

Matematická analýza 1

2023/2024

8. Derivácia funkcie

Pre správne zobrazenie, fungovanie tooltipov, 2D a 3D animácií je nevyhnutné súbor otvoriť pomocou programu Adobe Reader (zásuvný modul Adobe PDF Plug-In webového prehliadača nestačí).

Kliknutím na text pred ikonou  získať e nápomoc.

Kliknutím na skratku v modrej lište vpravo hore sa dostanete na príslušný slajd, druhým kliknutím sa dostanete na koniec tohto slajdu.

Obsah

- 1 Základné pojmy
- 2 Pravidlá a metódy pre derivovanie
- 3 Diferenciál funkcie
- 4 Derivácie vyšších rádov
- 5 Na záver

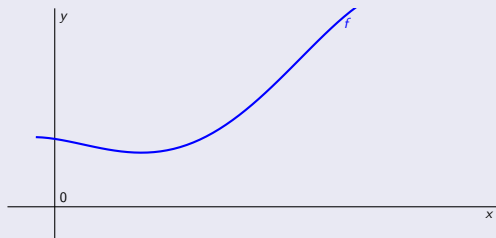
Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

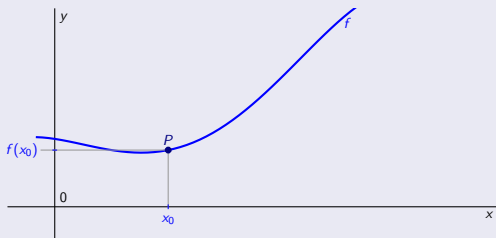
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.



Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

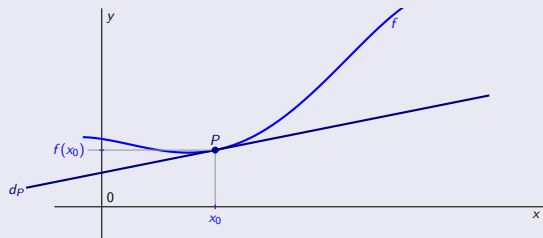
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe f .



Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe f .
- Dotyčnica k funkcii f v bode P má tvar

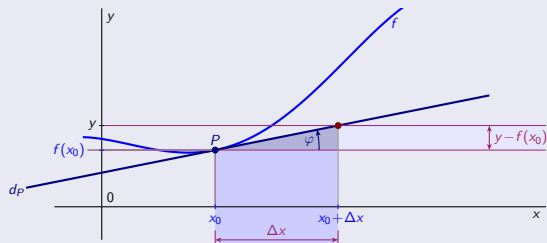


Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe f .
- Dotyčnica k funkcii f v bode P má tvar $d_P: y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi (x_0 + \Delta x - x_0) = \operatorname{tg} \varphi \Delta x$.

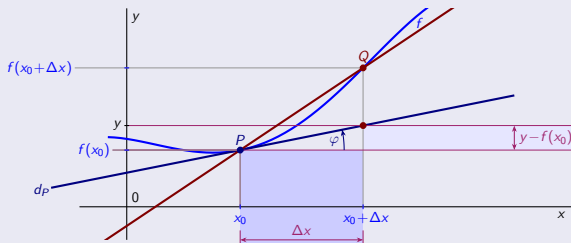
- Smernica d_P má tvar: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$.



Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

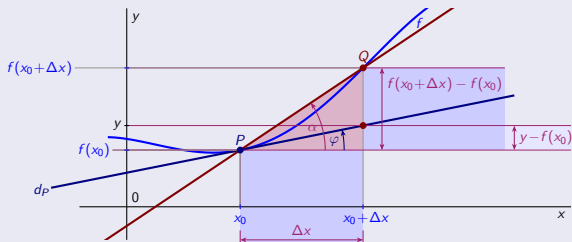
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe f .
- Dotyčnica k funkcii f v bode P má tvar $d_P: y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi (x_0 + \Delta x - x_0) = \operatorname{tg} \varphi \Delta x$.
- Priamka PQ , pričom bod $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leží na grafe funkcie f .
- Smernica d_P má tvar: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$.



Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

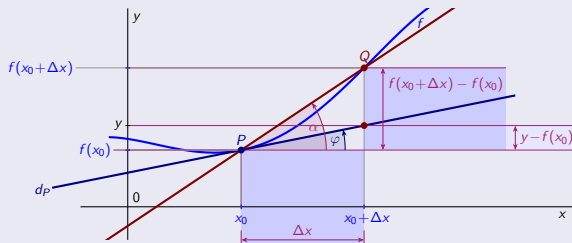
- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe f .
- Dotyčnica k funkcii f v bode P má tvar $d_P: y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi (x_0 + \Delta x - x_0) = \operatorname{tg} \varphi \Delta x$.
- Priamka PQ , pričom bod $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leží na grafe funkcie f .
- Smernica d_P má tvar: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Smernica PQ má tvar $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.



Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe f .
- Dotyčnica k funkcii f v bode P má tvar $d_P: y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi (x_0 + \Delta x - x_0) = \operatorname{tg} \varphi \Delta x$.
- Priamka PQ , pričom bod $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leží na grafe funkcie f .
- Smernica d_P má tvar: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Smernica PQ má tvar $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

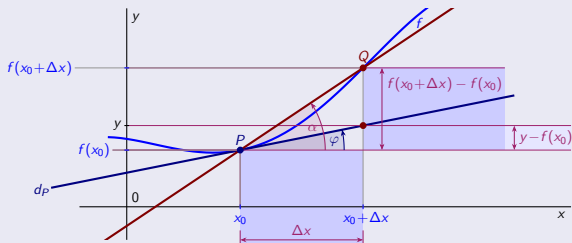


- $Q \rightarrow P \Rightarrow PQ \rightarrow d_P, \Delta x \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \varphi$.

Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe f .
- Dotyčnica k funkcii f v bode P má tvar $d_P: y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi (x_0 + \Delta x - x_0) = \operatorname{tg} \varphi \Delta x$.
- Priamka PQ , pričom bod $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leží na grafe funkcie f .
- Smernica d_P má tvar: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Smernica PQ má tvar $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.



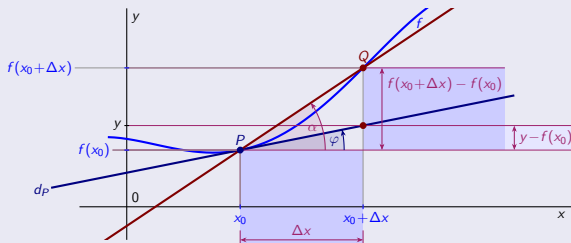
- $Q \rightarrow P. \Rightarrow PQ \rightarrow d_P, \Delta x \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \varphi. \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$.



Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe f .
- Dotyčnica k funkcii f v bode P má tvar $d_P: y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi (x_0 + \Delta x - x_0) = \operatorname{tg} \varphi \Delta x$.
- Priamka PQ , pričom bod $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leží na grafe funkcie f .
- Smernica d_P má tvar: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Smernica PQ má tvar $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

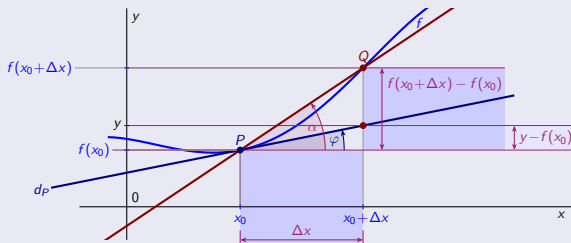


- $Q \rightarrow P. \Rightarrow PQ \rightarrow d_P, \Delta x \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \varphi. \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$.
- $\alpha \rightarrow \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \varphi$,

Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

- Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá.
- Bod $P = [x_0; f(x_0)]$ leží na grafe f .
- Dotyčnica k funkcii f v bode P má tvar $d_P: y - f(x_0) = \operatorname{tg} \varphi (x_0 + \Delta x - x_0) = \operatorname{tg} \varphi \Delta x$.
- Priamka PQ , pričom bod $Q = [x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ leží na grafe funkcie f .
- Smernica d_P má tvar: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - f(x_0)}{\Delta x}$.
- Smernica PQ má tvar $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.



- $Q \rightarrow P. \Rightarrow PQ \rightarrow d_P, \Delta x \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \varphi. \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$.
- $\alpha \rightarrow \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \varphi$, t. j. $\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\alpha \rightarrow \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

[Smernica dotyčnice ku grafu funkcie f v bode P .]

Základné pojmy – 1. motivačný príklad

Smernica dotyčnice ku grafu f v bode x_0 , t. j. $P = [x_0; f(x_0)]$.

• $Q \rightarrow P. \Rightarrow PQ \rightarrow d_P, x \rightarrow x_0, \alpha \rightarrow \varphi. \Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0)$.

• $\alpha \rightarrow \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \varphi$, t. j. $\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\alpha \rightarrow \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Základné pojmy – 2. motivačný príklad

Okamžitá rýchlosť priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase t a dráhe $s(t)$.

-
-
-

-
-

-
-
-

Základné pojmy – 2. motivačný príklad

Okamžitá rýchlosť priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase t a dráhe $s(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.



Základné pojmy – 2. motivačný príklad

Okamžitá rýchlosť priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase t a dráhe $s(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.
- Pohyb v čase t popisuje funkcia $y = s(t)$.



Základné pojmy – 2. motivačný príklad

Okamžitá rýchlosť priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase t a dráhe $s(t)$.

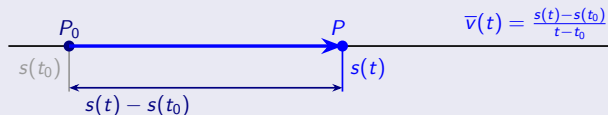
- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.
- Pohyb v čase t popisuje funkcia $y = s(t)$.
- Bod sa v čase t_0 nachádza na mieste P_0 .
- Bod sa v čase t nachádza na mieste P .



Základné pojmy – 2. motivačný príklad

Okamžitá rýchlosť priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase t a dráhe $s(t)$.

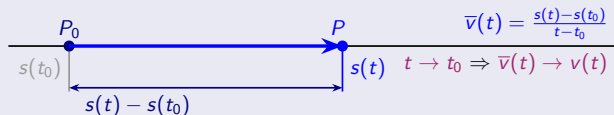
- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.
- Pohyb v čase t popisuje funkcia $y = s(t)$.
- Bod sa v čase t_0 nachádza na mieste P_0 .
- Bod sa v čase t nachádza na mieste P .
- V časovom intervale $\langle t_0; t \rangle$ prejde dráhu $s(t) - s(t_0)$ priemernou rýchlosťou $\bar{v}(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.



Základné pojmy – 2. motivačný príklad

Okamžitá rýchlosť priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase t a dráhe $s(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.
- Pohyb v čase t popisuje funkcia $y = s(t)$.
- Bod sa v čase t_0 nachádza na mieste P_0 .
- Bod sa v čase t nachádza na mieste P .
- V časovom intervale $\langle t_0; t \rangle$ prejde dráhu $s(t) - s(t_0)$ priemernou rýchlosťou $\bar{v}(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.



- $t \rightarrow t_0. \Rightarrow \bar{v}(t) \rightarrow v(t_0)$, t. j. okamžitá rýchlosť v čase t_0 .

Základné pojmy – 2. motivačný príklad

Okamžitá rýchlosť priamočiareho **pohybu** hmotného bodu v čase t a dráhe $s(t)$.

- Hmotný bod sa pohybuje po priamke.
- Pohyb v čase t popisuje funkcia $y = s(t)$.
- Bod sa v čase t_0 nachádza na mieste P_0 .
- Bod sa v čase t nachádza na mieste P .
- V časovom intervale $\langle t_0; t \rangle$ prejde dráhu $s(t) - s(t_0)$ priemernou rýchlosťou $\bar{v}(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.



- $t \rightarrow t_0. \Rightarrow \bar{v}(t) \rightarrow v(t_0)$, t. j. okamžitá rýchlosť v čase t_0 .

- Priemerná rýchlosť v časovom intervale $\langle t_0; t \rangle$: $\bar{v}(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.

- Okamžitá rýchlosť v čase t_0 : $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{v}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu**

v bode $x_0 \in D(f)$,

•

•

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu**

v bode $x_0 \in D(f)$,

ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu** v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.

- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \mid h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h \mid x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu**

v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.

- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \mid h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h \mid x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \left\{ \right.$$

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu** v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \mid h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h \mid x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \left\{ \begin{array}{l} b \in R. \\ \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \end{array} \right.$$

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu**

v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.

- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \mid h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h \mid x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in \mathbb{R}. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} \end{cases}$$

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu**

v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.

- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \mid h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h \mid x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in \mathbb{R}. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} & [\text{Konečné číslo.}] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} & [\text{Hodnota } \pm\infty.] \end{cases}$$

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu** (obojsmernú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \mid h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h \mid x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in \mathbb{R}. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} & [\text{Konečné číslo.}] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} & [\text{Hodnota } \pm\infty.] \end{cases}$$

Jednostranné derivácie funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$:

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu** (obojsmernú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \mid h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h \mid x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in \mathbb{R}. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} & [\text{Konečné číslo.}] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} & [\text{Hodnota } \pm\infty.] \end{cases}$$

Jednostranné derivácie funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$:

- $f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva **derivácia zľava**.

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu** (obojsmernú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \mid h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h \mid x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in \mathbb{R}. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} & [\text{Konečné číslo.}] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} & [\text{Hodnota } \pm\infty.] \end{cases}$$

Jednostranné derivácie funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$:

- $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ sa nazýva **derivácia sprava**.

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu** (obojsmernú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \\ x = x_0 + h \end{array} \middle| \begin{array}{l} h \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in \mathbb{R}. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} & [\text{Konečné číslo.}] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} & [\text{Hodnota } \pm\infty.] \end{cases}$$

Jednostranné derivácie funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$:

- $f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva **derivácia zľava**.
- $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva **derivácia sprava**.

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu** (obojsmernú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \mid h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h \mid x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in \mathbb{R}. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} & [\text{Konečné číslo.}] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} & [\text{Hodnota } \pm\infty.] \end{cases}$$

Jednostranné derivácie funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$:

- $f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva **derivácia zľava**.
- $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva **derivácia sprava**.

$f'(x_0)$ existuje.

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu** (obojsmernú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \mid h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h \mid x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in \mathbb{R}. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} & [\text{Konečné číslo.}] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} & [\text{Hodnota } \pm\infty.] \end{cases}$$

Jednostranné derivácie funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$:

- $f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva **derivácia zľava**.
- $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva **derivácia sprava**.

$f'(x_0)$ existuje.

\Leftrightarrow • Existujú obe $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$

Základné pojmy – Definícia v zmysle Heineho (pomocou postupností)

Funkcia f má **deriváciu** (obojsmernú) v bode $x_0 \in D(f)$, označenie $f'(x_0)$, ak:

- f je definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$.
- Existuje limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \left[\begin{array}{l} h = x - x_0 \mid h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + h \mid x \rightarrow x_0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \begin{cases} b \in \mathbb{R}. & \Rightarrow \text{Vlastná (konečná) derivácia.} & [\text{Konečné číslo.}] \\ b = \pm\infty. & \Rightarrow \text{Nevlastná (nekonečná) derivácia.} & [\text{Hodnota } \pm\infty.] \end{cases}$$

Jednostranné derivácie funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$:

- $f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva **derivácia zľava**.
- $f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ sa nazýva **derivácia sprava**.

$f'(x_0)$ existuje.

\Leftrightarrow Existujú obe $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a platí rovnosť $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná).

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). ⇒ • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). ⇒ • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť f v bode x_0 .]

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). ⇒ • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť f v bode x_0 .]

Funkcia f má deriváciu na množine $A \subset D(f)$,

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). \Rightarrow • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť f v bode x_0 .]

Funkcia f má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). \Rightarrow • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť f v bode x_0 .]

Funkcia f má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné,

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). ⇒ • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť f v bode x_0 .]

Funkcia f má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). ⇒ • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť f v bode x_0 .]

Funkcia f má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie f na množine A a označuje sa f' : $y = f'(x)$, $x \in A$.

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). ⇒ • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť f v bode x_0 .]

Funkcia f má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie f na množine A a označuje sa f' : $y = f'(x)$, $x \in A$.

Funkcia f má (konečnú) deriváciu f' na množine $A \subset D(f)$.

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). ⇒ • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť f v bode x_0 .]

Funkcia f má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie f na množine A a označuje sa $f': y = f'(x), x \in A$.

Funkcia f má (konečnú) deriváciu f' na množine $A \subset D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá na množine A .

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). ⇒ • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť f v bode x_0 .]

Funkcia f má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie f na množine A a označuje sa $f': y = f'(x), x \in A$.

Funkcia f má (konečnú) deriváciu f' na množine $A \subset D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá na množine A .

[V krajných bodoch (polo)uzavretých intervalov myslíme jednostranné derivácie a jednostranné spojitosti.]

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlasná). ⇒ • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlasná, ešte neznamená nespojitosť f v bode x_0 .]

Funkcia f má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie f na množine A a označuje sa $f': y = f'(x), x \in A$.

Funkcia f má (konečnú) deriváciu f' na množine $A \subset D(f)$.

⇒ • Funkcia f je spojitá na množine A .

[V krajných bodoch (polo)uzavretých intervalov myslíme jednostranné derivácie a jednostranné spojitosti.]

Označenie podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

Základné pojmy – Základné vlastnosti

Funkcia f má konečnú deriváciu $f'(x_0)$ v bode $x_0 \in D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f je spojitá v bode x_0 .

• Ak $f'(x_0)$ nie je konečná (neexistuje alebo je nevlastná). \Rightarrow • Funkcia f môže byť spojitá v bode x_0 .

[Skutočnosť, že $f'(x_0)$ nie je konečná, t. j. neexistuje alebo je nevlastná, ešte neznamená nespojitosť f v bode x_0 .]

Funkcia f má deriváciu na množine $A \subset D(f)$, ak:

• Pre všetky $x_0 \in A$ existuje derivácia $f'(x_0)$.

• Ak pre všetky $x_0 \in A$ sú hodnoty $f'(x_0)$ konečné, potom tieto hodnoty reprezentujú funkciu.

Nazýva sa derivácia funkcie f na množine A a označuje sa $f': y = f'(x), x \in A$.

Funkcia f má (konečnú) deriváciu f' na množine $A \subset D(f)$.

\Rightarrow • Funkcia f je spojitá na množine A .

[V krajných bodoch (polo)uzavretých intervalov myslíme jednostranné derivácie a jednostranné spojitosti.]

Označenie podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

$$\bullet f'(x_0) = \frac{d}{dx} [f(x_0)] = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}, \quad \text{resp.} \bullet f' = \frac{df}{dx}, x \in A.$$

Základné pojmy – Príklady

$$f'(x) = [c]' \quad \text{pre } x \in R, \text{ pričom } c = \text{košt.}, c \in R$$

[Derivácia konštantnej funkcie.]

Základné pojmy – Príklady

$$f'(x) = [c]' \quad \text{pre } x \in R, \text{ pričom } c = \text{košt.}, c \in R$$

[Derivácia konštantnej funkcie.]

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h}$$

Základné pojmy – Príklady

$$f'(x) = [c]' \quad \text{pre } x \in R, \text{ pričom } c = \text{košt.}, c \in R$$

[Derivácia konštantnej funkcie.]

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0$$

Základné pojmy – Príklady

$f'(x) = [c]' = 0$ pre $x \in R$, pričom $c = \text{košt.}$, $c \in R$

[Derivácia konštantnej funkcie.]

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Základné pojmy – Príklady

$$f'(x) = [c]' = 0 \text{ pre } x \in R, \text{ pričom } c = \text{košt.}, c \in R$$

[Derivácia konštantnej funkcie.]

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$[x^n]' \text{ pre } n \in N, x \in R$$



Základné pojmy – Príklady

$$f'(x) = [c]' = 0 \text{ pre } x \in R, \text{ pričom } c = \text{košt.}, c \in R$$

[Derivácia konštantnej funkcie.]

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$[x^n]' \text{ pre } n \in N, x \in R$$



$$n = 1. \Rightarrow \bullet [x]' \text{ pre } x \in R.$$

$$n = 2. \Rightarrow \bullet [x^2]'$$

pre $x \in R$.

Základné pojmy – Príklady

$$f'(x) = [c]' = 0 \text{ pre } x \in R, \text{ pričom } c = \text{košt.}, c \in R$$

[Derivácia konštantnej funkcie.]

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$[x^n]' \text{ pre } n \in N, x \in R$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$n = 1. \Rightarrow \bullet [x]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \text{ pre } x \in R.$$

$$n = 2. \Rightarrow \bullet [x^2]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

pre $x \in R$.

Základné pojmy – Príklady

$$f'(x) = [c]' = 0 \text{ pre } x \in R, \text{ pričom } c = \text{košt.}, c \in R$$

[Derivácia konštantnej funkcie.]

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$[x^n]' \text{ pre } n \in N, x \in R$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x) \cdot [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}$$

$$n = 1. \Rightarrow \bullet [x]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \text{ pre } x \in R.$$

$$n = 2. \Rightarrow \bullet [x^2]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x) \cdot (x+h+x)}{h}$$

pre $x \in R$.

Základné pojmy – Príklady

$$f'(x) = [c]' = 0 \quad \text{pre } x \in R, \text{ pričom } c = \text{košt.}, c \in R$$

[Derivácia konštantnej funkcie.]

