Rudolf Blaško

Neurčitý a určitý integrál
a
funkcie viacerých premenných

Rudolf Blaško

Neurčitý a určitý integrál a funkcie viacerých premenných

2024

beerb@frcatel.fri.uniza.sk, https://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb

Obsah

Predhovor

Učebnica Matematická analýza 2 nadväzuje na 1. časť, ktorá vyšla knižne v roku 2009 pod názvom Matematická analýza 1 [6]. Príležitostné odvolávania sa na túto knihu sú v texte uvedené skratkou „ma1:“ (napr. ma1: veta 4.1.4). Jej rozšírená verzia je voľne a bezplatne k dispozícií na adrese `http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/ma-1.pdf`. Pre úspešné zvládnutie niektorých častí tejto učebnice sú nevyhnutné elementárne vedomosti z algebry (viď [11, 34]). Autor predpokladá, že čitateľ je oboznámený s uvedenými znalosťami.

Látka je členená do dvoch kapitol a jednotlivých podkapitol. Na konci každej podkapitoly sú cvičenia, na ktorých si má študujúci overiť či porozumel vysvetľovanej látke. Výsledky cvičení sú uvedené v závere knihy. Pre spoľahlivé a trvalé zvládnutie látky je vhodné ich prepočítanie. Veľa študentov túto skutočnosť podceňuje a zistí až pred skúškou, že nie je čas na dobehnutie zameškaného. Ale, keďže počet príkladov uvedených v publikácii je z pochopiteľných dôvodov obmedzený, sú uvedené v prehľade literatúry ďalšie zbierky úloh a príkladov, z ktorých môže hĺbavý čitateľ čerpať. Učebnica končí registrom pojmov s odkazmi na príslušné strany, na ktorých ich čitateľ nájde.

Prvá kapitola sa zaoberá integrálnym počtom funkcie jednej reálnej premennej. Prvá podkapitola Neurčitý integrál je venovaná objasneniu pojmu neurčitý integrál a základným metódam integrovania. V dnešnej dobe, keď existuje niekoľko veľmi kvalitných programov na symbolické výpočty už nie je také dôležité mechanické počítanie integrálov, ale pochopenie ich podstaty a následná implementácia resp. aplikácia v riešených problémoch. Kapitola končí riešenými príkladmi, ktoré ilustrujú široký rozsah problémov pri ich riešení. Druhá podkapitola Riemannov určitý integrál objasnuje jeho základné vlastnosti, geometrický význam, vzťah s neurčitým integrálom a teoretické i numerické možnosti výpočtu určitého integrálu. Záver kapitoly je venovaný aplikáciam určitého integrálu v praxi.

Druhá kapitola je venovaná reálnym funkciám n reálnych premenných v Euklidovskom priestore R^n. Jej prvá podkapitola sa zaoberá základnými vlastnosťami reálnych a vektorových funkcií n premenných (limita, spojitosť, existencia funkčnej hodnoty ap.). Druhá podkapitola je venovaná deriváciam a diferenciálom týchto funkcií, ich aplikáciam a extrémom a možnostiam ich určenia pre dané funkcie (vrátane viazaných extrémov).

Definované pojmy sú kvôli prehľadnosti zobrazené tučným písmom. Vo formuláciách matematických viet sú niekedy kvôli prehľadnosti použité symboly $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$. Vzťah $A \Rightarrow B$, t. j. **nutnú podmienku** čítame „*Ak platia predpoklady (tvrdenia) A, potom (nutne) platia závery (tvrdenia) B.*“, vzťah $A \Leftarrow B$, t. j. **postačujúcu podmienku** čítame „*Pre platnosť tvrdenia A postačí platnosť tvrdenia B.*“ a vzťah $A \Leftrightarrow B$ čítame „*Tvrdenie A platí práve vtedy, ak platí tvrdenie B.*“, resp. „*Tvrdenia A a B súčasne platia alebo neplatia.*“. Kvôli kompatibilite s kapitolou o viacrozmerných funkciách všetky body značíme v okrúhlych zátvorkach, t. j. v tvare $(x; y) \in R^2$, resp. $(x; y; z) \in R^3$.

