

Matemická analýza 2023/2024

Písomka číslo 02 – Funkcie, limita a spojitosť funkcií

V teste (a následne na skúške) sa môžu vyskytnúť taktiež príklady prepočítané na prednáške a na cvičeniach, prípadné domáce úlohy a príklady uverejnené v prezentáciách z prednášok. Príklady sú vzorové, to znamená, že v teste môžu byť v pozmenenom tvare.

C. Reálne funkcie. Vlastnosti (monotónnosť, extrém, konvexnosť...) Elementárne funkcie a ich základné vlastnosti.

- Nájdite zložené funkcie $f_2 = f(f)$, $f_3 = f(f(f))$, ..., $f_n = f(f(f(\dots(f))))$, $n \in \mathbb{N}$, ak funkcia $f_1 = f$ je definovaná predpisom $f(x) = 3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.
- Uvažujme funkcie f, g definované vo wxmaxima predpismi $f(x) := 3*x+1$; $g(x,n) := \text{if } n>1 \text{ then } f(g(x,n-1)) \text{ else } f(x)$; Funkcia g je definovaná rekurzívne pomocou volania samej seba. Napíšte explicitný predpis pre g , t. j. $g(x,n) := ???$;
- Uvažujme funkcie definované vo wxmaxima predpismi $f(x) := (3*x+2)/(x+4)$; $g(x) := f(f(x))$; Explicitne definujte funkciu $h(x) := ???$; tak, aby príkaz `plot2d(g(x)-h(x), [x,0,5])`; vykreslil konštantnú funkciu $y = 0$.
- Funkcia $f_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$ je v pozadí niektorých dynamických modelov rastu populácie (Např. Verhulstov model rastu populácie $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{k})$, kde N je populácia, r je maximálny koeficient rastu populácie, k je kapacita prostredia.). Pre aké $\alpha \in \mathbb{R}$ zobrazí funkcia f_α interval $\langle 0; 1 \rangle$ do intervalu $\langle 0; 1 \rangle$? Pre aké $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje tzv. pevný bod, t. j. bod x , pre ktorý platí $x = f_\alpha(x)$. Pre pevné body $x = x_0$ uvažujme nasledujúce iterácie $x_{n+1} = f_\alpha(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ako sa správajú tieto body? Overte na počítači (např. vo wxmaxima).
- Nájdite zložené funkcie $f_2 = f(f)$, $f_3 = f(f(f))$ a inverznú funkciu f^{-1} , ak funkcia f je definovaná predpisom $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$.
- Nájdite zložené funkcie $f_2 = f(f)$, $f_3 = f(f(f))$ a inverznú funkciu f^{-1} , ak funkcia f je definovaná predpisom $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- Zostrojte periodickú funkciu $y = f(x)$ s primitívnou periódou 8 a načrtnite jej graf tak, aby bola párna, rastúca na intervale $\langle 9; 10 \rangle$, klesajúca na intervale $\langle 13; 14 \rangle$ a aby $f(4) = 3$. (Periódou zvýraznite!)
- Zostrojte periodickú funkciu $y = f(x)$ s primitívnou periódou 16 a načrtnite jej graf tak, aby bola nepárna, rastúca na intervale $\langle 17; 18 \rangle$, klesajúca na intervale $\langle 21; 22 \rangle$ a aby $f(4) = 3$. (Periódou zvýraznite!)
- Rozhodnite, či sú nasledujúce relácie funkciami:
 $f = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; x + |y - 1| = 0\}$, $f = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; |x - 1| + y = 0\}$,
 $f = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| = 2, y \geq 0\}$, $f = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; |x - 1| + |y| = 0\}$.
- Zostrojte graf funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:
 $y = \sin(x + 1)$, $y = |x| - |x - 1|$, $y = \arcsin 3x$, $y = \sin 3x$, $y = 3 \sin x$,
 $y = \max\{x, x^2\}$, $y = e^{\lfloor x \rfloor}$, $y = \lfloor e^x \rfloor$, $y = x^2 \sin x$, $y = x^3 \sin x$.
- Zostrojte graf parametricky zadanej funkcie $y = f(x)$ a určte jej explicitný tvar:
 $x = 1 - t, y = t, t \in (-\infty; \infty)$, $x = t, y = t^2, t \in (-\infty; \infty)$,
 $x = t - t^2, y = t^2 - t^3, t \in (-\infty; \infty)$, $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t, t \in \langle 0; 2\pi \rangle$.
- Rozhodnite, či je funkcia $y = f(x)$ párna alebo nepárna:
 $y = x^2 + \sin x^2$, $y = \cos(\pi - x)$, $y = x \cosh x$, $y = \sin x + \cos x$, $y = x \ln |x|$,
 $y = x - x^3$, $y = x - x^2$, $y = |x|x^{-1}$, $y = x + \sin x$, $y = |x| + \cos x$.
- Nech $y = f(x)$ je ľubovoľná funkcia definovaná na intervale $(-k; k)$, $k > 0$. Dokážte, že funkcia $f(x) + f(-x)$ je párna a funkcia $f(x) - f(-x)$ je nepárna na $(-k; k)$.
- Je funkcia $y = f(x)$ periodická? Ak áno, určte jej primitívnu periódu:
 $y = |\sin x|$, $y = \sin x^2$, $y = \sin^2 x$, $y = (-1)^{\lfloor x-1 \rfloor}$, $y = x \arccos x$,
 $y = \arcsin \sin x$, $y = \sin \arcsin x$, $y = \sin x + \cos x$, $y = \sin x + \operatorname{tg} x$, $y = \cos x - 3 \sin 4x$.
- Nech $f: y = x$, $g: y = 1 - x^2$, $h: y = \sin x$. Určte funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(h)$, $h(f)$, $g(h)$, $h(g)$, $f[g(h)]$, $f[h(g)]$, $g[f(h)]$, $g[h(f)]$, $h[f(g)]$, $h[g(f)]$.
- Nájdite funkcie $f \pm g$, f/g , f/g , $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$, ak:
 $f(x) = 2x, g(x) = 4 - x$, $f(x) = \ln x, g(x) = \sqrt{1 - |x|}$, $f(x) = (x + 1)^2, g(x) = \sqrt{x}$.
- Nájdite funkcie $|f|$, $|g|$, $f + g$, g^2 , f/g , f/g , $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$ a ich definičné obory, ak $f(x) = x$ pre $x < 0$, $f(x) = x^2$ pre $x \geq 0$ a $g(x) = x^2$ pre $x < 0$, $g(x) = x + 1$ pre $x \geq 0$.
- Nájdite inverznú funkciu k funkcii $y = f(x)$ zadanej predpisom (načrtnite grafy funkcií):
 $y = \frac{x}{x+3}, x \in \mathbb{R} - \{-3\}$, $y = x^2 - 8x + 16, x \in \langle 4; 5 \rangle$, $y = \sin(3x - 1), |3x - 1| < \pi/2$,
 $y = 3 \sin x - 1, x \in \langle -1; 1 \rangle$, $y = \ln \sqrt{x - 1}, x \in \langle 1; \infty \rangle$, $y = \ln(\sqrt{x} - 1), x \in \langle 1; \infty \rangle$.
- Uvažujme funkciu definovanú vo wxmaxima predpisom $f(x) := (4*x+1)/(x+3)$; Explicitne definujte funkciu $g(x) := ???$; tak, aby príkaz `plot2d(g(f(x))-x, [x,0,5])`; vykreslil konštantnú funkciu $y = 0$.
- Uvažujme funkciu definovanú vo wxmaxima predpisom $f(x) := (3*x+1)/(x+4)$; Explicitne definujte funkciu $g(x) := ???$; tak, aby príkaz `plot2d(g(f(x)), [x,0,5])`; vykreslil konštantnú funkciu $y = 0$.