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$[x^n]' \quad \text{pre } n \in N, x \in R$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x) \cdot [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \end{aligned}$$

$$n = 1. \Rightarrow \bullet [x]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \quad \text{pre } x \in R.$$

$$\begin{aligned} n = 2. \Rightarrow \bullet [x^2]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x) \cdot (x+h+x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (2x+h)}{h} \quad \text{pre } x \in R. \end{aligned}$$

Základné pojmy – Príklady

$$f'(x) = [c]' = 0 \text{ pre } x \in R, \text{ pričom } c = \text{košt.}, c \in R$$

[Derivácia konštantnej funkcie.]

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$[x^n]' = nx^{n-1} \text{ pre } n \in N, x \in R$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x) \cdot [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= (x+0)^{n-1} + (x+0)^{n-2}x + \dots + (x+0)x^{n-2} + x^{n-1} \end{aligned}$$

$$n = 1. \Rightarrow \bullet [x]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{pre } x \in R.$$

$$\begin{aligned} n = 2. \Rightarrow \bullet [x^2]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x) \cdot (x+h+x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (2x+h)}{h} = 2x + 0 \quad \text{pre } x \in R. \end{aligned}$$

Základné pojmy – Príklady

$$f'(x) = [c]' = 0 \text{ pre } x \in R, \text{ pričom } c = \text{košt.}, c \in R$$

[Derivácia konštantnej funkcie.]

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$[x^n]' = nx^{n-1} \text{ pre } n \in N, x \in R$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x) \cdot [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= (x+0)^{n-1} + (x+0)^{n-2}x + \dots + (x+0)x^{n-2} + x^{n-1} = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

$$n = 1. \Rightarrow \bullet [x]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 = 1 \cdot x^0 \text{ pre } x \in R.$$

$$\begin{aligned} n = 2. \Rightarrow \bullet [x^2]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x) \cdot (x+h+x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (2x+h)}{h} = 2x + 0 = 2x = 2 \cdot x^1 \text{ pre } x \in R. \end{aligned}$$

Základné pojmy – Príklady

 $[e^x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$ 

Základné pojmy – Príklady

$[e^x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

- $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$



Základné pojmy – Príklady

$[e^x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

- $$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$



Základné pojmy – Príklady

$[e^x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Základné pojmy – Príklady

$[e^x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1$$

Základné pojmy – Príklady

$$[e^x]' = e^x \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Základné pojmy – Príklady

$$[e^x]' = e^x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$[\sin x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$



$$[\cos x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$



Základné pojmy – Príklady

$$[e^x]' = e^x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$[\sin x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$[\cos x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Základné pojmy – Príklady

$$[e^x]' = e^x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$[\sin x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$[\cos x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h}$$

Základné pojmy – Príklady

$$[e^x]' = e^x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$[\sin x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$[\cos x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Základné pojmy – Príklady

$$[e^x]' = e^x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$[\sin x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \left[\text{Subst. } t = \frac{h}{2} \begin{array}{l} h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$[\cos x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \left[\text{Subst. } t = \frac{h}{2} \begin{array}{l} h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Základné pojmy – Príklady

$$[e^x]' = e^x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$[\sin x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \left[\text{Subst. } t = \frac{h}{2} \left| \begin{array}{l} h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right. \right] = \cos x \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

$$[\cos x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \left[\text{Subst. } t = \frac{h}{2} \left| \begin{array}{l} h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right. \right] = - \sin x \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

Základné pojmy – Príklady

$$[e^x]' = e^x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$[\sin x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \left[\text{Subst. } t = \frac{h}{2} \begin{array}{l} h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \cos x \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \cos x \cdot 1 \end{aligned}$$

$$[\cos x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \left[\text{Subst. } t = \frac{h}{2} \begin{array}{l} h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] = - \sin x \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = - \sin x \cdot 1 \end{aligned}$$

Základné pojmy – Príklady

$$[e^x]' = e^x \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$[\sin x]' = \cos x \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \left[\text{Subst. } t = \frac{h}{2} \left| \begin{array}{l} h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right. \right] = \cos x \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \cos x \cdot 1 = \cos x. \end{aligned}$$

$$[\cos x]' = -\sin x \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{2x+h}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \left[\text{Subst. } t = \frac{h}{2} \left| \begin{array}{l} h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right. \right] = -\sin x \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x. \end{aligned}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

Derivácie základných elementárnych funkcií.

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

Derivácie základných elementárnych funkcií.

$$[c]' = 0$$

$$[x^n]' = nx^{n-1}$$

$$x \in R, c \in R$$

$$x \in R, n \in N$$

$$[x]' = 1$$

$$[x^a]' = ax^{a-1}$$

$$x \in R$$

$$x > 0, a \in R$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

Derivácie základných elementárnych funkcií.

$$[e^x]' = e^x$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}$$

$$x > 0$$

$$[\ln |x|]' = \frac{1}{x}$$

$$x \neq 0$$

$$[a^x]' = a^x \ln a$$

$$x \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$[\log_a |x|]' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$x \neq 0, a > 0, a \neq 1$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

Derivácie základných elementárnych funkcií.

$$[\sin x]' = \cos x$$

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$x \in R$$

$$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in Z$$

$$[\cos x]' = -\sin x$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$x \in R$$

$$x \neq k\pi, k \in Z$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

Derivácie základných elementárnych funkcií.

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arctg x]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$x \in R$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$x \in R$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

Derivácie základných elementárnych funkcií.

$$[\sinh x]' = \cosh x$$

$$[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$[\cosh x]' = \sinh x$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x \neq 0$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

Derivácie základných elementárnych funkcií.

$$[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$x \in (-1; 1)$$

$$[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$x > 1$$

$$[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Elementárne funkcie

Derivácie základných elementárnych funkcií.

$[c]' = 0$	$x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$	$[x]' = 1$	$x \in \mathbb{R}$
$[x^n]' = nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	$[x^a]' = ax^{a-1}$	$x > 0, a \in \mathbb{R}$
$[e^x]' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$	$[a^x]' = a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}, a > 0$
$[\ln x]' = \frac{1}{x}$	$x > 0$	$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$	$x > 0, a > 0, a \neq 1$
$[\ln x]' = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \neq 0, a > 0, a \neq 1$
$[\sin x]' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$	$[\cos x]' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1; 1)$	$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1; 1)$
$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$	$[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$[\sinh x]' = \cosh x$	$x \in \mathbb{R}$	$[\cosh x]' = \sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$	$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$	$x \neq 0$
$[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in \mathbb{R}$	$[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$
$[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1; 1)$	$[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2}$	$x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1 \rangle$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in \mathbb{R}$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A .

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A .

A platí: • $(cf)'(x) = cf'(x),$

• $(cf)' = cf',$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in \mathbb{R}$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A .

A platí: • $(cf)'(x) = cf'(x),$

• $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$

• $(cf)' = cf',$

• $(f \pm g)' = f' \pm g',$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A .

A platí:

• $(cf)'(x) = cf'(x),$	• $(cf)' = cf',$
• $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$	• $(f \pm g)' = f' \pm g',$
• $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$	• $(fg)' = f'g + fg',$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in \mathbb{R}$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow

- Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in \mathbb{R}$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

$$\bullet \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \bullet \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

• $(cf)'(x) = cf'(x),$	• $(cf)' = cf',$
• $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$	• $(f \pm g)' = f' \pm g',$
• $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$	• $(fg)' = f'g + fg',$
• $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$	• $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

• $(cf)'(x) = cf'(x),$	• $(cf)' = cf',$
• $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$	• $(f \pm g)' = f' \pm g',$
• $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$	• $(fg)' = f'g + fg',$
• $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$	• $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

• $(cf)'(x) = cf'(x),$	• $(cf)' = cf',$
• $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$	• $(f \pm g)' = f' \pm g',$
• $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$	• $(fg)' = f'g + fg',$
• $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$	• $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

• $(fgh)'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,
- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

• $(fgh)' = [(fg)h]'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$, • $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$, • $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, • $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, • $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

• $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

• $(cf)'(x) = cf'(x),$	• $(cf)' = cf',$
• $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$	• $(f \pm g)' = f' \pm g',$
• $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$	• $(fg)' = f'g + fg',$
• $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$	• $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

• $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

• $(cf)'(x) = cf'(x),$	• $(cf)' = cf',$
• $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$	• $(f \pm g)' = f' \pm g',$
• $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$	• $(fg)' = f'g + fg',$
• $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$	• $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

• $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,
- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

Funkcia f má deriváciu f' na množine $A - \{x \in A, f(x) \neq 0\}$.

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x),$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$
- $(cf)' = cf',$
- $(f \pm g)' = f' \pm g',$
- $(fg)' = f'g + fg',$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$

Funkcia f má deriváciu f' na množine $A - \{x \in A, f(x) \neq 0\}$.

- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{f}\right)'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

• $(cf)'(x) = cf'(x),$	• $(cf)' = cf',$
• $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$	• $(f \pm g)' = f' \pm g',$
• $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$	• $(fg)' = f'g + fg',$
• $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$	• $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

• $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$

Funkcia f má deriváciu f' na množine $A - \{x \in A, f(x) \neq 0\}$.

• $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)}$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x),$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$
- $(cf)' = cf',$
- $(f \pm g)' = f' \pm g',$
- $(fg)' = f'g + fg',$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$

Funkcia f má deriváciu f' na množine $A - \{x \in A, f(x) \neq 0\}$.

- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0 - f'(x)}{f^2(x)}$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

• $(cf)'(x) = cf'(x),$	• $(cf)' = cf',$
• $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$	• $(f \pm g)' = f' \pm g',$
• $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$	• $(fg)' = f'g + fg',$
• $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$	• $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

• $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$

Funkcia f má deriváciu f' na množine $A - \{x \in A, f(x) \neq 0\}$.

• $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0 - f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Základné vzorce

Konštanta $c \in R$, funkcie f, g majú derivácie f', g' na množine $A \subset D(f) \cap D(g)$.

\Rightarrow • Existujú $(cf)', (f \pm g)', (fg)'$ na A . • Existuje $\left(\frac{f}{g}\right)'$ na $A - \{x \in A, g(x) \neq 0\}$.

A platí:

- $(cf)'(x) = cf'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,
- $(cf)' = cf'$,
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(fg)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Funkcie f, g, h majú derivácie f', g', h' na množine $A \subset D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.

- $(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'$.

Funkcia f má deriváciu f' na množine $A - \{x \in A, f(x) \neq 0\}$.

- $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{0 - f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]'$$

pre $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$[\operatorname{cotg} x]'$$

pre $x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]'$$

pre $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]'$$

$$[\operatorname{cotg} x]'$$

pre $x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]'$$

pre $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$[\operatorname{cotg} x]'$$

pre $x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]'$$

pre $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$[\operatorname{cotg} x]'$$

pre $x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]'$$

pre $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$[\operatorname{cotg} x]'$$

pre $x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$[x^{-n}]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet = \left[\frac{1}{x^n} \right]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$[x^{-n}]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet = \left[\frac{1}{x^n} \right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$[x^{-n}]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet = \left[\frac{1}{x^n} \right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$[x^{-n}]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet = \left[\frac{1}{x^n} \right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$[x^{-n}]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet = \left[\frac{1}{x^n} \right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{2n} \cdot x^{1-n}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$[x^{-n}]' = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet = \left[\frac{1}{x^n} \right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{2n} \cdot x^{1-n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$[x^{-n}]' = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet = \left[\frac{1}{x^n} \right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{2n} \cdot x^{1-n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

$$\left[\frac{1+x}{1-x} \right]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 1$$

$$\left[\frac{1-x}{1+x} \right]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq -1$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$[x^{-n}]' = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet = \left[\frac{1}{x^n} \right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{2n} \cdot x^{1-n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

$$\left[\frac{1+x}{1-x} \right]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 1$$

$$\bullet = \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2}$$

$$\left[\frac{1-x}{1+x} \right]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq -1$$

$$\bullet = \frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$[x^{-n}]' = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet = \left[\frac{1}{x^n} \right]' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{2n} \cdot x^{1-n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}.$$

$$\left[\frac{1+x}{1-x} \right]' = \frac{2}{(1-x)^2} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq 1$$

$$\bullet = \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

$$\left[\frac{1-x}{1+x} \right]' = \frac{-2}{(1+x)^2} \text{ pre } x \in \mathbb{R}, x \neq -1$$

$$\bullet = \frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,



Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,
v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in \mathbb{R} - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .



Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,
v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in \mathbb{R} - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

\Rightarrow • Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,
v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in \mathbb{R} - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

⇒ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$

$$\left[f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,
 v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in \mathbb{R} - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

⇒ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$

$$\left[f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,
v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in \mathbb{R} - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

⇒ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$

$$\left[f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,
v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in \mathbb{R} - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

⇒ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \Big|_{y_0=f(x_0)}$.

$$\left[f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\frac{y = f(x)}{x = f^{-1}(y)} \Big|_{x \rightarrow x_0} \right] = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,
v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in \mathbb{R} - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

\Rightarrow • Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \Big|_{y_0=f(x_0)}$.

$$\left[f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\frac{y = f(x)}{x = f^{-1}(y)} \Big|_{x \rightarrow x_0} \right] = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

$[\ln x]'$ pre $x > 0$

$[\ln x]'$ pre $x > 0$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,
v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in \mathbb{R} - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

⇒ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \Big|_{y_0=f(x_0)}$.

$$\left[f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

$[\ln x]'$ pre $x > 0$

[Pomocou inverznej funkcie.]

• = $\left[\begin{array}{l} y = \ln x \\ x = e^y \end{array} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right]$

$[\ln x]'$ pre $x > 0$

[Priamo z definície.]

• = $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,
v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje konečná derivácia } f'(x_0) = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \Big|_{y_0=f(x_0)}.$$

$$\left[f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\ln x]'$$
 pre $x > 0$

[Pomocou inverznej funkcie.]

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \ln x \\ x = e^y \end{array} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ y \in R \end{array} \right] = \frac{1}{(e^y)'} \Big|_{y=\ln x}$$

$$[\ln x]'$$
 pre $x > 0$

[Priamo z definície.]

$$\bullet = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný,
v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje konečná derivácia } f'(x_0) = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \Big|_{y_0=f(x_0)}.$$

$$\left[f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \middle| \begin{array}{l} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\ln x]'$$
 pre $x > 0$

[Pomocou inverznej funkcie.]

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \ln x \\ x = e^y \end{array} \middle| \begin{array}{l} x > 0 \\ y \in R \end{array} \right] = \frac{1}{(e^y)'} \Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^y} \Big|_{y=\ln x}$$

$$[\ln x]'$$
 pre $x > 0$

[Priamo z definície.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \cdot h \right)^{\frac{1}{h}} \end{aligned}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje konečná derivácia } f'(x_0) = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \Big|_{y_0=f(x_0)}.$$

$$\left[f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \right]_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\ln x]'$$
 pre $x > 0$

[Pomocou inverznej funkcie.]

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \ln x \\ x = e^y \end{array} \right]_{\substack{x > 0 \\ y \in R}} = \frac{1}{(e^y)'} \Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^y} \Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}}$$

$$[\ln x]'$$
 pre $x > 0$

[Priamo z definície.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \cdot h\right)^{\frac{1}{h}} = \ln \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \cdot h\right)^{\frac{1}{h}} \right] \end{aligned}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in R - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje konečná derivácia } f'(x_0) = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \Big|_{y_0=f(x_0)}.$$

$$\left[f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \right]_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\ln x]'$$
 pre $x > 0$

[Pomocou inverznej funkcie.]

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \ln x \\ x = e^y \end{array} \right]_{\substack{x > 0 \\ y \in R}} = \frac{1}{(e^y)'} \Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^y} \Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}}$$

$$[\ln x]'$$
 pre $x > 0$

[Priamo z definície.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \cdot h\right)^{\frac{1}{h}} = \ln \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \cdot h\right)^{\frac{1}{h}} \right] = \left[\lim_{h \rightarrow 0} (1 + \beta \cdot h)^{\frac{1}{h}} = e^\beta \right] = \ln e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Inverzná funkcia

Funkcia f je spojitá a bijektívna na intervale $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, v bode $y_0 = f(x_0)$ existuje konečná nenulová derivácia $[f^{-1}(y_0)]' \in \mathbb{R} - \{0\}$ inverznej funkcie f^{-1} .

⇒ • Existuje konečná derivácia $f'(x_0) = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \Big|_{y_0=f(x_0)}$.

$$\left[f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left[\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \right]_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{[f^{-1}(y_0)]'} \text{ pre } y_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ pre } x > 0$$

[Pomocou inverznej funkcie.]

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \ln x \\ x = e^y \end{array} \right]_{\substack{x > 0 \\ y \in \mathbb{R}}} = \frac{1}{(e^y)'} \Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^y} \Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

$$[\ln x]' = \frac{1}{x} \text{ pre } x > 0$$

[Priamo z definície.]

$$\begin{aligned} \bullet &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \cdot h \right)^{\frac{1}{h}} = \ln \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \cdot h \right)^{\frac{1}{h}} \right] \stackrel{\text{blue}}{=} \left[\lim_{h \rightarrow 0} (1 + \beta \cdot h)^{\frac{1}{h}} = e^\beta \right] = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\arcsin x]'$

pre $x \in (-1; 1)$



$[\arccos x]'$

pre $x \in (-1; 1)$



Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\arcsin x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arcsin x, x \in (-1; 1) \\ x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \right] \text{!}$$

$[\arccos x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arccos x, x \in (-1; 1) \\ x = \cos y, y \in (0; \pi) \end{array} \right] \text{!}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\arcsin x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arcsin x, x \in (-1; 1) \\ x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \right]' = \frac{1}{[\sin y]'}$$

$[\arccos x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arccos x, x \in (-1; 1) \\ x = \cos y, y \in (0; \pi) \end{array} \right]' = \frac{1}{[\cos y]'}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\arcsin x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arcsin x, x \in (-1; 1) \\ x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \right] = \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y}$$

$[\arccos x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arccos x, x \in (-1; 1) \\ x = \cos y, y \in (0; \pi) \end{array} \right] = \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arcsin x, x \in (-1; 1) \\ x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{?}{=} \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arccos x, x \in (-1; 1) \\ x = \cos y, y \in (0; \pi) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - (\cos \arccos x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{?}{=} \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arcsin x, x \in (-1; 1) \\ x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arccos x, x \in (-1; 1) \\ x = \cos y, y \in (0; \pi) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - (\cos \arccos x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[\arctg x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$[\operatorname{arccotg} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arcsin x, x \in (-1; 1) \\ x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arccos x, x \in (-1; 1) \\ x = \cos y, y \in (0; \pi) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - (\cos \arccos x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[\operatorname{arctg} x]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \operatorname{tg} y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \right] \stackrel{!}{=}$$

$$[\operatorname{arccotg} x]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{arccotg} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \operatorname{cotg} y, y \in (0; \pi) \end{array} \right] \stackrel{!}{=}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arcsin x, x \in (-1; 1) \\ x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arccos x, x \in (-1; 1) \\ x = \cos y, y \in (0; \pi) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - (\cos \arccos x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[\operatorname{arctg} x]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \operatorname{tg} y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\operatorname{tg} y]'}$$

$$[\operatorname{arccotg} x]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{arccotg} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \operatorname{cotg} y, y \in (0; \pi) \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\operatorname{cotg} y]'}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arcsin x, x \in (-1; 1) \\ x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arccos x, x \in (-1; 1) \\ x = \cos y, y \in (0; \pi) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - (\cos \arccos x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[\operatorname{arctg} x]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \operatorname{tg} y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\operatorname{tg} y]'} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$[\operatorname{arccotg} x]' \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{arccotg} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \operatorname{cotg} y, y \in (0; \pi) \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\operatorname{cotg} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arcsin x, x \in (-1; 1) \\ x = \sin y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \\ \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arccos x, x \in (-1; 1) \\ x = \cos y, y \in (0; \pi) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y > 0 \\ \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - (\cos \arccos x)^2} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[\arctg x]' = \frac{1}{x^2+1} \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \arctg x, x \in \mathbb{R} \\ x = \operatorname{tg} y, y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \Rightarrow \cos^2 y > 0 \\ \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + 1} = \operatorname{tg}^2 y + 1 = (\operatorname{tg} \arctg x)^2 + 1 = x^2 + 1 \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\operatorname{tg} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{x^2+1}.$$

$$[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{x^2+1} \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{arccotg} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \operatorname{cotg} y, y \in (0; \pi) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y > 0 \Rightarrow \sin^2 y > 0 \\ \frac{1}{\sin^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} + 1} = \operatorname{cotg}^2 y + 1 = (\operatorname{cotg} \operatorname{arccotg} x)^2 + 1 = x^2 + 1 \end{array} \right] \stackrel{!}{=} \frac{1}{[\operatorname{cotg} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$,



Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.



Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

⇒ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]'$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

⇒ • Existuje $F'(x_0) = [g(f(x_0))]'$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u \rightarrow u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u \rightarrow u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u \rightarrow u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' \quad \text{pre } x \in (-1; 1)$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\bigg|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u \rightarrow u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' \quad \text{pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[F: y = \sqrt{1-x^2} \quad x \in (-1; 1) \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u = u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' \quad \text{pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} \quad x \in (-1; 1) \\ f: u = 1-x^2, x \in (-1; 1), \end{array} \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u = u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' \quad \text{pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)), x \in (-1; 1) \\ f: u = 1-x^2, x \in (-1; 1), \quad g: y = \sqrt{u}, u \in (0; 1) \end{array} \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset \mathbb{R}$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u = u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' \quad \text{pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)), \quad x \in (-1; 1) \\ f: u = 1-x^2, \quad x \in (-1; 1), \quad g: y = \sqrt{u}, \quad u \in (0; 1) \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right\}$$

$$= g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'' = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \Big|_{u_0=f(x_0)}.$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u = u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' \quad \text{pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)), \quad x \in (-1; 1) \quad \left| \quad g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \right. \\ f: u = 1-x^2, \quad x \in (-1; 1), \quad g: y = \sqrt{u}, \quad u \in (0; 1) \quad \left| \quad f'(x) = [1-x^2]' = -2x \right. \end{array} \right]$$

$$= g'(u) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u \rightarrow u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)), x \in (-1; 1) \quad \left| \quad g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \right. \\ f: u = 1-x^2, x \in (-1; 1), \quad g: y = \sqrt{u}, u \in (0; 1) \quad \left| \quad f'(x) = [1-x^2]' = -2x \right. \end{array} \right]$$

$$= g'(u) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u \rightarrow u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' \quad \text{pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)), \quad x \in (-1; 1) \\ f: u = 1-x^2, \quad x \in (-1; 1), \quad g: y = \sqrt{u}, \quad u \in (0; 1) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f'(x) = [1-x^2]' = -2x \end{array} \right]$$

$$= g'(u) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u \rightarrow u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' \quad \text{pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)), x \in (-1; 1) \\ f: u = 1-x^2, x \in (-1; 1), \quad g: y = \sqrt{u}, u \in (0; 1) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f'(x) = [1-x^2]' = -2x \end{array} \right]$$

$$= g'(u) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

$$\bullet = [(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u \rightarrow u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' \quad \text{pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)), x \in (-1; 1) \\ f: u = 1-x^2, x \in (-1; 1), \quad g: y = \sqrt{u}, u \in (0; 1) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f'(x) = [1-x^2]' = -2x \end{array} \right]$$

$$= g'(u) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

$$\bullet = [(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u \rightarrow u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' \quad \text{pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)), x \in (-1; 1) \\ f: u = 1-x^2, x \in (-1; 1), \quad g: y = \sqrt{u}, u \in (0; 1) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f'(x) = [1-x^2]' = -2x \end{array} \right]$$

$$= g'(u) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

$$\bullet = [(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u \rightarrow u_0} \right] = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' \quad \text{pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)), x \in (-1; 1) \\ f: u = 1-x^2, x \in (-1; 1), \quad g: y = \sqrt{u}, u \in (0; 1) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f'(x) = [1-x^2]' = -2x \end{array} \right]$$

$$= g'(u) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

$$\bullet = [(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Zložená funkcia

Zložená funkcia $F = g(f)$ je definovaná na množine $I \subset R$, bod $x_0 \in I$ je vnútorný, bod $u_0 = f(x_0)$, v bode u_0 existuje derivácia vonkajšej zložky $g'(u_0)$ a v bode x_0 existuje derivácia vnútornej zložky $f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } F'(x_0) = [g(f(x_0))]'\Big|_{u_0=f(x_0)} = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\left[F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \left[\frac{u = f(x)}{u \rightarrow u_0} = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \text{ pre } u_0 = f(x_0). \right]$$

$$[\sqrt{1-x^2}]' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} F: y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{f(x)} = g(f(x)), x \in (-1; 1) \\ f: u = 1-x^2, x \in (-1; 1), \quad g: y = \sqrt{u}, u \in (0; 1) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} g'(u) = [u^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\ f'(x) = [1-x^2]' = -2x \end{array} \right]$$

$$= g'(u) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

V praxi jednotlivé zložky väčšinou samostatne nevypisujeme a priamo derivujeme.

$$\bullet = [(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

 $[\sin \sin x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

 $[\sin \sin x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

- $= [\sin(\sin x)]'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

 $[\sin \sin x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

- $= [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

- $= [\sin (\sin x)]' = \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$

$$[\sin \sin \sin x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

- $= [\sin (\sin x)]' = \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$

$$[\sin \sin \sin x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

- $= [\sin (\sin (\sin x))]'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

- $= [\sin (\sin x)]' = \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$

$$[\sin \sin \sin x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

- $= [\sin (\sin (\sin x))]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot [\sin (\sin x)]'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

- $= [\sin (\sin x)]' = \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$

$$[\sin \sin \sin x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

- $= [\sin (\sin (\sin x))]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot [\sin (\sin x)]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot [\sin x]'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

- $= [\sin (\sin x)]' = \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$

$$[\sin \sin \sin x]' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

- $= [\sin (\sin (\sin x))]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot [\sin (\sin x)]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot [\sin x]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x.$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = [\sin (\sin x)]' = \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$$

$$[\sin \sin \sin x]' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= [\sin (\sin (\sin x))]'' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot [\sin (\sin x)]' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

$$[a^x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, a > 0$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

- $= [\sin (\sin x)]' = \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$

$$[\sin \sin \sin x]' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

- $= [\sin (\sin (\sin x))]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot [\sin (\sin x)]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot [\sin x]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x.$

$$[a^x]' \quad \text{pre } x \in R, a > 0$$

- $= [e^{\ln a^x}]' = [e^{x \ln a}]'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

- $= [\sin (\sin x)]' = \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$

$$[\sin \sin \sin x]' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

- $= [\sin (\sin (\sin x))]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot [\sin (\sin x)]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot [\sin x]'$
 $= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x.$

$$[a^x]' \quad \text{pre } x \in R, a > 0$$

- $= [e^{\ln a^x}]' = [e^{x \ln a}]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

- $\bullet = [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$

$$[\sin \sin \sin x]' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

- $\bullet = [\sin(\sin(\sin x))]'$
 $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]'$
 $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]'$
 $= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x.$

$$[a^x]' \quad \text{pre } x \in R, a > 0$$

- $\bullet = [e^{\ln a^x}]' = [e^{x \ln a}]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = e^{x \ln a} \cdot \ln a$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$$

$$[\sin \sin \sin x]' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\bullet &= [\sin(\sin(\sin x))]' \\ &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]' \\ &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' \\ &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x.\end{aligned}$$

$$[a^x]' = a^x \ln a \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$\bullet = [e^{\ln a^x}]' = [e^{x \ln a}]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

$$\bullet = [\sin (\sin x)]' = \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$$

$$[\sin \sin \sin x]' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

$$\begin{aligned} \bullet &= [\sin (\sin (\sin x))]'' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot [\sin (\sin x)]' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

$$[a^x]' = a^x \ln a \quad \text{pre } x \in R, a > 0$$

$$\bullet = [e^{\ln a^x}]' = [e^{x \ln a}]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

$$[\log_a x]' \quad \text{pre } x > 0, a > 0, a \neq 1$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

$$\bullet = [\sin (\sin x)]' = \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$$

$$[\sin \sin \sin x]' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

$$\begin{aligned} \bullet &= [\sin (\sin (\sin x))]'' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot [\sin (\sin x)]' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

$$[a^x]' = a^x \ln a \quad \text{pre } x \in R, a > 0$$

$$\bullet = [e^{\ln a^x}]' = [e^{x \ln a}]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

$$[\log_a x]' \quad \text{pre } x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\bullet = \left[\frac{\ln x}{\ln a} \right]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

$$\bullet = [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$$

$$[\sin \sin \sin x]' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

$$\begin{aligned} \bullet &= [\sin(\sin(\sin x))]' \\ &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]' \\ &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' \\ &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

$$[a^x]' = a^x \ln a \quad \text{pre } x \in R, a > 0$$

$$\bullet = [e^{\ln a^x}]' = [e^{x \ln a}]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

$$[\log_a x]' \quad \text{pre } x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\bullet = \left[\frac{\ln x}{\ln a} \right]' = \frac{1}{\ln a} \cdot [\ln x]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

$$\bullet = [\sin (\sin x)]' = \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$$

$$[\sin \sin \sin x]' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

$$\begin{aligned} \bullet &= [\sin (\sin (\sin x))]'' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot [\sin (\sin x)]' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot [\sin x]' \\ &= \cos (\sin (\sin x)) \cdot \cos (\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

$$[a^x]' = a^x \ln a \quad \text{pre } x \in R, a > 0$$

$$\bullet = [e^{\ln a^x}]' = [e^{x \ln a}]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

$$[\log_a x]' \quad \text{pre } x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\bullet = \left[\frac{\ln x}{\ln a} \right]' = \frac{1}{\ln a} \cdot [\ln x]' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sin \sin x]' = \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

$$\bullet = [\sin(\sin x)]' = \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' = \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin x \cdot \cos x.$$

$$[\sin \sin \sin x]' = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x \quad \text{pre } x \in R$$

$$\begin{aligned} \bullet &= [\sin(\sin(\sin x))]' \\ &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot [\sin(\sin x)]' \\ &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot [\sin x]' \\ &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x = \cos \sin \sin x \cdot \cos \sin x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

$$[a^x]' = a^x \ln a \quad \text{pre } x \in R, a > 0$$

$$\bullet = [e^{\ln a^x}]' = [e^{x \ln a}]' = e^{x \ln a} \cdot [x \ln a]' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

$$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{pre } x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\bullet = \left[\frac{\ln x}{\ln a} \right]' = \frac{1}{\ln a} \cdot [\ln x]' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

 $[\sinh x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$ $[\cosh x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sinh x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

- $= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]'$

$[\cosh x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

- $= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]'$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sinh x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2}$$

$[\cosh x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\sinh x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$[\cosh x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$[\operatorname{tgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$[\operatorname{tgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x} \right]'$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x} \right]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$[\operatorname{tgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x} \right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x} \right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$[\operatorname{tgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x} \right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x} \right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x} \right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x} \right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$[\operatorname{tgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x} \right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right]'$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x} \right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$[\operatorname{tgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x} \right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right]' = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x} \right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$[\operatorname{tgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x} \right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right]' = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x} \right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$[\operatorname{tgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x} \right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right]' = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x} \right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$[\operatorname{tgh} x]' \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x} \right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right]' = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left[\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right]^2$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x} \right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\sinh x]' = \cosh x \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$[\cosh x]' = \sinh x \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x + [-e^{-x}]}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x} \right]' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$\bullet = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right]' = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left[\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right]^2 = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$$[\operatorname{cotgh} x]' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x} \right]' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argsinh} x]'$

pre $x \in \mathbb{R}$

$[\operatorname{argcosh} x]'$

pre $x \in \mathbb{R}$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

 $[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \sinh y, y \in \mathbb{R} \end{array} \right]$$

 $[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} x, x \in (1; \infty) \\ x = \sinh y, y \in (1; \infty) \end{array} \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

 $[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \sinh y, y \in \mathbb{R} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'}$$

 $[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} x, x \in (1; \infty) \\ x = \cosh y, y \in (1; \infty) \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argsinh} x]'$

pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \sinh y, y \in \mathbb{R} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y}$$

$[\operatorname{argcosh} x]'$

pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} x, x \in (1; \infty) \\ x = \sinh y, y \in (1; \infty) \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'} = \frac{1}{\sinh y}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} y = \operatorname{argsinh} x, x \in \mathbb{R} & y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \\ x = \sinh y, y \in \mathbb{R} & \cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + (\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1 + x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l|l} y = \operatorname{argcosh} x, x \in (1; \infty) & y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ x = \cosh y, y \in (1; \infty) & \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \sinh y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \\ \cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + (\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1 + x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]'$$

$[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} x, x \in (1; \infty) \\ x = \cosh y, y \in (1; \infty) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = [\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \sinh y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \\ \cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + (\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1 + x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \right]' = \frac{\left[x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]'}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} x, x \in (1; \infty) \\ x = \cosh y, y \in (1; \infty) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \right]' = \frac{\left[x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right]'}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \sinh y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \\ \cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + (\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1 + x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{[x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} x, x \in (1; \infty) \\ x = \cosh y, y \in (1; \infty) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = [\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{[x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \sinh y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \\ \cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + (\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1 + x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{[x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} x, x \in (1; \infty) \\ x = \cosh y, y \in (1; \infty) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = [\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{[x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argsinh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \sinh y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \\ \cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + (\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1 + x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{[x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$[\operatorname{argcosh} x]'$ pre $x \in \mathbb{R}$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} x, x \in (1; \infty) \\ x = \cosh y, y \in (1; \infty) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = [\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{[x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argsinh} x, x \in \mathbb{R} \\ x = \sinh y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \\ \cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + (\sinh \operatorname{argsinh} x)^2} = \sqrt{1 + x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\sinh y]'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument sínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{[x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \text{ pre } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} x, x \in (1; \infty) \\ x = \cosh y, y \in (1; \infty) \end{array} \middle| \begin{array}{l} y > 0 \Rightarrow \sinh y > 0 \\ \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{(\cosh \operatorname{argcosh} x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\cosh y]'} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kosínus hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = [\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{[x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

 $[\operatorname{arctg} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$ $[\operatorname{arccot} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x, x \in (-1; 1) \\ x = \operatorname{tgh} y, y \in \mathbb{R} \end{array} \right]$$

$[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x, x \in \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x = \operatorname{cotgh} y, y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x, x \in (-1; 1) \\ x = \operatorname{tgh} y, y \in \mathbb{R} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'}$$

$[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x, x \in \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x = \operatorname{cotgh} y, y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x, x \in (-1; 1) \\ x = \operatorname{tgh} y, y \in \mathbb{R} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}}$$

$[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x, x \in \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x = \operatorname{cotgh} y, y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x, x \in (-1; 1) \\ x = \operatorname{tgh} y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\cosh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1 - (\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1 - x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

$$[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2} \text{ pre } x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x, x \in \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x = \operatorname{cotgh} y, y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\sinh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{-\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x, x \in (-1; 1) \\ x = \operatorname{tgh} y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\cosh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{1 - \sinh^2 y} = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1 - (\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1 - x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right]'$$

$[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x, x \in \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x = \operatorname{cotgh} y, y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\sinh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \right]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x, x \in (-1; 1) \\ x = \operatorname{tgh} y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\cosh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1 - (\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1 - x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right]' = [x \in (-1; 1) \Rightarrow 1+x > 0, 1-x > 0]$$

$[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x, x \in \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x = \operatorname{cotgh} y, y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\sinh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[\frac{x+1}{x-1} \right]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x, x \in (-1; 1) \\ x = \operatorname{tgh} y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\cosh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1 - (\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1 - x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right]' = \left[x \in (-1; 1) \Rightarrow 1+x > 0, 1-x > 0 \right] = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]'$$

$[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x, x \in \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x = \operatorname{cotgh} y, y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\sinh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[\frac{x+1}{x-1} \right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x, x \in (-1; 1) \\ x = \operatorname{tgh} y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\cosh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1 - (\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1 - x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right]' = \left[x \in (-1; 1) \Rightarrow 1+x > 0, 1-x > 0 \right] = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]' \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right]$$

$[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x, x \in \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x = \operatorname{cotgh} y, y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\sinh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{-\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} \end{array} \right] \\ = \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[\frac{x+1}{x-1} \right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \frac{-2}{(x+1) \cdot (x-1)}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$[\operatorname{argtgh} x]'$ pre $x \in (-1; 1)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x, x \in (-1; 1) \\ x = \operatorname{tgh} y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\cosh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1 - (\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1 - x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right]' = \left[x \in (-1; 1) \Rightarrow 1+x > 0, 1-x > 0 \right] = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]' \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right] = \frac{1}{2} \frac{(1-x) + (1+x)}{(1+x) \cdot (1-x)}$$

$[\operatorname{argcotgh} x]'$ pre $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x, x \in \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x = \operatorname{cotgh} y, y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\sinh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 y}{\sinh^2 y} - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} \end{array} \right] \\ = \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[\frac{x+1}{x-1} \right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \frac{-2}{(x+1) \cdot (x-1)} \\ = \frac{-1}{x^2 - 1}$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Príklady

$$[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2} \text{ pre } x \in (-1; 1)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argtgh} x, x \in (-1; 1) \\ x = \operatorname{tgh} y, y \in \mathbb{R} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh y > 0 \Rightarrow \cosh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\cosh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{1 - \sinh^2 y} = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 y} = \frac{1}{1 - (\operatorname{tgh} \operatorname{argtgh} x)^2} = \frac{1}{1 - x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{[\operatorname{tgh} y]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument tangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right]' = \left[x \in (-1; 1) \Rightarrow 1+x > 0, 1-x > 0 \right] = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]' \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right] = \frac{1}{2} \frac{(1-x) + (1+x)}{(1+x) \cdot (1-x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2} \text{ pre } x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{argcotgh} x, x \in \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x = \operatorname{cotgh} y, y \in \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \middle| \begin{array}{l} y \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \sinh y \neq 0 \Rightarrow \sinh^2 y > 0 \\ \frac{1}{\sinh^2 y} = \frac{1}{\cosh^2 y - \sinh^2 y} = \frac{1}{-\cosh^2 y - 1} = \frac{1}{\operatorname{cotgh}^2 y - 1} = \frac{1}{(\operatorname{cotgh} \operatorname{argcotgh} x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} \end{array} \right] \\ = \frac{1}{[\operatorname{cotgh} y]'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sinh^2 y}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Môžeme použiť aj explicitný zápis funkcie argument kotangens hyperbolický pomocou logaritmu.

$$\bullet = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[\frac{x+1}{x-1} \right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \frac{-2}{(x+1) \cdot (x-1)} \\ = \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou logaritmického derivovania.

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou exponenciálnej funkcie.

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **logaritmickej derivácie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **exponenciálnej funkcie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **logaritmickej derivácie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ pre } x \in A.$$

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **exponenciálnej funkcie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet f(x) = e^{\ln f(x)} \text{ pre } x \in A.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **logaritmickéj derivácie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ pre } x \in A. \Rightarrow \bullet f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **exponenciálnej funkcie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet f(x) = e^{\ln f(x)} \text{ pre } x \in A.$$

$$\Rightarrow \bullet f'(x) = [e^{\ln f(x)}]' = e^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **logaritmickej derivácie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ pre } x \in A. \Rightarrow \bullet f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **exponenciálnej funkcie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet f(x) = e^{\ln f(x)} \text{ pre } x \in A.$$

$$\Rightarrow \bullet f'(x) = [e^{\ln f(x)}]' = e^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

$$[x^x]' \text{ pre } x > 0$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **logaritmickej derivácie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ pre } x \in A. \Rightarrow \bullet f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **exponenciálnej funkcie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet f(x) = e^{\ln f(x)} \text{ pre } x \in A.$$

$$\Rightarrow \bullet f'(x) = [e^{\ln f(x)}]' = e^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

$[x^x]'$ pre $x > 0$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Logaritmické} \\ \text{derivovanie} \end{array} \right]$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow x^x > 0 \\ x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \end{array} \right]$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **logaritmickej derivácie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ pre } x \in A. \Rightarrow \bullet f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **exponenciálnej funkcie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet f(x) = e^{\ln f(x)} \text{ pre } x \in A.$$

$$\Rightarrow \bullet f'(x) = [e^{\ln f(x)}]' = e^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

$[x^x]'$ pre $x > 0$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Logaritmické} \\ \text{derivovanie} \end{array} \right] = x^x \cdot [\ln x^x]'$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow x^x > 0 \\ x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \end{array} \right] = [e^{x \ln x}]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **logaritmickej derivácie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ pre } x \in A. \Rightarrow \bullet f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **exponenciálnej funkcie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet f(x) = e^{\ln f(x)} \text{ pre } x \in A.$$

$$\Rightarrow \bullet f'(x) = [e^{\ln f(x)}]' = e^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

$[x^x]'$ pre $x > 0$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Logaritmické} \\ \text{derivovanie} \end{array} \right] = x^x \cdot [\ln x^x]' = x^x \cdot [x \ln x]'$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow x^x > 0 \\ x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \end{array} \right] = [e^{x \ln x}]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]'$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **logaritmickej derivácie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ pre } x \in A. \Rightarrow \bullet f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **exponenciálnej funkcie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet f(x) = e^{\ln f(x)} \text{ pre } x \in A.$$

$$\Rightarrow \bullet f'(x) = [e^{\ln f(x)}]' = e^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

$[x^x]'$ pre $x > 0$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Logaritmické} \\ \text{derivovanie} \end{array} \right] = x^x \cdot [\ln x^x]' = x^x \cdot [x \ln x]' = x^x (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x})$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow x^x > 0 \\ x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \end{array} \right] = [e^{x \ln x}]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x})$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **logaritmickej derivácie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ pre } x \in A. \Rightarrow \bullet f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **exponenciálnej funkcie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet f(x) = e^{\ln f(x)} \text{ pre } x \in A.$$

$$\Rightarrow \bullet f'(x) = [e^{\ln f(x)}]' = e^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

$$[x^x]' = x^x(1 + \ln x) \text{ pre } x > 0$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Logaritmické} \\ \text{derivovanie} \end{array} \right] = x^x \cdot [\ln x^x]' = x^x \cdot [x \ln x]' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(1 + \ln x).$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow x^x > 0 \\ x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \end{array} \right] = [e^{x \ln x}]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(1 + \ln x).$$

Pravidlá a metódy pre derivovanie – Logaritmické derivovanie

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **logaritmickej derivácie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet \text{ Existuje } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ pre } x \in A. \Rightarrow \bullet f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

Derivovanie kladnej funkcie f pomocou **exponenciálnej funkcie**.

Funkcia f , množina $A \subset D(f)$ taká, že pre $x \in A$ existuje $f'(x)$ a platí $f(x) > 0$.

$$\Rightarrow \bullet f(x) = e^{\ln f(x)} \text{ pre } x \in A.$$

$$\Rightarrow \bullet f'(x) = [e^{\ln f(x)}]' = e^{\ln f(x)} \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \text{ pre } x \in A.$$

- Uvedené postupy sú prakticky rovnaké.

$[x^x]' = x^x(1 + \ln x)$ pre $x > 0$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} \text{Logaritmické} \\ \text{derivovanie} \end{array} \right] = x^x \cdot [\ln x^x]' = x^x \cdot [x \ln x]' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(1 + \ln x).$$

$$\bullet = \left[\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow x^x > 0 \\ x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \end{array} \right] = [e^{x \ln x}]' = e^{x \ln x} \cdot [x \ln x]' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(1 + \ln x).$$

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$,

•

•

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje **konečná derivácia** $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje **konečná derivácia** $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .
- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje **konečná derivácia** $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .
- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva
lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$,

Označenie $df(x_0, x - x_0)$

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje **konečná derivácia** $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .
- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie

$df(x_0, h)$

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje **konečná derivácia** $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$,

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$.