Uvedená publikácia je vytvorená pomocou vysoko profesionálnych Open Source nástrojov. Vlastný text je sádzaný pomocou typografického systému LaTeX, obrázky sú vytvorené pomocou vysokoúrovňových jazykov vektorovej grafiky `TikZ` (väčšina dvojrozmerných a niektoré trojrozmerné obrázky) a `Asymptote (vector graphics language)`. Výpočty potrebné k príkladom a k realizácií obrázkov boli vykonané pomocou programu na symbolické výpočty `wxMaxima`. Pri niektorých výpočtoch, ktoré priamo nesúvisia so zameraním učebnice (napr. rozklad racionálnej lomenej funkcie na parciálne zlomky), sú pre ilustráciu uvedené aj odkazy na internetovú výpočtovú službu `Wolfram Alpha`, kde sú uvedené časti vyriešené. Služba `Wolfram Alpha` nie je síce Open Source, je založená na platforme najlepšieho softvéru na symbolické výpošty `Wolfram Mathematica` od spoločnosti Wolfram Research, ale je v dosť rozsiahlej forme voľne prístupná. V tlačenej papierovej verzii sú obrázky realizované čiernobielo (odtiene šedej). V elektronickej verzii sú všetky obrázky farebné, pričom niektoré z nich sú animované (čitateľ ich pozná podľa menu pod obrázkom) a väčšina trojrozmerných obrázkov je interaktívna (obrázky vytvorené pomocou `Asymptote`). Objekty na týchto obrázkoch môžeme po kontakte s myšou otáčať, zväčšovať ich, posúvať ap. Tieto obrázky sú označené ikonou . Taktiež sú v elektronickej verzii aktívne všetky odkazy, t. j. interné (krížové odkazy medzi jednotlivými časťami v rámci publikácie vrátane obsahu, registra, odkazy na na citácie, na poznámky pod čiarou, na vety, na výsledky cvičení ap.) i externé odkazy na webové stránky.

Všetky interaktívne animované a 3D obrázky majú svoje identické klony na webe a aktivovať ich môžete (napríklad do mobilného telefónu) pomocou priloženého QR kódu.

Stále platí, že nikto nie je dokonalý, preto prípadné zistené chyby a nedostatky, ako aj návrhy na ďalšie zlepšenie učebnice, môžete adresovať autorovi na jeho e-mailovú adresu `beerb@frcatel.fri.uniza.sk`.

v Žiline, júl 2023 Autor

Žiaľ, motto nielen mnohých študentov, ale aj mnohých učiteľov:

Od učenia ešte nikto nezomrel, ale načo riskovať.
GTUBB

Kapitola 1

Integrál reálnej funkcie

1.1 Neurčitý integrál

Zavedenie pojmu derivácie sme motivovali úlohou určiť okamžitú rýchlosť hmotného bodu, ktorý sa pohybuje po priamke. Úlohu môžeme obrátiť a hľadať dráhu hmotného bodu za predpokladu, že poznáme jeho okamžitú rýchlosť v danom čase.

Príklad 1.1.1.
Uvažujme hmotný bod pohybujúci sa po súradnicovej osi x v kladnom smere rýchlosťou $v(t) = 2t + 2$, $t \in \langle 0; \infty)$, pričom v čase $t_0 = 0$ má polohu x_0.
Hľadáme funkciu, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu, t. j. hľadáme funkciu $x(t)$, $t \in \langle 0; \infty)$ tak, aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2$, $t \in \langle 0; \infty)$ a $x(t_0) = x(0) = x_0$.
Prvej podmienke vyhovuje každá funkcia $x(t) = t^2 + 2t + c$, $t \in \langle 0; \infty)$, kde c je ľubovoľné reálne číslo. Ešte musíme určiť konštantu $c \in R$ tak, aby platilo $x(0) = x_0$.
Platí $x_0 = x(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + c = c$, t. j. $c = x_0$.
Z toho vyplýva, že hľadanou funkciou dráhy je $x(t) = t^2 + 2t + x_0$, $t \in \langle 0; \infty)$. ■

