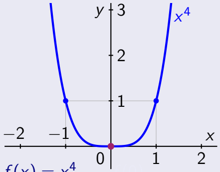
ostré lok min

Funkcia f, rád $n \in N - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí $f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujíma.]

- n je párne.

$\Rightarrow$
- f je rýdzo konvexná pre $f^{(n)}(c) > 0$.
- f je rýdzo konkávna pre $f^{(n)}(c) < 0$.



$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$ $\quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = 24x$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = 24$ $\quad f^{(4)}(0) = 24 > 0$

rýdzo konvexná

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

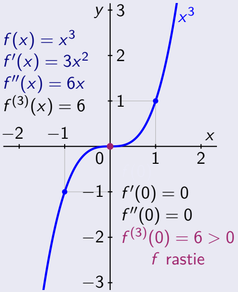
Funkcia f, rád $n \in N$, pre bod $c \in D(f)$ platí $f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

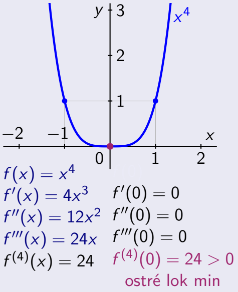
- n je nepárne.

$\Rightarrow$
- Funkcia f rastie v bode c pre $f^{(n)}(c) > 0$.
- Funkcia f klesá v bode c pre $f^{(n)}(c) < 0$.

- n je párne.

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lok min pre $f^{(n)}(c) > 0$.
- $f(c)$ je ostré lok max pre $f^{(n)}(c) < 0$.





Funkcia f, rád $n \in N - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí $f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

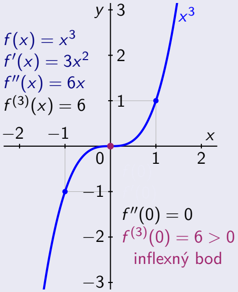
[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujíma.]

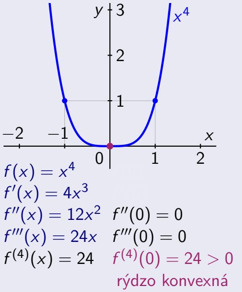
- n je nepárne.

$\Rightarrow$
- Bod c je inflexný.

- n je párne.

$\Rightarrow$
- f je rýdzo konvexná pre $f^{(n)}(c) > 0$.
- f je rýdzo konkávna pre $f^{(n)}(c) < 0$.





Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Použitie vyšších derivácií

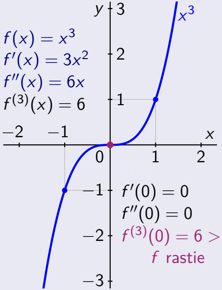
Funkcia f, rád $n \in N$, pre bod $c \in D(f)$ platí
$f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

- n je nepárne. [V bode c nie je lokálny extrém.]

$\Rightarrow$
- Funkcia f rastie v bode c pre $f^{(n)}(c) > 0$.
- Funkcia f klesá v bode c pre $f^{(n)}(c) < 0$.

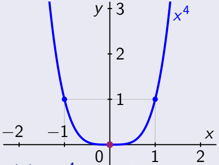
- n je párne. [V bode c je ostrý lokálny extrém.]

$\Rightarrow$
- $f(c)$ je ostré lok min pre $f^{(n)}(c) > 0$.
- $f(c)$ je ostré lok max pre $f^{(n)}(c) < 0$.



$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f''(x) = 6x$
$f^{(3)}(x) = 6$

$f'(0) = 0$
$f''(0) = 0$
$f^{(3)}(0) = 6 > 0$
f rastie



$f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$
$f'''(x) = 24x$
$f^{(4)}(x) = 24$

$f'(0) = 0$
$f''(0) = 0$
$f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(0) = 24 > 0$
ostré lok min

Funkcia f, rád $n \in N - \{1\}$, pre bod $c \in D(f)$ platí
$f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ a $f^{(n)}(c) \neq 0$.

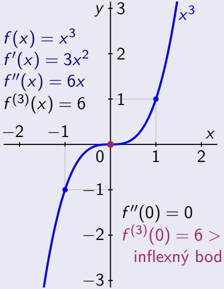
[Hodnota $f'(c)$ nás nezaujíma.]

- n je nepárne. [V bode c je inflexia.]

$\Rightarrow$
- Bod c je inflexný.

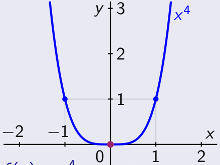
- n je párne. [V bode c nie je inflexia.]

$\Rightarrow$
- f je rýdzo konvexná pre $f^{(n)}(c) > 0$.
- f je rýdzo konkávna pre $f^{(n)}(c) < 0$.



$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f''(x) = 6x$
$f^{(3)}(x) = 6$

$f''(0) = 0$
$f^{(3)}(0) = 6 > 0$
inflexný bod



$f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$
$f'''(x) = 24x$
$f^{(4)}(x) = 24$

$f''(0) = 0$
$f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(0) = 24 > 0$
rýdzo konvexná

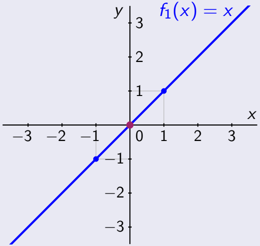
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

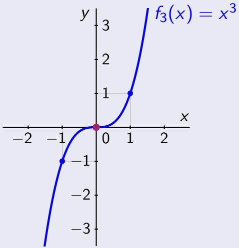
Pre funkcie $f_n\colon\ y = x^n$, kde $n = 2k-1,\ k \in N$ (n je nepárne), v bode $x = 0$ platí:

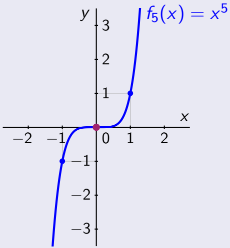
Pre funkcie $f_n\colon\ y = x^n$, kde $n = 2k,\ k \in N$ (n je párne), v bode $x = 0$ platí:

Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

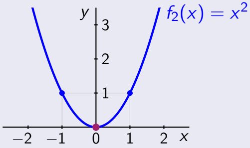
Pre funkcie $f_n\colon\ y = x^n$, kde $n = 2k-1,\ k \in N$ (n je nepárne), v bode $x = 0$ platí:

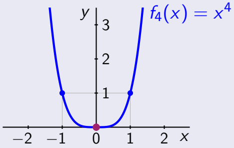


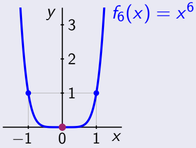




Pre funkcie $f_n\colon\ y = x^n$, kde $n = 2k,\ k \in N$ (n je párne), v bode $x = 0$ platí:



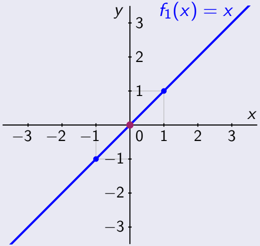


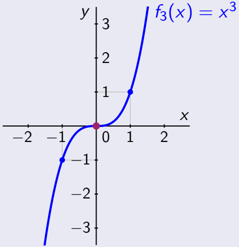


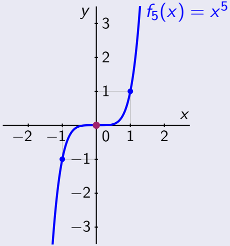
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

Pre funkcie $f_n\colon\, y = x^n$, kde $n = 2k-1$, $k \in N$ (n je nepárne), v bode $x = 0$ platí:

- V bode $x = 0$ je inflexia (ale až pre $n \geq 3$).
- f_n sú rastúce v bode $x = 0$.

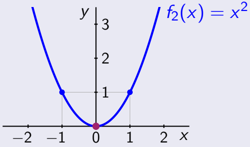


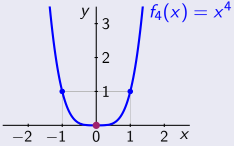


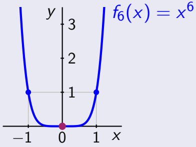


Pre funkcie $f_n\colon\, y = x^n$, kde $n = 2k$, $k \in N$ (n je párne), v bode $x = 0$ platí:

- V bode $x = 0$ nie je inflexia.
- f_n sú rýdzo konvexné na R.



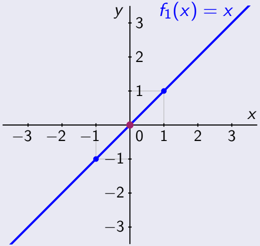


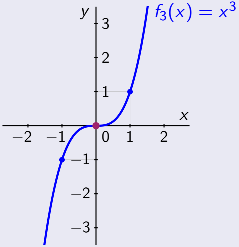


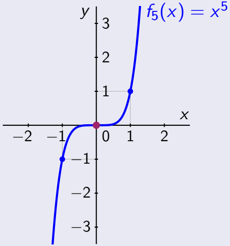
Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

Pre funkcie $f_n\colon\ y = x^n$, kde $n = 2k-1,\ k \in N$ (n je nepárne), v bode $x = 0$ platí:

- V bode $x = 0$ je inflexia (ale až pre $n \geq 3$).
- f_n sú rastúce v bode $x = 0$.
- $f(0)$ nie je extrém.

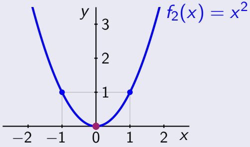


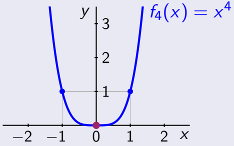


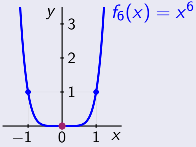


Pre funkcie $f_n\colon\ y = x^n$, kde $n = 2k,\ k \in N$ (n je párne), v bode $x = 0$ platí:

- V bode $x = 0$ nie je inflexia.
- f_n sú rýdzo konvexné na R.
- $f(0)$ je ostré lokálne min.







Konvexnosť a konkávnosť funkcie – Príklady

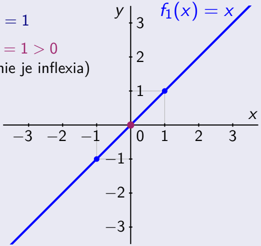
Pre funkcie $f_n\colon y = x^n$, kde $n = 2k-1$, $k \in N$ (n je nepárne), v bode $x = 0$ platí:

- V bode $x = 0$ je inflexia (ale až pre $n \geq 3$).
- f_n sú rastúce v bode $x = 0$.
- $f(0)$ nie je extrém.

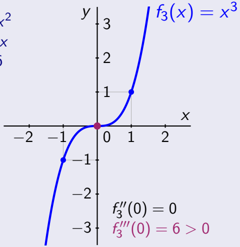
$f_1'(x) = 1$

$f_1'(0) = 1 > 0$

(ale nie je inflexia)

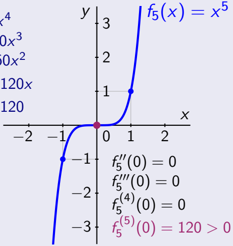


$f_3'(x) = 3x^2$
$f_3''(x) = 6x$
$f_3'''(x) = 6$



$f_3''(0) = 0$
$f_3'''(0) = 6 > 0$

$f_5'(x) = 5x^4$
$f_5''(x) = 20x^3$
$f_5'''(x) = 60x^2$
$f_5^{(4)}(x) = 120x$
$f_5^{(5)}(x) = 120$



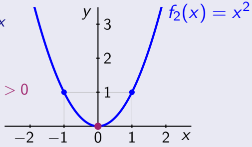
$f_5''(0) = 0$
$f_5'''(0) = 0$
$f_5^{(4)}(0) = 0$
$f_5^{(5)}(0) = 120 > 0$

Pre funkcie $f_n\colon y = x^n$, kde $n = 2k$, $k \in N$ (n je párne), v bode $x = 0$ platí:

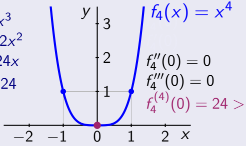
- V bode $x = 0$ nie je inflexia.
- f_n sú rýdzo konvexné na R.
- $f(0)$ je ostré lokálne min.

$f_2'(x) = 2x$
$f_2''(x) = 2$

$f_2'(0) = 0$
$f_2''(0) = 2 > 0$

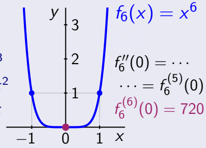


$f_4'(x) = 4x^3$
$f_4''(x) = 12x^2$
$f_4'''(x) = 24x$
$f_4^{(4)}(x) = 24$



$f_4''(0) = 0$
$f_4'''(0) = 0$
$f_4^{(4)}(0) = 24 > 0$

$f_6'(x) = 6x^5$
$f_6''(x) = 30x^4$
$f_6'''(x) = 120x^3$
$f_6^{(4)}(x) = 360x^2$
$f_6^{(5)}(x) = 720x$
$f_6^{(6)}(x) = 720$



$f_6''(0) = \cdots$
$\cdots = f_6^{(5)}(0) = 0$
$f_6^{(6)}(0) = 720 > 0$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in R \cup \{\pm\infty\}$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in R \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in R \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a,
  označenie $f \sim g$ a, resp. $f \sim g$, $x \to a$,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in R \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a,

  označenie $f \sim g$ v bode a, resp. $f \sim g,\ x \to a$,

  práve vtedy, ak platí
  - $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
  - $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in R \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a, označenie $f \sim g$ v bode a, resp. $f \sim g$, $x \to a$,

práve vtedy, ak platí
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in R \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a,

  označenie $f \sim g$ v bode a, resp. $f \sim g,\ x \to a$,

  práve vtedy, ak platí
  - $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
  - $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2 \sim x$ v bode 1, pretože $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x} = \dfrac{1^2}{1} = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in R \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a, označenie $f \sim g$ v bode a, resp. $f \sim g,\ x \to a$,

  práve vtedy, ak platí
  - $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
  - $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2 \sim x$ v bode 1, pretože $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{x} = \frac{1^2}{1} = 1$.
- $\sin x \sim x$ v bode 0, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a) - \{a\}$, kde $a \in R \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a, označenie $f \sim g$ v bode a, resp. $f \sim g,\ x \to a$,

  práve vtedy, ak platí • $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j. • $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2 \sim x$ v bode 1, pretože $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2}{x} = \frac{1^2}{1} = 1$.
- $\sin x \sim x$ v bode 0, pretože $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x \sim 1$ v bodoch $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in Z$, pretože $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin x}{1} = \frac{\sin a}{1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a)-\{a\}$, kde $a\in R\cup\{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a, označenie $f\sim g$ v bode a, resp. $f\sim g,\ x\to a$, práve vtedy, ak platí
  - $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, t. j.
  - $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2\sim x$ v bode 1, pretože $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{x}=\frac{1^2}{1}=1$.
- $\sin x\sim x$ v bode 0, pretože $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.
- $\sin x\sim 1$ v bodoch $a=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, kde $k\in Z$, pretože $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x}{1}=\frac{\sin a}{1}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}=\frac{1}{1}=1$.
- $\ln(x+1)\sim x$ v bode 0, pretože $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a)-\{a\}$, kde $a\in R\cup\{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú (f sa asymptoticky rovná g) v bode a,
  označenie $f\sim g$ v bode a, resp. $f\sim g,\ x\to a$,

  práve vtedy, ak platí • $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, t. j. • $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2\sim x$ v bode 1, pretože $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x}=\frac{1^2}{1}=1$.
- $\sin x\sim x$ v bode 0, pretože $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.
- $\sin x\sim 1$ v bodoch $a=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, kde $k\in Z$, pretože $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{1}=\frac{\sin a}{1}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}=\frac{1}{1}=1$.
- $\ln(x+1)\sim x$ v bode 0, pretože $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1$.
- $\frac{1-x}{x}\sim -1$ v bodoch $\pm\infty$, pretože $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1-x}{x}}{-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptotická rovnosť

Reálne funkcie f a g sú definované v okolí $O(a)-\{a\}$, kde $a \in R \cup \{\pm\infty\}$.

- Funkcie f a g sa **asymptoticky rovnajú** (f sa **asymptoticky rovná** g) v bode a, označenie $f \sim g$ v bode a, resp. $f \sim g$, $x \to a$, práve vtedy, ak platí
  - $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, t. j.
  - $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Asymptoticky sa rovnajú, napríklad funkcie:

- $x^2 \sim x$ v bode 1, pretože $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{x} = \frac{1^2}{1} = 1$.
- $\sin x \sim x$ v bode 0, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- $\sin x \sim 1$ v bodoch $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in Z$, pretože $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x}{1} = \frac{\sin a}{1} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$.
- $\ln(x+1) \sim x$ v bode 0, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln \mathrm{e} = 1$.
- $\frac{1-x}{x} \sim -1$ v bodoch $\pm\infty$, pretože $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1-x}{x}}{-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (1-\frac{1}{x}) = 1$.

Asymptoticky sa nerovnajú, napríklad funkcie:

- $\frac{1}{x} \not\sim 0$ v bodoch $\pm\infty$, pretože $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{0}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 0 = 0 \neq 1$

  a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{0} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{0\cdot x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{0}$ neexistuje. [Nulou sa deliť nedá.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetrovaní priebehu funkcie f, je dôležité preskúmať jej vlastnosti:

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetrovaní priebehu funkcie f, je dôležité preskúmať jej vlastnosti:
  - V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetrovaní priebehu funkcie f, je dôležité preskúmať jej vlastnosti:
  - V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetrovaní **priebehu** funkcie f, je **dôležité preskúmať** jej **vlastnosti:** [Preskúmať problémové body.]
  - V bodoch jej **nespojitosti,** pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetrovaní priebehu funkcie f, je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]
  - V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetrovaní **priebehu** funkcie f, je **dôležité preskúmať** jej **vlastnosti**: [Preskúmať problémové body.]
  - V bodoch jej **nespojitosti**, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetrovaní priebehu funkcie f, je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]
  - V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí:
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\frac{1}{x} - 0] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetrovaní priebehu funkcie f, je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]
  - V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to\pm\infty} [\frac{1}{x} - 0] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f.
- Graf funkcie g, t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota

- Pri vyšetrovaní **priebehu** funkcie f, je **dôležité preskúmať** jej **vlastnosti:** [Preskúmať problémové body.]
  - V bodoch jej **nespojitosti,** pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí:

- $$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\tfrac{1}{x} - 0\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f.
- Graf funkcie g, t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f.

Priamka $y = q$, kde $q \in R$, sa nazýva horizontálna (vodorovná) asymptota grafu funkcie f,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota [ASH]

- Pri vyšetrovaní **priebehu** funkcie f, je **dôležité preskúmať** jej **vlastnosti:** [Preskúmať problémové body.]
  - V bodoch jej **nespojitosti,** pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí:

- $$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f.
- Graf funkcie g, t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f.

Priamka $y = q$, kde $q \in R$, sa nazýva horizontálna (vodorovná) asymptota grafu funkcie f,
resp. asymptota so smernicou 0 grafu funkcie f, označenie ASH,

- Platí $\lim_{x\to-\infty} f(x) = q$ alebo $\lim_{x\to\infty} f(x) = q$.

[Priamka $y = q$ je rovnobežná s osou x, t. j. má smernicu 0.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota [ASH]

- Pri vyšetrovaní priebehu funkcie f, je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]
  - V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x)=\frac{1}{x}$ a $g(x)=0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí:

- $$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\tfrac{1}{x}-0\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f.
- Graf funkcie g, t. j. priamka $y=0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f.

Priamka $y=q$, kde $q\in R$, sa nazýva horizontálna (vodorovná) asymptota grafu funkcie f, resp. asymptota so smernicou 0 grafu funkcie f, označenie ASH, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=q$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=q$. [Priamka $y=q$ je rovnobežná s osou x, t. j. má smernicu 0.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota [ASH]

- Pri vyšetrovaní priebehu funkcie f, je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]
  - V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

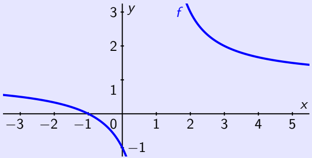
existuje konečná limita ich rozdielu a platí:
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f.
- Graf funkcie g, t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f.