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t.j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t.j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

- $f: y = x$, $x \in R$ (identita).

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t.j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

- $f: y = x$, $x \in R$ (identita). \Rightarrow • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t.j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

- $f: y = x$, $x \in R$ (identita). \Rightarrow • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.

\Rightarrow • $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$,



Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t.j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

- $f: y = x$, $x \in R$ (identita). \Rightarrow • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.

\Rightarrow • $dx = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie dx .



Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .
- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva
lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.
[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t.j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]
- $f: y = x$, $x \in R$ (identita). \Rightarrow
 - $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.
 - \Rightarrow • $dx = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie dx .



[$dx = h$, $h \in R$, resp. $dx = x - x_0$, $x \in R$.]

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t.j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

- $f: y = x$, $x \in R$ (identita). \Rightarrow • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.

\Rightarrow • $dx = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie dx .

- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.

[$dx = h$, $h \in R$, resp. $dx = x - x_0$, $x \in R$.]

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .
 - **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva
lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).
- Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.
[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t.j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]
- $f: y = x$, $x \in R$ (identita). \Rightarrow
 - $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.
 - \Rightarrow • $dx = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie dx .
- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.
 \Rightarrow • $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$,

[$dx = h$, $h \in R$, resp. $dx = x - x_0$, $x \in R$.]

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .

- **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva

lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).

Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.

[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t.j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]

- $f: y = x$, $x \in R$ (identita). \Rightarrow • $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.

\Rightarrow • $dx = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie dx .

- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.

\Rightarrow • $df(x_0) = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$, označenie $df(x_0)$.

[$dx = h$, $h \in R$, resp. $dx = x - x_0$, $x \in R$.]

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .
 - **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva
lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).
- Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.
[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t.j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]
- $f: y = x$, $x \in R$ (identita). \Rightarrow
 - $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.
 - \Rightarrow • $dx = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie dx .
- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.
 \Rightarrow • $df(x_0) = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$, označenie $df(x_0)$.

[$dx = h$, $h \in R$, resp. $dx = x - x_0$, $x \in R$.]

[$df(x_0) = f'(x_0)h$, $h \in R$, resp. $df(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$.]

Diferenciál funkcie

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** v bode $x_0 \in D(f)$, ak:

- Existuje konečná derivácia $f'(x_0)$ funkcie f v bode x_0 .
 - **Diferenciál** funkcie f v bode x_0 sa nazýva
lineárna funkcia $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$ (ak položíme $h = x - x_0$).
- Označenie $df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$, resp. $df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$.

Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná** na množine $A \subset D(f)$, ak:

- f je diferencovateľná v každom bode $x_0 \in A$.
[V každom bode $x_0 \in A$ existuje konečná derivácia $f'(x_0)$, t.j. v každom bode $x_0 \in A$ existuje diferenciál $df(x_0, x - x_0)$.]
- $f: y = x$, $x \in R$ (identita). \Rightarrow
 - $f'(x_0) = 1$ pre všetky $x_0 \in R$.
 - \Rightarrow • $dx = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h = 1 \cdot h = h$, $h \in R$, označenie dx .
- $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$.
 \Rightarrow • $df(x_0) = df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in R$, označenie $df(x_0)$.
 \Rightarrow • $df(x_0) = f'(x_0) dx$, t.j. $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$.

[$dx = h$, $h \in R$, resp. $dx = x - x_0$, $x \in R$.]

[$df(x_0) = f'(x_0)h$, $h \in R$, resp. $df(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$.]

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$.

[Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]



Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že



Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

• Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: ● $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

● $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow ● Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in R$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in R$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in R$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\arctg 1,1$

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1,1$

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$.

[$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: ● $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

● $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

⇒ ● Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\text{arctg } 1,1$

● Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \text{arctg } x$, $x \in O(1)$.

[$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

● Položme $x = 1,1 \in O(1)$.

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: ● $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

● $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

⇒ ● Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\text{arctg } 1,1$

● Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \text{arctg } x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

● Položme $x = 1,1 \in O(1)$. ⇒ ● $x - x_0 = h = 0,1$, t. j. $1,1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

⇒ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\text{arctg } 1,1$

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \text{arctg } x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

• Položme $x = 1,1 \in O(1)$. ⇒ • $x - x_0 = h = 0,1$, t. j. $1,1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

• $f(x) = \text{arctg } x$, $x \in O(1)$.

• $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1,1$

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

• Položme $x = 1,1 \in O(1)$. \Rightarrow • $x - x_0 = h = 0,1$, t. j. $1,1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

• $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$.

• $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

• $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.

• $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1,1$

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

• Položme $x = 1,1 \in O(1)$. \Rightarrow • $x - x_0 = h = 0,1$, t. j. $1,1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

• $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. • $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

• $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$. • $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

• $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\operatorname{arctg} 1,1$

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

• Položme $x = 1,1 \in O(1)$. \Rightarrow • $x - x_0 = h = 0,1$, t. j. $1,1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

• $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in O(1)$.

• $f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

• $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.

• $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

• $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\operatorname{arctg}(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\arctg 1,1$

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$. [$O(1)$ je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

• Položme $x = 1,1 \in O(1)$. \Rightarrow • $x - x_0 = h = 0,1$, t. j. $1,1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

• $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$.

• $f(x_0) = f(1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

• $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.

• $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

• $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1,1) = \arctg(1 + 0,1)$

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\arctg 1,1$

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$. [O(1) je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

• Položme $x = 1,1 \in O(1)$. \Rightarrow • $x - x_0 = h = 0,1$, t. j. $1,1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

• $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$.

• $f(x_0) = f(1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

• $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.

• $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

• $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1,1) = \arctg(1 + 0,1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,1$

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

⇒ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna záležitosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\arctg 1,1$

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$. [O(1) je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

• Položme $x = 1,1 \in O(1)$. ⇒ • $x - x_0 = h = 0,1$, t. j. $1,1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

• $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$.

• $f(x_0) = f(1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

• $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.

• $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

• $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1,1) = \arctg(1 + 0,1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,1 \approx \frac{3,1416}{4} + 0,05$

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

⇒ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna závislosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\arctg 1,1 \approx 0,8354$.

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$. [O(1) je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

• Položme $x = 1,1 \in O(1)$. ⇒ • $x - x_0 = h = 0,1$, t. j. $1,1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

• $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$.

• $f(x_0) = f(1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

• $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.

• $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

• $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1,1) = \arctg(1 + 0,1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,1 \approx \frac{3,1416}{4} + 0,05 = 0,8354$.

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

\Rightarrow • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna závislosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\arctg 1,1 \approx 0,8354$.

[Presná hodnota **0,8330** na 4 desatinné miesta,

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$. [O(1) je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

• Položme $x = 1,1 \in O(1)$. \Rightarrow • $x - x_0 = h = 0,1$, t. j. $1,1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

• $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$.

• $f(x_0) = f(1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

• $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.

• $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

• $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1,1) = \arctg(1 + 0,1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,1 \approx \frac{3,1416}{4} + 0,05 = 0,8354$.

Diferenciál funkcie – Aproximácia

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ diferencovateľná v bode $x_0 \in D(f)$, konštanta $c \in \mathbb{R}$, $c \neq f'(x_0)$.

Označme: • $p: y = f(x_0) + c \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. [Priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $c \neq f'(x_0)$.]

• $g: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$

[Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode x_0 , t. j. priamka prechádzajúca bodom $[x_0; f(x_0)]$ so smernicou $f'(x_0)$.]

⇒ • Existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - p(x)|$.

- Aproximácia f v okolí $O(x_0)$ pomocou funkcie g (t. j. dotyčnice) je najlepšia zo všetkých aproximácií pomocou lineárnych funkcií (t. j. priamok).
- Táto aproximácia funkcie f je iba lokálna závislosť v okolí $O(x_0)$!

Približne vypočítajte $\arctg 1,1 \approx 0,8354$.

[Presná hodnota **0,8330** na 4 desatinné miesta, chyba výpočtu **0,0024**.]

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$. [O(1) je nejaké okolie bodu $x_0 = 1$.]

• Položme $x = 1,1 \in O(1)$. ⇒ • $x - x_0 = h = 0,1$, t. j. $1,1 = x = x_0 + h = 1 + h$.

• $f(x) = \arctg x$, $x \in O(1)$.

• $f(x_0) = f(1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

• $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in O(1)$.

• $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

• $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1 + h) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot h$, $h \in O(1)$.

• $\arctg(1,1) = \arctg(1 + 0,1) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0,1 \approx \frac{3,1416}{4} + 0,05 = 0,8354$.

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$.

[Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$.

[Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$.
- Položme $x = 1,06 \in O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$.
- Položme $x = 0,06 \in O(0)$.

[Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1,06 \in O(1)$. \Rightarrow • $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06$.

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0,06 \in O(0)$. \Rightarrow • $x - x_0 = 0,06 - 0 = 0,06$.

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1,06 \in O(1)$. \Rightarrow • $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06$.

- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0,06 \in O(0)$. \Rightarrow • $x - x_0 = 0,06 - 0 = 0,06$.

- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

• Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]

• Položme $x = 1,06 \in O(1)$. \Rightarrow • $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06$.

• $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.

• $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.

• $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.

• $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

• Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]

• Položme $x = 0,06 \in O(0)$. \Rightarrow • $x - x_0 = 0,06 - 0 = 0,06$.

• $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.

• $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.

• $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.

• $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1,06 \in O(1)$. \Rightarrow • $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06$.
- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$. • $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$. • $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0,06 \in O(0)$. \Rightarrow • $x - x_0 = 0,06 - 0 = 0,06$.
- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$. • $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$. • $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$.

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1,06 \in O(1)$. \Rightarrow • $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06$.
- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$. • $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$. • $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$. • $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0,06 \in O(0)$. \Rightarrow • $x - x_0 = 0,06 - 0 = 0,06$.
- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$. • $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$. • $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$. • $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1,06 \in O(1)$. \Rightarrow • $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06$.
- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$. • $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$. • $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$. • $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1 + 0,06}$

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0,06 \in O(0)$. \Rightarrow • $x - x_0 = 0,06 - 0 = 0,06$.
- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$. • $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$. • $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$. • $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.
- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1 + 0,06}$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1,06 \in O(1)$. \Rightarrow • $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06$.
- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$. • $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$. • $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$. • $\sqrt[6]{1 + h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1 + 0,06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 = 1 + 0,01$

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1 + x} = (1 + x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0,06 \in O(0)$. \Rightarrow • $x - x_0 = 0,06 - 0 = 0,06$.
- $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$. • $f(x_0) = f(0) = (1 + 0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1 + x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$. • $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$. • $\sqrt[6]{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.
- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1 + 0,06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 = 1 + 0,01$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]
 - Položme $x = 1,06 \in O(1)$. \Rightarrow • $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06$.
-
- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.
 - $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
 - $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
 - $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
 - $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.
-
- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1+0,06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 = 1 + 0,01 = 1,01$.

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]
 - Položme $x = 0,06 \in O(0)$. \Rightarrow • $x - x_0 = 0,06 - 0 = 0,06$.
-
- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.
 - $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$.
 - $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
 - $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
 - $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.
-
- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1+0,06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 = 1 + 0,01 = 1,01$.

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

[Presná hodnota 1,0098 na 4 desatinné miesta,

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]
- Položme $x = 1,06 \in O(1)$. \Rightarrow • $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06$.
- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$. • $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$. • $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$. • $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.
- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1+0,06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 = 1 + 0,01 = 1,01$.

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

[Presná hodnota 1,0098 na 4 desatinné miesta,

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]
- Položme $x = 0,06 \in O(0)$. \Rightarrow • $x - x_0 = 0,06 - 0 = 0,06$.
- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$. • $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
- $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$. • $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$. • $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.
- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1+0,06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 = 1 + 0,01 = 1,01$.

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

[Presná hodnota 1,0098 na 4 desatinné miesta, chyba výpočtu 0,0002.]

- Označme $x_0 = 1$, $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$, $x > 0$. [Okolie $O(1)$ je také, že $1,06 \in O(1)$.]
 - Položme $x = 1,06 \in O(1)$. \Rightarrow • $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06$.
-
- $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(1)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(1)$.
 - $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, $h \in O(1)$.
 - $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.
 - $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
 - $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h$, $h \in O(1)$.
-
- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1+0,06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 = 1 + 0,01 = 1,01$.

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

[Presná hodnota 1,0098 na 4 desatinné miesta, chyba výpočtu 0,0002.]

- Označme $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$, $x > -1$. [Okolie $O(0)$ je také, že $0,06 \in O(0)$.]
 - Položme $x = 0,06 \in O(0)$. \Rightarrow • $x - x_0 = 0,06 - 0 = 0,06$.
-
- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, $x \in O(0)$.
 - $f'(x) = \frac{1}{6}(1+x)^{-\frac{5}{6}}$, $x \in O(0)$.
 - $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, $x \in O(0)$.
 - $f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{1}{6}} = 1$.
 - $f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{6} \cdot (1+0)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.
 - $\sqrt[6]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot x$, $x \in O(0)$.
-
- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1+0,06} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 = 1 + 0,01 = 1,01$.

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0.$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0.$

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0.$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0.$

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0.$

- Položme $x_0 = 1$ a zvolíme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0.$

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0.$

- Položme $x_0 = 1$ a zvolíme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0.$

- Položme $x_0 = 1$ a zvolíme okolie $O(1)$.

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0.$

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0.$

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0.$

- Položme $x_0 = 1$ a zvolíme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$

- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, h \in O(0).$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), x \in O(1).$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0.$

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0.$

- Položme $x_0 = 1$ a zvolíme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$

- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, h \in O(0).$

- $x = 1,06 \in O(1).$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), x \in O(1).$

- $x = 1,06 \in O(1).$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0.$

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0.$

- Položme $x_0 = 1$ a zvolíme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$

- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, h \in O(0).$

- $x = 1,06 \in O(1).$

- $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0).$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), x \in O(1).$

- $x = 1,06 \in O(1).$

- $x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0).$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0.$

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0.$

- Položme $x_0 = 1$ a zvolíme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$

- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, h \in O(0).$

- $x = 1,06 \in O(1).$

- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h = \frac{6+h}{6}, h \in O(0).$

- $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0).$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), x \in O(1).$

- $x = 1,06 \in O(1).$

- $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}, x \in O(1).$

- $x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0).$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06}$

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0.$

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0.$

- Položme $x_0 = 1$ a zvolíme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1.$

- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}.$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, h \in O(0).$

- $x = 1,06 \in O(1).$

- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h = \frac{6+h}{6}, h \in O(0).$

- $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0).$

- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1+0,06}$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), x \in O(1).$

- $x = 1,06 \in O(1).$

- $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}, x \in O(1).$

- $x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0).$

- $\sqrt[6]{1,06}$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0$.

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0$.

- Položme $x_0 = 1$ a zvolme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.

- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, h \in O(0)$.

- $x = 1,06 \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h = \frac{6+h}{6}, h \in O(0)$.

- $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1+0,06} \approx \frac{6+0,06}{6} = \frac{6,06}{6}$

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), x \in O(1)$.

- $x = 1,06 \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}, x \in O(1)$.

- $x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1,06} \approx \frac{5+1,06}{6} = \frac{6,06}{6}$

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0$.

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0$.

- Položme $x_0 = 1$ a zvolíme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.

- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, h \in O(0)$.

- $x = 1,06 \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h = \frac{6+h}{6}, h \in O(0)$.

- $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1+0,06} \approx \frac{6+0,06}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), x \in O(1)$.

- $x = 1,06 \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}, x \in O(1)$.

- $x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1,06} \approx \frac{5+1,06}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.

- $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

[Presná hodnota **1,0098** na 4 desatinné miesta,

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0$.

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0$.

- Položme $x_0 = 1$ a zvolme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.

- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, h \in O(0)$.

- $x = 1,06 \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h = \frac{6+h}{6}, h \in O(0)$.

- $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1+0,06} \approx \frac{6+0,06}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), x \in O(1)$.

- $x = 1,06 \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}, x \in O(1)$.

- $x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1,06} \approx \frac{5+1,06}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.

- $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

- $\sqrt[6]{1,06} = 1,0098$.

[Presná hodnota na 4 desatinné miesta.]

Diferenciál funkcie – Príklad I

Približne vypočítajte $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

[Presná hodnota 1,0098 na 4 desatinné miesta, chyba výpočtu 0,0002.]

- $f(x) = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}, x > 0$.

- $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, x > 0$.

- Položme $x_0 = 1$ a zvolme okolie $O(1)$.

[Okolie $O(1)$ je také, aby platilo $O(1) \subset (0; \infty)$ a $1,06 \in O(1)$.]

- $f(x_0) = f(1) = 1^{\frac{1}{6}} = 1$.

- $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{6} \cdot 1^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$.

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, h \in O(0)$.

- $x = 1,06 \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{1+h} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot h = \frac{6+h}{6}, h \in O(0)$.

- $h = x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1+0,06} \approx \frac{6+0,06}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.

- $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), x \in O(1)$.

- $x = 1,06 \in O(1)$.

- $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}, x \in O(1)$.

- $x - x_0 = 1,06 - 1 = 0,06 \in O(0)$.

- $\sqrt[6]{1,06} \approx \frac{5+1,06}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.

- $\sqrt[6]{1,06} \approx 1,01$.

- $\sqrt[6]{1,06} = 1,0098$.

[Presná hodnota na 4 desatinné miesta.]

- $1,01 - 1,0098 = 0,0002$.

[Chyba výpočtu.]

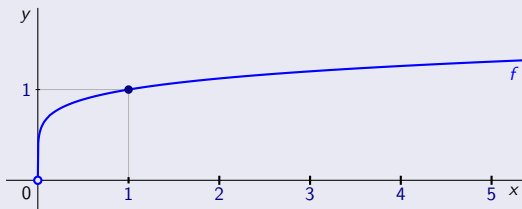
Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

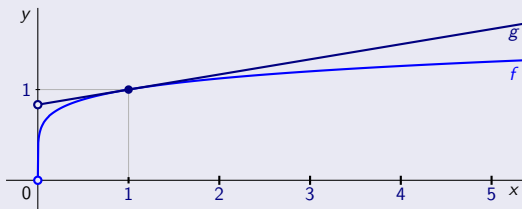
- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$



Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.



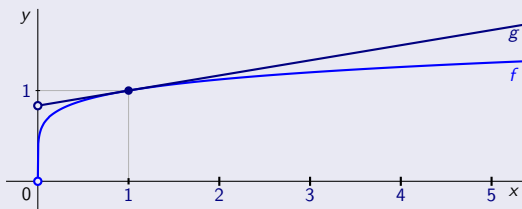
Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε



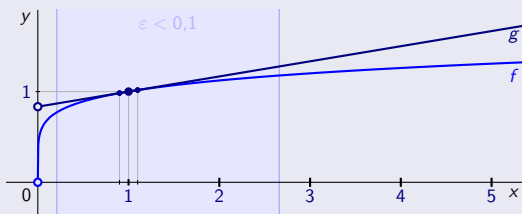
Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
0,9	0,982 593	0,983 333	$< 0,000 750$
1,1	1,016 012	1,016 667	$< 0,000 660$

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε



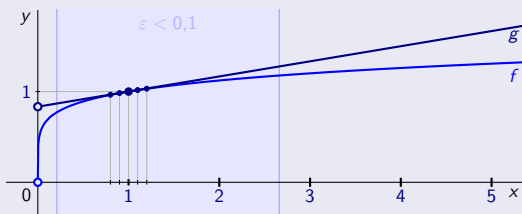
Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
0,8	0,963 492	0,966 667	$< 0,003 174$
0,9	0,982 593	0,983 333	$< 0,000 750$
1,1	1,016 012	1,016 667	$< 0,000 660$
1,2	1,030 853	1,033 333	$< 0,002 490$

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε



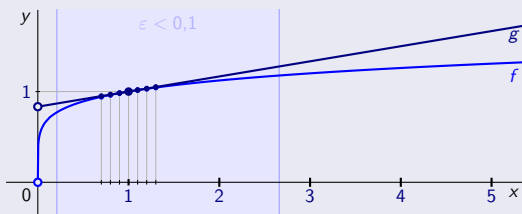
Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
0,7	0,942 287	0,950 000	< 0,007 713
0,8	0,963 492	0,966 667	< 0,003 174
0,9	0,982 593	0,983 333	< 0,000 750
1,1	1,016 012	1,016 667	< 0,000 660
1,2	1,030 853	1,033 333	< 0,002 490
1,3	1,044 698	1,050 000	< 0,005 310

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε



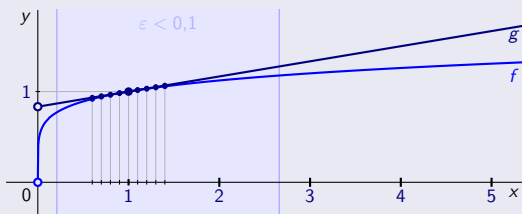
Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná,

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
0,6	0,918 386	0,933 333	< 0,014 947
0,7	0,942 287	0,950 000	< 0,007 713
0,8	0,963 492	0,966 667	< 0,003 174
0,9	0,982 593	0,983 333	< 0,000 750
1,1	1,016 012	1,016 667	< 0,000 660
1,2	1,030 853	1,033 333	< 0,002 490
1,3	1,044 698	1,050 000	< 0,005 310
1,4	1,057 681	1,066 667	< 0,008 986

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε



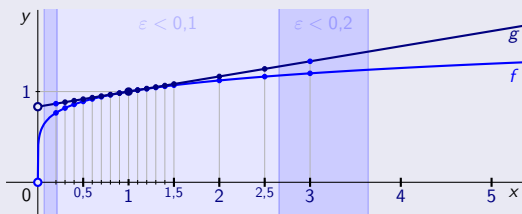
Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná, ale má zmysel iba pre hodnoty v blízkosti bodu 1. [Lokálna závislosť.]