Nech $I \subset R$ je otvorený interval. Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I**, ak pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$ taká, že platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 1.1.1.
Aj naďalej budeme uvažovať otvorený interval $I \subset R$.
Ak by bol interval I uzavretý, resp. otvorený iba na jednej strane, potom by sme v krajných bodoch, kde je interval uzavretý, uvažovali jednostranné derivácie funkcie F. Napr. v prípade intervalu $I = \langle a; b\rangle$ uvažujeme $F'_+(a) = f(a)$, $F'_-(b) = f(b)$.

Veta 1.1.1.
Funkcia $F(x)$ je primitívna k funkcii $f(x)$ na intervale I, $c \in R$ (ľubovoľná konštanta).

$\Longrightarrow$ Funkcia $G(x) = F(x) + c$ je primitívna k funkcii $f(x)$ na intervale I.

Dôkaz.
Pre všetky $x \in I$ platí $G'(x) = \big(F(x) + c\big)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$. ■

Veta 1.1.2.
Funkcie $F(x)$, $G(x)$ sú primitívne k $f(x)$ na intervale I.
$\Longrightarrow$ Funkcia $(F-G)(x)$ je konštantná na intervale I.

Dôkaz.
Pre všetky $x\in I$ platí $\big(F-G\big)'(x) = \big(F(x)-G(x)\big)' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$.
Potom je[1] funkcia $F-G$ konštantná na I. ■

Ak I nie je interval, potom veta 1.1.2 neplatí. Množinu I musíme rozdeliť na intervaly a na každom z nich už uvedená veta platí. Dokazuje to nasledujúci príklad 1.1.2.

Príklad 1.1.2.
Uvažujme funkciu $f(x)=3x^2$, $x\in I$, kde $I=(0;1)\cup(2;3)$.

Označme $F(x)=x^3$, $x\in I$ a $G(x)=\begin{cases} x^3 & \text{pre } x\in(0;1), \\ x^3-1 & \text{pre } x\in(2;3). \end{cases}$

Obe funkcie F aj G sú primitívne k funkcii f na množine I, ale ich rozdiel nie je konštantnou funkciou na množine I, pretože platí

$$(F-G)(x) = F(x)-G(x) = \begin{cases} x^3-x^3=0 & \text{pre } x\in(0;1), \\ x^3-(x^3-1)=1 & \text{pre } x\in(2;3). \end{cases}$$

Zúženia funkcie $F-G$ na jednotlivé intervaly $(0;1)$ a $(2;3)$,
t. j. $\big(F-G\big)|_{(0;1)}(x)=0$, $\big(F-G\big)|_{(2;3)}(x)=1$, ale konštantné funkcie sú. ■

Poznámka 1.1.2.
Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Z definície vyplýva, že ***primitívna funkcia F je na intervale I spojitá.***[2]

Z predchádzajúceho vyplýva, že všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f(x)$, $x\in I$ na intervale I sa navzájom líšia o konštantu a tvoria množinu $\{F(x)+c,\ c\in R\}$, pričom $F(x)$, $x\in I$ je ľubovoľná z primitívnych funkcií k $f(x)$. Táto množina sa nazýva **neurčitý integrál funkcie f na intervale I** a označuje sa[3]

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \big\{F(x)+c,\ x\in I,\ c\in R\big\} = F(x)+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

Na určenie neurčitého integrálu funkcie nám postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia. Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva **integrovanie**.