Priamka $y = q$, kde $q \in R$, sa nazýva **horizontálna (vodorovná) asymptota** grafu funkcie f, resp. **asymptota so smernicou 0** grafu funkcie f, označenie ASH, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = q$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = q$. [Priamka $y = q$ je rovnobežná s osou x, t. j. má smernicu 0.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota [ASH]

- Pri vyšetrovaní priebehu funkcie f, je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]
  - V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí:
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

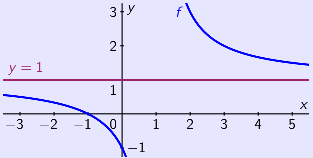
- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f.
- Graf funkcie g, t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f.

Priamka $y = q$, kde $q \in R$, sa nazýva horizontálna (vodorovná) asymptota grafu funkcie f, resp. asymptota so smernicou 0 grafu funkcie f, označenie ASH, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = q$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = q$. [Priamka $y = q$ je rovnobežná s osou x, t. j. má smernicu 0.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.

- Priamka $y = 1$ je ASH,



Asymptotické vlastnosti funkcií – Horizontálna asymptota [ASH]

- Pri vyšetrovaní priebehu funkcie f, je dôležité preskúmať jej vlastnosti: [Preskúmať problémové body.]
  - V bodoch jej nespojitosti, pokiaľ existujú. [Hlavne neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
  - V bodoch $-\infty$ a ∞, pokiaľ je $D(f)$ neohraničený. [Ich limitné vlastnosti v okoliach týchto bodov.]

Funkcie $f(x) = \frac{1}{x}$ a $g(x) = 0$ sa asymptoticky nerovnajú v bodoch $\pm\infty$, ale

existuje konečná limita ich rozdielu a platí: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{x} - 0\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$

- Grafom funkcie g je priamka rovnobežná s osou x (vodorovná, resp. horizontálna) a v bodoch $\pm\infty$ sa k nej asymptoticky blíži graf funkcie f.
- Graf funkcie g, t. j. priamka $y = 0$ predstavuje horizontálnu (vodorovnú) asymptotu grafu funkcie f.

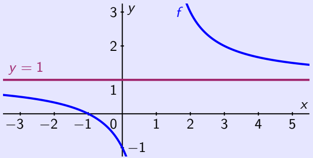
Priamka $y = q$, kde $q \in R$, sa nazýva horizontálna (vodorovná) asymptota grafu funkcie f, resp. asymptota so smernicou 0 grafu funkcie f, označenie ASH, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = q$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = q$. [Priamka $y = q$ je rovnobežná s osou x, t. j. má smernicu 0.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$.

- Priamka $y = 1$ je ASH, pretože $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 + \frac{2}{\infty} = 1 + 0 = 1$

  a aj $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 + \frac{2}{-\infty} = 1 + 0 = 1.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota

Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f,
resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f, označenie ABS,

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y, t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f, resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f, označenie ABS, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y, t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞.]

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f, resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f, označenie ABS, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y, t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$ má jednu ABS priamku $x = 1$,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f, resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f, označenie ABS, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y, t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$ má jednu ABS priamku $x = 1$, pretože $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f, resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f, označenie ABS, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y, t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$ má jednu ABS priamku $x = 1$, pretože $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in R$, môžu byť napríklad:

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

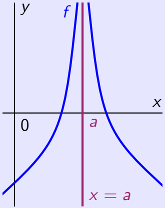
Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f, resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f, označenie ABS, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y, t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$ má jednu ABS priamku $x = 1$, pretože $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in R$, môžu byť napríklad:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

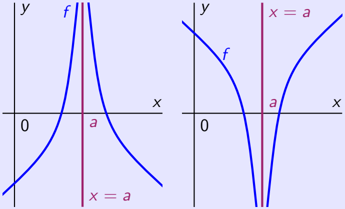
Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f,
resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f, označenie ABS, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.
  [Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y, t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$ má jednu ABS priamku $x = 1$,
  pretože $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in R$, môžu byť napríklad:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

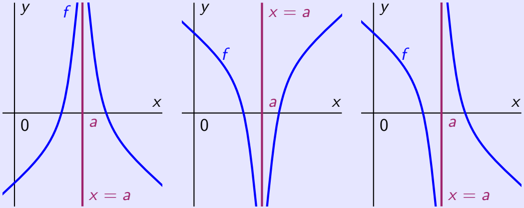
Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f, resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f, označenie ABS, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y, t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$ má jednu ABS priamku $x = 1$, pretože $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in R$, môžu byť napríklad:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

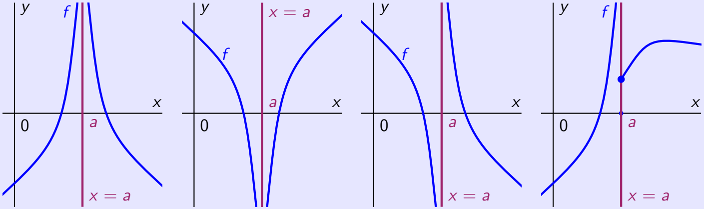
Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f, resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f, označenie ABS, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y, t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$ má jednu ABS priamku $x = 1$, pretože $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in R$, môžu byť napríklad:



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$, $f(a) = b \in R$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

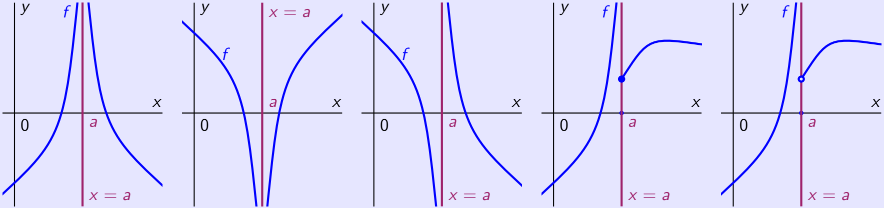
Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f,
resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f, označenie ABS, ak:

- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y, t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$ má jednu ABS priamku $x = 1$,
pretože $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in R$, môžu byť napríklad:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $f(a) = b \in R$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b \in R$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Vertikálna asymptota [ABS]

Priamka $x = c$, kde $c \in R$, sa nazýva **vertikálna (zvislá) asymptota** grafu funkcie f, resp. **asymptota bez smernice** grafu funkcie f, označenie ABS, ak:

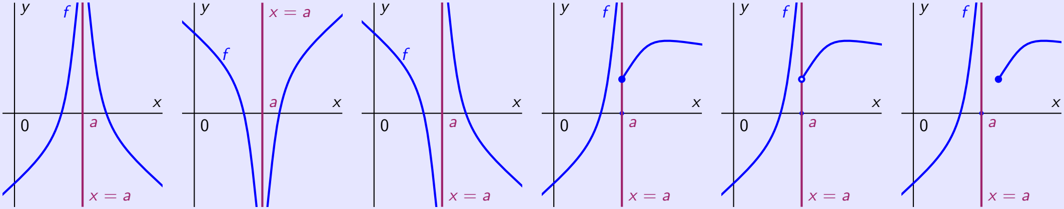
- Aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ je nevlastná, t. j. $-\infty$ alebo $+\infty$.

[Priamka $x = c$ je rovnobežná s osou y, t. j. nemá smernicu, resp. smernica je nevlastná $-\infty$ alebo ∞.]

- Funkcia $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$ má jednu ABS priamku $x = 1$,

pretože $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = \infty$.

Asymptoty bez smernice (ABS) $x = a$, kde $a \in R$, môžu byť napríklad:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

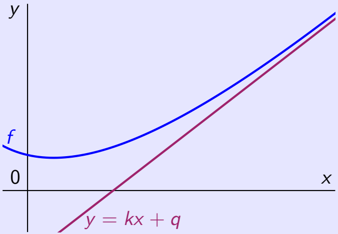
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $f(a) = b \in R$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b \in R$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ neexistuje

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

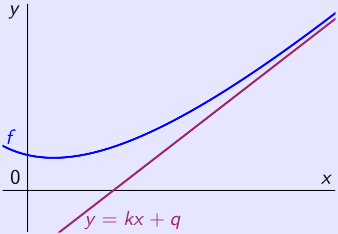
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva asymptota so smernicou grafu f, označenie ASS,



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS,

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

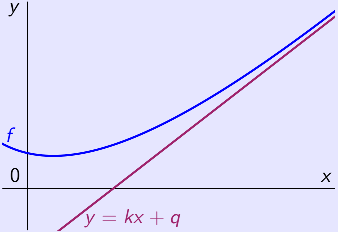


Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x \to -\infty} \big[f(x) - (kx + q)\big] = 0$ alebo $\lim\limits_{x \to \infty} \big[f(x) - (kx + q)\big] = 0.$

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]



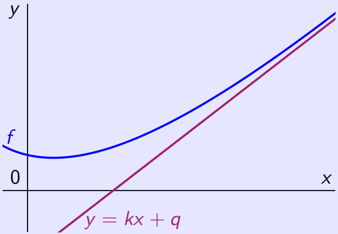
Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.



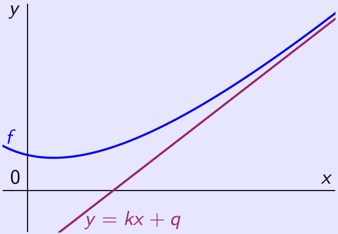
Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva asymptota so smernicou grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x \to -\infty} \big[f(x) - (kx + q)\big] = 0$ alebo $\lim\limits_{x \to \infty} \big[f(x) - (kx + q)\big] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).



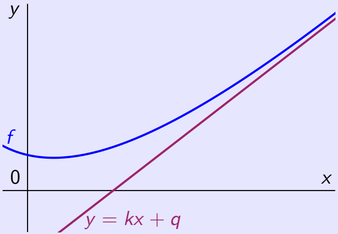
Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0.$

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

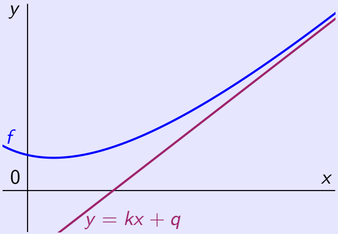
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

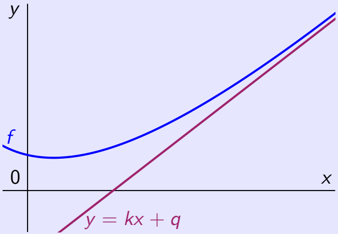
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0.$ $\Rightarrow$ • $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

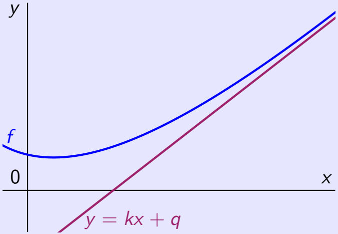
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0.$

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0.$ $\Rightarrow$ • $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k.$



- Pre smernicu ASS platí $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

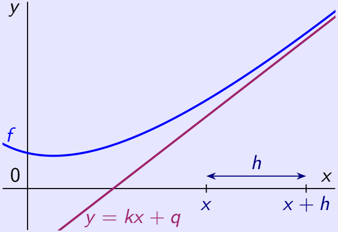
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$. $\Rightarrow$ • $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k$.



- Pre smernicu ASS platí $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x.

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

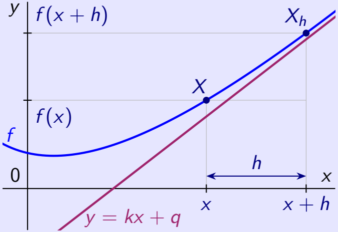
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0.$ $\Rightarrow$ • $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k.$



- Pre smernicu ASS platí $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg}\alpha$, kde α je uhol ASS a osi x.

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

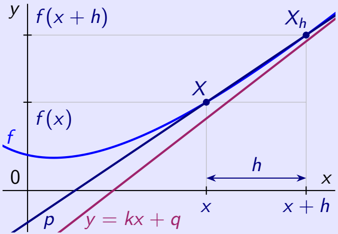
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0.$ $\Rightarrow$ • $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k.$



- Pre smernicu ASS platí $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg}\alpha$, kde α je uhol ASS a osi x.

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$ a priamku $p = XX_h$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

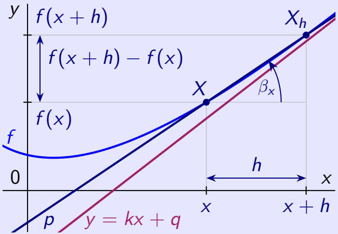
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0. \Rightarrow$ • $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k.$



- Pre smernicu ASS platí $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x.

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

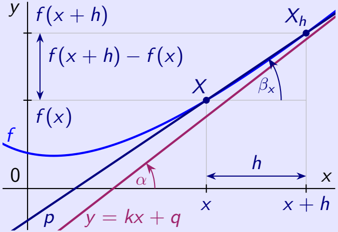
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0.$ $\Rightarrow$
- $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k.$



- Pre smernicu ASS platí $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x.

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x.

- Pre $x \to \infty$ platí $\beta_x \to \alpha$,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

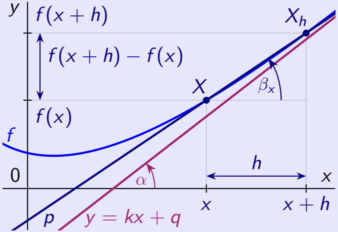
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

  - Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
  - Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
  - Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0.$ $\Rightarrow$ • $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k.$



- Pre smernicu ASS platí $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x.

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x.

- Pre $x \to \infty$ platí $\beta_x \to \alpha$, t. j. $\operatorname{tg} \beta_x \to \operatorname{tg} \alpha = k$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

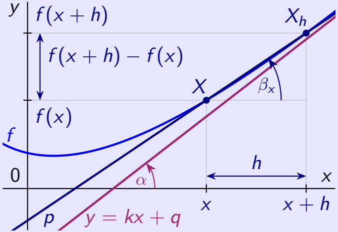
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0.$

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0.$ $\Rightarrow$
- $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} - k.$



- Pre smernicu ASS platí $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \operatorname{tg}\alpha$, kde α je uhol ASS a osi x.

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg}\beta_x = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x.

- Pre $x \to \infty$ platí $\beta_x \to \alpha$, t. j. $\operatorname{tg}\beta_x \to \operatorname{tg}\alpha = k$.
- Pre smernicu ASS platí $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tg}\beta_x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

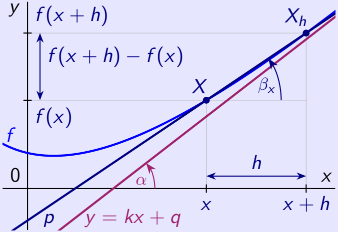
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva **asymptota so smernicou** grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0.$ $\Rightarrow$ • $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k.$



- Pre smernicu ASS platí $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg}\alpha$, kde α je uhol ASS a osi x.

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x+h; f(x+h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg}\beta_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x.

- Pre $x \to \infty$ platí $\beta_x \to \alpha$, t. j. $\operatorname{tg}\beta_x \to \operatorname{tg}\alpha = k$.
- Pre smernicu ASS platí $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tg}\beta_x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

kde $h > 0$ je ľubovoľné.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

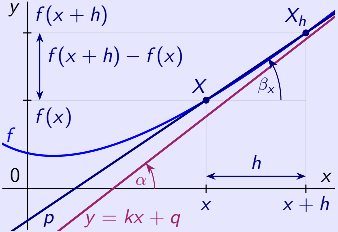
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva asymptota so smernicou grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$ $\Rightarrow$ • $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k.$



- Pre smernicu ASS platí $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg}\alpha$, kde α je uhol ASS a osi x.

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x + h; f(x + h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg}\beta_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x.

- Pre $x \to \infty$ platí $\beta_x \to \alpha$, t. j. $\operatorname{tg}\beta_x \to \operatorname{tg}\alpha = k$.
- Pre smernicu ASS platí $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tg}\beta_x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, kde $h > 0$ je ľubovoľné.

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, je ASS grafu funkcie f.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Asymptota so smernicou [ASS]

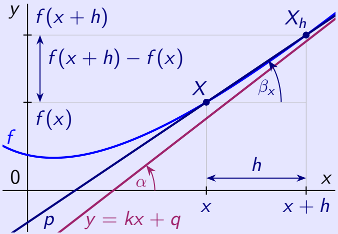
Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, sa nazýva asymptota so smernicou grafu f, označenie ASS, ak:

- Platí $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$.

[Smernicou priamky $y = kx + q$, $x \in R$ je číslo $k \in R$, t. j. $y = kx + q$, $x \in R$ je asymptota so smernicou $k \in R$.]

- Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ je ASS grafu funkcie f aj vtedy, ak graf funkcie f okolo priamky osciluje.
- Špeciálne pre $k = 0$ dostaneme $y = q$, $x \in R$, t. j. ASH (horizontálnu asymptu grafu funkcie f).
- Funkcia f môže mať maximálne dve ASS, vrátane ASH, jednu pre $x \to -\infty$ a jednu pre $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0$. $\Rightarrow$
- $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k$.



- Pre smernicu ASS platí $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol ASS a osi x.

- Zvoľme $h \neq 0$ (ľubovoľné ale pevne dané) a uvažujme $x \in D(f)$ (ľubovoľné).
- Označme body $X = [x; f(x)]$ a $X_h = [x + h; f(x + h)]$ a priamku $p = XX_h$.
- Pre smernicu priamky p platí $\operatorname{tg} \beta_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, kde β_x je uhol p a osi x.

- Pre $x \to \infty$ platí $\beta_x \to \alpha$, t. j. $\operatorname{tg} \beta_x \to \operatorname{tg} \alpha = k$.
- Pre smernicu ASS platí $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tg} \beta_x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

kde $h > 0$ je ľubovoľné.

Priamka $y = kx + q$, $x \in R$ kde $k, q \in R$, je ASS grafu funkcie f.

$\Leftrightarrow$
- Existujú konečné limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in R$ a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = q \in R$.

[Buď $x \to -\infty$ alebo $x \to \infty$ pre druhú ASS.]

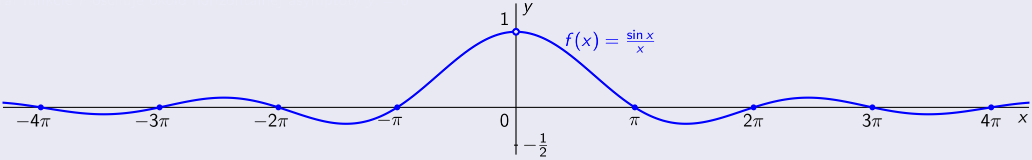
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

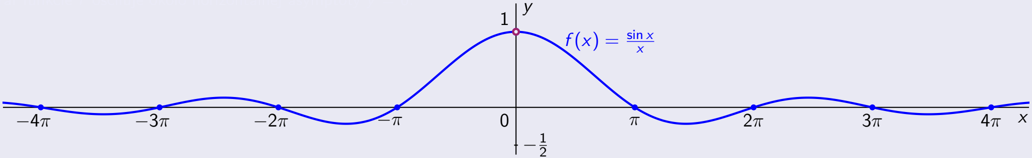
- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

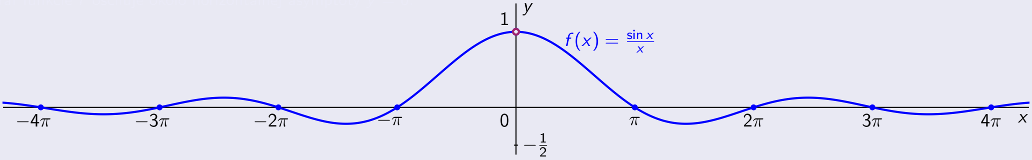
- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.
- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, [Jediný bod nespojitosti.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.
- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]

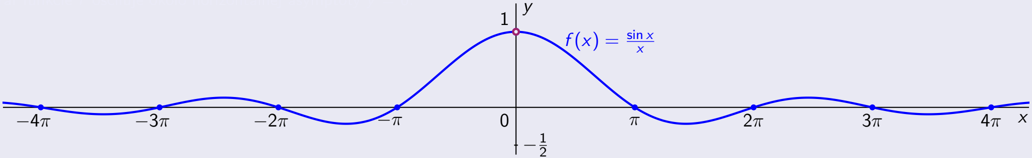


Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú.