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
0,2	0,764 724	0,866 667	> 0,101 942
0,3	0,818 189	0,883 333	< 0,065 145
0,4	0,858 374	0,900 000	< 0,041 626
0,5	0,890 899	0,916 667	< 0,025 770
0,6	0,918 386	0,933 333	< 0,014 947
0,7	0,942 287	0,950 000	< 0,007 713
0,8	0,963 492	0,966 667	< 0,003 174
0,9	0,982 593	0,983 333	< 0,000 750
1,1	1,016 012	1,016 667	< 0,000 660
1,2	1,030 853	1,033 333	< 0,002 490
1,3	1,044 698	1,050 000	< 0,005 310
1,4	1,057 681	1,066 667	< 0,008 986
1,5	1,069 913	1,083 333	< 0,013 430
2,0	1,122 462	1,166 667	< 0,044 210
2,5	1,164 993	1,250 000	< 0,085 007

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
3,0	1,200 937	1,333 333	> 0,132 390



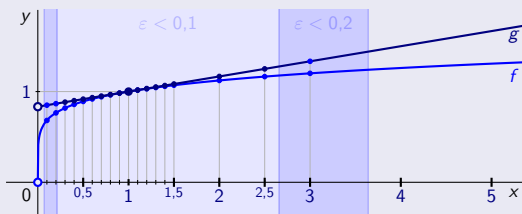
Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná, ale má zmysel iba pre hodnoty v blízkosti bodu 1. [Lokálna závislosť.]

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
0,1	0,681 292	0,850 000	> 0,168 700
0,2	0,764 724	0,866 667	> 0,101 942
0,3	0,818 189	0,883 333	< 0,065 145
0,4	0,858 374	0,900 000	< 0,041 626
0,5	0,890 899	0,916 667	< 0,025 770
0,6	0,918 386	0,933 333	< 0,014 947
0,7	0,942 287	0,950 000	< 0,007 713
0,8	0,963 492	0,966 667	< 0,003 174
0,9	0,982 593	0,983 333	< 0,000 750
1,1	1,016 012	1,016 667	< 0,000 660
1,2	1,030 853	1,033 333	< 0,002 490
1,3	1,044 698	1,050 000	< 0,005 310
1,4	1,057 681	1,066 667	< 0,008 986
1,5	1,069 913	1,083 333	< 0,013 430
2,0	1,122 462	1,166 667	< 0,044 210
2,5	1,164 993	1,250 000	< 0,085 007

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
3,0	1,200 937	1,333 333	> 0,132 390



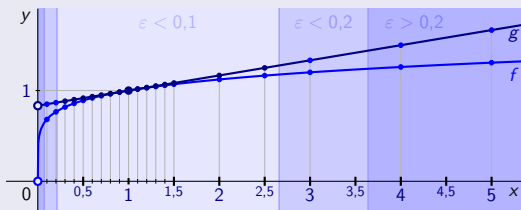
Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná, ale má zmysel iba pre hodnoty v blízkosti bodu 1. [Lokálna záležitosť.]

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
0,1	0,681 292	0,850 000	> 0,168 700
0,2	0,764 724	0,866 667	> 0,101 942
0,3	0,818 189	0,883 333	< 0,065 145
0,4	0,858 374	0,900 000	< 0,041 626
0,5	0,890 899	0,916 667	< 0,025 770
0,6	0,918 386	0,933 333	< 0,014 947
0,7	0,942 287	0,950 000	< 0,007 713
0,8	0,963 492	0,966 667	< 0,003 174
0,9	0,982 593	0,983 333	< 0,000 750
1,1	1,016 012	1,016 667	< 0,000 660
1,2	1,030 853	1,033 333	< 0,002 490
1,3	1,044 698	1,050 000	< 0,005 310
1,4	1,057 681	1,066 667	< 0,008 986
1,5	1,069 913	1,083 333	< 0,013 430
2,0	1,122 462	1,166 667	< 0,044 210
2,5	1,164 993	1,250 000	< 0,085 007

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
3,0	1,200 937	1,333 333	> 0,132 390
4,0	1,259 921	1,500 000	> 0,240 079
5,0	1,307 661	1,666 667	> 0,359 000



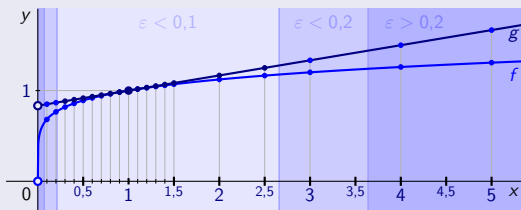
Diferenciál funkcie – Príklad I (chyby aproximácie)

Chyby aproximácie $\sqrt[6]{x} \approx 1 + \frac{1}{6} \cdot (x - 1) = \frac{5+x}{6}$ pre $x > 0$.

- Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$ a aproximáciu $g(x) = \frac{5+x}{6}$, $x > 0$.
- Aproximácia je pomerne presná, ale má zmysel iba pre hodnoty v blízkosti bodu 1. [Lokálna závislosť.]
- Pri neuváženom použití, môže chyba ε narásť do neprijateľných rozmerov.

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
0,1	0,681 292	0,850 000	> 0,168 700
0,2	0,764 724	0,866 667	> 0,101 942
0,3	0,818 189	0,883 333	< 0,065 145
0,4	0,858 374	0,900 000	< 0,041 626
0,5	0,890 899	0,916 667	< 0,025 770
0,6	0,918 386	0,933 333	< 0,014 947
0,7	0,942 287	0,950 000	< 0,007 713
0,8	0,963 492	0,966 667	< 0,003 174
0,9	0,982 593	0,983 333	< 0,000 750
1,1	1,016 012	1,016 667	< 0,000 660
1,2	1,030 853	1,033 333	< 0,002 490
1,3	1,044 698	1,050 000	< 0,005 310
1,4	1,057 681	1,066 667	< 0,008 986
1,5	1,069 913	1,083 333	< 0,013 430
2,0	1,122 462	1,166 667	< 0,044 210
2,5	1,164 993	1,250 000	< 0,085 007

x	$f(x) = \sqrt[6]{x}$	$g(x) = \frac{5+x}{6}$	Chyba ε
3,0	1,200 937	1,333 333	> 0,132 390
4,0	1,259 921	1,500 000	> 0,240 079
5,0	1,307 661	1,666 667	> 0,359 000
10,0	1,467 799	2,500 000	> 1,032 200
20,0	1,647 549	4,166 667	> 2,519 110
64,0	2,000 000	11,500 000	= 9,500 000



Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
- Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
- Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.
- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ vyjadruje absolútnu chybu veličiny y .

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
- Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.
- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = df(x, \Delta x)$ vyjadruje **absolútnu chybu** veličiny y .

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]

- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x} \%$ (v percentách) .

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.

- Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.

- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = df(x, \Delta x)$ vyjadruje **absolútnu chybu** veličiny y .

- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y} \%$ (v percentách) .

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .

[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]

- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny x .

- Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.

- Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.

- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = df(x, \Delta x)$ vyjadruje **absolútnu chybu** veličiny y .

- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny y .

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .
[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny x .
 - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
 - Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.
- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = df(x, \Delta x)$ vyjadruje **absolútnu chybu** veličiny y .
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny y .

Určte chybu pre objem gule V , ak sme jej polomer r namerali s chybou Δr .

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .
[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny x .
 - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
 - Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.
- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = df(x, \Delta x)$ vyjadruje **absolútnu chybu** veličiny y .
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny y .

Určte chybu pre objem gule V , ak sme jej polomer r namerali s chybou Δr .

- Polomer $r > 0$.

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .
[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny x .
 - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
 - Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.
- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = df(x, \Delta x)$ vyjadruje **absolútnu chybu** veličiny y .
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny y .

Určte chybu pre objem gule V , ak sme jej polomer r namerali s chybou Δr .

- Polomer $r > 0$.
- Absolútna chyba $\Delta r > 0$.
- Relatívna chyba $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .
[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny x .
 - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
 - Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.
- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = df(x, \Delta x)$ vyjadruje **absolútnu chybu** veličiny y .
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny y .

Určte chybu pre objem gule V , ak sme jej polomer r namerali s chybou Δr .

- Polomer $r > 0$. • Absolútna chyba $\Delta r > 0$. • Relatívna chyba $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.
- Objem $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .
[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny x .
 - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
 - Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.
- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = df(x, \Delta x)$ vyjadruje **absolútnu chybu** veličiny y .
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny y .

Určte chybu pre objem gule V , ak sme jej polomer r namerali s chybou Δr .

- Polomer $r > 0$. • Absolútna chyba $\Delta r > 0$. • Relatívna chyba $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.
- Objem $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$. \Rightarrow • $V'(r) = 4\pi r^2$.

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .
[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny x .
 - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
 - Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.
- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = df(x, \Delta x)$ vyjadruje **absolútnu chybu** veličiny y .
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny y .

Určte chybu pre objem gule V , ak sme jej polomer r namerali s chybou Δr .

- Polomer $r > 0$. • Absolútna chyba $\Delta r > 0$. • Relatívna chyba $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.
- Objem $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$. \Rightarrow • $V'(r) = 4\pi r^2$.
 - $\Delta V = V'(r) \cdot \Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$.

[Absolútna chyba objemu.]

Diferenciál funkcie – Absolútna a relatívna chyba

Funkcia $f: y = f(x)$ vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x .

- $\Delta x > 0$ vyjadruje chybu, s akou sme namerali veličinu x a nazýva sa **absolútna chyba** veličiny x .
[Absolútny rozdiel medzi jednotlivými nameranými hodnotami veličiny x je menší alebo rovný Δx .]
- Podiel $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, resp. $\delta_x = \frac{100 \cdot \Delta x}{x} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny x .
 - Okolie $O(x)$ je také, že $x + \Delta x \in O(x)$.
 - Pre aproximáciu funkcie f v okolí $O(x)$ platí $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x) + df(x, \Delta x)$.
- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x = df(x, \Delta x)$ vyjadruje **absolútnu chybu** veličiny y .
- Podiel $\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$, resp. $\delta_y = \frac{100 \cdot \Delta y}{y} \%$ (v percentách) sa nazýva **relatívna (pomerná) chyba** veličiny y .

Určte chybu pre objem gule V , ak sme jej polomer r namerali s chybou Δr .

- Polomer $r > 0$. • Absolútna chyba $\Delta r > 0$. • Relatívna chyba $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.
- Objem $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$. \Rightarrow • $V'(r) = 4\pi r^2$.
 - $\Delta V = V'(r) \cdot \Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$.
[Absolútna chyba objemu.]
 - $\delta_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3\Delta r}{r} = 3\delta_r$.
[Relatívna chyba objemu.]

Derivácie vyšších rádov – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f

Derivácie vyšších ráduv – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f

- Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$.

Derivácie vyšších rádu – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f

- Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$.

Derivácie vyšších ráduv – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f

- Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$.
- Prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$.
- Neprázdna množina $A \subset D(f), A \neq \emptyset$.

Derivácie vyšších rádo – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f

- Funkcia $f: y = f(x), x \in D(f)$.
 - Prírodné číslo $n \in \mathbb{N}$.
 - Neprázdna množina $A \subset D(f), A \neq \emptyset$.
- Funkcia $f': y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A, A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie f , označenie $f' = f^{(1)}$.

Derivácie vyšších rádo – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f

- Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$.
 - Prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$.
 - Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.
-
- Funkcia $f': y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie f , označenie $f' = f^{(1)}$.
 - Funkcia $f'': y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
sa nazýva **derivácia 2. rádu (druhá derivácia)** funkcie f , označenie $f'' = f^{(2)}$.

Derivácie vyšších rádo – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f

- Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$. • Prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$. • Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.
- Funkcia $f': y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
 sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie f , označenie $f' = f^{(1)}$.
- Funkcia $f'': y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
 sa nazýva **derivácia 2. rádu (druhá derivácia)** funkcie f , označenie $f'' = f^{(2)}$.
- Funkcia $f''': y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
 sa nazýva **derivácia 3. rádu (tretia derivácia)** funkcie f , označenie $f''' = f^{(3)}$.

Derivácie vyšších rádov – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f

- Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$. • Prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$. • Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.
- Funkcia $f': y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
 sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie f , označenie $f' = f^{(1)}$.
- Funkcia $f'': y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
 sa nazýva **derivácia 2. rádu (druhá derivácia)** funkcie f , označenie $f'' = f^{(2)}$.
- Funkcia $f''': y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
 sa nazýva **derivácia 3. rádu (tretia derivácia)** funkcie f , označenie $f''' = f^{(3)}$.
- ...
- Funkcia $f^{(n)}: y = [f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
 sa nazýva **derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia)** funkcie f , označenie $f^{(n)}$.

Derivácie vyšších rádov – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f

• Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$. • Prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$. • Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.

• Funkcia $f': y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie f , označenie $f' = f^{(1)}$.

• Funkcia $f'': y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
sa nazýva **derivácia 2. rádu (druhá derivácia)** funkcie f , označenie $f'' = f^{(2)}$.

• Funkcia $f''': y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
sa nazýva **derivácia 3. rádu (tretia derivácia)** funkcie f , označenie $f''' = f^{(3)}$.

...

• Funkcia $f^{(n)}: y = [f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
sa nazýva **derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia)** funkcie f , označenie $f^{(n)}$.

Špeciálne: • Funkcia $f^{(0)}: y = f(x)$, kde $x \in A$
sa nazýva **derivácia 0-tého rádu (nultá derivácia)** funkcie f , označenie $f = f^{(0)}$.

Derivácie vyšších rádo – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f na množine A_n , $n \in \mathbb{N}$.

• Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$. • Prirodené číslo $n \in \mathbb{N}$. • Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.

• Funkcia $f': y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie f , označenie $f' = f^{(1)}$.

• Funkcia $f'': y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
sa nazýva **derivácia 2. rádu (druhá derivácia)** funkcie f , označenie $f'' = f^{(2)}$.

• Funkcia $f''': y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
sa nazýva **derivácia 3. rádu (tretia derivácia)** funkcie f , označenie $f''' = f^{(3)}$.

...

• Funkcia $f^{(n)}: y = [f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
sa nazýva **derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia)** funkcie f , označenie $f^{(n)}$.

Špeciálne: • Funkcia $f^{(0)}: y = f(x)$, kde $x \in A$
sa nazýva **derivácia 0-tého rádu (nultá derivácia)** funkcie f , označenie $f = f^{(0)}$.

Derivácie vyšších rádu – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f na množine A_n , $n \in \mathbb{N}$.

• Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$. • Prírodné číslo $n \in \mathbb{N}$. • Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.

• Funkcia $f': y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie f , označenie $f' = f^{(1)}$.

• Funkcia $f'': y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
sa nazýva **derivácia 2. rádu (druhá derivácia)** funkcie f , označenie $f'' = f^{(2)}$.

• Funkcia $f''': y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
sa nazýva **derivácia 3. rádu (tretia derivácia)** funkcie f , označenie $f''' = f^{(3)}$.

...

• Funkcia $f^{(n)}: y = [f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
sa nazýva **derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia)** funkcie f , označenie $f^{(n)}$.

Špeciálne: • Funkcia $f^{(0)}: y = f(x)$, kde $x \in A$
sa nazýva **derivácia 0-tého rádu (nultá derivácia)** funkcie f , označenie $f = f^{(0)}$.

• Hodnota $f^{(n)}(x_0) \in A_n$

Derivácie vyšších rádov – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f na množine A_n , $n \in \mathbb{N}$.

• Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$. • Prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$. • Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.

• Funkcia $f': y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie f , označenie $f' = f^{(1)}$.

• Funkcia $f'': y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
sa nazýva **derivácia 2. rádu (druhá derivácia)** funkcie f , označenie $f'' = f^{(2)}$.

• Funkcia $f''': y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
sa nazýva **derivácia 3. rádu (tretia derivácia)** funkcie f , označenie $f''' = f^{(3)}$.

...

• Funkcia $f^{(n)}: y = [f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
sa nazýva **derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia)** funkcie f , označenie $f^{(n)}$.

Špeciálne: • Funkcia $f^{(0)}: y = f(x)$, kde $x \in A$
sa nazýva **derivácia 0-tého rádu (nultá derivácia)** funkcie f , označenie $f = f^{(0)}$.

• Hodnota $f^{(n)}(x_0) \in A_n$ sa nazýva **derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia)** funkcie f v bode x_0 .

Derivácie vyšších rádu – Definícia

Derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia) funkcie f na množine A_n , $n \in \mathbb{N}$.

• Funkcia $f: y = f(x)$, $x \in D(f)$. • Prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$. • Neprázdna množina $A \subset D(f)$, $A \neq \emptyset$.

• Funkcia $f': y = f'(x)$, kde $x \in A_1 \subset A$, $A_1 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_1$ existuje $f'(x)$.]
sa nazýva **derivácia 1. rádu (prvá derivácia)** funkcie f , označenie $f' = f^{(1)}$.

• Funkcia $f'': y = [f'(x)]'$, kde $x \in A_2 \subset A_1$, $A_2 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_2$ existuje $f''(x)$.]
sa nazýva **derivácia 2. rádu (druhá derivácia)** funkcie f , označenie $f'' = f^{(2)}$.

• Funkcia $f''': y = [f''(x)]'$, kde $x \in A_3 \subset A_2$, $A_3 \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_3$ existuje $f'''(x)$.]
sa nazýva **derivácia 3. rádu (tretia derivácia)** funkcie f , označenie $f''' = f^{(3)}$.

...

• Funkcia $f^{(n)}: y = [f^{(n-1)}(x)]'$, kde $x \in A_n \subset A_{n-1}$, $A_n \neq \emptyset$ [Pre všetky $x \in A_n$ existuje $f^{(n)}(x)$.]
sa nazýva **derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia)** funkcie f , označenie $f^{(n)}$.

Špeciálne: • Funkcia $f^{(0)}: y = f(x)$, kde $x \in A$
sa nazýva **derivácia 0-tého rádu (nultá derivácia)** funkcie f , označenie $f = f^{(0)}$.

• Hodnota $f^{(n)}(x_0) \in A_n$ sa nazýva **derivácia n -tého rádu (n -tá derivácia)** funkcie f v bode x_0 .

[Z definície derivácie vyplýva, že funkcia $f^{(n-1)}$ musí byť definovaná v nejakom $O(x_0)$.]