Zápis neurčitého integrálu funkcie f na intervale I je určený na začiatku **integračným znakom** $\int$ a na konci symbolom diferenciálu $\mathrm{d}x$.[4]

Funkcia f sa nazýva **integračná funkcia** alebo **integrand**, x sa nazýva **integračná premenná** a c sa nazýva **integračná konštanta**. Interval I sa nazýva **definičný obor** (**obor definície**) **integrálu**.[5]

---

[1] ma1: veta 4.3.8. a): Funkcia f je spojitá na intervale $I\subset R$, $f'(x)$ existuje na I. Potom f je na intervale I konštantná práve vtedy, ak pre všetky $x_0\in I$ platí $f'(x_0)=0$.

[2] ma1: veta 4.1.4: Ak má funkcia f v bode x_0 konečnú deriváciu, potom je f v bode x_0 spojitá.

[3] Symboly $\{\}$ sa vynechávajú a namiesto $\{F(x)+c, x\in I, c\in R\}$ sa stručne píše $F(x)+c$, $x\in I$, $c\in R$.

[4] Z uvedeného dôvodu nemusíme zložitejšie vyjadrenia funkcie f dávať do zátvoriek, ale kvôli prehľadnosti sa to doporučuje.

[5] Ak nie je obor definície integrálu explicitne zadaný, potom pod oborom definície integrálu myslíme maximálny možný interval (resp. zjednotenie intervalov), kde integrál existuje.

Poznámka 1.1.3.
Nie každá funkcia f musí mať na intervale I primitívnu funkciu (príklad 1.1.4).
Ak je f spojitá na intervale I (veta 1.1.3), potom k nej primitívna funkcia existuje.
Samozrejme existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie (príklad 1.1.4).

Veta 1.1.3.
Funkcia $f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale I.

$\Longrightarrow$ Na intervale I existuje primitívna funkcia k funkcii f.

Dôkaz tejto vety je s doterajšími vedomosťami zložitý a vykonáme ho až neskôr, keď budeme poznať súvislosti medzi neurčitým a určitým integrálom (veta 1.2.27, str. 73).

Príklad 1.1.3.
Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-1;1)$ nemá na intervale $(-1;1)$ primitívnu funkciu.

Riešenie.
Predpokladajme, že k f na $(-1;1)$ existuje primitívna funkcia F. Je zrejmé, že funkcia F je na $(-1;1)$ spojitá (poznámka 1.1.2).

$x \in (-1;0)$. $\Rightarrow F'(x) = f(x) = -1$, t. j. $F(x) = -x + c_1$, kde $c_1 \in R$.

$x \in (0;1)$. $\Rightarrow F'(x) = f(x) = 1$, t. j. $F(x) = x + c_2$, kde $c_2 \in R$.

Pre primitívnu funkciu musí platiť $F'_-(0) = F'_+(0) = F'(0) = f(0) = \operatorname{sgn} 0 = 0$, ale platí:

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \tfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \tfrac{-x+c_1-c_1}{x} = -1 = \lim_{x \to 0^-} F'(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq 0.$$
$$F'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \tfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \tfrac{x+c_2-c_2}{x} = 1 = \lim_{x \to 0^+} F'(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq 0.$$

Potom $F'(0)$ neexistuje, t. j. primitívna funkcia k f na $(-1;1)$ neexistuje. ■

Príklad 1.1.4.
Funkcia $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$ je síce nespojitá v bode $x = 0$,

ale existuje $\displaystyle\int \big[2x \sin \tfrac{1}{x} - \cos \tfrac{1}{x}\big]\, dx = x^2 \sin \tfrac{1}{x} + c$, $x \in R - \{0\}$, $c \in R$.

Riešenie.
$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ neexistuje, t. j. neplatí $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ a f nie je spojitá v bode 0.

$$\lim_{x \to 0} 2x \sin \tfrac{1}{x} = 2 \cdot \lim_{x \to 0} x \sin \tfrac{1}{x} = \Big[\, x \to 0 \mid \sin \tfrac{1}{x} \in \langle -1;1 \rangle \text{ je ohraničená} \,\Big] = 2 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \to 0} \cos \tfrac{1}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} \cos \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = \lim\limits_{n \to \infty} \cos 2n\pi = 1 & \text{pre } \big\{\frac{1}{2n\pi}\big\}_{n=1}^{\infty} \to 0. \\ \lim\limits_{n \to \infty} \cos \frac{1}{\frac{1}{(2n+1)\pi}} = \lim\limits_{n \to \infty} \cos (2n+1)\pi = -1 & \text{pre } \big\{\frac{1}{(2n+1)\pi}\big\}_{n=1}^{\infty} \to 0. \end{cases}$$

$F(x) = x^2 \sin x^{-1}$, $x \in R - \{0\}$, $F(0) = 0$ je primitívnou funkciou k $f(x)$ na R.