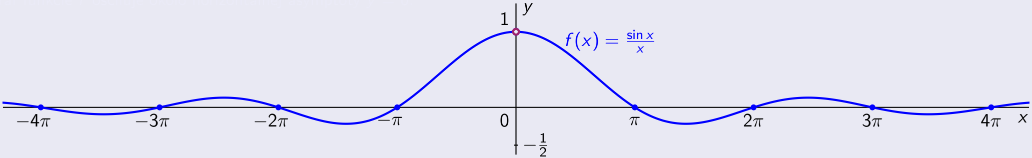


Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Longrightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]



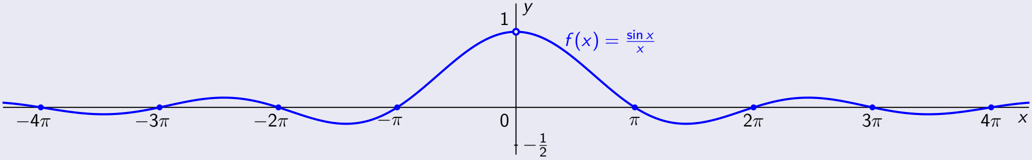
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x}$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

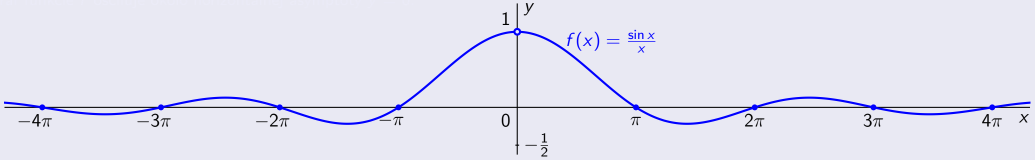
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x}$

[$x \in R - \{0\}$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

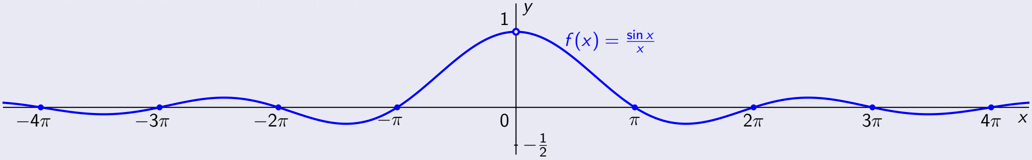
$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \ x \in R - \{0\}.$

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x}$

  $\left[x \in R - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1, \ -|x| \leq x \leq |x|.\right.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

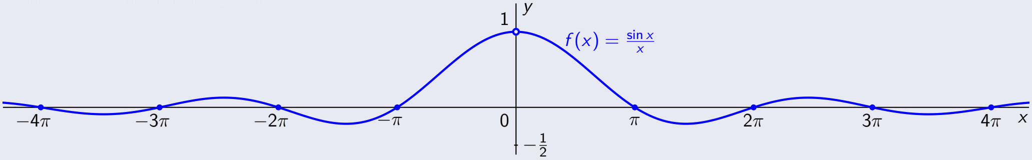
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{c}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0\end{array}\right]$

$\big[x \in R - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1,\ -|x| \leq x \leq |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

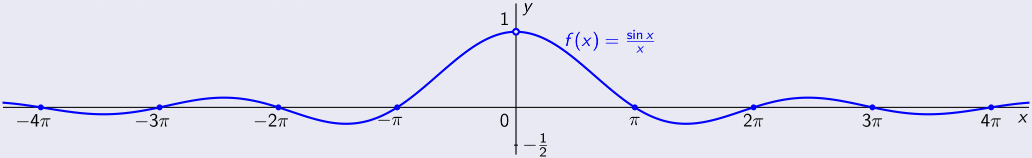
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0 \end{array}\right] = 0.$

$\left[x \in R - \{0\}. \Rightarrow -1 \le \sin x \le 1,\ -|x| \le x \le |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = 0.\right]$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

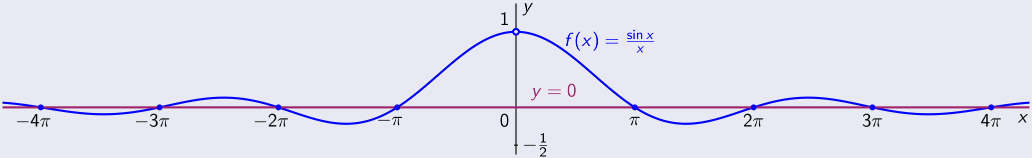
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{matrix}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0\end{matrix}\right] = 0.$ $\Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

$\left[x \in R - \{0\}. \Rightarrow -1 \le \sin x \le 1,\ -|x| \le x \le |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = 0.\right]$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x},\ x \in R - \{0\}.$

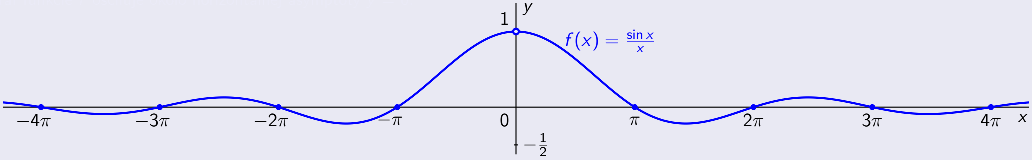
- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{c} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0 \end{array}\right] = 0.$ $\Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

$\left[x \in R - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1,\ -|x| \leq x \leq |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = 0.\right]$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí: [Všetky asymptoty sme už našli. Nasledujúci spôsob nie je potrebný.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

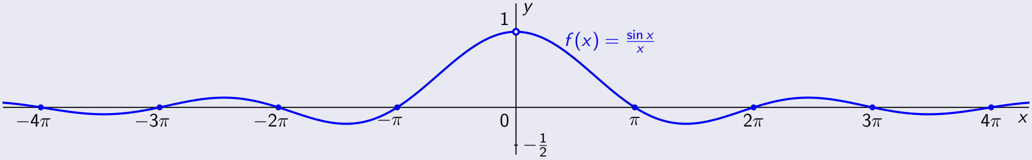
- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{matrix} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0 \end{matrix} \right] = 0.$ $\Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

$\left[x \in R - \{0\}. \Rightarrow -1 \le \sin x \le 1,\ -|x| \le x \le |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{|x|} \le \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \le \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{|x|} = 0.\right]$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí: [Všetky asymptoty sme už našli. Nasledujúci spôsob nie je potrebný.]

- $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{matrix} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x^2} \to 0 \end{matrix} \right] = 0.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x},\ x \in R - \{0\}.$

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

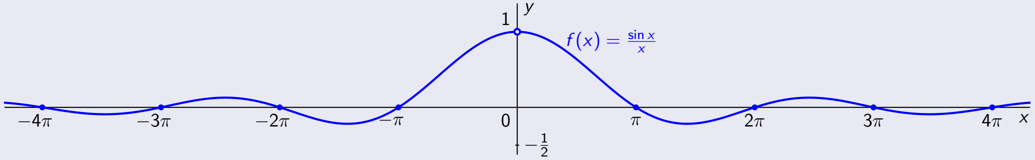
- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{matrix}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0\end{matrix}\right] = 0.$ $\Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

$\left[x \in R - \{0\}. \Rightarrow -1 \le \sin x \le 1,\ -|x| \le x \le |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = 0.\right]$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí: [Všetky asymptoty sme už našli. Nasledujúci spôsob nie je potrebný.]

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{matrix}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x^2} \to 0\end{matrix}\right] = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{matrix} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0 \end{matrix}\right] = 0.$ $\Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

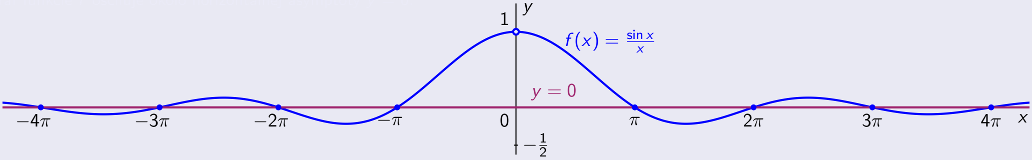
$\left[x \in R - \{0\}. \Rightarrow -1 \le \sin x \le 1,\ -|x| \le x \le |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \le \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = 0.\right]$

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí: [Všetky asymptoty sme už našli. Nasledujúci spôsob nie je potrebný.]

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{matrix} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x^2} \to 0 \end{matrix}\right] = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$

$\Rightarrow$ • ASS má tvar $y = 0x + 0 = 0$.

[Je to jediná ASS a je to súčasne aj ASH.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\begin{array}{c}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0\end{array}\right] = 0.$ $\Rightarrow$ • $y = 0$ je jediná ASH, t. j. aj ASS.

$\left[x \in R - \{0\}. \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1,\ -|x| \leq x \leq |x|. \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}. \Rightarrow 0 = -\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = 0.\right]$

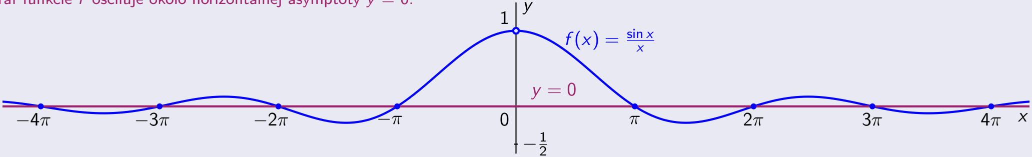
Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí: [Všetky asymptoty sme už našli. Nasledujúci spôsob nie je potrebný.]

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\begin{array}{c}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x^2} \to 0\end{array}\right] = 0.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$

$\Rightarrow$ • ASS má tvar $y = 0x + 0 = 0$.

[Je to jediná ASS a je to súčasne aj ASH.]

Graf funkcie f osciluje okolo horizontálnej asymptoty $y = 0$.



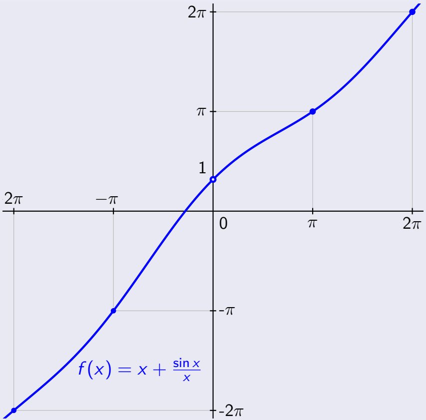
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

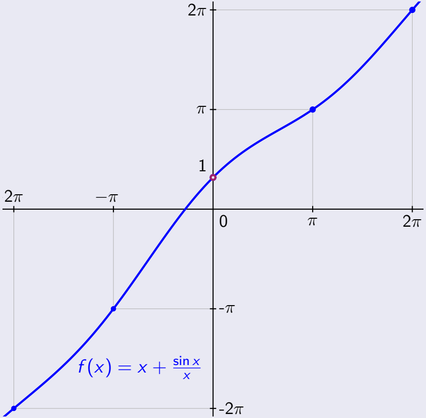


Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, [Jediný bod nespojitosti.]

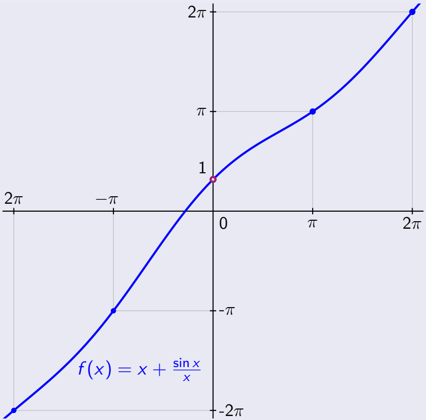


Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x},\ x \in R - \{0\}.$

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = 1.$ [Jediný bod nespojitosti.]

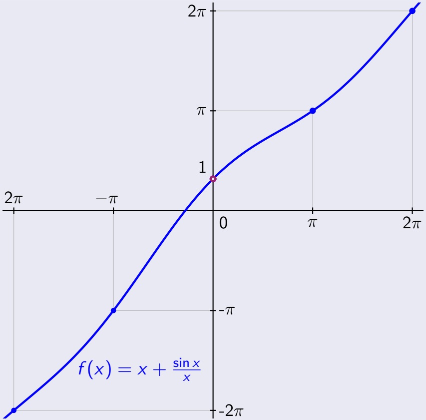


Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x},\ x \in R - \{0\}.$

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = 1.$ [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú.

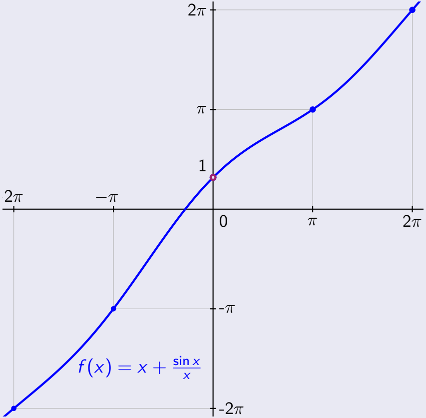


Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = 1.$ [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]



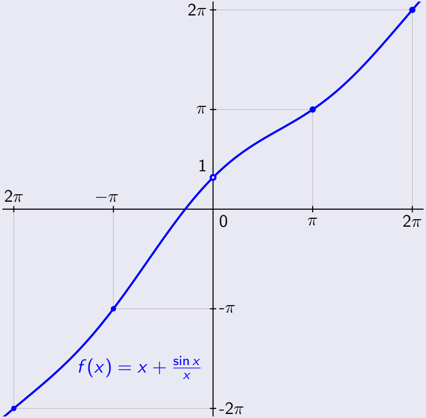
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x \to 0} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = 1.$ [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = \left[\begin{array}{c} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0 \end{array}\right]$



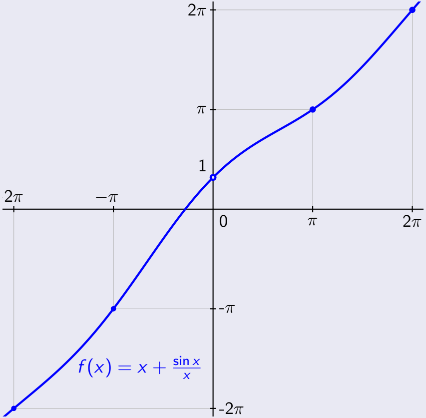
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = \left[\begin{array}{c} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0 \end{array}\right]$
  $= \pm\infty + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

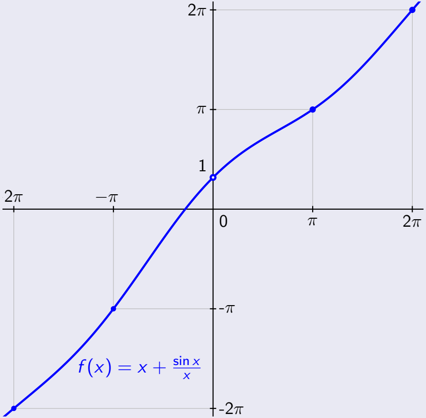
- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x \to 0} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = 1.$ [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = \left[\begin{matrix} \sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0 \end{matrix}\right]$

  $= \pm\infty + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

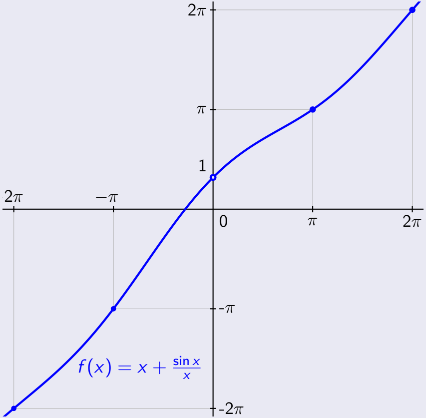
- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = 1.$ [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = \left[\begin{array}{c}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0\end{array}\right]$
$= \pm\infty + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{\sin x}{x^2}\right]$
$= \left[\begin{array}{c}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x^2} \to 0\end{array}\right] = 1 + 0 = 1.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

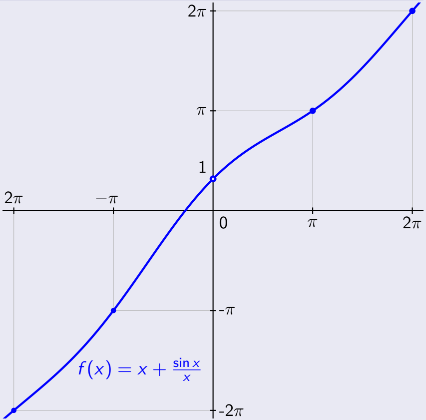
- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = 1.$ [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = \left[\begin{array}{c}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0\end{array}\right]$
  $= \pm\infty + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{\sin x}{x^2}\right]$
  $= \left[\begin{array}{c}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x^2} \to 0\end{array}\right] = 1 + 0 = 1.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x}.$
  $= \left[\begin{array}{c}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0\end{array}\right] = 0.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x},\ x \in R - \{0\}.$

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0}\left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = 1$. [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

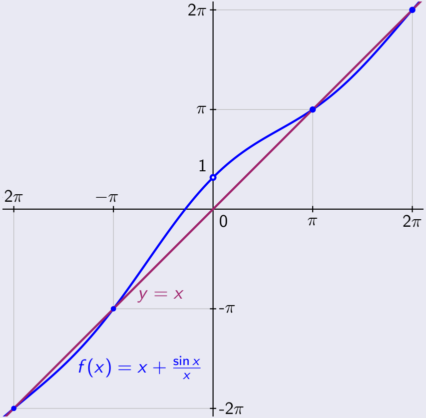
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = \left[\begin{smallmatrix}\sin x \text{ je ohraničená}\\ x\to\pm\infty,\ \frac{1}{x}\to 0\end{smallmatrix}\right]$
$= \pm\infty + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[1 + \frac{\sin x}{x^2}\right]$
$= \left[\begin{smallmatrix}\sin x \text{ je ohraničená}\\ x\to\pm\infty,\ \frac{1}{x^2}\to 0\end{smallmatrix}\right] = 1 + 0 = 1.$

- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x}.$
$= \left[\begin{smallmatrix}\sin x \text{ je ohraničená}\\ x\to\pm\infty,\ \frac{1}{x}\to 0\end{smallmatrix}\right] = 0.$

$\Rightarrow$ • ASS má tvar $y = x + 0 = x$. [Je to jediná ASS.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je odstrániteľná nespojitosť, pretože $\lim\limits_{x\to 0} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = 1.$ [Jediný bod nespojitosti.]
- Iné body nespojitosti neexistujú. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

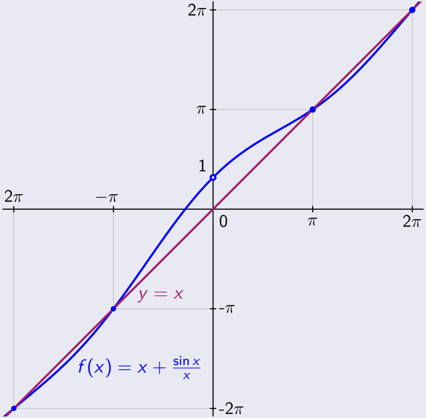
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x}\right] = \left[\begin{array}{c}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0\end{array}\right]$
  $= \pm\infty + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[1 + \frac{\sin x}{x^2}\right]$
  $= \left[\begin{array}{c}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x^2} \to 0\end{array}\right] = 1 + 0 = 1.$
- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x}.$
  $= \left[\begin{array}{c}\sin x \text{ je ohraničená} \\ x \to \pm\infty,\ \frac{1}{x} \to 0\end{array}\right] = 0.$

$\Rightarrow$ • ASS má tvar $y = x + 0 = x$. [Je to jediná ASS.]

Graf funkcie f osciluje okolo asymptoty $y = x$.