D. Limita funkcie. Základné vlastnosti. Pravidlá pre počítanie s limitami.

(Naspamäť!) **Dôležité limity.** (Naspamäť!)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ pre $a \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{a}{x})^x = e^a$ pre $a \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ pre $a > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^n} = \begin{cases} \infty, & \text{pre } a > 1, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{pre } a \leq 1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

21. Vypočítajte bez použitia L'Hospitalovho pravidla nasledujúce limity:

- | | | |
|--|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{2x}}$ | $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \operatorname{tg} 3x)^{\frac{1}{2x}}$ | $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin \frac{3}{x})^{\frac{x}{2}}$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \operatorname{tg} \frac{3}{x})^{\frac{1}{\sin \frac{2}{x}}}$ | $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{7x}}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 9x}}$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \operatorname{arctg} \frac{4}{x})^{\frac{1}{\frac{1}{2x}}}$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{400} (3x+1)^{400}}{(5x+1)^{1100}}$ |
| $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln x - \ln(x+2)]$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 3x}{\ln 2x}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{2}{x}}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - x}{x^2 - x}$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x}{x^2 - x}$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^x x^3}$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x x^3}$ | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\frac{1}{2})^x (\frac{1}{x})^3}$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2^x}$ | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^x (\frac{1}{x})^3}$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x (\frac{1}{x})^3}$ |
| $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+3}{x+2}$ | $\lim_{x \rightarrow -2^-} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x+2}$ | $\lim_{x \rightarrow -2^+} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x+2}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ \operatorname{tg} 3x }{2x}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sin 2x}$ | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{ \sin 2x }$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{x}$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x \sin \frac{x}{2}}$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ \frac{3}{x} }{\sin(-\frac{x}{2})}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3^x}{\sin 3x}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{4x}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{3x} - 1}$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x - 2}$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 7x}{\sin 3x}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ |
| | | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 3x}{\ln 2x}$ |

E. Spojitosť funkcie v bode a na množine, vzťah s limitou. Dôležité vlastnosti spojitých funkcií.

22. Vyšetrite spojitosť a charakter bodov nespojitosti funkcie:

$$y = x \sin \frac{1}{x}, \quad y = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{\sin x}, \quad y = \sin \frac{1}{x}, \quad y = \frac{\sin x}{x}, \quad y = \frac{x}{|x|}.$$

23. Nech je funkcia f nespojitá v bode $a \in D(f)$. Aká je funkcia $|f|$ v bode a ?

24. Zostrojte funkciu, ktorá je definovaná na množine \mathbb{R} , je všade spojitá a má práve $0, 1, 2, \dots, n$, ($n \in \mathbb{N}$), resp. nespočítateľne veľa bodov nespojitosti.

25. Určte $f(0)$ tak, aby bola funkcia f spojitá v bode 0 , ak pre $x \neq 0$ platí:

$$f(x) = \frac{\sin x}{2x}, \quad f(x) = \frac{(x+2)^2 - 4}{x}, \quad f(x) = (1+2x)^{1/x}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}.$$

26. Nech sú funkcie f, g nespojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode a . Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi.

pomocna tabuľka

$$f + g, \quad |f + g|, \quad f/g, \quad |f/g|, \quad fg, \quad |fg|, \quad f(g), \quad |f(g)|.$$

27. Nech je funkcia f nekonštantná spojitá a funkcia g nespojitá v bode $a \in D(f) \cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode a . Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi.

pomocna tabuľka

$$f + g, \quad f/g, \quad g/f, \quad fg, \quad g(f), \quad |g(f)|, \quad f(g), \quad |f(g)|.$$

28. Metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite aspoň jeden koreň rovnice $0 = x^3 + 2x - 1$.