$x \neq 0$. $\Rightarrow F'(x) = \big[x^2 \sin \frac{1}{x}\big]' = 2x \sin \frac{1}{x} - x^2 \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} = f(x)$.

$x = 0$. $\Rightarrow F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$. ■

V tabuľke 1.1.1 sú uvedené základné vzorce pre integrovanie. Tieto vzorce úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií (ma1: tab. 4.1.1) a pre praktické potreby **je nevyhnutné si ich zapamätať**. Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, Tabuľka 1.1.1: Neurčité integrály základných elementárnych funkcií

Vzorec	Platnosť	Vzorec	Platnosť
$\int \mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + c,$	$x \in R$	$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,$	$a \neq -1,\ x \in R - \{0\}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + c,$	$x \in R - \{0\}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + c,$	$f(x) \neq 0,\ x \in D(f)$
$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a} + c,$	$a \neq 0,\ x \in R$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c,$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x \in R$
$\int \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos ax}{a} + c,$	$a \neq 0,\ x \in R$	$\int \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a} + c,$	$a \neq 0,\ x \in R$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotg} ax}{a} + c,$	$a \neq 0,\ x \in R,\ x \neq \frac{k\pi}{a},\ k \in Z$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} + c,$	$a \neq 0,\ x \in R,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2a},\ k \in Z$
$\int \sinh ax\,\mathrm{d}x = \frac{\cosh ax}{a} + c,$	$a \neq 0,\ x \in R$	$\int \cosh ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh ax}{a} + c,$	$a \neq 0,\ x \in R$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotgh} ax}{a} + c,$	$a \neq 0,\ x \in R - \{0\}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{tgh} ax}{a} + c,$	$a \neq 0,\ x \in R$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c_1 = -\frac{1}{a}\operatorname{arccotg}\frac{x}{a} + c_2,$	$a \neq 0,\ x \in R$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c,$	$a \neq 0,\ x \in R - \{\pm a\}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_1 = -\arccos\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_2,$	$a \neq 0,\ x \in (-\lvert a\rvert; \lvert a\rvert)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c,$	$a \neq 0,\ x \in (-\infty; -\lvert a\rvert) \cup (\lvert a\rvert; \infty)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c,$	$a \neq 0,\ x \in R$

ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly.[6] Tieto vzorce na jednotlivých intervaloch sú rovnaké, líšiť sa môžu iba o konštantu. Ich platnosť dokážeme priamym derivovaním.

Derivovanie a integrovanie sú inverzné operácie na intervale I. Ak je funkcia F primitívna k funkcii f na intervale I, $c \in R$, potom pre všetky $x \in I$ platí

$$\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[F(x) + c\right]' = f(x), \qquad \int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Príklad 1.1.5.

a) $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{[\sin x]'}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert + c,\ x \in R - \{k\pi, k \in Z\},\ c \in R.$

b) $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{[\cos x]'}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + c,$
$x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\},\ c \in R.$

[6] Napr. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce, jeden pre $x \in (-\infty; 0)$, druhý pre $x \in (0; \infty)$.

c) $\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \geq 0,\ c \in R.$

d) $\int |x|\,\mathrm{d}x = \frac{x\,|x|}{2} + c,\ x \in R,\ c \in R,$ pretože platí:

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c = \frac{x \cdot x}{2} + c = \frac{x\,|x|}{2} + c & \text{pre } x \geq 0. \\ \int (-x)\,\mathrm{d}x = -\int x\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + c = \frac{x \cdot (-x)}{2} + c = \frac{x\,|x|}{2} + c & \text{pre } x < 0. \blacksquare \end{cases}$$

1.1.1 Metódy integrovania

Integrovanie je vo všeobecnosti zložitý proces a mnohé (aj elementárne) funkcie nevieme integrovať bez použitia nekonečných funkcionálnych radov.