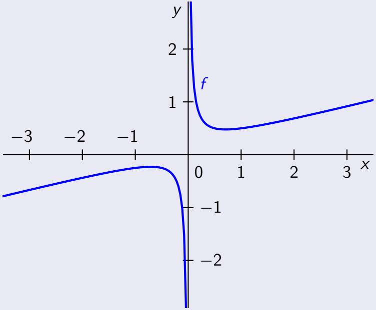
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x},\ x \in R - \{0\}.$

Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x},\ x \in R - \{0\}.$

- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

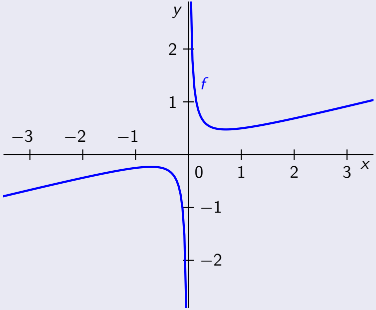


Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x},\ x \in R - \{0\}.$

- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu,



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

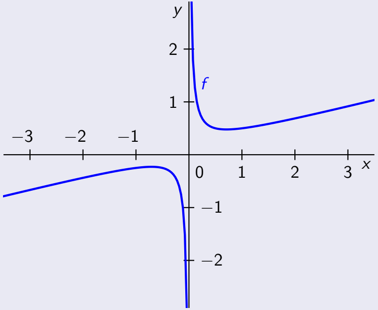
$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 0^-} = \frac{1}{8} - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 0^+} = \frac{1}{8} + \infty = \infty.$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

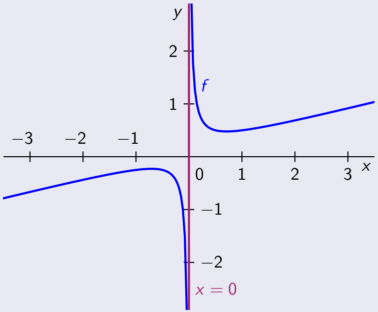
$f(x)=\frac{2x^2+x+1}{8x}=\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x},\ x\in R-\{0\}.$

- Funkcia $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f)=R-\{0\}$.

- V bode $x=0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^-}=\frac{1}{8}-\infty=-\infty.\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 0^+}=\frac{1}{8}+\infty=\infty.\end{array}\right\}\Rightarrow$$

- Priamka $x=0$ je jediná ABS.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x},\ x \in R - \{0\}.$

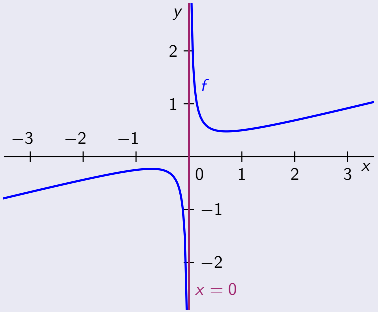
- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= 0 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8\cdot 0^-} = \tfrac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= 0 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8\cdot 0^+} = \tfrac{1}{8} + \infty = \infty. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty,$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x},\ x \in R - \{0\}.$

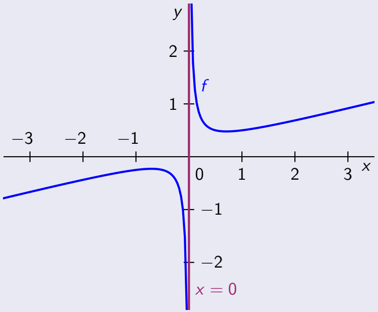
- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= 0 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8\cdot 0^-} = \tfrac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= 0 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8\cdot 0^+} = \tfrac{1}{8} + \infty = \infty. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x},\ x \in R - \{0\}.$

- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

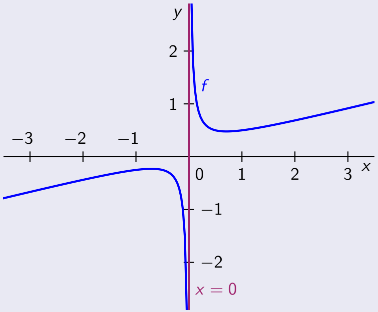
- V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 0^-} = \frac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 0^+} = \frac{1}{8} + \infty = \infty. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

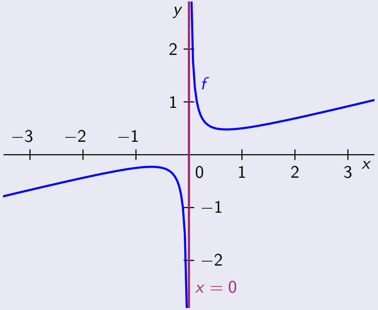
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 0^-} = \frac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 0^+} = \frac{1}{8} + \infty = \infty. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2}\right] = \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4}.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x},\ x \in R - \{0\}.$

- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= 0 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8\cdot 0^-} = \tfrac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= 0 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8\cdot 0^+} = \tfrac{1}{8} + \infty = \infty. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

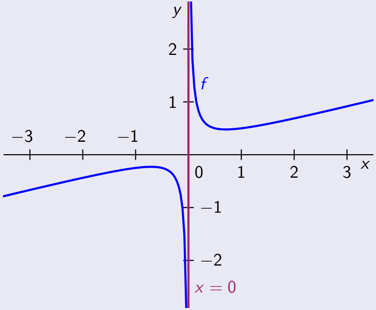
- Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2}\right] = \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4}.$

- $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} - \frac{x}{4}\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$, $x \in R - \{0\}$.

- Funkcia $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$.

- V bode $x = 0$ je neodstrániteľná nespojitosť II. druhu, pretože platí:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= 0 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8\cdot 0^-} = \tfrac{1}{8} - \infty = -\infty. \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= 0 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8\cdot 0^+} = \tfrac{1}{8} + \infty = \infty. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- Priamka $x = 0$ je jediná ABS.

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty + 0 + 0 = \pm\infty$, t. j. ASH neexistuje.

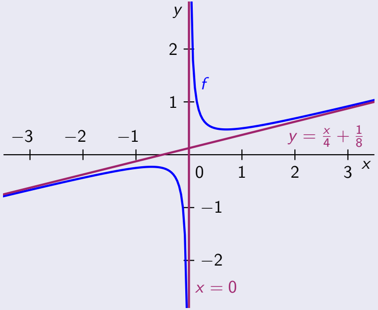
Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2}\right] = \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4}$.

- $q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x} - \frac{x}{4}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}$.

$\Rightarrow$ • ASS má tvar $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$.

[Je to jediná ASS.]



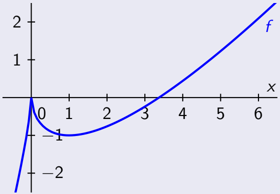
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, $x \in R$.

Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, $x \in R$.

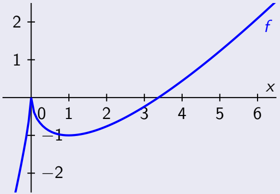
- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = R$.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, $x \in R$.

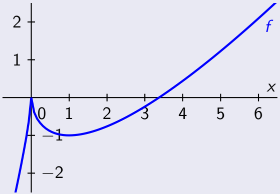
- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = R$. $\Rightarrow$
- Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2},\ x \in R.$

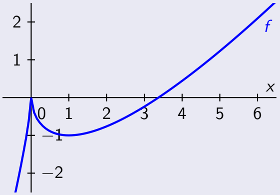
- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = R$. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje,



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, $x \in R$.

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = R$. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.



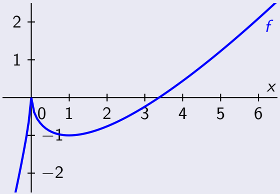
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2},\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = R$. $\Rightarrow$
- Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:



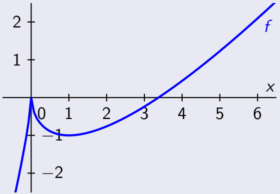
Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, $x \in R$.

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = R$. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right] = \lim_{z\to\infty} \left[2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right]$$
$$= \left[\frac{\sqrt[3]{z^2}}{z} = z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-1} = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right] = 2 + \lim_{z\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{z}} = 2 + 0 = 2.$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2},\ x \in R.$

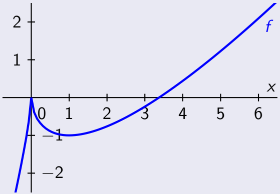
- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = R.$ $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $k_- = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[2 - \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right] = \lim\limits_{z\to\infty} \left[2 + \dfrac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right]$

  $= \left[\frac{\sqrt[3]{z^2}}{z} = z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-1} = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \right] = 2 + \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt[3]{z}} = 2 + 0 = 2.$

- $k_+ = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[2 - \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right] = \left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-1} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right] = 2 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} = 2 - 0 = 2.$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$, $x \in R$.

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = R$. $\Rightarrow$
- Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

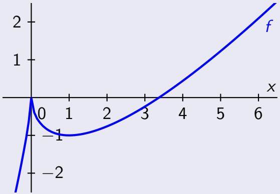
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right] = \lim_{z\to\infty} \left[2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right]$$
$$= \left[\frac{\sqrt[3]{z^2}}{z} = z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-1} = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right] = 2 + \lim_{z\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{z}} = 2 + 0 = 2.$$

- $$k_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right] = \left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-1} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right] = 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 2 - 0 = 2.$$

- $$q_{\mp} = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[-3\sqrt[3]{x^2}\right] = -\infty.$$



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2},\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = R.$ $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

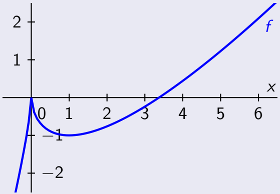
Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right] = \lim_{z\to\infty} \left[2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right]$$
$$= \left[\frac{\sqrt[3]{z^2}}{z} = z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-1} = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right] = 2 + \lim_{z\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{z}} = 2 + 0 = 2.$$

- $$k_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right] = \left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-1} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right] = 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 2 - 0 = 2.$$

- $$q_\mp = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[-3\sqrt[3]{x^2}\right] = -\infty.$$

$\Rightarrow$ • Neexistujú ASS.



Asymptotické vlastnosti funkcií – Príklad

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2},\ x \in R.$

- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá na $D(f) = R$. $\Rightarrow$ • Neexistujú ABS. [Neexistujú vertikálne asymptoty.]

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = -\infty$ a • $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - \infty$ neexistuje, t. j. ASH neexistuje.

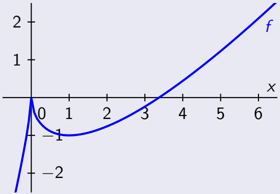
Pre koeficienty ASS $y = kx + q$ platí:

- $$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } z = -x & x \to -\infty \\ x^2 = z^2 & z \to \infty \end{array}\right] = \lim_{z\to\infty}\left[2 + \frac{3\sqrt[3]{z^2}}{z}\right]$$
$$= \left[\frac{\sqrt[3]{z^2}}{z} = z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-1} = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right] = 2 + \lim_{z\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{z}} = 2 + 0 = 2.$$

- $$k_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[2 - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}\right] = \left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-1} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right] = 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 2 - 0 = 2.$$

- $$q_\mp = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-3\sqrt[3]{x^2}\right] = -\infty.$$

$\Rightarrow$ • Neexistujú ASS.



- Funkcia $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2},\ x \in R$ nemá žiadne asymptoty.

[Neexistujú ABS, ASH ani ASS.]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:

  - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:
  - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
  - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:
  - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
  - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
  - Vypočítať jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:

  - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
  - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
  - Vypočítať jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
  - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:
  - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
  - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
  - Vypočítať jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
  - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
  - Vypočítať f', určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémy
    a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:
  - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
  - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
  - Vypočítať jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
  - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
  - Vypočítať f', určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémy a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
  - Vypočítať f'', určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti:
  - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
  - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
  - Vypočítať jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
  - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
  - Vypočítať f', určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémy a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
  - Vypočítať f'', určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
  - Určiť všetky asymptoty, t. j. ABS, ASH a ASS.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti: [Preskúmať všetky jej vlastnosti.]
  - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
  - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
  - Vypočítať jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
  - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
  - Vypočítať f', určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémy a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
  - Vypočítať f'', určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
  - Určiť všetky asymptoty, t. j. ABS, ASH a ASS.
  - Určiť obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti: [Preskúmať všetky jej vlastnosti.]
  - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
  - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
  - Vypočítať jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
  - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
  - Vypočítať f', určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémy a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
  - Vypočítať f'', určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
  - Určiť všetky asymptoty, t. j. ABS, ASH a ASS.
  - Určiť obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie.
- Najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie nám väčšinou poskytne jej graf.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti: [Preskúmať všetky jej vlastnosti.]
  - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
  - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
  - Vypočítať jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
  - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
  - Vypočítať f', určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémy a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
  - Vypočítať f'', určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
  - Určiť všetky asymptoty, t. j. ABS, ASH a ASS.
  - Určiť obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie.
- Najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie nám väčšinou poskytne jej graf.
  - Pri jeho konštrukcii využívame všetky zistené údaje.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Vlastnosti funkcie

- Vyšetriť priebeh funkcie f, znamená postupne určiť všetky jej vlastnosti: [Preskúmať všetky jej vlastnosti.]
  - Určiť definičný obor $D(f)$, body a intervaly spojitosti, resp. nespojitosti.
  - Zistiť či je funkcia párna, nepárna, periodická, resp. určiť jej iné špeciálne vlastnosti.
  - Vypočítať jednostranné limity v bodoch nespojitosti, v hraničných bodoch a v bodoch $\pm\infty$.
  - Nájsť nulové body a určiť intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
  - Vypočítať f', určiť stacionárne body, lokálne a globálne extrémy a určiť intervaly na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca a konštantná.
  - Vypočítať f'', určiť inflexné body a určiť intervaly na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
  - Určiť všetky asymptoty, t. j. ABS, ASH a ASS.
  - Určiť obor hodnôt $H(f)$ a načrtnúť graf funkcie.
- Najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie nám väčšinou poskytne jej graf.
  - Pri jeho konštrukcii využívame všetky zistené údaje.
  - Mnohokrát sú tieto údaje nedostatočné, preto ich musíme vhodne doplniť, napr. vhodne zvolenými funkčnými hodnotami.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

[tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

[tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi)

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. $[f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}.]$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. [$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0\pm\infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. $[f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0\pm\infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. [$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0\pm\infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0$. [$f(x) = 0. \Leftrightarrow 4x = 0. \Leftrightarrow x = 0.$]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. [$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0\pm\infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0$. [$f(x) = 0. \Leftrightarrow 4x = 0. \Leftrightarrow x = 0$.]
- Funkcia f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. [$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0\pm\infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0.$ [$f(x) = 0. \Leftrightarrow 4x = 0. \Leftrightarrow x = 0.$]
- Funkcia f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$		$x \in (0; \infty)$
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$	$f(0) = 0$ [nul. bod]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. $[f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0\pm\infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0.$ $[f(x) = 0. \Leftrightarrow 4x = 0. \Leftrightarrow x = 0.]$
- Funkcia f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$		$x \in (0; \infty)$
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$	$f(0) = 0$ [nul. bod]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$
$-$ $\quad f(x) < 0$ [f záporná]	$- \quad +$	$f(x) > 0$ [f kladná] $\quad +$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. $[f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0\pm\infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0.$ $[f(x) = 0. \Leftrightarrow 4x = 0. \Leftrightarrow x = 0.]$
- Funkcia f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$. ⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x\in(-\infty;0)$		$x\in(0;\infty)$
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$	$f(0) = 0$ [nul. bod]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$
$-$ $f(x) < 0$ [f záporná]	$-$ $+$	$f(x) > 0$ [f kladná] $+$

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x\in R$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. $[f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0\pm\infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0.$ $[f(x) = 0. \Leftrightarrow 4x = 0. \Leftrightarrow x = 0.]$
- Funkcia f nemení znamienko[⊛] na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$		$x \in (0; \infty)$
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$	$f(0) = 0$ [nul. bod]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$
$-$ $\quad f(x) < 0$ [f záporná]	$-$ $+$	$f(x) > 0$ [f kladná] $\quad +$

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2},\ x \in R.$
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = -1$ alebo $x = 1.$ $[f'(x) = 0. \Leftrightarrow 4(1-x^2) = 4(1-x)(1+x) = 0. \Leftrightarrow x = -1$ alebo $x = 1.]$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. [$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0\pm\infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0$. [$f(x) = 0. \Leftrightarrow 4x = 0. \Leftrightarrow x = 0.$]
- Funkcia f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$		$x \in (0; \infty)$
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$	$f(0) = 0$ [nul. bod]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$
$-$ $f(x) < 0$ [f záporná]	$-$ $+$	$f(x) > 0$ [f kladná] $+$

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = -1$ alebo $x = 1$. [$f'(x) = 0. \Leftrightarrow 4(1-x^2) = 4(1-x)(1+x) = 0. \Leftrightarrow x = -1$ alebo $x = 1$.]
- Funkcia f' je spojitá na R

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (1. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. [tab] [graf] [Viď 01-Pr III, 02-Pr III.]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R$ (na celej reálnej osi) a nemá body nespojitosti.
- ABS neexistuje. [Neexistujú body neodstrániteľnej nespojitosti II. druhu.]
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, je nepárna. $[f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$ a $f(-x) = \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-4x}{1+x^2} = -\frac{4x}{1+x^2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x}+x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x}+x} = \frac{4}{0\pm\infty} = \frac{4}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0.$ $[f(x) = 0. \Leftrightarrow 4x = 0. \Leftrightarrow x = 0.]$
- Funkcia f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$		$x \in (0; \infty)$
$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2 < 0$	$f(0) = 0$ [nul. bod]	$f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 > 0$
$-$ $f(x) < 0$ [f záporná]	$-$ $+$	$f(x) > 0$ [f kladná] $+$

- $f'(x) = \frac{4[1+x^2-x\cdot 2x]}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = -1$ alebo $x = 1$. $[f'(x) = 0. \Leftrightarrow 4(1-x^2) = 4(1-x)(1+x) = 0. \Leftrightarrow x = -1$ alebo $x = 1.]$
- Funkcia f' je spojitá na R a nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ a $(1; \infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [lok. min] $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [lok. max]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [lok. min] $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [lok. max] $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min] $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$	$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min] $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in R$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min] $\quad f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max] $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in R$.
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$. [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$.]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x\in(-\infty;-1)$	$x\in(-1;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min] $\quad f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max] $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in R$.
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$. [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$.]
- Funkcia f'' je spojitá na R a nemení znamienko$^{\circledast}$ na intervaloch $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};0)$, $(0;\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3};\infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min] $\quad f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max] $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in R$.
- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$. [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$.]
- Funkcia f'' je spojitá na R a nemení znamienko[⊛] na intervaloch $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x)=\frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x\in R$. [tab] [graf]

$x\in(-\infty;-1)$	$x\in(-1;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f'(-2)=\frac{4(1-4)}{(1+4)^2}=-\frac{12}{25}<0$	$f'(0)=\frac{4(1-0)}{(1+0)^2}=4>0$	$f'(2)=\frac{4(1-4)}{(1+4)^2}=-\frac{12}{25}<0$
$\searrow$ $f'(x)<0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x)>0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x)<0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ $f(-1)=\frac{-4}{1+1}=-2$ [glob. min] $f(1)=\frac{4}{1+1}=2$ [glob. max] $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

- $f''(x)=\frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot2(1+x^2)\cdot2x]}{(1+x^2)^4}=\frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3}=\frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x\in R$.
- $f''(x)=0.$ $\Leftrightarrow$ • $x=0$ alebo $x=\pm\sqrt{3}$. [$f''(x)=0.\Leftrightarrow 8x(x^2-3)=8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0.\Leftrightarrow x=0$ alebo $x=\pm\sqrt{3}$.]
- Funkcia f'' je spojitá na R a nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};0)$, $(0;\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3};\infty)$.