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie f podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie f podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

$$\bullet f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x), x \in A_1,$$

$$\text{resp. } \bullet f' = \frac{df}{dx}, x \in A_1.$$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie f podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

$$\bullet f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x), x \in A_1,$$

$$\text{resp. } \bullet f' = \frac{df}{dx}, x \in A_1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \frac{d^2f(x)}{dx dx} = \frac{d^2f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}, x \in A_2,$$

$$\text{resp. } \bullet f'' = \frac{d^2f}{dx^2}, x \in A_2.$$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie f podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

$$\bullet f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x), x \in A_1,$$

$$\text{resp. } \bullet f' = \frac{df}{dx}, x \in A_1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \frac{d^2 f(x)}{dx dx} = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, x \in A_2,$$

$$\text{resp. } \bullet f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}, x \in A_2.$$

$$\bullet f'''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^3} = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, x \in A_3,$$

$$\text{resp. } \bullet f''' = \frac{d^3 f}{dx^3}, x \in A_3.$$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie f podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

$$\bullet f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x), x \in A_1,$$

$$\text{resp. } \bullet f' = \frac{df}{dx}, x \in A_1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \frac{d^2 f(x)}{dx dx} = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, x \in A_2,$$

$$\text{resp. } \bullet f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}, x \in A_2.$$

$$\bullet f'''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^3} = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, x \in A_3,$$

$$\text{resp. } \bullet f''' = \frac{d^3 f}{dx^3}, x \in A_3.$$

$$\bullet \overset{\dots}{f^{(n)}}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right] = \frac{d^n f(x)}{dx^n}, x \in A_n, n \in \mathbb{N},$$

$$\text{resp. } \bullet f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}, x \in A_n.$$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie f podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

- $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x), x \in A_1,$ resp. • $f' = \frac{df}{dx}, x \in A_1.$
 - $f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \frac{d^2f(x)}{dx dx} = \frac{d^2f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}, x \in A_2,$ resp. • $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}, x \in A_2.$
 - $f'''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2} \right] = \frac{d^2f(x)}{(dx)^3} = \frac{d^3f(x)}{dx^3}, x \in A_3,$ resp. • $f''' = \frac{d^3f}{dx^3}, x \in A_3.$
 - \dots
 - $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}} \right] = \frac{d^n f(x)}{dx^n}, x \in A_n, n \in N,$ resp. • $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}, x \in A_n.$
-
- $f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} [f(x_0)] = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_0}$ označuje hodnotu $f^{(n)}$ v bode $x_0 \in A_n, n \in N.$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie f podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

$$\bullet f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x), x \in A_1,$$

$$\text{resp. } \bullet f' = \frac{df}{dx}, x \in A_1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \frac{d^2f(x)}{dx dx} = \frac{d^2f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}, x \in A_2,$$

$$\text{resp. } \bullet f'' = \frac{d^2f}{dx^2}, x \in A_2.$$

$$\bullet f'''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2} \right] = \frac{d^2f(x)}{(dx)^3} = \frac{d^3f(x)}{dx^3}, x \in A_3,$$

$$\text{resp. } \bullet f''' = \frac{d^3f}{dx^3}, x \in A_3.$$

$$\bullet \overset{\dots}{f^{(n)}}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}} \right] = \frac{d^n f(x)}{dx^n}, x \in A_n, n \in N,$$

$$\text{resp. } \bullet f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}, x \in A_n.$$

$$\bullet f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} [f(x_0)] = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_0} \text{ označuje hodnotu } f^{(n)} \text{ v bode } x_0 \in A_n, n \in N.$$

Funkcia $f(x) = e^x, x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie f podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

$$\bullet f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x), x \in A_1,$$

$$\text{resp. } \bullet f' = \frac{df}{dx}, x \in A_1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \frac{d^2 f(x)}{dx dx} = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, x \in A_2,$$

$$\text{resp. } \bullet f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}, x \in A_2.$$

$$\bullet f'''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^3} = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, x \in A_3,$$

$$\text{resp. } \bullet f''' = \frac{d^3 f}{dx^3}, x \in A_3.$$

$$\bullet \overset{\dots}{f^{(n)}}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right] = \frac{d^n f(x)}{dx^n}, x \in A_n, n \in \mathbb{N},$$

$$\text{resp. } \bullet f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}, x \in A_n.$$

$$\bullet f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} [f(x_0)] = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} = \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \text{ označuje hodnotu } f^{(n)} \text{ v bode } x_0 \in A_n, n \in \mathbb{N}.$$

Funkcia $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet f'(x) = [e^x]' = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie f podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

$$\bullet f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x), x \in A_1,$$

$$\text{resp. } \bullet f' = \frac{df}{dx}, x \in A_1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \frac{d^2 f(x)}{dx dx} = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, x \in A_2,$$

$$\text{resp. } \bullet f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}, x \in A_2.$$

$$\bullet f'''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right] = \frac{d^3 f(x)}{(dx)^3} = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, x \in A_3,$$

$$\text{resp. } \bullet f''' = \frac{d^3 f}{dx^3}, x \in A_3.$$

$$\bullet \overset{\dots}{f^{(n)}}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right] = \frac{d^n f(x)}{dx^n}, x \in A_n, n \in \mathbb{N},$$

$$\text{resp. } \bullet f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}, x \in A_n.$$

$$\bullet f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} [f(x_0)] = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} = \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \text{ označuje hodnotu } f^{(n)} \text{ v bode } x_0 \in A_n, n \in \mathbb{N}.$$

Funkcia $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet f'(x) = [e^x]' = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f''(x) = [e^x]'' = [(e^x)']' = [e^x]' = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie f podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

$$\bullet f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x), x \in A_1,$$

$$\text{resp. } \bullet f' = \frac{df}{dx}, x \in A_1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \frac{d^2f(x)}{dx dx} = \frac{d^2f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}, x \in A_2,$$

$$\text{resp. } \bullet f'' = \frac{d^2f}{dx^2}, x \in A_2.$$

$$\bullet f'''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2} \right] = \frac{d^3f(x)}{(dx)^3} = \frac{d^3f(x)}{dx^3}, x \in A_3,$$

$$\text{resp. } \bullet f''' = \frac{d^3f}{dx^3}, x \in A_3.$$

$$\bullet \overset{\dots}{f^{(n)}}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}} \right] = \frac{d^n f(x)}{dx^n}, x \in A_n, n \in \mathbb{N},$$

$$\text{resp. } \bullet f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}, x \in A_n.$$

$$\bullet f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} [f(x_0)] = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_0} \text{ označuje hodnotu } f^{(n)} \text{ v bode } x_0 \in A_n, n \in \mathbb{N}.$$

Funkcia $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet f'(x) = [e^x]' = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet f''(x) = [e^x]'' = [(e^x)']' = [e^x]' = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\bullet \overset{\dots}{f^{(n)}}(x) = [e^x]^{(n)} = [(e^x)^{(n-1)}]' = [e^x]' = e^x, x \in \mathbb{R} \text{ pre } n \in \mathbb{N}.$$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Označenie derivácií vyšších rádov funkcie f podľa Leibniza (pomocou diferenciálov):

$$\bullet f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x), x \in A_1, \quad \text{resp. } \bullet f' = \frac{df}{dx}, x \in A_1.$$

$$\bullet f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \frac{d^2f(x)}{dx dx} = \frac{d^2f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2}, x \in A_2, \quad \text{resp. } \bullet f'' = \frac{d^2f}{dx^2}, x \in A_2.$$

$$\bullet f'''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2} \right] = \frac{d^2f(x)}{(dx)^3} = \frac{d^3f(x)}{dx^3}, x \in A_3, \quad \text{resp. } \bullet f''' = \frac{d^3f}{dx^3}, x \in A_3.$$

$$\bullet \overset{\dots}{f^{(n)}}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}} \right] = \frac{d^n f(x)}{dx^n}, x \in A_n, n \in N, \quad \text{resp. } \bullet f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}, x \in A_n.$$

$$\bullet f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} [f(x_0)] = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_0} \quad \text{označuje hodnotu } f^{(n)} \text{ v bode } x_0 \in A_n, n \in N.$$

Funkcia $f(x) = e^x, x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

$$\bullet f'(x) = [e^x]' = e^x, x \in R.$$

$$\bullet f''(x) = [e^x]'' = [(e^x)']' = [e^x]' = e^x, x \in R.$$

$$\bullet \overset{\dots}{f^{(n)}}(x) = [e^x]^{(n)} = [(e^x)^{(n-1)}]' = [e^x]' = e^x, x \in R \text{ pre } n \in N.$$

$$\Rightarrow \bullet [e^x]^{(0)} = [e^x]' = [e^x]'' = \dots = [e^x]^{(n-1)} = [e^x]^{(n)} = e^x, \text{ pre všetky } x \in R, n \in N.$$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ pre $k \in \mathbb{N}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ pre $k \in \mathbb{N}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ pre $k \in \mathbb{N}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ pre $k \in \mathbb{N}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ pre $k \in \mathbb{N}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$, $x \in \mathbb{R}$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ pre $k \in \mathbb{N}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ pre $k \in \mathbb{N}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$, $x \in \mathbb{R}$.

- \dots
 $f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\dots 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k-1)}(x) = [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ pre $k \in \mathbb{N}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$, $x \in \mathbb{R}$.
- \dots
- $f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\dots 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f^{(k-1)}(x) = [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2x$, $x \in \mathbb{R}$.
- $f^{(k)}(x) = [x^k]^{(k)} = k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$, $x \in \mathbb{R}$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ pre $k \in \mathbb{N}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$, $x \in \mathbb{R}$.

- \dots
 $f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\dots 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k-1)}(x) = [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k)}(x) = [x^k]^{(k)} = k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k+1)}(x) = [x^k]^{(k+1)} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ pre $k \in \mathbb{N}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2) \cdots 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k-1)}(x) = [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2) \cdots 3 \cdot 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k)}(x) = [x^k]^{(k)} = k(k-1)(k-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k+1)}(x) = [x^k]^{(k+1)} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- $f^{(k+i)}(x) = [x^k]^{(k+i)} = 0$, $x \in \mathbb{R}$ pre všetky $i \in \mathbb{N}$.

[Všetky nasledujúce derivácie sú nulové.]

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

$$\bullet f^{(0)}(x) = f(x) = x^k = \frac{k!x^{k-1}}{k!}, x \in R.$$

$$\bullet f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1} = \frac{k!x^{k-1}}{(k-1)!}, x \in R.$$

$$\bullet f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2} = \frac{k!x^{k-1}}{(k-2)!}, x \in R.$$

$$\bullet f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3} = \frac{k!x^{k-1}}{(k-3)!}, x \in R.$$

...

$$\bullet f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3x^2 = \frac{k!x^2}{2!}, x \in R.$$

$$\bullet f^{(k-1)}(x) = [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2x = \frac{k!x^1}{1!}, x \in R.$$

$$\bullet f^{(k)}(x) = [x^k]^{(k)} = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k! = \frac{k!x^0}{0!}, x \in R.$$

$$\bullet f^{(k+1)}(x) = [x^k]^{(k+1)} = 0, x \in R.$$

...

$$\bullet f^{(k+i)}(x) = [x^k]^{(k+i)} = 0, x \in R \text{ pre všetky } i \in N.$$

[Všetky nasledujúce derivácie sú nulové.]

$$\Rightarrow \bullet [x^k]^{(n)} = \frac{k!x^{k-n}}{(k-n)!} \text{ pre } n = 0, 1, \dots, k.$$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^k$, $x \in R$ pre $k \in N$, rád derivácie $n \in N$.

$$\bullet f^{(0)}(x) = f(x) = x^k = \frac{k!x^{k-1}}{k!}, x \in R.$$

$$\bullet f'(x) = [x^k]' = kx^{k-1} = \frac{k!x^{k-1}}{(k-1)!}, x \in R.$$

$$\bullet f''(x) = [x^k]'' = k(k-1)x^{k-2} = \frac{k!x^{k-1}}{(k-2)!}, x \in R.$$

$$\bullet f'''(x) = [x^k]''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3} = \frac{k!x^{k-1}}{(k-3)!}, x \in R.$$

$$\dots$$

$$\bullet f^{(k-2)}(x) = [x^k]^{(k-2)} = k(k-1)(k-2)\dots 3x^2 = \frac{k!x^2}{2!}, x \in R.$$

$$\bullet f^{(k-1)}(x) = [x^k]^{(k-1)} = k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2x = \frac{k!x^1}{1!}, x \in R.$$

$$\bullet f^{(k)}(x) = [x^k]^{(k)} = k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k! = \frac{k!x^0}{0!}, x \in R.$$

$$\bullet f^{(k+1)}(x) = [x^k]^{(k+1)} = 0, x \in R.$$

...

$$\bullet f^{(k+i)}(x) = [x^k]^{(k+i)} = 0, x \in R \text{ pre všetky } i \in N.$$

[Všetky nasledujúce derivácie sú nulové.]

$$\Rightarrow \bullet [x^k]^{(n)} = \frac{k!x^{k-n}}{(k-n)!} \text{ pre } n = 0, 1, \dots, k. \quad \bullet [x^k]^{(n)} = 0 \text{ pre } n = k+1, k+2, \dots$$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f''(x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$f'''(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$f^{(4)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$f^{(5)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f^{(6)}(x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$f^{(7)}(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$f^{(8)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$f^{(9)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f^{(10)}(x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$f^{(11)}(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$f^{(12)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$f^{(13)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f^{(14)}(x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$f^{(15)}(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$f^{(16)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$f^{(17)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f^{(18)}(x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$f^{(19)}(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$f^{(20)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

$f(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f'(x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$f''(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$f'''(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$f^{(4)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f^{(5)}(x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$f^{(6)}(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$f^{(7)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$f^{(8)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f^{(9)}(x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$f^{(10)}(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$f^{(11)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$f^{(12)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f^{(13)}(x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$f^{(14)}(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$f^{(15)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$f^{(16)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$f^{(17)}(x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$
$f^{(18)}(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$f^{(19)}(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$f^{(20)}(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x.$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x.$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x$.
- $f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x$.
- $f^{(2)}(x) = [\sin x]'' = -\sin x$.

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x$.
- $f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x$.
- $f^{(2)}(x) = [\cos x]'' = -\cos x$.

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = [\sin x]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = [\sin x]''' = -\cos x.$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = [\cos x]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = [\cos x]''' = \sin x.$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x$.
- $f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x$.
- $f^{(2)}(x) = [\sin x]'' = -\sin x$.
- $f^{(3)}(x) = [\sin x]''' = -\cos x$.
- $f^{(4)}(x) = \sin x$.

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x$.
- $f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x$.
- $f^{(2)}(x) = [\cos x]'' = -\cos x$.
- $f^{(3)}(x) = [\cos x]''' = \sin x$.
- $f^{(4)}(x) = \cos x$.

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = [\sin x]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = [\sin x]''' = -\cos x.$
- $f^{(4)}(x) = \sin x.$
- $f^{(5)}(x) = \cos x.$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = [\cos x]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = [\cos x]''' = \sin x.$
- $f^{(4)}(x) = \cos x.$
- $f^{(5)}(x) = -\sin x.$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = [\sin x]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = [\sin x]''' = -\cos x.$
- $f^{(4)}(x) = \sin x.$
- $f^{(5)}(x) = \cos x.$
- $f^{(6)}(x) = -\sin x.$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = [\cos x]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = [\cos x]''' = \sin x.$
- $f^{(4)}(x) = \cos x.$
- $f^{(5)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(6)}(x) = -\cos x.$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = [\sin x]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = [\sin x]''' = -\cos x.$
- $f^{(4)}(x) = \sin x.$
- $f^{(5)}(x) = \cos x.$
- $f^{(6)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(7)}(x) = -\cos x.$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = [\cos x]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = [\cos x]''' = \sin x.$
- $f^{(4)}(x) = \cos x.$
- $f^{(5)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(6)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(7)}(x) = \sin x.$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$
- $f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x.$
- $f^{(2)}(x) = [\sin x]'' = -\sin x.$
- $f^{(3)}(x) = [\sin x]''' = -\cos x.$
- $f^{(4)}(x) = \sin x.$
- $f^{(5)}(x) = \cos x.$
- $f^{(6)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(7)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(8)}(x) = \sin x.$
- $f^{(9)}(x) = \cos x.$
- $f^{(10)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(11)}(x) = -\cos x.$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$
- $f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x.$
- $f^{(2)}(x) = [\cos x]'' = -\cos x.$
- $f^{(3)}(x) = [\cos x]''' = \sin x.$
- $f^{(4)}(x) = \cos x.$
- $f^{(5)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(6)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(7)}(x) = \sin x.$
- $f^{(8)}(x) = \cos x.$
- $f^{(9)}(x) = -\sin x.$
- $f^{(10)}(x) = -\cos x.$
- $f^{(11)}(x) = \sin x.$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$ • $f^{(4)}(x) = \sin x.$ • $f^{(8)}(x) = \sin x.$ • ...
- $f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x.$ • $f^{(5)}(x) = \cos x.$ • $f^{(9)}(x) = \cos x.$ • ...
- $f^{(2)}(x) = [\sin x]'' = -\sin x.$ • $f^{(6)}(x) = -\sin x.$ • $f^{(10)}(x) = -\sin x.$ • ...
- $f^{(3)}(x) = [\sin x]''' = -\cos x.$ • $f^{(7)}(x) = -\cos x.$ • $f^{(11)}(x) = -\cos x.$ • ...

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$ • $f^{(4)}(x) = \cos x.$ • $f^{(8)}(x) = \cos x.$ • ...
- $f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x.$ • $f^{(5)}(x) = -\sin x.$ • $f^{(9)}(x) = -\sin x.$ • ...
- $f^{(2)}(x) = [\cos x]'' = -\cos x.$ • $f^{(6)}(x) = -\cos x.$ • $f^{(10)}(x) = -\cos x.$ • ...
- $f^{(3)}(x) = [\cos x]''' = \sin x.$ • $f^{(7)}(x) = \sin x.$ • $f^{(11)}(x) = \sin x.$ • ...

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x.$ • $f^{(4)}(x) = \sin x.$ • $f^{(8)}(x) = \sin x.$ • ...
- $f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x.$ • $f^{(5)}(x) = \cos x.$ • $f^{(9)}(x) = \cos x.$ • ...
- $f^{(2)}(x) = [\sin x]'' = -\sin x.$ • $f^{(6)}(x) = -\sin x.$ • $f^{(10)}(x) = -\sin x.$ • ...
- $f^{(3)}(x) = [\sin x]''' = -\cos x.$ • $f^{(7)}(x) = -\cos x.$ • $f^{(11)}(x) = -\cos x.$ • ...

$$\Rightarrow \bullet [\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4i)}$$

pričom $i \in N$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x.$ • $f^{(4)}(x) = \cos x.$ • $f^{(8)}(x) = \cos x.$ • ...
- $f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x.$ • $f^{(5)}(x) = -\sin x.$ • $f^{(9)}(x) = -\sin x.$ • ...
- $f^{(2)}(x) = [\cos x]'' = -\cos x.$ • $f^{(6)}(x) = -\cos x.$ • $f^{(10)}(x) = -\cos x.$ • ...
- $f^{(3)}(x) = [\cos x]''' = \sin x.$ • $f^{(7)}(x) = \sin x.$ • $f^{(11)}(x) = \sin x.$ • ...

$$\Rightarrow \bullet [\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4i)}$$

pričom $i \in N$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

$$\bullet f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x. \quad \bullet f^{(4)}(x) = \sin x. \quad \bullet f^{(8)}(x) = \sin x. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet f^{(2)}(x) = [\sin x]'' = -\sin x. \quad \bullet f^{(6)}(x) = -\sin x. \quad \bullet f^{(10)}(x) = -\sin x. \quad \bullet \dots$$

$$\Rightarrow \bullet [\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4i)} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \sin x & \text{pre } n = 2k, \\ \end{cases} \quad \text{pričom } k, i \in N, x \in R.$$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

$$\bullet f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x. \quad \bullet f^{(4)}(x) = \cos x. \quad \bullet f^{(8)}(x) = \cos x. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet f^{(2)}(x) = [\cos x]'' = -\cos x. \quad \bullet f^{(6)}(x) = -\cos x. \quad \bullet f^{(10)}(x) = -\cos x. \quad \bullet \dots$$

$$\Rightarrow \bullet [\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4i)} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \cos x & \text{pre } n = 2k, \\ \end{cases} \quad \text{pričom } k, i \in N, x \in R.$$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

$$\bullet f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x. \quad \bullet f^{(5)}(x) = \cos x. \quad \bullet f^{(9)}(x) = \cos x. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet f^{(3)}(x) = [\sin x]''' = -\cos x. \quad \bullet f^{(7)}(x) = -\cos x. \quad \bullet f^{(11)}(x) = -\cos x. \quad \bullet \dots$$

$$\Rightarrow \bullet [\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4i)} = \begin{cases} (-1)^{k+1} \cdot \cos x & \text{pre } n = 2k-1, \text{ pričom } k, i \in N, x \in R. \end{cases}$$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

$$\bullet f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x. \quad \bullet f^{(5)}(x) = -\sin x. \quad \bullet f^{(9)}(x) = -\sin x. \quad \bullet \dots$$

$$\bullet f^{(3)}(x) = [\cos x]''' = \sin x. \quad \bullet f^{(7)}(x) = \sin x. \quad \bullet f^{(11)}(x) = \sin x. \quad \bullet \dots$$

$$\Rightarrow \bullet [\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4i)} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \sin x & \text{pre } n = 2k-1, \text{ pričom } k, i \in N, x \in R. \end{cases}$$

Derivácie vyšších rádov – Príklady

Funkcia $f(x) = \sin x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \sin x = \sin x$. • $f^{(4)}(x) = \sin x$. • $f^{(8)}(x) = \sin x$. • ...
- $f^{(1)}(x) = [\sin x]' = \cos x$. • $f^{(5)}(x) = \cos x$. • $f^{(9)}(x) = \cos x$. • ...
- $f^{(2)}(x) = [\sin x]'' = -\sin x$. • $f^{(6)}(x) = -\sin x$. • $f^{(10)}(x) = -\sin x$. • ...
- $f^{(3)}(x) = [\sin x]''' = -\cos x$. • $f^{(7)}(x) = -\cos x$. • $f^{(11)}(x) = -\cos x$. • ...

$$\Rightarrow \bullet [\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4i)} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \sin x & \text{pre } n = 2k, \\ (-1)^{k+1} \cdot \cos x & \text{pre } n = 2k-1, \text{ pričom } k, i \in N, x \in R. \end{cases}$$

Funkcia $f(x) = \cos x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f^{(0)}(x) = \cos x = \cos x$. • $f^{(4)}(x) = \cos x$. • $f^{(8)}(x) = \cos x$. • ...
- $f^{(1)}(x) = [\cos x]' = -\sin x$. • $f^{(5)}(x) = -\sin x$. • $f^{(9)}(x) = -\sin x$. • ...
- $f^{(2)}(x) = [\cos x]'' = -\cos x$. • $f^{(6)}(x) = -\cos x$. • $f^{(10)}(x) = -\cos x$. • ...
- $f^{(3)}(x) = [\cos x]''' = \sin x$. • $f^{(7)}(x) = \sin x$. • $f^{(11)}(x) = \sin x$. • ...

$$\Rightarrow \bullet [\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4i)} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \cos x & \text{pre } n = 2k, \\ (-1)^k \cdot \sin x & \text{pre } n = 2k-1, \text{ pričom } k, i \in N, x \in R. \end{cases}$$

Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie u, v majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in \mathbb{N}$ (vrátane).

Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie u, v majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in \mathbb{N}$ (vrátane).

[Leibnizov vzorec.]

[Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]

Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie u, v majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in \mathbb{N}$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv'$

[Leibnizov vzorec.]

- $(u + v)^1 = u + v$

[Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]

Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie u, v majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in \mathbb{N}$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}.$

[Leibnizov vzorec.]

- $(u + v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1.$

[Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]

Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie u, v majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in \mathbb{N}$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$.
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$
 $= u''v + 2u'v' + uv''$

[Leibnizov vzorec.]

-
- $(u + v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$.
 - $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$

[Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]

Derivácie vyšších rádo – Leibnizov vzorec

Funkcie u, v majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in \mathbb{N}$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$
 $= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.

-
- $(u + v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
 - $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.

Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie u, v majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in \mathbb{N}$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$
 $= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.
- $[uv]''' = [u''v + 2u'v' + uv'']' = (u'''v + u''v') + 2(u''v' + u'v'') + (u'v'' + uv''')$
 $= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$

-
- $(u + v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
 - $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.
 - $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

Derivácie vyšších rádo – Leibnizov vzorec

Funkcie u, v majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in \mathbb{N}$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$
 $= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.
- $[uv]''' = [u''v + 2u'v' + uv'']' = (u'''v + u''v') + 2(u''v' + u'v'') + (u'v'' + uv''')$
 $= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = u^{(3)}v^{(0)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + u^{(0)}v^{(3)}$.