Každá spojitá funkcia definovaná na intervale má na tomto intervale primitívnu funkciu (veta 1.1.3). Problém je, že nie vždy ju vieme vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Niekedy na jej vyjadrenie potrebujeme spomínané nekonečné funkcionálne rady. Takéto integrály sa nazývajú **transcedentné** a patria sem napr. ($m \in N \cup \{0\}$, $n \in N$, $m+n \geq 2$)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}, \quad \int \frac{\mathrm{e}^{(\pm x^n)}}{x^m}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x^n)}{x^m}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\cos(x^n)}{x^m}\,\mathrm{d}x.$$

Základom integrovania je rozklad integrandov na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu) a ich transformácia na iné ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy). Niekedy môžeme neurčitý integrál dopredu odhadnúť a bez integrovania dopočítať neznáme parametre (metóda neurčitých koeficientov). Jednotlivé metódy sa často navzájom kombinujú. Existujú aj tabuľky integrálov [44] a softvérové aplikácie na symbolické výpočty (`wxMaxima`, `Maple`, `Wolfram Mathematica`, ...), ktoré môžeme použiť. Ale aby sme tieto pomôcky mohli účinne využívať, musíme vedieť integrovať.

Veta 1.1.4 (Metóda rozkladu).
Funkcie F, G sú primitívne k funkciám f, g na intervale I, $a, b \in R$, $|a| + |b| > 0$.

$\Longrightarrow$ Funkcia $aF + bG$ je primitívna k funkcii $af + bg$ na intervale I a platí

$$\int \big[af(x) + bg(x)\big]\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x) + bG(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

Dôkaz.
Pre všetky $x \in I$ platí $\big[aF(x) + bG(x)\big]' = aF'(x) + bG'(x) = af(x) + bg(x)$. $\blacksquare$

Poznámka 1.1.4.
Pri praktickom výpočte väčšinou píšeme priamo

$$\int \big[af(x) + bg(x)\big]\,\mathrm{d}x = aF(x) + bG(x) + c,\ x \in I,\ c \in R.$$

Pri integrovaní chápeme všetky výrazy ako množiny. Pokiaľ súčasťou daného výrazu je neurčitý integrál nevyjadrený pomocou primitívnej funkcie, potom integračnú konštantu *nemusíme písať. Na konci výpočtu integrálu sa všetky integračné konštanty z jednotlivých primitívnych funkcií sčítajú do jednej výslednej (viď príklad 1.1.6). Napríklad vo vzťahu*

$$a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x) + b\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

nemusíme na pravej strane písať konštantu, pretože je zahrnutá v integráli funkcie $g(x)$.

Príklad 1.1.6.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \Big[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\Big]\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$[7]
$x\in R,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k\in Z,\ c\in R.$

b) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \Big[x - 2 + \frac{1}{x}\Big]\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + c,$
$x\in R - \{0\},\ c\in R.$

c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \Big[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\Big]\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + c,$
$x\in R,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k\in Z,\ c\in R.$

d) $\displaystyle\int \Big[2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\Big]\,\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\operatorname{arctg} x + c,\ x\in R,\ c\in R.$ ■

Veta 1.1.5 (Metóda per partes).
Funkcie u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I.

$$\Longrightarrow \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x,\ x\in I.$$

Dôkaz.
Funkcie u, v sú spojité na I, pretože sú primitívnymi k u', v' na I (poznámka 1.1.2).
Zo spojitosti u', v' na I a z vety 1.1.3 vyplýva existencia primitívnych funkcií k funkciám uv', $u'v$ na I. