

Matematická analýza 2 – 2018/2019

Prípravné úlohy na Písomku 01

1. Vypočítajte súčet radu a určte polomer konvergencie pre nasledovné funkcionálne rady:

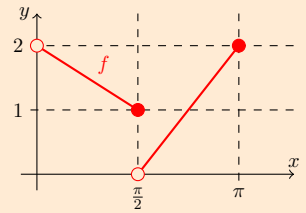
a) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - x^3)x^n$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(n + 2)$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+2}$, d) $\sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^{3n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n-1}}{3^n}$.

2. Nakreslite v Maxime postupnosť aspoň 10-tich čiastočných súčtov nekonečného radu $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}x^{n-3}$.

3. Vypočítajte integrál $\int \frac{\sin x}{x} dx$.

4. Dokážte, že funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ konverguje rovnomerne na množine R .

5. Popíšte funkciu $f(x)$ pomocou elementárnych funkcií tak, aby mala na intervale $\langle 0; \pi \rangle$ graf, ako je nakreslený na obrázku.



6. Nakreslite v Maxime postupnosť aspoň 10-tich čiastočných súčtov Fourierovho radu funkcie z predchádzajúceho príkladu.

7. Nakreslite graf a pomocou Maximy vypočítajte Fourierove rady funkcií:

a) $f(x) = -\frac{x}{2}$, $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$, b) $\operatorname{sgn} \sin(x - \pi)$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$,
c) $\operatorname{sgn} \cos \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, d) $f(x) = x + |x|$, $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$.

8. Určte a nakreslite (v Geogebre, resp. Maxime) množinu

a) $M = \{z \in C: \frac{\pi}{2} < \arg \frac{z+1}{z-1} < \pi\}$, b) $M = \{z \in C: \frac{\pi}{2} < \arg \frac{z+i}{z-1} < \pi\}$.

9. Preveďte nasledovné komplexné čísla (dané v algebraickom, goniometrickom alebo exponenciálnom tvare) do zvyšných dvoch tvarov a nakreslite ich do komplexnej roviny:

a) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, b) $2(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$, c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \exp^{-i\frac{\pi}{4}}$.

10. Napíšte dané komplexné číslo v základnom tvare (môžete si zvoliť ľubovoľný tvar). Pozor na komplexné odmocniny, tých máme zväčša niekoľko.

a) $\sqrt[4]{i}$, b) $\sqrt[5]{2 + 2i}$, c) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{i}}{2-2i}}$, d) $\operatorname{Arcsin} \frac{i}{3}$, e) $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3}$, f) $\operatorname{Arccos} \frac{i}{3}$.

11. Nájdite funkciu $f(z) = f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$, ak viete, že má všade deriváciu a platí:

a) $u(z) = x^2 - y^2 + xy$, b) $v(z) = x^2 - y^2 + xy$, c) $u(z) = x^2 - y^2 + x$, $f(i) = -1 + i$.