-
- $(u + v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
 - $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.
 - $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3v^0 + 3u^2v^1 + 3u^1v^2 + u^0v^3$.

Derivácie vyšších rádo – Leibnizov vzorec

Funkcie u, v majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in \mathbb{N}$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$
 $= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.
- $[uv]''' = [u''v + 2u'v' + uv'']' = (u'''v + u''v') + 2(u''v' + u'v'') + (u'v'' + uv''')$
 $= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = u^{(3)}v^{(0)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + u^{(0)}v^{(3)}$.
- ...
- $[uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$

-
- $(u + v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
 - $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.
 - $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3v^0 + 3u^2v^1 + 3u^1v^2 + u^0v^3$.
 - ...
 - $(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$

Derivácie vyšších rádo – Leibnizov vzorec

Funkcie u, v majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in \mathbb{N}$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$
 $= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.
- $[uv]''' = [u''v + 2u'v' + uv'']' = (u'''v + u''v') + 2(u''v' + u'v'') + (u'v'' + uv''')$
 $= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = u^{(3)}v^{(0)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + u^{(0)}v^{(3)}$.
- ...
- $[uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$
 $= u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + u^{(0)}v^{(n)}$.

- $(u + v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
- $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.
- $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3v^0 + 3u^2v^1 + 3u^1v^2 + u^0v^3$.
- ...
- $(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k} v^k = u^n v^0 + nu^{n-1}v^1 + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}v^2 + \dots + nu^1v^{n-1} + u^0v^n$.

Derivácie vyšších rádov – Leibnizov vzorec

Funkcie u, v majú na množine $A \neq \emptyset$ derivácie do rádu $n \in \mathbb{N}$ (vrátane).

- $[uv]' = u'v + uv' = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)}$. [Leibnizov vzorec.]
- $[uv]'' = [u'v + uv']' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'')$
 $= u''v + 2u'v' + uv'' = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)}$.
- $[uv]''' = [u''v + 2u'v' + uv'']' = (u'''v + u''v') + 2(u''v' + u'v'') + (u'v'' + uv''')$
 $= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = u^{(3)}v^{(0)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + u^{(0)}v^{(3)}$.
- ...
- $[uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$
 $= u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + u^{(0)}v^{(n)}$.

- $(u + v)^1 = u + v = u^1v^0 + u^0v^1$. [Binomická veta – analógia pre umocňovanie dvojčlena.]
- $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = u^2v^0 + 2u^1v^1 + u^0v^2$.
- $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3v^0 + 3u^2v^1 + 3u^1v^2 + u^0v^3$.
- ...
- $(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k} v^k = u^n v^0 + nu^{n-1}v^1 + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}v^2 + \dots + nu^1v^{n-1} + u^0v^n$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$, rád derivácie $n \in \mathbb{N}$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2e^x]' = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$, $x \in R$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2e^x]' = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x)e^x]' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $x \in R$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2e^x]' = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x)e^x]' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2)e^x]' = (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x + 2)e^x = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $x \in R$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2e^x]' = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x)e^x]' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2)e^x]' = (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x + 2)e^x = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = [(x^2 + 6x + 6)e^x]' = (2x + 6)e^x + (x^2 + 6x + 6)e^x = (x^2 + 8x + 12)e^x$, $x \in R$.

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2e^x]' = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x)e^x]' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2)e^x]' = (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x + 2)e^x = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = [(x^2 + 6x + 6)e^x]' = (2x + 6)e^x + (x^2 + 6x + 6)e^x = (x^2 + 8x + 12)e^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2e^x]' = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x)e^x]' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2)e^x]' = (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x + 2)e^x = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = [(x^2 + 6x + 6)e^x]' = (2x + 6)e^x + (x^2 + 6x + 6)e^x = (x^2 + 8x + 12)e^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

- Označme $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$.

[Leibnizov vzorec.]

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2e^x]' = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x)e^x]' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2)e^x]' = (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x + 2)e^x = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = [(x^2 + 6x + 6)e^x]' = (2x + 6)e^x + (x^2 + 6x + 6)e^x = (x^2 + 8x + 12)e^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi práčne.]

- Označme $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$.
 - $u^{(k)} = [e^x]^{(k)} = e^x$, $x \in R$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$

[Leibnizov vzorec.]

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2e^x]' = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x)e^x]' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2)e^x]' = (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x + 2)e^x = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = [(x^2 + 6x + 6)e^x]' = (2x + 6)e^x + (x^2 + 6x + 6)e^x = (x^2 + 8x + 12)e^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi práčne.]

- Označme $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$. [Leibnizov vzorec.]
 - $u^{(k)} = [e^x]^{(k)} = e^x$, $x \in R$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$
 - $v^{(0)} = x^2$, $v^{(1)}(x) = 2x$, $v^{(2)}(x) = 2$, $x \in R$ a $v^{(k)} = 0$, $x \in R$ pre $k = 3, 4, 5, \dots$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2e^x]' = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x)e^x]' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2)e^x]' = (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x + 2)e^x = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = [(x^2 + 6x + 6)e^x]' = (2x + 6)e^x + (x^2 + 6x + 6)e^x = (x^2 + 8x + 12)e^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

- Označme $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$. [Leibnizov vzorec.]
 - $u^{(k)} = [e^x]^{(k)} = e^x$, $x \in R$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$
 - $v^{(0)} = x^2$, $v^{(1)}(x) = 2x$, $v^{(2)}(x) = 2$, $x \in R$ a $v^{(k)} = 0$, $x \in R$ pre $k = 3, 4, 5, \dots$
- $[x^2e^x]^{(n)} = [e^x \cdot x^2]^{(n)} = [uv]^{(n)}$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2e^x]' = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x)e^x]' = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2)e^x]' = (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x + 2)e^x = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = [(x^2 + 6x + 6)e^x]' = (2x + 6)e^x + (x^2 + 6x + 6)e^x = (x^2 + 8x + 12)e^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

- Označme $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$.

[Leibnizov vzorec.]

- $u^{(k)} = [e^x]^{(k)} = e^x$, $x \in R$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$
- $v^{(0)} = x^2$, $v^{(1)}(x) = 2x$, $v^{(2)}(x) = 2$, $x \in R$ a $v^{(k)} = 0$, $x \in R$ pre $k = 3, 4, 5, \dots$
- $[x^2e^x]^{(n)} = [e^x \cdot x^2]^{(n)} = [uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [e^x]^{(n-k)} \cdot [x^2]^{(k)}$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2 e^x]' = 2x e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x) e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x) e^x]' = (2x + 2) e^x + (x^2 + 2x) e^x = (x^2 + 4x + 2) e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2) e^x]' = (2x + 4) e^x + (x^2 + 4x + 2) e^x = (x^2 + 6x + 6) e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = [(x^2 + 6x + 6) e^x]' = (2x + 6) e^x + (x^2 + 6x + 6) e^x = (x^2 + 8x + 12) e^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

- Označme $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$.

[Leibnizov vzorec.]

- $u^{(k)} = [e^x]^{(k)} = e^x$, $x \in R$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$
- $v^{(0)} = x^2$, $v^{(1)}(x) = 2x$, $v^{(2)}(x) = 2$, $x \in R$ a $v^{(k)} = 0$, $x \in R$ pre $k = 3, 4, 5, \dots$
- $[x^2 e^x]^{(n)} = [e^x \cdot x^2]^{(n)} = [uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [e^x]^{(n-k)} \cdot [x^2]^{(k)}$
 $= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} e^x \cdot [x^2]^{(k)}$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2 e^x]' = 2x e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x) e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x) e^x]' = (2x + 2) e^x + (x^2 + 2x) e^x = (x^2 + 4x + 2) e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2) e^x]' = (2x + 4) e^x + (x^2 + 4x + 2) e^x = (x^2 + 6x + 6) e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = [(x^2 + 6x + 6) e^x]' = (2x + 6) e^x + (x^2 + 6x + 6) e^x = (x^2 + 8x + 12) e^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

- Označme $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$.

[Leibnizov vzorec.]

- $u^{(k)} = [e^x]^{(k)} = e^x$, $x \in R$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$
- $v^{(0)} = x^2$, $v^{(1)}(x) = 2x$, $v^{(2)}(x) = 2$, $x \in R$ a $v^{(k)} = 0$, $x \in R$ pre $k = 3, 4, 5, \dots$
- $[x^2 e^x]^{(n)} = [e^x \cdot x^2]^{(n)} = [uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [e^x]^{(n-k)} \cdot [x^2]^{(k)}$
 $= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} e^x \cdot [x^2]^{(k)} = \binom{n}{0} e^x \cdot x^2 + \binom{n}{1} e^x \cdot 2x + \binom{n}{2} e^x \cdot 2$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2 e^x]' = 2x e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x) e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x) e^x]' = (2x + 2) e^x + (x^2 + 2x) e^x = (x^2 + 4x + 2) e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2) e^x]' = (2x + 4) e^x + (x^2 + 4x + 2) e^x = (x^2 + 6x + 6) e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = [(x^2 + 6x + 6) e^x]' = (2x + 6) e^x + (x^2 + 6x + 6) e^x = (x^2 + 8x + 12) e^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

- Označme $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$.

[Leibnizov vzorec.]

- $u^{(k)} = [e^x]^{(k)} = e^x$, $x \in R$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$
- $v^{(0)} = x^2$, $v^{(1)}(x) = 2x$, $v^{(2)}(x) = 2$, $x \in R$ a $v^{(k)} = 0$, $x \in R$ pre $k = 3, 4, 5, \dots$

- $[x^2 e^x]^{(n)} = [e^x \cdot x^2]^{(n)} = [uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [e^x]^{(n-k)} \cdot [x^2]^{(k)}$
 $= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} e^x \cdot [x^2]^{(k)} = \binom{n}{0} e^x \cdot x^2 + \binom{n}{1} e^x \cdot 2x + \binom{n}{2} e^x \cdot 2$
 $= 1 \cdot x^2 e^x + n \cdot 2x e^x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 e^x$

Derivácie vyšších rádov – Príklad

Funkcia $f(x) = x^2 e^x$, $x \in R$, rád derivácie $n \in N$.

- $f'(x) = [x^2 e^x]' = 2x e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x) e^x$, $x \in R$.
- $f''(x) = [(x^2 + 2x) e^x]' = (2x + 2) e^x + (x^2 + 2x) e^x = (x^2 + 4x + 2) e^x$, $x \in R$.
- $f'''(x) = [(x^2 + 4x + 2) e^x]' = (2x + 4) e^x + (x^2 + 4x + 2) e^x = (x^2 + 6x + 6) e^x$, $x \in R$.
- $f''''(x) = [(x^2 + 6x + 6) e^x]' = (2x + 6) e^x + (x^2 + 6x + 6) e^x = (x^2 + 8x + 12) e^x$, $x \in R$.

[Pre ďalšie derivácie veľmi prácne.]

- Označme $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$, $x \in R$. [Leibnizov vzorec.]
 - $u^{(k)} = [e^x]^{(k)} = e^x$, $x \in R$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$
 - $v^{(0)} = x^2$, $v^{(1)}(x) = 2x$, $v^{(2)}(x) = 2$, $x \in R$ a $v^{(k)} = 0$, $x \in R$ pre $k = 3, 4, 5, \dots$

$$\begin{aligned}
 \bullet [x^2 e^x]^{(n)} &= [e^x \cdot x^2]^{(n)} = [uv]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [e^x]^{(n-k)} \cdot [x^2]^{(k)} \\
 &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} e^x \cdot [x^2]^{(k)} = \binom{n}{0} e^x \cdot x^2 + \binom{n}{1} e^x \cdot 2x + \binom{n}{2} e^x \cdot 2 \\
 &= 1 \cdot x^2 e^x + n \cdot 2x e^x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2e^x = [x^2 + 2nx + n(n-1)] e^x, \quad x \in R \text{ pre } n \in N.
 \end{aligned}$$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)}$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$

[Parametrický tvar.]

$$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, t \in J.$$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$

[Parametrický tvar.]

$y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$

[Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$]

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)}$, $t \in J.$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}]'}{\varphi'(t)}$, $t \in J.$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t)$,
 $y = \psi(t)$, $t \in J$.

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

\Rightarrow • f' : $x = \varphi(t)$, [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t)$, $t \in J$. [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

\Rightarrow • f'' : $x = \varphi(t)$, [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}]'}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}$, $t \in J$.

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, t \in J.$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}]'}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, t \in J.$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}}, y = t^2, t \in (0; \infty).$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, t \in J.$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}}, y = t^2, t \in (0; \infty).$

• $f': x = \sqrt{t^3},$, $t \in (0; \infty).$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, t \in J.$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}}, y = t^2, t \in (0; \infty).$

• $f': x = \sqrt{t^3}, y = \frac{(t^2)'}{(t^{\frac{3}{2}})'}, t \in (0; \infty).$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, t \in J.$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}}, y = t^2, t \in (0; \infty).$

• $f': x = \sqrt{t^3}, y = \frac{(t^2)'}{(t^{\frac{3}{2}})'} = \frac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}}, t \in (0; \infty).$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, t \in J.$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}}, y = t^2, t \in (0; \infty).$

• $f': x = \sqrt{t^3}, y = \frac{(t^2)'}{(t^{\frac{3}{2}})'} = \frac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}}, t \in (0; \infty).$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, t \in J.$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}}, y = t^2, t \in (0; \infty).$

• $f': x = \sqrt{t^3}, y = \frac{(t^2)'}{(t^{\frac{3}{2}})'} = \frac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{t}, t \in (0; \infty).$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, t \in J.$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}}, y = t^2, t \in (0; \infty).$

• $f': x = \sqrt{t^3}, y = \frac{(t^2)'}{(t^{\frac{3}{2}})'} = \frac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{t}, t \in (0; \infty).$

• $f'': x = \sqrt{t^3},$, $t \in (0; \infty).$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t)$,
 $y = \psi(t)$, $t \in J$.

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t)$, [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t)$, $t \in J$. [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t)$, [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$, $t \in J$.

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}}$, $y = t^2$, $t \in (0; \infty)$.

• $f': x = \sqrt{t^3}$, $y = \frac{(t^2)'}{(t^{\frac{3}{2}})'} = \frac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{t}$, $t \in (0; \infty)$.

• $f'': x = \sqrt{t^3}$, $y = \frac{(\frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}})'}{(t^{\frac{3}{2}})'}$, $t \in (0; \infty)$.

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t),$
 $y = \psi(t), t \in J.$

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J.$

\Rightarrow • $f': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t), t \in J.$ [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$]

\Rightarrow • $f'': x = \varphi(t),$ [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, t \in J.$

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}}, y = t^2, t \in (0; \infty).$

• $f': x = \sqrt{t^3}, y = \frac{(t^2)'}{(t^{\frac{3}{2}})'} = \frac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{t}, t \in (0; \infty).$

• $f'': x = \sqrt{t^3}, y = \frac{\left(\frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}}, t \in (0; \infty).$

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t)$,
 $y = \psi(t)$, $t \in J$.

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

⇒ • f' : $x = \varphi(t)$, [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t)$, $t \in J$. [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

⇒ • f'' : $x = \varphi(t)$, [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$, $t \in J$.

Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}}$, $y = t^2$, $t \in (0; \infty)$.

• f' : $x = \sqrt{t^3}$, $y = \frac{(t^2)'}{(t^{\frac{3}{2}})'} = \frac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{t}$, $t \in (0; \infty)$.

• f'' : $x = \sqrt{t^3}$, $y = \frac{\left(\frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)' } = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{9}t^{-1}$, $t \in (0; \infty)$.

Na záver – Derivácia funkcie zadanej parametricky

Diferencovateľná funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \varphi(t)$,
 $y = \psi(t)$, $t \in J$.

Pre deriváciu platí: • $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ pre $t \in J$.

⇒ • f' : $x = \varphi(t)$, [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \chi(t)$, $t \in J$. [Označenie $\chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.]

⇒ • f'' : $x = \varphi(t)$, [Parametrický tvar.]
 $y = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$, $t \in J$.

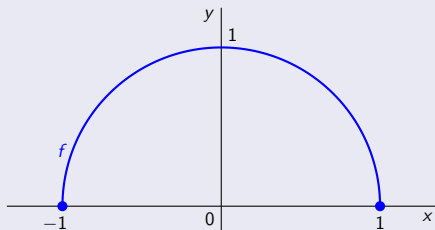
Funkcia $y = f(x)$ je zadaná parametricky vzťahmi $f: x = \sqrt{t^3} = t^{\frac{3}{2}}$, $y = t^2$, $t \in (0; \infty)$.

• f' : $x = \sqrt{t^3}$, $y = \frac{(t^2)'}{(t^{\frac{3}{2}})'} = \frac{2t}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{t}$, $t \in (0; \infty)$.

• f'' : $x = \sqrt{t^3}$, $y = \frac{\left(\frac{4}{3}t^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)'} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{9}t^{-1} = \frac{4}{9t}$, $t \in (0; \infty)$.

Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.



Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

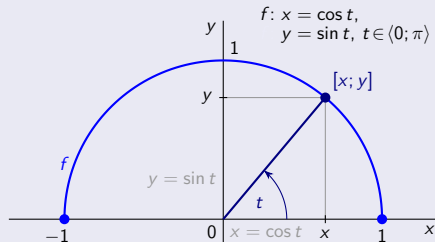
- $f: y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

[Explicitný tvar.]

$f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$

- $f: x = \cos t$,
 $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]



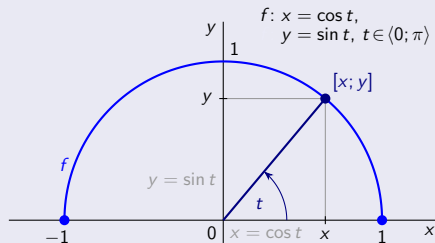
Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $f': y = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$

[Explicitný tvar.]

$f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$



- $f: x = \cos t$,
 $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.
- $f': x = \cos t$,
 $y = \frac{[\sin t]'}{[\cos t]'}$

[Parametrický tvar.]

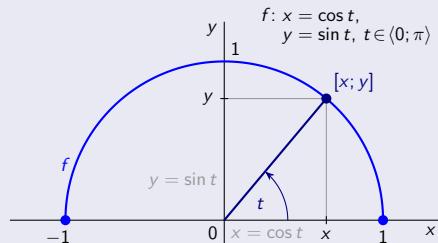
Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $f': y = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

[Explicitný tvar.]

$f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$



- $f: x = \cos t$,
 $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]

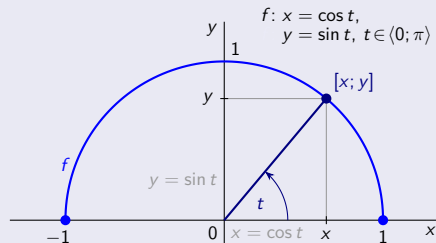
- $f': x = \cos t$,
 $y = \frac{[\sin t]'}{[\cos t]'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$

Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f': y = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.

$f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$



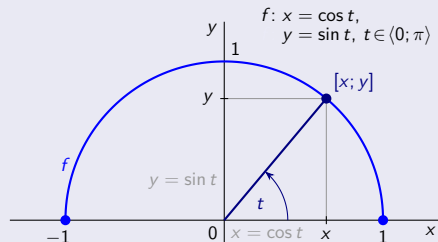
- $f: x = \cos t$, [Parametrický tvar.]
 $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.
- $f': x = \cos t$,
 $y = \frac{[\sin t]'}{[\cos t]' } = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cotg t$,
 $t \in (0; \pi)$.

Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f': y = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $f'': y = -(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x(-\frac{1}{2})(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$

$f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$



- $f: x = \cos t$, [Parametrický tvar.]
 $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.
- $f': x = \cos t$,
 $y = \frac{[\sin t]'}{[\cos t]'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot g t$,
 $t \in \langle 0; \pi \rangle$.
- $f'': x = \cos t$,
 $y = \frac{[-\cot g t]'}{[\cos t]'}$

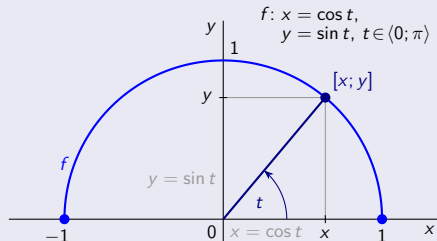
Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f': y = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $f'': y = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = -\frac{(1-x^2)+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$f: y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$



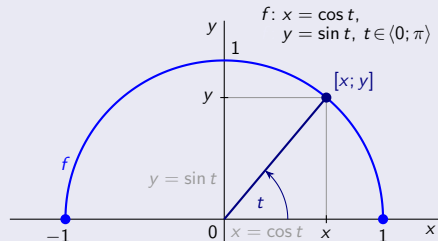
- $f: x = \cos t$, [Parametrický tvar.]
 $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.
- $f': x = \cos t$,
 $y = \frac{[\sin t]'}{[\cos t]'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cotg t$,
 $t \in \langle 0; \pi \rangle$.
- $f'': x = \cos t$,
 $y = \frac{[-\cotg t]'}{[\cos t]'} = \frac{-(-\frac{1}{\sin^2 t})}{-\sin t}$

Na záver – Príklad

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$. [Explicitný tvar.]
- $f': y = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $f'': y = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x(-\frac{1}{2})(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$
 $= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = -\frac{(1-x^2)+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

$f: y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$



- $f: x = \cos t$, [Parametrický tvar.]
 $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.
- $f': x = \cos t$,
 $y = \frac{[\sin t]'}{[\cos t]'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cotg t$,
 $t \in \langle 0; \pi \rangle$.
- $f'': x = \cos t$,
 $y = \frac{[-\cotg t]'}{[\cos t]'} = \frac{-(-\frac{1}{\sin^2 t})}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}$,
 $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

[Explicitný tvar.]

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]

Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

[Explicitný tvar.]

- $f': y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]

- $f': x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.

Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

- $f': y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.

[Explicitný tvar.]

- $f'': y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

- $f': x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.

[Parametrický tvar.]

- $f'': x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.

Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

- $f': y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

[Explicitný tvar.]

- $f'': y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$.

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

- $f': x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]

- $f'': x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$,

Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

[Explicitný tvar.]

- $f': y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.

- $f'': y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$.

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]

- $f': x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.

- $f'': x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$, t. j. $\cos t = 0$, $t = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

[Explicitný tvar.]

- $f': y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

- $f'': y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$. \Rightarrow • $f(0) = 1$.

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]

- $f': x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

- $f'': x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$, t. j. $\cos t = 0$, $t = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

- \Rightarrow • $f(0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

[Explicitný tvar.]

- $f': y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.

- $f'': y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$. \Rightarrow • $f(0) = 1$. • $f'(0) = 0$.

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]

- $f': x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.

- $f'': x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$, t. j. $\cos t = 0$, $t = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

- \Rightarrow • $f(0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. • $f'(0) = -\cotg \frac{\pi}{2} = 0$.

Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

[Explicitný tvar.]

- $f': y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.

- $f'': y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$. \Rightarrow • $f(0) = 1$. • $f'(0) = 0$. • $f''(0) = -1$.

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]

- $f': x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.

- $f'': x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$, t. j. $\cos t = 0$, $t = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

- \Rightarrow • $f(0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. • $f'(0) = -\cotg \frac{\pi}{2} = 0$. • $f''(0) = -\frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{2}} = -1$.

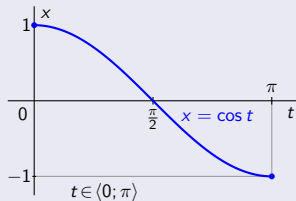
Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

[Explicitný tvar.]

- $f: x = \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]



- $\cos t = x, t \in \langle 0; \pi \rangle$,

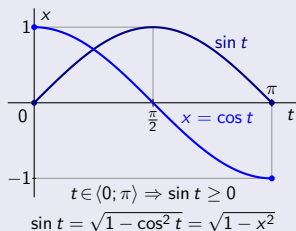
Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

[Explicitný tvar.]

- $f: x = \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]



- $\cos t = x, t \in \langle 0; \pi \rangle,$

$$\Rightarrow \bullet \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Na záver – Príklad (pokračovanie)

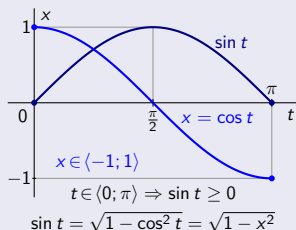
Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

[Explicitný tvar.]

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]



- $\cos t = x$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$,

$$\Rightarrow \bullet \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}.$$

- $f: y = \sin t = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

Na záver – Príklad (pokračovanie)

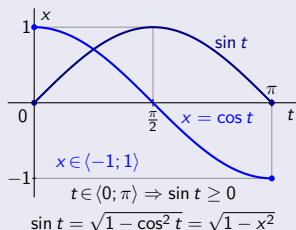
Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $f': y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

[Explicitný tvar.]

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.
- $f': x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

[Parametrický tvar.]



- $\cos t = x$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$, $\sin 0 = \sin \pi = 0$.
 \Rightarrow • $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$.
- $f: y = \sin t = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.
- $f': y = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

- $f': y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.

[Explicitný tvar.]

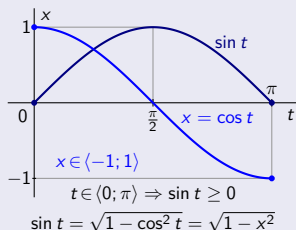
- $f'': y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

- $f': x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.

[Parametrický tvar.]

- $f'': x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.



- $\cos t = x$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$, $\sin 0 = \sin \pi = 0$.

$$\Rightarrow \bullet \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}.$$

- $f: y = \sin t = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

- $f': y = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.

- $f'': y = -\frac{1}{\sin^3 t} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

Na záver – Príklad (pokračovanie)

Nezáporná polkružnica $y = f(x)$, $y \geq 0$ so stredom v bode $[0; 0]$ a polomerom $r = 1$.

- $f: y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

[Explicitný tvar.]

- $f': y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.

- $f'': y = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$. \Rightarrow • $f(0) = 1$. • $f'(0) = 0$. • $f''(0) = -1$.

- $f: x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$.

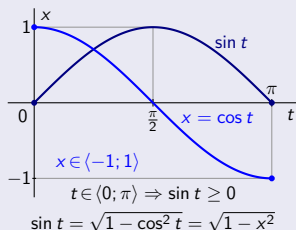
[Parametrický tvar.]

- $f': x = \cos t$, $y = -\frac{\cos t}{\sin t}$, $t \in (0; \pi)$.

- $f'': x = \cos t$, $y = -\frac{1}{\sin^3 t}$, $t \in (0; \pi)$.

- Funkčné hodnoty v bode $x = 0$, t. j. $\cos t = 0$, $t = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow \bullet f(0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1. \bullet f'(0) = -\cotg \frac{\pi}{2} = 0. \bullet f''(0) = -\frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{2}} = -1.$$



- $\cos t = x$, $t \in \langle 0; \pi \rangle$, $\sin 0 = \sin \pi = 0$.

$$\Rightarrow \bullet \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}.$$

- $f: y = \sin t = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

- $f': y = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$.

- $f'': y = -\frac{1}{\sin^3 t} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1; 1)$.

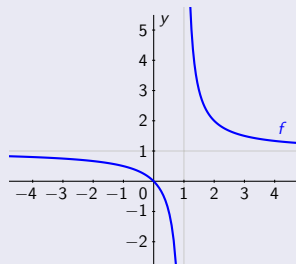
Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

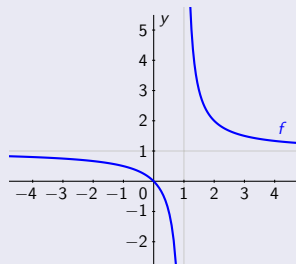
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}.$



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

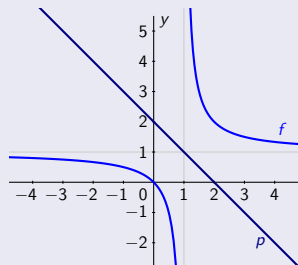


Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

- Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

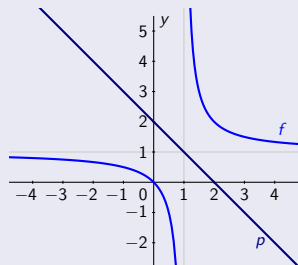


Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

- Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .
- Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

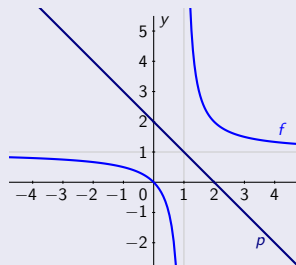
Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

- Priamky p, d sú rovnobežné,



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

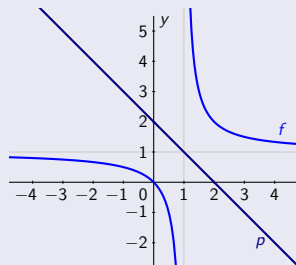
Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

- Priamky p, d sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

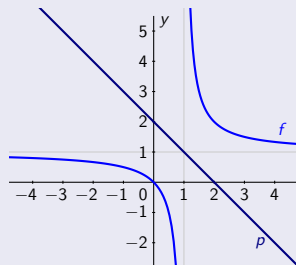
Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

- Priamky p, d sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.
- Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

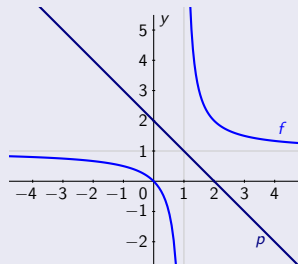
• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

• Priamky p, d sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

• Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

• $x_0 - 1 = -1$.

• $x_0 - 1 = +1$.



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

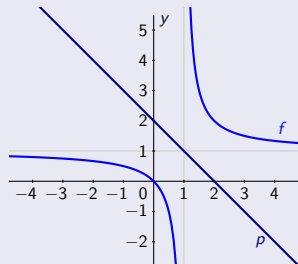
• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

• Priamky p, d sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

• Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

• $x_0 - 1 = -1. \Rightarrow$ • $x_0 = 0$.

• $x_0 - 1 = +1$.



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

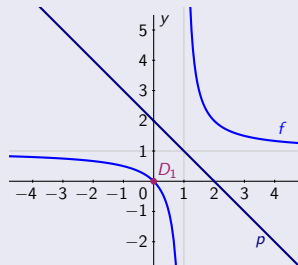
• Priamky p, d sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

• Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

• $x_0 - 1 = -1. \Rightarrow$ • $x_0 = 0$.

• Dotykový bod $D_1 = [0; f(0)] = [0; 0]$.

• $x_0 - 1 = +1$.



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

• Priamky p, d sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

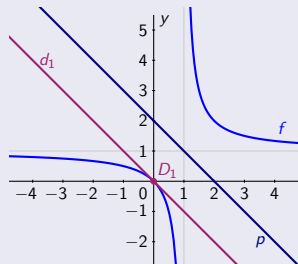
• Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

• $x_0 - 1 = -1. \Rightarrow$ • $x_0 = 0$.

• Dotykový bod $D_1 = [0; f(0)] = [0; 0]$.

• Dotyčnica $d_1: y = 0 + (-1) \cdot (x - 0) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.

• $x_0 - 1 = +1$.



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

• Priamky p, d sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

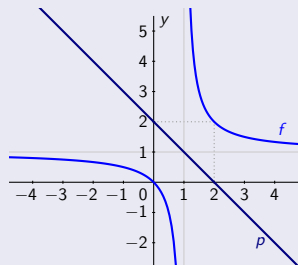
• Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

• $x_0 - 1 = -1. \Rightarrow$ • $x_0 = 0$.

• Dotykový bod $D_1 = [0; f(0)] = [0; 0]$.

• Dotyčnica $d_1: y = 0 + (-1) \cdot (x - 0) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.

• $x_0 - 1 = +1. \Rightarrow$ • $x_0 = 2$.



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

• Priamky p, d sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

• Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

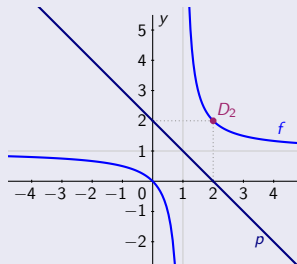
• $x_0 - 1 = -1. \Rightarrow$ • $x_0 = 0$.

• Dotykový bod $D_1 = [0; f(0)] = [0; 0]$.

• Dotyčnica $d_1: y = 0 + (-1) \cdot (x - 0) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.

• $x_0 - 1 = +1. \Rightarrow$ • $x_0 = 2$.

• Dotykový bod $D_2 = [2; f(2)] = [2; 2]$.



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

• Priamky p, d sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

• Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

• $x_0 - 1 = -1. \Rightarrow$ • $x_0 = 0$.

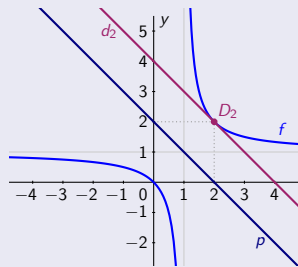
• Dotykový bod $D_1 = [0; f(0)] = [0; 0]$.

• Dotyčnica $d_1: y = 0 + (-1) \cdot (x - 0) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.

• $x_0 - 1 = +1. \Rightarrow$ • $x_0 = 2$.

• Dotykový bod $D_2 = [2; f(2)] = [2; 2]$.

• Dotyčnica $d_2: y = 2 + (-1) \cdot (x - 2) = 4 - x$, $x \in \mathbb{R}$.



Na záver – Dotyčnica rovnobežná s danou priamkou

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu -1 .

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ a smernicu $f'(x_0)$.

• Priamky p, d sú rovnobežné, t. j. majú rovnaké smernice a platí $-1 = f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

• Rovnica $\frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1$, t. j. $(x_0 - 1)^2 = 1$ má dve riešenia:

• $x_0 - 1 = -1. \Rightarrow$ • $x_0 = 0$.

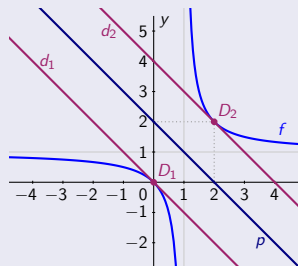
• Dotykový bod $D_1 = [0; f(0)] = [0; 0]$.

• Dotyčnica $d_1: y = 0 + (-1) \cdot (x - 0) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.

• $x_0 - 1 = +1. \Rightarrow$ • $x_0 = 2$.

• Dotykový bod $D_2 = [2; f(2)] = [2; 2]$.

• Dotyčnica $d_2: y = 2 + (-1) \cdot (x - 2) = 4 - x$, $x \in \mathbb{R}$.



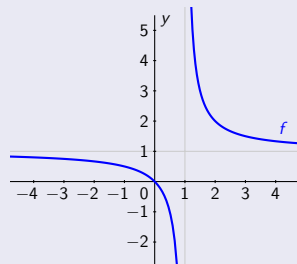
Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

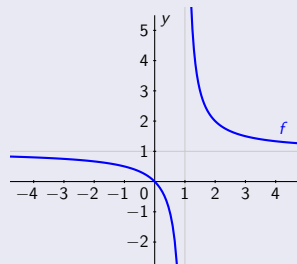
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}.$



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

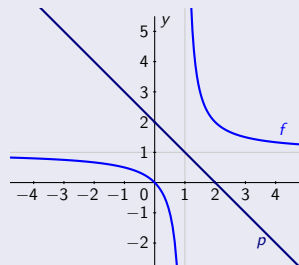
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

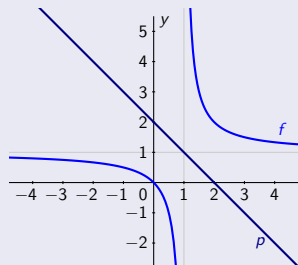
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
 - $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
-
- Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
 - $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
-
- Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.
 - Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

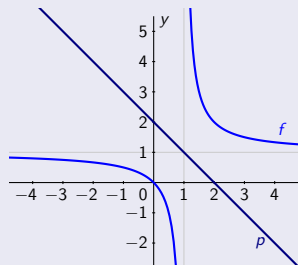


Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

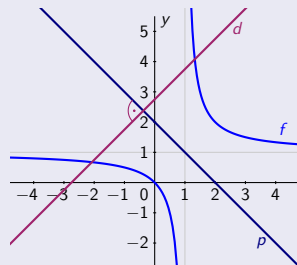
- Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.
- Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

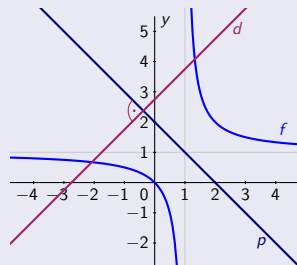
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
 - $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
-
- Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.
 - Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.
-
- Priamky p , d sú na seba kolmé,



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

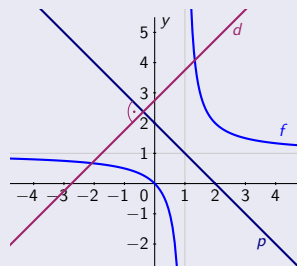
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.
- Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.
- Priamky p, d sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p, v_d) = ((1; s_p), (1; s_d)) = 0$.



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
 - $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
-
- Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.
 - Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.
-
- Priamky p, d sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p, v_d) = ((1; s_p), (1; s_d)) = 0$.
 - Potom platí: $0 = ((1; s_p), (1; s_d)) = ((1; -1), (1; f'(x_0)))$



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

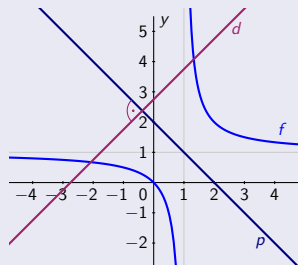
- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

• Priamky p, d sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p, v_d) = ((1; s_p), (1; s_d)) = 0$.

• Potom platí: $0 = ((1; s_p), (1; s_d)) = ((1; -1), (1; f'(x_0)))$
 $= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot f'(x_0) = 1 - f'(x_0) = 1 - \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

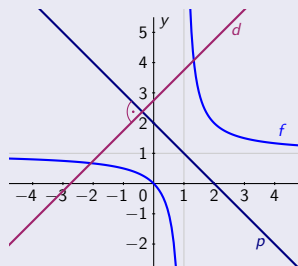
• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

• Priamky p, d sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p, v_d) = ((1; s_p), (1; s_d)) = 0$.

• Potom platí: $0 = ((1; s_p), (1; s_d)) = ((1; -1), (1; f'(x_0)))$
 $= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot f'(x_0) = 1 - f'(x_0) = 1 - \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

Pre všetky $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 1$ platí $(x_0 - 1)^2 > 0$.



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.

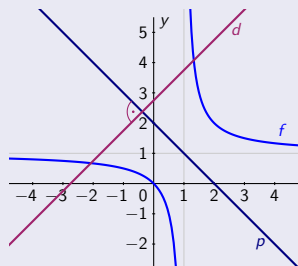
• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

• Priamky p, d sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p, v_d) = ((1; s_p), (1; s_d)) = 0$.

• Potom platí: $0 = ((1; s_p), (1; s_d)) = ((1; -1), (1; f'(x_0)))$
 $= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot f'(x_0) = 1 - f'(x_0) = 1 - \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

Pre všetky $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 1$ platí $(x_0 - 1)^2 > 0$.

\Rightarrow • $1 - f'(x_0) = 1 + \frac{1}{(x_0-1)^2} > 1 + 0 = 1$.



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

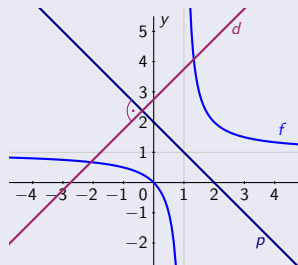
• Priamky p, d sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p, v_d) = ((1; s_p), (1; s_d)) = 0$.

• Potom platí: $0 = ((1; s_p), (1; s_d)) = ((1; -1), (1; f'(x_0)))$
 $= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot f'(x_0) = 1 - f'(x_0) = 1 - \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

Pre všetky $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 1$ platí $(x_0 - 1)^2 > 0$.

\Rightarrow • $1 - f'(x_0) = 1 + \frac{1}{(x_0-1)^2} > 1 + 0 = 1$.

\Rightarrow • Rovnica $0 = 1 - f'(x_0)$ nemá reálne riešenie



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

• Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.

• Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

• Priamky p, d sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p, v_d) = ((1; s_p), (1; s_d)) = 0$.

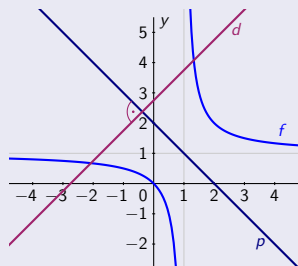
• Potom platí: $0 = ((1; s_p), (1; s_d)) = ((1; -1), (1; f'(x_0)))$
 $= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot f'(x_0) = 1 - f'(x_0) = 1 - \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

Pre všetky $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 1$ platí $(x_0 - 1)^2 > 0$.

\Rightarrow • $1 - f'(x_0) = 1 + \frac{1}{(x_0-1)^2} > 1 + 0 = 1$.

\Rightarrow • Rovnica $0 = 1 - f'(x_0)$ nemá reálne riešenie

a dotyčnica d s danými vlastnosťami **neexistuje**.



Na záver – Dotyčnica kolmá na danú priamku

Určte rovnicu dotyčnice d ku grafu funkcie $f: y = \frac{x}{x-1}$, ktorá je kolmá na priamku $p: y = 2 - x$.

- $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $f'(x) = \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]' = 0 + \frac{0-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

- Priamka $p: y = 2 - x$ má smernicu $s_p = -1$ a smerový vektor $v_p = (1; s_p) = (1; -1)$.
- Dotyčnica k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má tvar $d: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
smernicu $s_d = f'(x_0)$ a smerový vektor $v_d = (1; s_d) = (1; f'(x_0)) = \left(1; \frac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

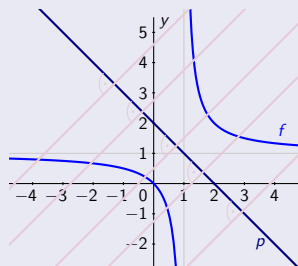
- Priamky p, d sú na seba kolmé, t. j. skalárny súčin ich smerových vektorov $(v_p, v_d) = ((1; s_p), (1; s_d)) = 0$.
- Potom platí: $0 = ((1; s_p), (1; s_d)) = ((1; -1), (1; f'(x_0)))$
 $= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot f'(x_0) = 1 - f'(x_0) = 1 - \frac{-1}{(x_0-1)^2}$.

Pre všetky $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 1$ platí $(x_0 - 1)^2 > 0$.

$$\Rightarrow \bullet 1 - f'(x_0) = 1 + \frac{1}{(x_0-1)^2} > 1 + 0 = 1.$$

$\Rightarrow \bullet$ Rovnica $0 = 1 - f'(x_0)$ nemá reálne riešenie

a dotyčnica d s danými vlastnosťami **neexistuje**.



Koniec 8. časti

Ďakujem za pozornosť.