$x\in(-\infty;-\sqrt{3})$	$x\in(-\sqrt{3};0)$	$x\in(0;\sqrt{3})$	$x\in(\sqrt{3};\infty)$
$f''(-2)=\frac{-16(4-3)}{(1+4)^3}=-\frac{16}{125}<0$	$f''(-1)=\frac{-8(1-3)}{(1+1)^3}=2>0$	$f''(1)=\frac{8(1-3)}{(1+1)^3}=-2<0$	$f''(2)=\frac{16(4-3)}{(1+4)^3}=\frac{16}{125}>0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min] $\quad f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max] $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in R$.
- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$. [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$.]
- Funkcia f'' je spojitá na R a nemení znamienko® na intervaloch $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = \frac{-16(4-3)}{(1+4)^3} = -\frac{16}{125} < 0$	$f''(-1) = \frac{-8(1-3)}{(1+1)^3} = 2 > 0$	$f''(1) = \frac{8(1-3)}{(1+1)^3} = -2 < 0$	$f''(2) = \frac{16(4-3)}{(1+4)^3} = \frac{16}{125} > 0$
$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) > 0$ [f konvexná] $\cup$	$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) > 0$ [f konvexná] $\cup$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x)=\frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x\in R$. [tab] [graf]

$x\in(-\infty;-1)$	$x\in(-1;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f'(-2)=\frac{4(1-4)}{(1+4)^2}=-\frac{12}{25}<0$	$f'(0)=\frac{4(1-0)}{(1+0)^2}=4>0$	$f'(2)=\frac{4(1-4)}{(1+4)^2}=-\frac{12}{25}<0$
$\searrow$ $f'(x)<0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x)>0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x)<0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\quad f(-1)=\frac{-4}{1+1}=-2$ [glob. min] $\quad f(1)=\frac{4}{1+1}=2$ [glob. max] $\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0$

- $f''(x)=\frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot2(1+x^2)\cdot2x]}{(1+x^2)^4}=\frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3}=\frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x\in R$.
- $f''(x)=0.\ \Leftrightarrow$ • $x=0$ alebo $x=\pm\sqrt{3}$. $[f''(x)=0.\Leftrightarrow 8x(x^2-3)=8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0.\Leftrightarrow x=0$ alebo $x=\pm\sqrt{3}.]$
- Funkcia f'' je spojitá na R a nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};0)$, $(0;\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3};\infty)$.

$x\in(-\infty;-\sqrt{3})$	$x\in(-\sqrt{3};0)$	$x\in(0;\sqrt{3})$	$x\in(\sqrt{3};\infty)$
$f''(-2)=\frac{-16(4-3)}{(1+4)^3}=-\frac{16}{125}<0$	$f''(-1)=\frac{-8(1-3)}{(1+1)^3}=2>0$	$f''(1)=\frac{8(1-3)}{(1+1)^3}=-2<0$	$f''(2)=\frac{16(4-3)}{(1+4)^3}=\frac{16}{125}>0$
$\cap$ $f''(x)<0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x)>0$ [f konvexná] $\cup$	$\cap$ $f''(x)<0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x)>0$ [f konvexná] $\cup$

$f(-\sqrt{3})=\frac{-4\cdot\sqrt{3}}{1+3}=-\sqrt{3}$ [inf. bod] $\quad f(0)=\frac{0}{1+0}=0$ [inf. bod] $\quad f(\sqrt{3})=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{1+3}=\sqrt{3}$ [inf. bod]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x)=\frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x\in R$. [tab] [graf]

$x\in(-\infty;-1)$	$x\in(-1;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f'(-2)=\frac{4(1-4)}{(1+4)^2}=-\frac{12}{25}<0$	$f'(0)=\frac{4(1-0)}{(1+0)^2}=4>0$	$f'(2)=\frac{4(1-4)}{(1+4)^2}=-\frac{12}{25}<0$
$\searrow$ $f'(x)<0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x)>0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x)<0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ $f(-1)=\frac{-4}{1+1}=-2$ [glob. min] $f(1)=\frac{4}{1+1}=2$ [glob. max] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

- $f''(x)=\frac{4[-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}=\frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3}=\frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x\in R$.
- $f''(x)=0.\Leftrightarrow$ • $x=0$ alebo $x=\pm\sqrt{3}$. [$f''(x)=0.\Leftrightarrow 8x(x^2-3)=8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0.\Leftrightarrow x=0$ alebo $x=\pm\sqrt{3}$.]
- Funkcia f'' je spojitá na R a nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};0)$, $(0;\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3};\infty)$.

$x\in(-\infty;-\sqrt{3})$	$x\in(-\sqrt{3};0)$	$x\in(0;\sqrt{3})$	$x\in(\sqrt{3};\infty)$
$f''(-2)=\frac{-16(4-3)}{(1+4)^3}=-\frac{16}{125}<0$	$f''(-1)=\frac{-8(1-3)}{(1+1)^3}=2>0$	$f''(1)=\frac{8(1-3)}{(1+1)^3}=-2<0$	$f''(2)=\frac{16(4-3)}{(1+4)^3}=\frac{16}{125}>0$
$\cap$ $f''(x)<0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x)>0$ [f konvexná] $\cup$	$\cap$ $f''(x)<0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x)>0$ [f konvexná] $\cup$

$f(-\sqrt{3})=\frac{-4\cdot\sqrt{3}}{1+3}=-\sqrt{3}$ [inf. bod] $f(0)=\frac{0}{1+0}=0$ [inf. bod] $f(\sqrt{3})=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{1+3}=\sqrt{3}$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH má tvar $y=0$. [Viď 1. časť (predchádzajúca strana),

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min] $\quad f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max] $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in R$.
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$. [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$.]
- Funkcia f'' je spojitá na R a nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = \frac{-16(4-3)}{(1+4)^3} = -\frac{16}{125} < 0$	$f''(-1) = \frac{-8(1-3)}{(1+1)^3} = 2 > 0$	$f''(1) = \frac{8(1-3)}{(1+1)^3} = -2 < 0$	$f''(2) = \frac{16(4-3)}{(1+4)^3} = \frac{16}{125} > 0$
$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) > 0$ [f konvexná] $\cup$	$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) > 0$ [f konvexná] $\cup$

$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\cdot\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}$ [inf. bod] $\quad f(0) = \frac{0}{1+0} = 0$ [inf. bod] $\quad f(\sqrt{3}) = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH má tvar $y = 0$. [Viď 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí $y = kx + q = 0x + 0 = 0$, kde $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{1+x^2} = \frac{4}{1+\infty} = 0$ a $q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (2. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$	$f'(0) = \frac{4(1-0)}{(1+0)^2} = 4 > 0$	$f'(2) = \frac{4(1-4)}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -2$ [glob. min] $f(1) = \frac{4}{1+1} = 2$ [glob. max] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{4[-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4[-2x-2x^3-4x+4x^3]}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $x \in R$.
- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$. [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 8x(x^2-3) = 8x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0. \Leftrightarrow x = 0$ alebo $x = \pm\sqrt{3}$.]
- Funkcia f'' je spojitá na R a nemení znamienko[⊛] na intervaloch $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}; \infty)$.

$x \in (-\infty; -\sqrt{3})$	$x \in (-\sqrt{3}; 0)$	$x \in (0; \sqrt{3})$	$x \in (\sqrt{3}; \infty)$
$f''(-2) = \frac{-16(4-3)}{(1+4)^3} = -\frac{16}{125} < 0$	$f''(-1) = \frac{-8(1-3)}{(1+1)^3} = 2 > 0$	$f''(1) = \frac{8(1-3)}{(1+1)^3} = -2 < 0$	$f''(2) = \frac{16(4-3)}{(1+4)^3} = \frac{16}{125} > 0$
$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) > 0$ [f konvexná] $\cup$	$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) > 0$ [f konvexná] $\cup$

$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\cdot\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3}$ [inf. bod] $f(0) = \frac{0}{1+0} = 0$ [inf. bod] $f(\sqrt{3}) = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH má tvar $y = 0$.
- Obor hodnôt $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

[Viď 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí $y = kx + q = 0x + 0 = 0$, kde $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{1+x^2} = \frac{4}{1+\infty} = 0$ a $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.]

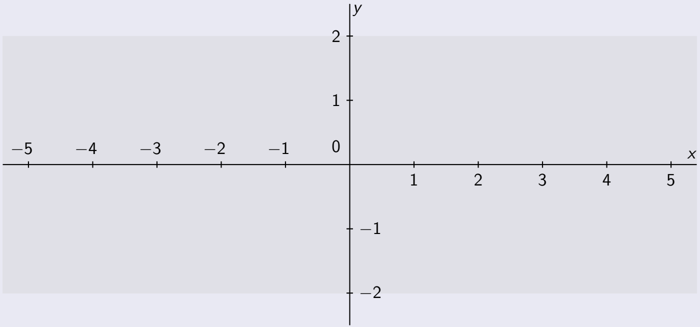
Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

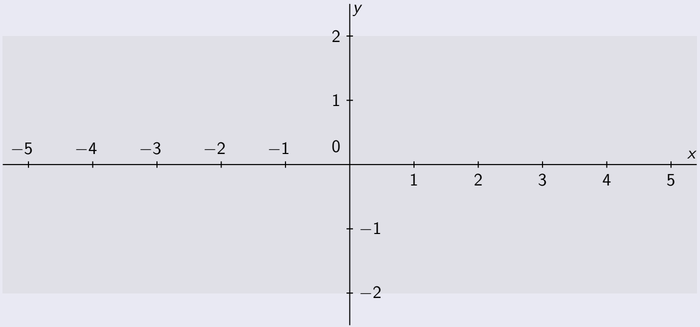
- $D(f) = R$.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.



Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

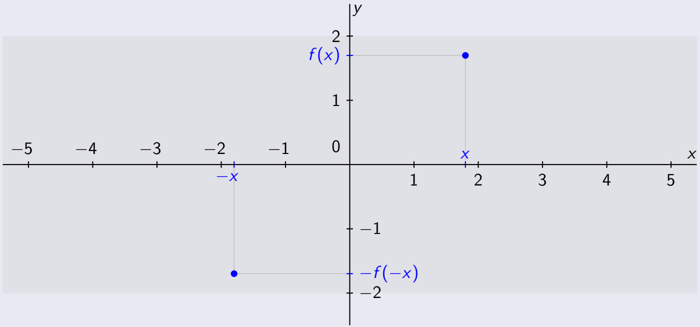


Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- f nepárna.

- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.



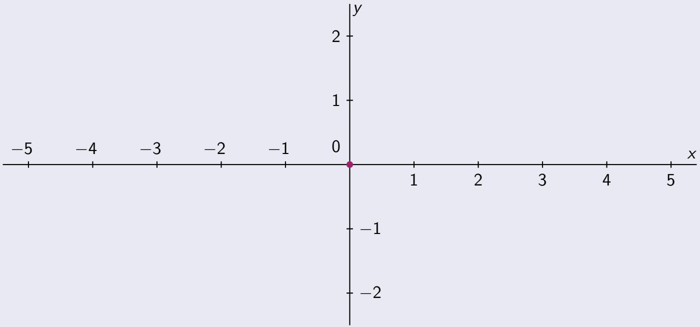
Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
			0 [nulový bod]		

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- f nepárna.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.



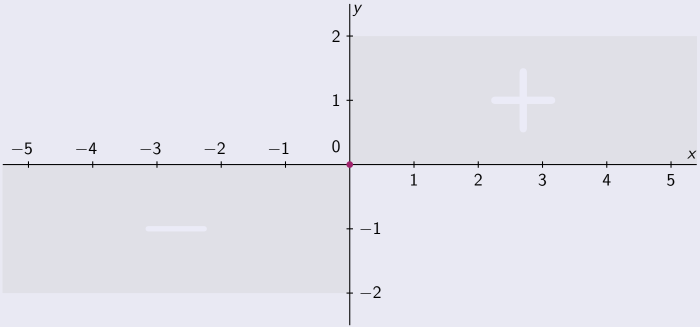
Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
			0 [nulový bod]		
$-$	f záporná	$-$	$+$	f kladná	$+$

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- f nepárna.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

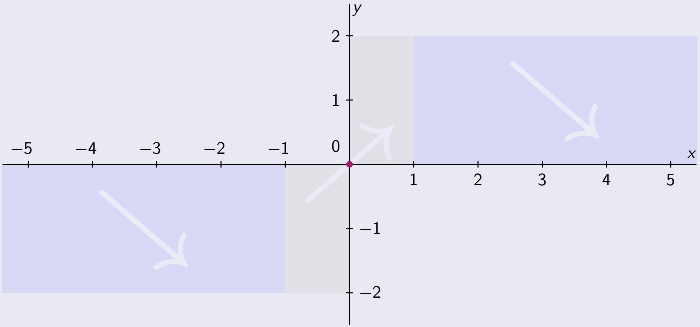


Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
			0 [nulový bod]		
$-$	f záporná	$-$	$+$	f kladná	$+$
$\searrow$ f klesá	$\searrow$	$\nearrow$ f rastie	$\nearrow$	$\searrow$ f klesá	$\searrow$

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- f nepárna.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

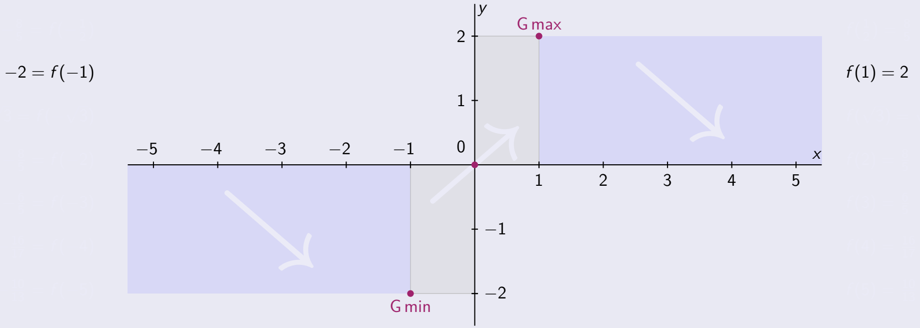


Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
		0 [nulový bod]			
$-$	f záporná	$-$	$+$	f kladná	$+$
	-1 [globálne min]			1 [globálne max]	
$\searrow$ f klesá $\searrow$		$\nearrow$ f rastie $\nearrow$		$\searrow$ f klesá $\searrow$	

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- f nepárna.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.



Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

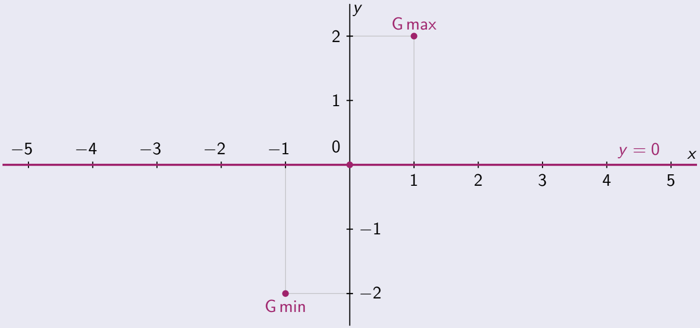
$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
		0 [nulový bod]			
$-$	f záporná	$-$	$+$	f kladná	$+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$	-1 [globálne min]		1 [globálne max]		$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\searrow$ f klesá $\searrow$		$\nearrow$ f rastie $\nearrow$		$\searrow$ f klesá $\searrow$	

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$-2 = f(-1)$



$f(1) = 2$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

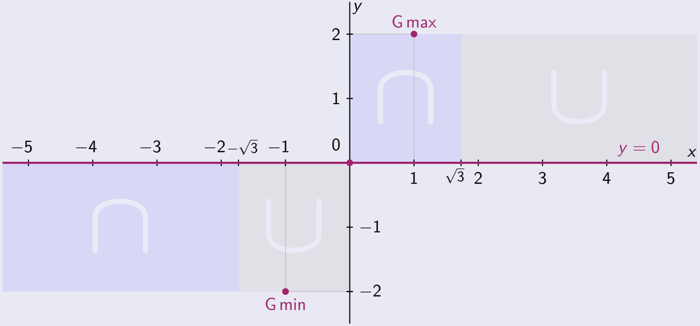
$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
		0 [nulový bod]			
$-$ f záporná $-$			$+$ f kladná $+$		
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$		-1 [globálne min]		1 [globálne max]	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\searrow$ f klesá $\searrow$		$\nearrow$ f rastie $\nearrow$		$\searrow$ f klesá $\searrow$	
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$		$\cap$ f konkávna $\cap$		$\cup$ f konvexná $\cup$

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$-2 = f(-1)$



$f(1) = 2$

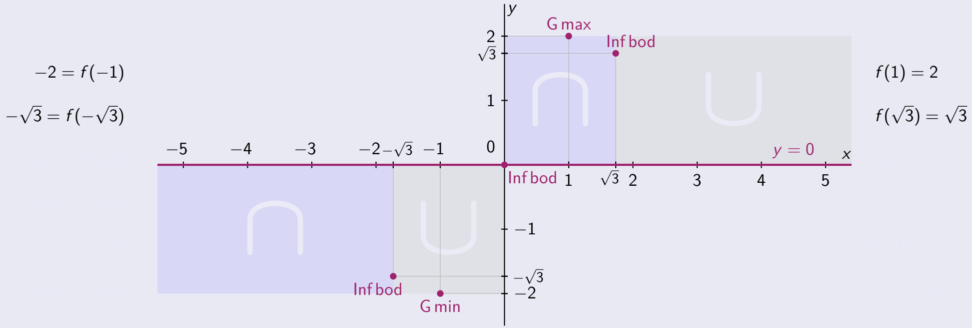
Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$.

[tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
			0 [nulový bod]		
$-$	f záporná	$-$	$+$	f kladná	$+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$		-1 [globálne min]		1 [globálne max]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\searrow$ f klesá $\searrow$		$\nearrow$ f rastie $\nearrow$		$\searrow$ f klesá $\searrow$	
	$-\sqrt{3}$ [inflexný bod]		0 [inflexný bod]		$\sqrt{3}$ [inflexný bod]
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$		$\cap$ f konkávna $\cap$		$\cup$ f konvexná $\cup$

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.



Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

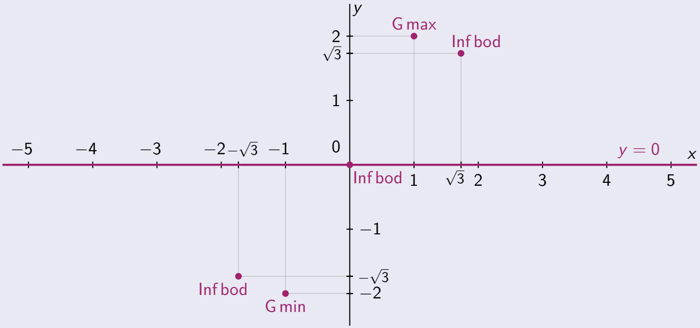
$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
			0 [nulový bod]		
$-$	f záporná	$-$	$+$	f kladná	$+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$		-1 [globálne min]		1 [globálne max]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\searrow$ f klesá $\searrow$		$\nearrow$ f rastie $\nearrow$		$\searrow$ f klesá $\searrow$	
	$-\sqrt{3}$ [inflexný bod]		0 [inflexný bod]		$\sqrt{3}$ [inflexný bod]
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$		$\cap$ f konkávna $\cap$		$\cup$ f konvexná $\cup$

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$-2 = f(-1)$

$-\sqrt{3} = f(-\sqrt{3})$



$f(1) = 2$

$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
		0 [nulový bod]			
$-$	f záporná	$-$	$+$	f kladná	$+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$		-1 [globálne min]		1 [globálne max]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\searrow$ f klesá $\searrow$		$\nearrow$ f rastie $\nearrow$		$\searrow$ f klesá $\searrow$	
	$-\sqrt{3}$ [inflexný bod]		0 [inflexný bod]		$\sqrt{3}$ [inflexný bod]
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$		$\cap$ f konkávna $\cap$		$\cup$ f konvexná $\cup$

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$-\frac{8}{5} = f(-\frac{1}{2})$

$-2 = f(-1)$

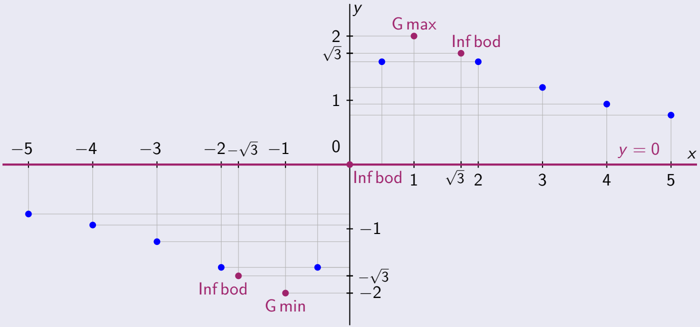
$-\sqrt{3} = f(-\sqrt{3})$

$-\frac{8}{5} = f(-2)$

$-\frac{6}{5} = f(-3)$

$-\frac{16}{17} = f(-4)$

$-\frac{10}{13} = f(-5)$



$f(\frac{1}{2}) = \frac{8}{5}$

$f(1) = 2$

$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

$f(2) = \frac{8}{5}$

$f(3) = \frac{6}{5}$

$f(4) = \frac{16}{17}$

$f(5) = \frac{10}{13}$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad I (3. časť)

$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$. [tab] [graf]

$(-\infty; -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; \infty)$
			0 [nulový bod]		
$-$ f záporná		$-$	$+$	f kladná	$+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$		-1 [globálne min]		1 [globálne max]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\searrow$ f klesá	$\searrow$	$\nearrow$ f rastie	$\nearrow$	$\searrow$ f klesá	$\searrow$
	$-\sqrt{3}$ [inflexný bod]		0 [inflexný bod]		$\sqrt{3}$ [inflexný bod]
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cup$ f konvexná	$\cup$	$\cap$ f konkávna	$\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$

- $D(f) = R$.
- f spojitá na R.
- f nepárna.
- ASH $y = 0$.
- ABS neexistujú.
- $H(f) = \langle -2; 2 \rangle$.

$-\frac{8}{5} = f(-\frac{1}{2})$

$-2 = f(-1)$

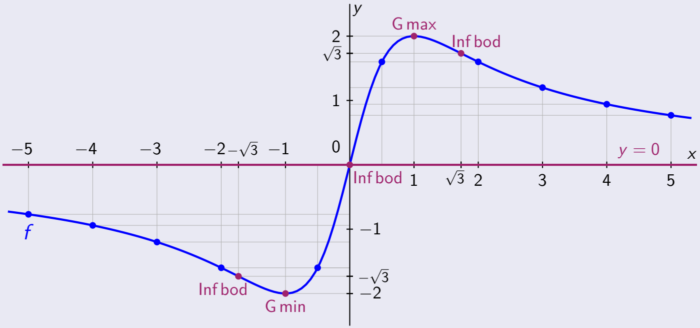
$-\sqrt{3} = f(-\sqrt{3})$

$-\frac{8}{5} = f(-2)$

$-\frac{6}{5} = f(-3)$

$-\frac{16}{17} = f(-4)$

$-\frac{10}{13} = f(-5)$



$f(\frac{1}{2}) = \frac{8}{5}$

$f(1) = 2$

$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

$f(2) = \frac{8}{5}$

$f(3) = \frac{6}{5}$

$f(4) = \frac{16}{17}$

$f(5) = \frac{10}{13}$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. $[f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}.]$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. $[f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x\cdot x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. $[f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x\cdot x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

[tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x\cdot x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0$.
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x = 2$. [$f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ $8(x-2) = 0$. $\Leftrightarrow$ $x = 2$.]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. $[f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}.]$

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x\cdot x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x = 2$. $[f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2.]$
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$.

⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

beerb@frcatel.fri.uniza.sk

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x\cdot x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0$.
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x = 2$. [$f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ $8(x-2) = 0$. $\Leftrightarrow$ $x = 2$.]
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$.

⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x\in(-\infty;0)$	$x\in(0;2)$	$x\in(2;\infty)$

$f(-1) = \frac{-8\cdot 3}{1} = -24 < 0$ 0 [nespojitosť] $f(1) = \frac{-8\cdot 1}{1} = -8 < 0$ $f(2) = 0$ $f(3) = \frac{8\cdot 1}{9} = \frac{8}{9} > 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x)=\frac{8x-16}{x^2}=\frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f)=R-\{0\}$ a $x=0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\frac{-16}{0^+}=-\infty.$ $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x=0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x)=\frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x)=\frac{8(-x)-16}{(-x)^2}=\frac{-8x-16}{x^2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x\cdot x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{8(1-\frac{2}{x})}{x}=\frac{8(1-0)}{\pm\infty}=\frac{8}{\pm\infty}=0.$
- ASH má tvar $y=0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x)=0.$ $\Leftrightarrow$ • $x=2$. [$f(x)=0. \Leftrightarrow 8(x-2)=0. \Leftrightarrow x=2.$]
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty;0)$, $(0;2)$ a $(2;\infty)$. ⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x\in(-\infty;0)$	$x\in(0;2)$	$x\in(2;\infty)$
$f(-1)=\frac{-8\cdot 3}{1}=-24<0$	0 [nespojitosť] $f(1)=\frac{-8\cdot 1}{1}=-8<0$	$f(2)=0$ $f(3)=\frac{8\cdot 1}{9}=\frac{8}{9}>0$
$-$ $f(x)<0$ [f záporná]	$-$ $-$ $f(x)<0$ [f záporná]	$-$ $+$ $f(x)>0$ [f kladná] $+$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x\cdot x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0$.
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x = 2$. [$f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2$.]
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$. ⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 2)$	$x \in (2; \infty)$
$f(-1) = \frac{-8\cdot 3}{1} = -24 < 0$	0 [nespojitosť] $f(1) = \frac{-8\cdot 1}{1} = -8 < 0$	$f(2) = 0$ $f(3) = \frac{8\cdot 1}{9} = \frac{8}{9} > 0$
$-$ $f(x) < 0$ [f záporná]	$-$ $-$ $f(x) < 0$ [f záporná]	$-$ $+$ $f(x) > 0$ [f kladná] $+$

- $f'(x) = \frac{8[1\cdot x^2 - (x-2)\cdot 2x]}{x^4} = \frac{8[-x^2+4x]}{x^4} = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. $[f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x\cdot x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 2.$ $[f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2.]$
- f nemení znamienko[⊛] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$. ⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 2)$	$x \in (2; \infty)$
$f(-1) = \frac{-8\cdot 3}{1} = -24 < 0$	0 [nespojitosť] $f(1) = \frac{-8\cdot 1}{1} = -8 < 0$	$f(2) = 0$ $f(3) = \frac{8\cdot 1}{9} = \frac{8}{9} > 0$
$-$ $f(x) < 0$ [f záporná]	$- \; -$ $f(x) < 0$ [f záporná]	$- \; +$ $f(x) > 0$ [f kladná] $+$

- $f'(x) = \frac{8[1\cdot x^2-(x-2)\cdot 2x]}{x^4} = \frac{8[-x^2+4x]}{x^4} = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 4.$ $[f'(x) = 0. \Leftrightarrow 8(4-x) = 0. \Leftrightarrow x = 4.]$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. [$f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x\cdot x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0$.
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x = 2$. [$f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ $8(x-2) = 0$. $\Leftrightarrow$ $x = 2$.]
- f nemení znamienko[⊛] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$.

⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 2)$	$x \in (2; \infty)$
$f(-1) = \frac{-8\cdot 3}{1} = -24 < 0$	0 [nespojitosť] $f(1) = \frac{-8\cdot 1}{1} = -8 < 0$	$f(2) = 0$ $f(3) = \frac{8\cdot 1}{9} = \frac{8}{9} > 0$
$-$ $f(x) < 0$ [f záporná]	$-$ $-$ $f(x) < 0$ [f záporná]	$-$ $+$ $f(x) > 0$ [f kladná] $+$

- $f'(x) = \frac{8[1\cdot x^2 - (x-2)\cdot 2x]}{x^4} = \frac{8[-x^2+4x]}{x^4} = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$.
- $f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x = 4$. [$f'(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ $8(4-x) = 0$. $\Leftrightarrow$ $x = 4$.]
- Funkcia f' je spojitá na $R - \{0\}$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (1. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$ a $x = 0$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = 0$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je párna, nie je nepárna. $[f(x) = \frac{8x-16}{x^2}$ a $f(-x) = \frac{8(-x)-16}{(-x)^2} = \frac{-8x-16}{x^2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x\cdot x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x} = \frac{8(1-0)}{\pm\infty} = \frac{8}{\pm\infty} = 0.$
- ASH má tvar $y = 0$. [Je zrejmé, že táto ASH je jediná asymptota so smernicou ASS (pre oba smery $\pm\infty$).]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 2$. $[f(x) = 0. \Leftrightarrow 8(x-2) = 0. \Leftrightarrow x = 2.]$
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ a $(2; \infty)$. ⊛ Na zistenie tohto znamienka postačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x\in(-\infty;0)$	$x\in(0;2)$	$x\in(2;\infty)$
$f(-1) = \frac{-8\cdot 3}{1} = -24 < 0$	0 [nespojitosť] $f(1) = \frac{-8\cdot 1}{1} = -8 < 0$	$f(2) = 0$ $f(3) = \frac{8\cdot 1}{9} = \frac{8}{9} > 0$
$-$ $f(x) < 0$ [f záporná]	$-$ $-$ $f(x) < 0$ [f záporná]	$-$ $+$ $f(x) > 0$ [f kladná] $+$

- $f'(x) = \frac{8[1\cdot x^2-(x-2)\cdot 2x]}{x^4} = \frac{8[-x^2+4x]}{x^4} = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x\in R - \{0\}$.
- $f'(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 4$. $[f'(x) = 0. \Leftrightarrow 8(4-x) = 0. \Leftrightarrow x = 4.]$
- Funkcia f' je spojitá na $R - \{0\}$ a nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 4)$ a $(4; \infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$.

[tab] [graf]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$.

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

$f(4) = 1$ [lok. max]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ $f(4) = 1$ [lok. max]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\quad$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ $f(4) = 1$ [glob. max]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1\cdot x^3-(4-x)\cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3-12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in R - \{0\}$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x)=\frac{8x-16}{x^2}=\frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x)=\frac{8(4-x)}{x^3}$, $x\in R-\{0\}$. [tab] [graf]

$x\in(-\infty;0)$	$x\in(0;4)$	$x\in(4;\infty)$
$f'(-1)=\frac{8(4+1)}{(-1)^3}=-40>0$	$f'(1)=\frac{8(4-1)}{1^3}=24>0$	$f'(5)=\frac{8(4-5)}{5^3}=-\frac{8}{125}<0$
$\searrow$ $f'(x)<0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x)>0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x)<0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$	$f(4)=1$ [glob. max] $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$

- $f''(x)=\frac{8[-1\cdot x^3-(4-x)\cdot 3x^2]}{x^6}=\frac{8[2x^3-12x^2]}{x^6}=\frac{16(x-6)}{x^4}$, $x\in R-\{0\}$.
- $f''(x)=0. \Leftrightarrow$ • $x=6$.

[$f''(x)=0. \Leftrightarrow 16(x-6)=0. \Leftrightarrow x=6.$]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1\cdot x^3-(4-x)\cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3-12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in R - \{0\}$.
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 6$. [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$]
- Funkcia f'' je spojitá na $R - \{0\}$ a nemení znamienko® na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$

$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$ $\quad$ $f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$ $\quad$ $f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$

$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ $f(4) = 1$ [glob. max] $\quad$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1\cdot x^3 - (4-x)\cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3 - 12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in R - \{0\}$.
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 6$. $\quad$ [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$]
- Funkcia f'' je spojitá na $R - \{0\}$ a nemení znamienko® na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1\cdot x^3-(4-x)\cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3-12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in R - \{0\}$.
- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 6$. [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$]
- Funkcia f'' je spojitá na $R - \{0\}$ a nemení znamienko ⊛ na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16\cdot 7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16\cdot 5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16\cdot 1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1\cdot x^3-(4-x)\cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3-12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in R - \{0\}$.
- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 6.$ [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$]
- Funkcia f'' je spojitá na $R - \{0\}$ a nemení znamienko® na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16\cdot 7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16\cdot 5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16\cdot 1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$
$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) > 0$ [f konvexná] $\cup$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1\cdot x^3-(4-x)\cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3-12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in R - \{0\}$.
- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 6.$ [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$]
- Funkcia f'' je spojitá na $R - \{0\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16\cdot 7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16\cdot 5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16\cdot 1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$
$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) > 0$ [f konvexná] $\cup$
	0 [nespojitosť]	$f(6) = \frac{8\cdot 4}{6^2} = \frac{8}{9}$ [inf. bod]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1\cdot x^3-(4-x)\cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3-12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in R - \{0\}$.
- $f''(x) = 0.$ $\Leftrightarrow$ • $x = 6$. [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$]
- Funkcia f'' je spojitá na $R - \{0\}$ a nemení znamienko[*] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16\cdot 7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16\cdot 5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16\cdot 1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$
$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) > 0$ [f konvexná] $\cup$
0 [nespojitosť]		$f(6) = \frac{8\cdot 4}{6^2} = \frac{8}{9}$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH má tvar $y = 0$. [Viď 1. časť (predchádzajúca strana),

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1\cdot x^3-(4-x)\cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3-12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in R - \{0\}$.
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 6$. [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$]
- Funkcia f'' je spojitá na $R - \{0\}$ a nemení znamienko[®] na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16\cdot7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16\cdot5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16\cdot1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$
$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) > 0$ [f konvexná] $\cup$
0 [nespojitosť]		$f(6) = \frac{8\cdot4}{6^2} = \frac{8}{9}$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH má tvar $y = 0$. [Viď 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí $y = kx + q = 0x + 0 = 0$, kde $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x^2} = \frac{8(1-0)}{\infty} = 0$ a $q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (2. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{8(4-x)}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (4; \infty)$
$f'(-1) = \frac{8(4+1)}{(-1)^3} = -40 > 0$	$f'(1) = \frac{8(4-1)}{1^3} = 24 > 0$	$f'(5) = \frac{8(4-5)}{5^3} = -\frac{8}{125} < 0$
$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) > 0$ [f rastie] $\nearrow$	$\searrow$ $f'(x) < 0$ [f klesá] $\searrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$	$f(4) = 1$ [glob. max] $\quad$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

- $f''(x) = \frac{8[-1\cdot x^3-(4-x)\cdot 3x^2]}{x^6} = \frac{8[2x^3-12x^2]}{x^6} = \frac{16(x-6)}{x^4}$, $x \in R - \{0\}$.
- $f''(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 6$. $\quad$ [$f''(x) = 0. \Leftrightarrow 16(x-6) = 0. \Leftrightarrow x = 6.$]
- Funkcia f'' je spojitá na $R - \{0\}$ a nemení znamienko® na intervaloch $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$ a $(6; \infty)$.

$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; 6)$	$x \in (6; \infty)$
$f''(-1) = \frac{-16\cdot 7}{(-1)^4} = -112 < 0$	$f''(1) = \frac{-16\cdot 5}{1^4} = -80 < 0$	$f''(7) = \frac{16\cdot 1}{7^4} = \frac{16}{2401} > 0$
$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cap$ $f''(x) < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) > 0$ [f konvexná] $\cup$
	0 [nespojitosť]	$f(6) = \frac{8\cdot 4}{6^2} = \frac{8}{9}$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH má tvar $y = 0$. $\quad$ [Viď 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí $y = kx + q = 0x + 0 = 0$, kde $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x(1-\frac{2}{x})}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8(1-\frac{2}{x})}{x^2} = \frac{8(1-0)}{\infty} = 0$ a $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$]
- Obor hodnôt $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

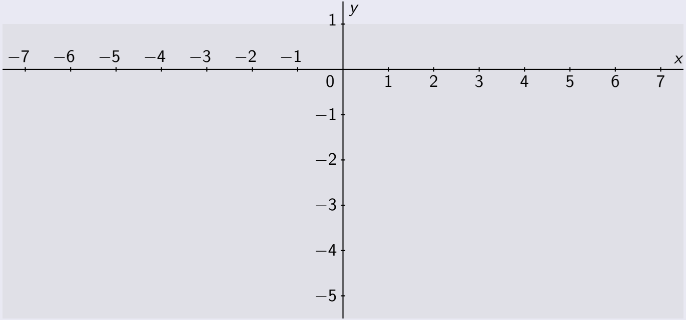
$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$.

[tab] [graf]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

- $D(f) = R - \{0\}$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.

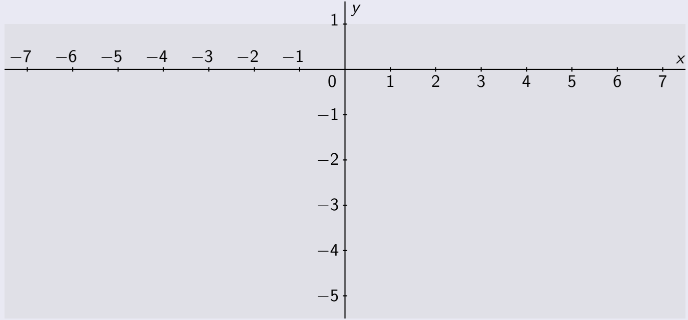


Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
	0 [bod nespojitosti]			

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.



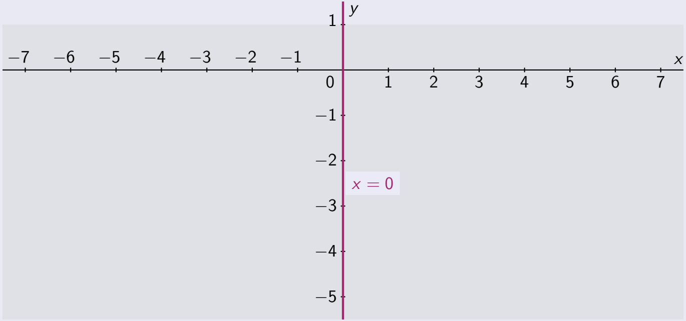
Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2},\ x \in R - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty;0)$	$(0;2)$	$(2;4)$	$(4;6)$	$(6;\infty)$
	0 [bod nespojitosti]			
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$			

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.
- ABS $x = 0$.



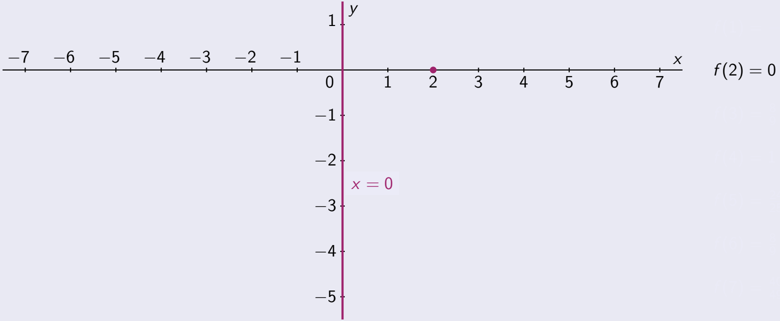
Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$.

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
	0 [bod nespojitosti]	2 [nulový bod]		
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$			

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.
- ABS $x = 0$.

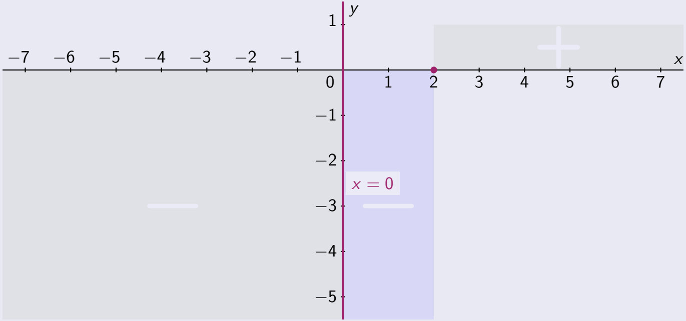


Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$(-\infty;0)$	$(0;2)$	$(2;4)$	$(4;6)$	$(6;\infty)$
	0 [bod nespojitosti]	2 [nulový bod]		
$-$ f záporná $-$	$-$ f záporná $-$	$+$	f kladná	$+$
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$			

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.
- ABS $x = 0$.



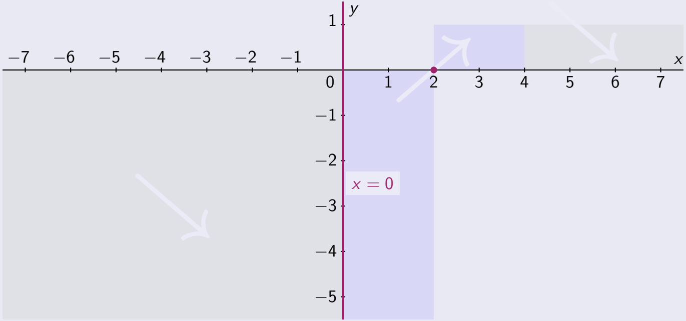
$f(2) = 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
	0 [bod nespojitosti]	2 [nulový bod]		
$-$ f záporná $-$	$-$ f záporná $-$	$+$	f kladná	$+$
↘ f klesá ↘	↗	f rastie ↗	↘	f klesá ↘
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$			

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.
- ABS $x = 0$.



$f(2) = 0$

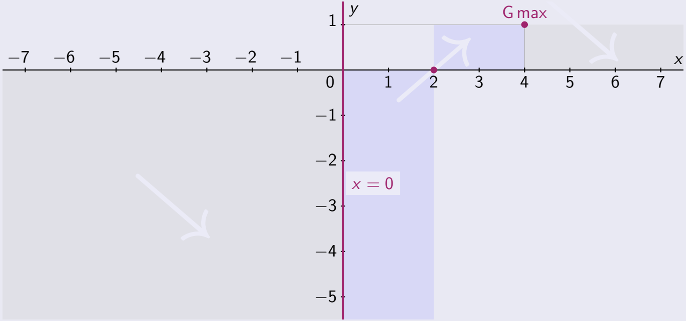
Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2},\ x \in R - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
	0 [bod nespojitosti]	2 [nulový bod]		
$-$ f záporná $-$	$-$ f záporná $-$	$+$	f kladná	$+$
			4 [globálne max]	
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$	f rastie $\nearrow$	$\searrow$	f klesá $\searrow$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$			

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.
- ABS $x = 0$.



$f(2) = 0$

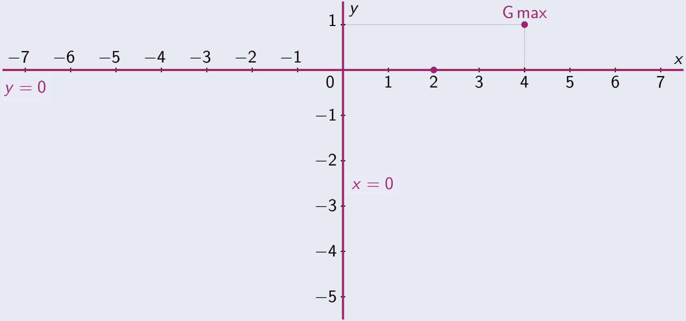
$f(4) = 1$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}, \; x \in R - \{0\}.$ [tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
	0 [bod nespojitosti]	2 [nulový bod]		
$-$ f záporná $-$	$-$ f záporná $-$	$+$	f kladná	$+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$			4 [globálne max]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$ f rastie	$\nearrow$	$\searrow$ f klesá	$\searrow$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$			

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.
- ABS $x = 0$.



$f(2) = 0$

$f(4) = 1$

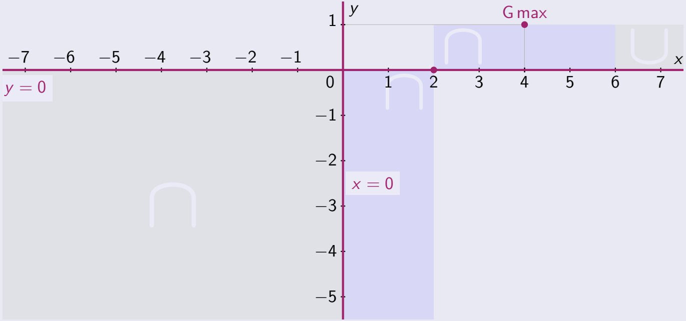
Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2},\ x \in R - \{0\}.$$

[tab] [graf]

$(-\infty;0)$	$(0;2)$	$(2;4)$	$(4;6)$	$(6;\infty)$
	0 [bod nespojitosti]	2 [nulový bod]		
$-$ f záporná $-$	$-$ f záporná $-$	$+$	f kladná	$+$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$			4 [globálne max]	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$	f rastie $\nearrow$	$\searrow$ f klesá	$\searrow$
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$			
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cap$	f konkávna	$\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.
- ABS $x = 0$.



$f(2) = 0$

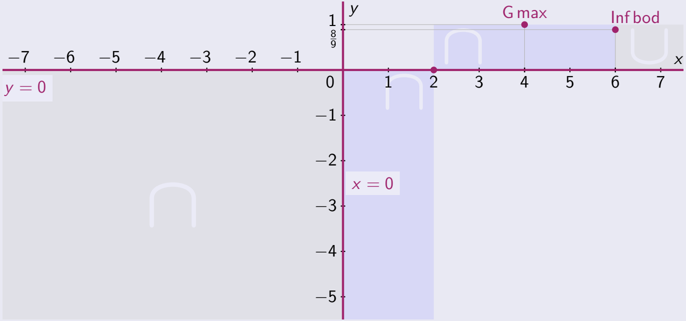
$f(4) = 1$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2},\ x \in R - \{0\}.$ [tab] [graf]

$(-\infty;0)$	$(0;2)$	$(2;4)$	$(4;6)$	$(6;\infty)$
	0 [bod nespojitosti]	2 [nulový bod]		
$-$ f záporná $-$	$-$ f záporná $-$	$+$	f kladná	$+$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$			4 [globálne max]	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$	f rastie $\nearrow$	$\searrow$ f klesá	$\searrow$
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$			6 [inflexný bod]
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cap$	f konkávna	$\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.
- ABS $x = 0$.



$f(2) = 0$

$f(4) = 1$

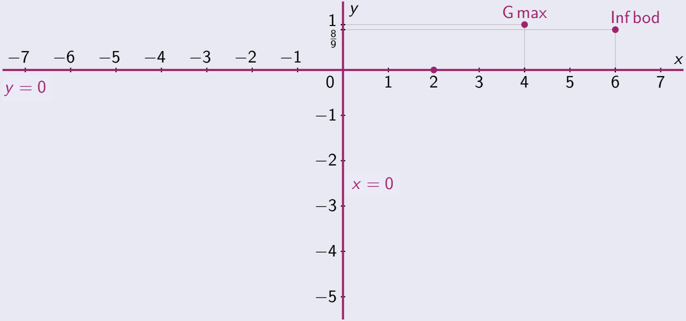
$f(6) = \frac{8}{9}$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2},\ x \in R - \{0\}.$ [tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
	0 [bod nespojitosti]	2 [nulový bod]		
− f záporná −	− f záporná −	+	f kladná	+
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$			4 [globálne max]	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
↘ f klesá ↘	↗	f rastie ↗	↘ f klesá	↘
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$			6 [inflexný bod]
∩ f konkávna ∩	∩	f konkávna	∩	∪ f konvexná ∪

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.
- ABS $x = 0$.



$f(2) = 0$

$f(4) = 1$

$f(6) = \frac{8}{9}$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$. [tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
	0 [bod nespojitosti]	2 [nulový bod]		
$-$ f záporná $-$	$-$ f záporná $-$	$+$	f kladná	$+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$			4 [globálne max]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$ f rastie	$\nearrow$	$\searrow$ f klesá	$\searrow$
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$			6 [inflexný bod]
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cap$	f konkávna	$\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.
- ABS $x = 0$.

$-24 = f(-1)$

$-8 = f(-2)$

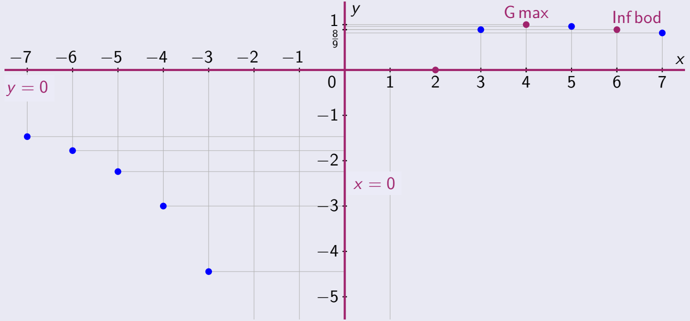
$-\frac{40}{9} = f(-3)$

$-3 = f(-4)$

$-\frac{56}{25} = f(-5)$

$-\frac{16}{9} = f(-6)$

$-\frac{72}{49} = f(-7)$



$f(1) = -8$

$f(2) = 0$

$f(3) = \frac{8}{9}$

$f(4) = 1$

$f(5) = \frac{24}{25}$

$f(6) = \frac{8}{9}$

$f(7) = \frac{40}{49}$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad II (3. časť)

$f(x) = \frac{8x-16}{x^2} = \frac{8(x-2)}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$.

[tab] [graf]

$(-\infty; 0)$	$(0; 2)$	$(2; 4)$	$(4; 6)$	$(6; \infty)$
	0 [bod nespojitosti]	2 [nulový bod]		
$-$ f záporná $-$	$-$ f záporná $-$	$+$	f kladná	$+$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$			4 [globálne max]	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$	f rastie $\nearrow$	$\searrow$ f klesá	$\searrow$
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$			6 [inflexný bod]
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cap$	f konkávna	$\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$

- $D(f) = R - \{0\}$.
- f spojitá na $R - \{0\}$.
- ASH $y = 0$.
- $H(f) = (-\infty; 1\rangle$.
- ABS $x = 0$.

$-24 = f(-1)$

$-8 = f(-2)$

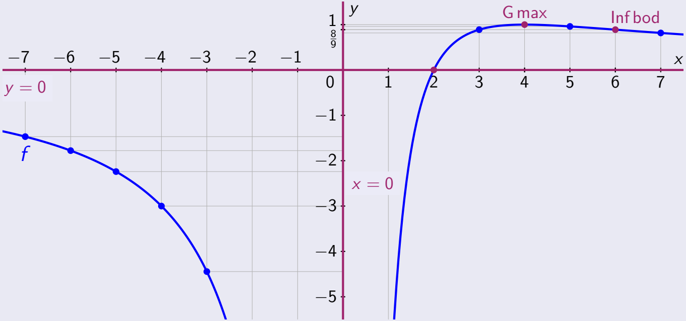
$-\frac{40}{9} = f(-3)$

$-3 = f(-4)$

$-\frac{56}{25} = f(-5)$

$-\frac{16}{9} = f(-6)$

$-\frac{72}{49} = f(-7)$



$f(1) = -8$

$f(2) = 0$

$f(3) = \frac{8}{9}$

$f(4) = 1$

$f(5) = \frac{24}{25}$

$f(6) = \frac{8}{9}$

$f(7) = \frac{40}{49}$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$
- ABS má tvar $x = -2$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$
- ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}.]$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. [$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{ll} x\to\infty: & |x-1| = +(x-1) \\ x\to-\infty: & |x-1| = -(x-1) \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1.$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{ll} x\to\infty: & |x-1| = +(x-1) \\ x\to-\infty: & |x-1| = -(x-1) \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1.$
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. [$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}$.]

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{ll} x \to \infty: & |x-1| = +(x-1) \\ x \to -\infty: & |x-1| = -(x-1) \end{array}\right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x = 1$. [$f(x) = 0. \Leftrightarrow |x-1| = 0. \Leftrightarrow x = 1$.]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. [$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{ll} x\to\infty: & |x-1| = +(x-1) \\ x\to-\infty: & |x-1| = -(x-1) \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x = 1$. [$f(x) = 0$. $\Leftrightarrow |x-1| = 0$. $\Leftrightarrow x = 1$.]
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

⊛ Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. [$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{ll} x\to\infty: & |x-1| = +(x-1) \\ x\to-\infty: & |x-1| = -(x-1) \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0$. $\Leftrightarrow$ • $x = 1$. [$f(x) = 0$. $\Leftrightarrow |x-1| = 0$. $\Leftrightarrow x = 1$.]
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. ⊛ Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x \in (-\infty; -2)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$		$x \in (-2; 1)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$		$x \in (1; \infty)$ $\quad |x-1| = x-1$
$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$	0 [nespojitosť]	$f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$	$f(1) = 0$	$f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $\left[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2} \text{ a } f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}.\right]$

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{ll} x\to\infty: & |x-1| = +(x-1) \\ x\to-\infty: & |x-1| = -(x-1) \end{array}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1.$
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 1$. $[f(x) = 0. \Leftrightarrow |x-1| = 0. \Leftrightarrow x = 1.]$
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. ⊛ Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x\in(-\infty;-2)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$	$x\in(-2;1)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$	$x\in(1;\infty)$ $\quad |x-1| = x-1$
$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$	0 [nespojitosť] $\quad f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$	$f(1) = 0$ $\quad f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$
$-$ $\quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} < 0$ [f záporná] $\quad -$	$+$ $\quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} > 0$ [f kladná] $\quad +$	$+$ $\quad f(x) = \frac{x-1}{x+2} > 0$ [f kladná] $\quad +$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}.]$

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{ll} x\to\infty: & |x-1| = +(x-1) \\ x\to-\infty: & |x-1| = -(x-1)\end{array}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1$.
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 1$. $[f(x) = 0. \Leftrightarrow |x-1| = 0. \Leftrightarrow x = 1.]$
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. ⊛ Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x\in(-\infty;-2)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$	$x\in(-2;1)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$	$x\in(1;\infty)$ $\quad |x-1| = x-1$
$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$	0 [nespojitosť] $f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$	$f(1) = 0$ $\quad f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$
$-$ $\quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} < 0$ [f záporná] $\quad -$	$+$ $\quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} > 0$ [f kladná] $\quad +$	$+$ $\quad f(x) = \frac{x-1}{x+2} > 0$ [f kladná] $\quad +$

- $f'(x) = \frac{1(x+2)-(x-1)1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x > 1$.
- $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{ll} x\to\infty: & |x-1| = +(x-1) \\ x\to-\infty: & |x-1| = -(x-1) \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1.$
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 1$. $[f(x) = 0. \Leftrightarrow |x-1| = 0. \Leftrightarrow x = 1.]$
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. ⊛ Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x\in(-\infty;-2)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$		$x\in(-2;1)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$		$x\in(1;\infty)$ $\quad |x-1| = x-1$
$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$	0 [nespojitosť]	$f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$	$f(1) = 0$	$f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$
$-$ $\quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} < 0$ [f záporná] $\quad -$	$+$	$f(x) = -\frac{x-1}{x+2} > 0$ [f kladná] $\quad +$	$+$	$f(x) = \frac{x-1}{x+2} > 0$ [f kladná] $\quad +$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f'(x) = \frac{1(x+2)-(x-1)1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} \text{ pre } x > 1. \\ \bullet\ f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} \text{ pre } x < 1 \text{ a } x \neq -2. \end{array}\right\} \bullet\ f'(x) \text{ nemá nulové body}$$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. [$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}$.]

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{ll} x\to\infty: & |x-1| = +(x-1) \\ x\to-\infty: & |x-1| = -(x-1) \end{array}\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1.$
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 1$. [$f(x) = 0. \Leftrightarrow |x-1| = 0. \Leftrightarrow x = 1$.]
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty;-2)$, $(-2;1)$ a $(1;\infty)$. ⊛ Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x\in(-\infty;-2)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$	$x\in(-2;1)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$	$x\in(1;\infty)$ $\quad |x-1| = x-1$
$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$	0 [nespojitosť] $f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$	$f(1) = 0$ $\quad f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$
$-$ $\quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} < 0$ [f záporná] $\quad -$	$+$ $\quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} > 0$ [f kladná] $\quad +$	$+$ $\quad f(x) = \frac{x-1}{x+2} > 0$ [f kladná] $\quad +$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f'(x) = \frac{1(x+2)-(x-1)1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} \text{ pre } x > 1. \\ \bullet\ f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} \text{ pre } x < 1 \text{ a } x \neq -2. \end{array}\right\}$$

- $f'(x)$ nemá nulové body a $f'(1)$ neexistuje.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (1. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. [tab] [graf]

- Funkcia f je spojitá na $D(f) = R - \{-2\}$ a $x = -2$ je bod nespojitosti. [Neodstrániteľná II. druhu.]
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. $\Rightarrow$ • ABS má tvar $x = -2$.
- Funkcia f nie je periodická, nie je nepárna, nie je párna. $[f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ a $f(-x) = \frac{|-x-1|}{-x+2} = -\frac{|x+1|}{x-2}.]$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\begin{array}{ll} x\to\infty: & |x-1| = +(x-1) \\ x\to-\infty: & |x-1| = -(x-1)\end{array}\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm(x-1)}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{\pm(1-0)}{1+0} = \pm 1.$
- ASH majú tvar $y = 1$ a $y = -1$. [Je zrejmé, že tieto ASH sú všetky asymptoty so smernicou ASS.]

- $f(x) = 0. \Leftrightarrow$ • $x = 1$. $[f(x) = 0. \Leftrightarrow |x-1| = 0. \Leftrightarrow x = 1.]$
- f nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$. ⊛ Na zistenie znamienka stačí overiť $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ v jednom ľubovoľnom bode x z tohto intervalu.

$x\in(-\infty;-2)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$		$x\in(-2;1)$ $\quad |x-1| = -(x-1)$		$x\in(1;\infty)$ $\quad |x-1| = x-1$	
$f(-3) = \frac{|-3-1|}{-3+2} = -4 < 0$	0 [nespojitosť]	$f(0) = \frac{|0-1|}{0+2} = \frac{1}{2} > 0$	$f(1) = 0$	$f(2) = \frac{|2-1|}{2+2} = \frac{1}{4} > 0$	
$-$ $\quad f(x) = -\frac{x-1}{x+2} < 0$ [f záporná] $\quad -$	$+$	$f(x) = -\frac{x-1}{x+2} > 0$ [f kladná] $\quad +$	$+$	$f(x) = \frac{x-1}{x+2} > 0$ [f kladná]	$+$

- $f'(x) = \frac{1(x+2)-(x-1)1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x > 1$.
- $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.

$\Bigg\}$ • $f'(x)$ nemá nulové body a $f'(1)$ neexistuje.

- f' je spojitá na $R - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$.

[tab] [graf]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie] $\nearrow$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie] $\nearrow$

$f(1) = 0$ [lok. min]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie] $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$	$f(1) = 0$ [lok. min]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie] $\nearrow$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ $\quad$ $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \infty$	$f(1) = 0$ [lok. min] $\quad$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x)=\frac{|x-1|}{x+2}$, $x\in R-\{-2\}$. [tab] [graf]

$x\in(-\infty;-2)$	$x\in(-2;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f'(-3)=-\frac{3}{(-3+2)^2}=-3<0$	$f'(0)=-\frac{3}{(0+2)^2}=-\frac{3}{4}<0$	$f'(2)=\frac{3}{(2+2)^2}=\frac{3}{16}>0$
$\searrow$ $f'(x)=-\frac{3}{(x+2)^2}<0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x)=-\frac{3}{(x+2)^2}<0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}>0$ [f rastie] $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ $\quad\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\infty$	$f(1)=0$ [lok. min] $\quad\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$

- $f''(x)=\frac{-2\cdot 3}{(x+2)^3}=-\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x>1$.
- $f''(x)=\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x<1$ a $x\neq-2$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie] $\nearrow$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \infty$ $f(1) = 0$ [lok. min]	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

- $f''(x) = \frac{-2\cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1$.
- $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie] $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\quad\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$ $\quad f(1) = 0$ [lok. min]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

- $f''(x) = \frac{-2\cdot3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1$.
- $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.
- f'' je spojitá na $R - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie] $\nearrow$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\quad \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \infty$ $\quad f(1) = 0$ [lok. min]	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

- $f''(x) = \frac{-2\cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1$.
- $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.
- f'' je spojitá na $R - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko[⊛] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie] $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\quad \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$ $\quad f(1) = 0$ [lok. min]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

- $f''(x) = \frac{-2\cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1$.
- $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.
- f'' je spojitá na $R - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko® na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f''(-3) = \frac{6}{(-3+2)^3} = -6 < 0$	$f''(0) = \frac{6}{(0+2)^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > 0$	$f''(2) = -\frac{6}{(2+2)^2} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32} < 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie] $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$	$f(1) = 0$ [lok. min] $\quad$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

- $f''(x) = \frac{-2\cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1$.
- $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.
- f'' je spojitá na $R - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko® na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f''(-3) = \frac{6}{(-3+2)^3} = -6 < 0$	$f''(0) = \frac{6}{(0+2)^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > 0$	$f''(2) = -\frac{6}{(2+2)^3} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32} < 0$
$\cap$ $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ [f konvexná] $\cup$	$\cap$ $f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3} < 0$ [f konkávna] $\cap$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie] $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$	$f(1) = 0$ [lok. min] $\quad$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

- $f''(x) = \frac{-2\cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1$.
- $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2$.
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.
- f'' je spojitá na $R - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko® na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f''(-3) = \frac{6}{(-3+2)^3} = -6 < 0$	$f''(0) = \frac{6}{(0+2)^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > 0$	$f''(2) = -\frac{6}{(2+2)^3} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32} < 0$
$\cap$ $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ [f konvexná] $\cup$	$\cap$ $f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3} < 0$ [f konkávna] $\cap$
-2 [nespojitosť]		$f(1) = 0$ [inf. bod]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2},\ x \in R - \{-2\}.$

[tab] [graf]

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f'(-3) = -\frac{3}{(-3+2)^2} = -3 < 0$	$f'(0) = -\frac{3}{(0+2)^2} = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16} > 0$
$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2} < 0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ [f rastie] $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\quad \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$ $\quad f(1) = 0$ [lok. min]	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

- $f''(x) = \frac{-2\cdot 3}{(x+2)^3} = -\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x > 1.$
- $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x < 1$ a $x \neq -2.$
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.
- f'' je spojitá na $R - \{-2; 1\}$ a nemení znamienko[⊛] na intervaloch $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; \infty)$.

$x \in (-\infty; -2)$	$x \in (-2; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$f''(-3) = \frac{6}{(-3+2)^3} = -6 < 0$	$f''(0) = \frac{6}{(0+2)^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} > 0$	$f''(2) = -\frac{6}{(2+2)^2} = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32} < 0$
$\cap$ $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} < 0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3} > 0$ [f konvexná] $\cup$	$\cap$ $f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3} < 0$ [f konkávna] $\cap$
-2 [nespojitosť]	$f(1) = 0$ [inf. bod]	

- ASS, t. j. ASH majú tvary $y = \pm 1.$ [Viď 1. časť (predchádzajúca strana),

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x)=\frac{|x-1|}{x+2},\ x\in R-\{-2\}.$ [tab] [graf]

$x\in(-\infty;-2)$	$x\in(-2;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f'(-3)=-\frac{3}{(-3+2)^2}=-3<0$	$f'(0)=-\frac{3}{(0+2)^2}=-\frac{3}{4}<0$	$f'(2)=\frac{3}{(2+2)^2}=\frac{3}{16}>0$
$\searrow$ $f'(x)=-\frac{3}{(x+2)^2}<0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x)=-\frac{3}{(x+2)^2}<0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}>0$ [f rastie] $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\infty$	$f(1)=0$ [lok. min] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

- $f''(x)=\frac{-2\cdot3}{(x+2)^3}=-\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x>1.$
- $f''(x)=\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x<1$ a $x\neq-2.$
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.
- f'' je spojitá na $R-\{-2;1\}$ a nemení znamienko⊛ na intervaloch $(-\infty;-2)$, $(-2;1)$ a $(1;\infty)$.

$x\in(-\infty;-2)$	$x\in(-2;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f''(-3)=\frac{6}{(-3+2)^3}=-6<0$	$f''(0)=\frac{6}{(0+2)^3}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}>0$	$f''(2)=-\frac{6}{(2+2)^2}=-\frac{6}{64}=-\frac{3}{32}<0$
$\cap$ $f''(x)=\frac{6}{(x+2)^3}<0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x)=\frac{6}{(x+2)^3}>0$ [f konvexná] $\cup$	$\cap$ $f''(x)=-\frac{6}{(x+2)^3}<0$ [f konkávna] $\cap$
	-2 [nespojitosť]	$f(1)=0$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH majú tvary $y=\pm1.$

[Viď 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí $y=kx+q=0x\pm1=\pm1$, kde $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\pm(x-1)}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\pm(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})}=\frac{\pm(1-0)}{\infty(1+0)}=\frac{\pm1}{\infty}=0$ a $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-0x]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm1.$]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (2. časť)

$f(x)=\frac{|x-1|}{x+2},\ x\in R-\{-2\}.$ [tab] [graf]

$x\in(-\infty;-2)$	$x\in(-2;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f'(-3)=-\frac{3}{(-3+2)^2}=-3<0$	$f'(0)=-\frac{3}{(0+2)^2}=-\frac{3}{4}<0$	$f'(2)=\frac{3}{(2+2)^2}=\frac{3}{16}>0$
$\searrow$ $f'(x)=-\frac{3}{(x+2)^2}<0$ [f klesá] $\searrow$	$\searrow$ $f'(x)=-\frac{3}{(x+2)^2}<0$ [f klesá] $\searrow$	$\nearrow$ $f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}>0$ [f rastie] $\nearrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\infty$ $f(1)=0$ [lok. min] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

- $f''(x)=\frac{-2\cdot3}{(x+2)^3}=-\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x>1$.
- $f''(x)=\frac{6}{(x+2)^3}$ pre $x<1$ a $x\neq-2$.
- $f''(x)$ nemá nulové body a $f''(1)$ neexistuje.
- f'' je spojitá na $R-\{-2;1\}$ a nemení znamienko® na intervaloch $(-\infty;-2)$, $(-2;1)$ a $(1;\infty)$.

$x\in(-\infty;-2)$	$x\in(-2;1)$	$x\in(1;\infty)$
$f''(-3)=\frac{6}{(-3+2)^3}=-6<0$	$f''(0)=\frac{6}{(0+2)^3}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}>0$	$f''(2)=-\frac{6}{(2+2)^2}=-\frac{6}{64}=-\frac{3}{32}<0$
$\cap$ $f''(x)=\frac{6}{(x+2)^3}<0$ [f konkávna] $\cap$	$\cup$ $f''(x)=\frac{6}{(x+2)^3}>0$ [f konvexná] $\cup$	$\cap$ $f''(x)=-\frac{6}{(x+2)^3}<0$ [f konkávna] $\cap$

-2 [nespojitosť] $f(1)=0$ [inf. bod]

- ASS, t. j. ASH majú tvary $y=\pm1$. [Viď 1. časť (predchádzajúca strana), resp. pre ASS platí $y=kx+q=0x\pm1=\pm1$, kde $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\pm(x-1)}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\pm(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})}=\frac{\pm(1-0)}{\infty(1+0)}=\frac{\pm1}{\infty}=0$ a $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-0x]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm1.$]
- Obor hodnôt $H(f)=(-\infty;-1)\cup\langle0;\infty)$.

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

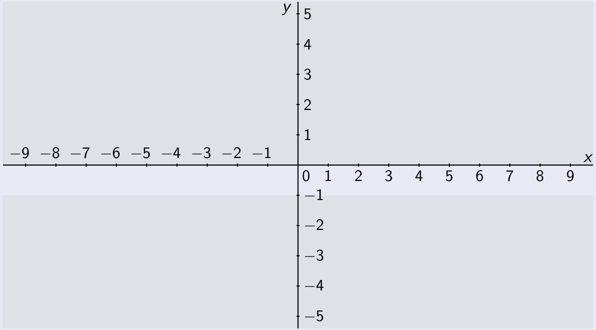
$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$.

[tab] [graf]

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.



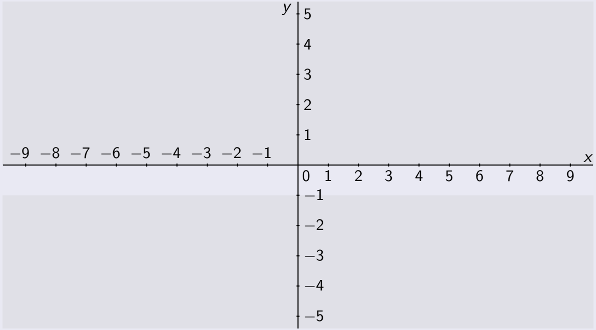
Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$.

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
	-2 [bod nespojitosti]	

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.

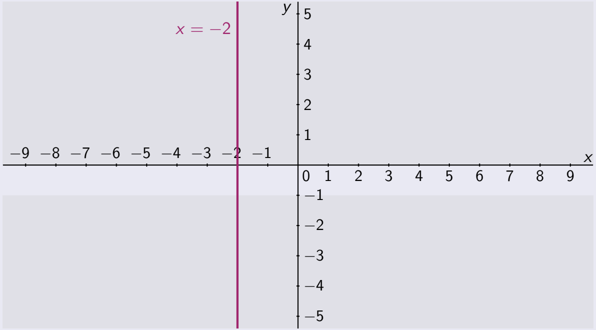


Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \infty$	

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.

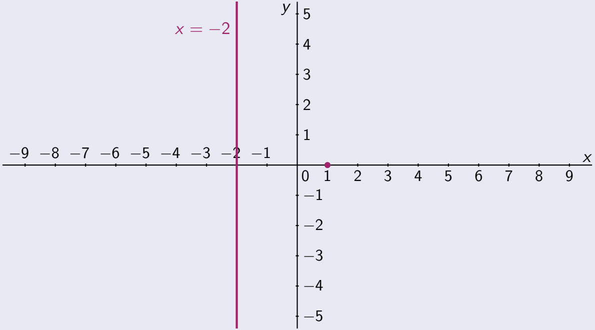


Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2},\ x \in R - \{-2\}.$ [tab] [graf]

$(-\infty;-2)$	$(-2;1)$	$(1;\infty)$
	-2 [bod nespojitosti]	1 [nulový bod]
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$	

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- $H(f) = (-\infty;-1) \cup \langle 0;\infty)$.
- ABS $x = -2$.



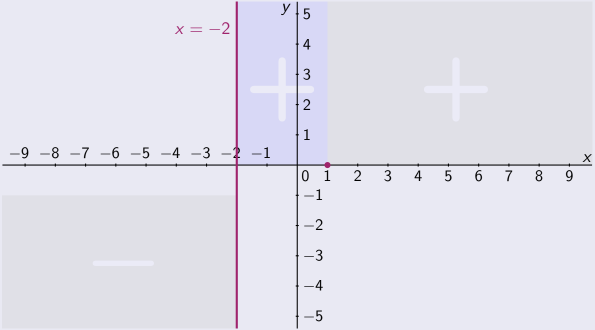
$f(1) = 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
	-2 [bod nespojitosti]	1 [nulový bod]
$-$ f záporná $-$	$+$ f kladná $+$	$+$ f kladná $+$
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$	

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



$f(1) = 0$

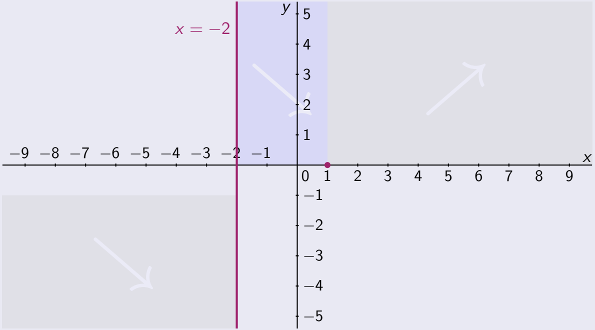
Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$.

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
	-2 [bod nespojitosti]	1 [nulový bod]
$-$ f záporná $-$	$+$ f kladná $+$	$+$ f kladná $+$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$ f rastie $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$	

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



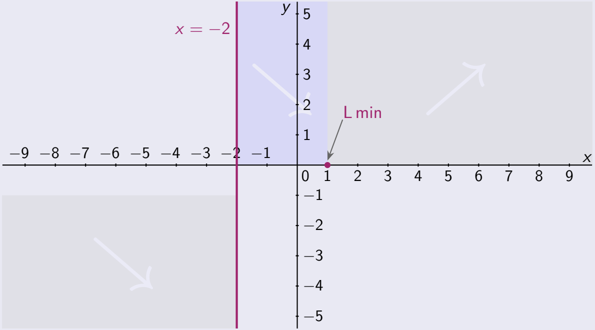
$f(1) = 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]	1 [nulový bod]	
$-$ f záporná $-$	$+$ f kladná $+$	$+$ f kladná $+$
	1 [lokálne min]	
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$ f rastie $\nearrow$
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \infty$	

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



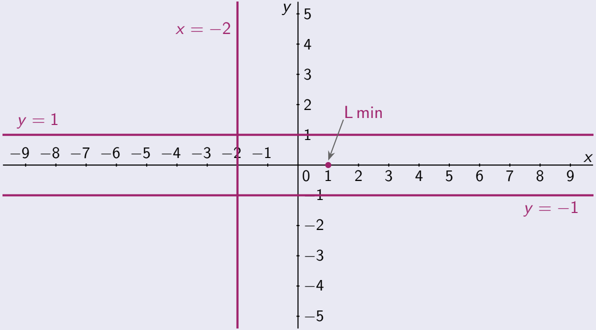
$f(1) = 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]		1 [nulový bod]
$-$ f záporná $-$	$+$ f kladná $+$	$+$ f kladná $+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$		1 [lokálne min] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$ f rastie $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$	

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



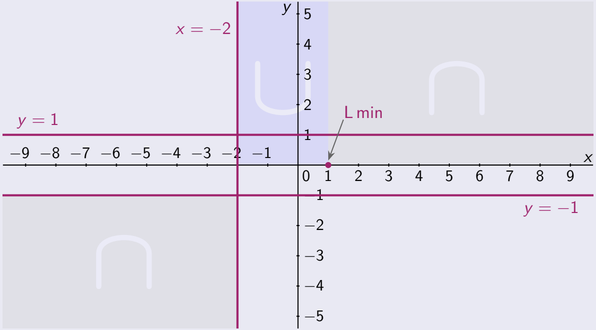
$f(1) = 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
-2 [bod nespojitosti]	1 [nulový bod]	
$-$ f záporná $-$	$+$ f kladná $+$	$+$ f kladná $+$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$	1 [lokálne min]	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$ f rastie $\nearrow$
$\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \infty$	
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$	$\cap$ f konkávna $\cap$

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



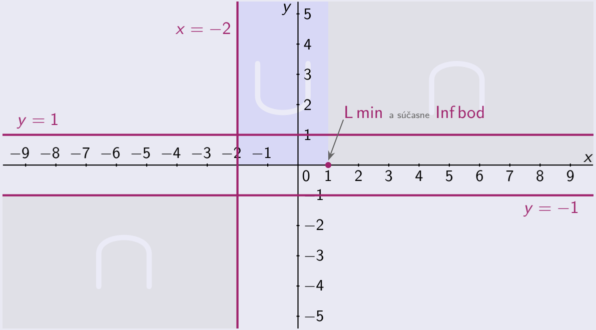
$f(1) = 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
	-2 [bod nespojitosti]	1 [nulový bod]
$-$ f záporná $-$	$+$ f kladná $+$	$+$ f kladná $+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$		1 [lokálne min] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$ f rastie $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$	1 [inflexný bod]
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$	$\cap$ f konkávna $\cap$

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



$f(1) = 0$

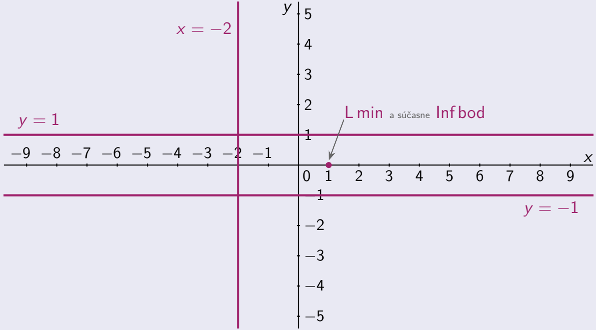
Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$.

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
	-2 [bod nespojitosti]	1 [nulový bod]
$-$ f záporná $-$	$+$ f kladná $+$	$+$ f kladná $+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$		1 [lokálne min] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$ f rastie $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$	1 [inflexný bod]
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$	$\cap$ f konkávna $\cap$

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.



$f(1) = 0$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$.

[tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
	-2 [bod nespojitosti]	1 [nulový bod]
$-$ f záporná $-$	$+$ f kladná $+$	$+$ f kladná $+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$		1 [lokálne min] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$ f rastie $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$	1 [inflexný bod]
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$	$\cap$ f konkávna $\cap$

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.

$\frac{1}{2} = f(0)$

$2 = f(-1)$

$-4 = f(-3)$

$-\frac{5}{2} = f(-4)$

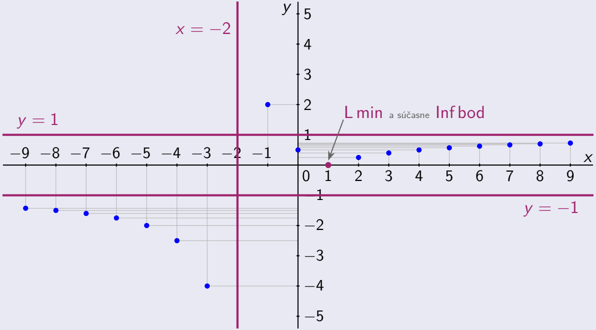
$-2 = f(-5)$

$-\frac{7}{4} = f(-6)$

$-\frac{8}{5} = f(-7)$

$-\frac{3}{2} = f(-8)$

$-\frac{10}{7} = f(-9)$



$f(1) = 0$

$f(2) = \frac{1}{4}$

$f(3) = \frac{2}{5}$

$f(4) = \frac{1}{2}$

$f(5) = \frac{4}{7}$

$f(6) = \frac{5}{8}$

$f(7) = \frac{2}{3}$

$f(8) = \frac{7}{10}$

$f(9) = \frac{8}{11}$

Vyšetrenie priebehu funkcie – Príklad III (3. časť)

$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2},\ x \in R - \{-2\}$. [tab] [graf]

$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; \infty)$
	-2 [bod nespojitosti]	1 [nulový bod]
$-$ f záporná $-$	$+$ f kladná $+$	$+$ f kladná $+$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$		1 [lokálne min] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\searrow$ f klesá $\searrow$	$\nearrow$ f rastie $\nearrow$
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \infty$	1 [inflexný bod]
$\cap$ f konkávna $\cap$	$\cup$ f konvexná $\cup$	$\cap$ f konkávna $\cap$

- $D(f) = R - \{-2\}$.
- f spojitá na $R - \{-2\}$.
- ASH $y = -1$ a $y = 1$.
- $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; \infty)$.
- ABS $x = -2$.

$\frac{1}{2} = f(0)$

$2 = f(-1)$

$-4 = f(-3)$

$-\frac{5}{2} = f(-4)$

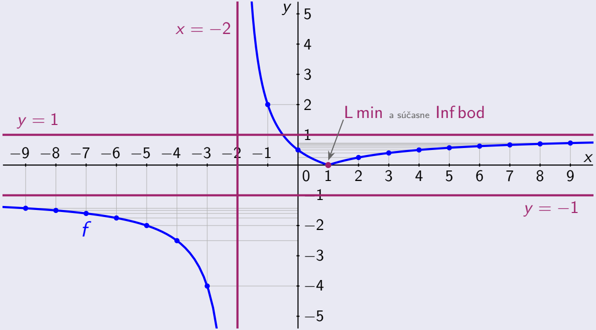
$-2 = f(-5)$

$-\frac{7}{4} = f(-6)$

$-\frac{8}{5} = f(-7)$

$-\frac{3}{2} = f(-8)$

$-\frac{10}{7} = f(-9)$



$f(1) = 0$

$f(2) = \frac{1}{4}$

$f(3) = \frac{2}{5}$

$f(4) = \frac{1}{2}$

$f(5) = \frac{4}{7}$

$f(6) = \frac{5}{8}$

$f(7) = \frac{2}{3}$

$f(8) = \frac{7}{10}$

$f(9) = \frac{8}{11}$

beerb@frcatel.fri.uniza.sk http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb

Koniec 9. časti

Ďakujem za pozornosť.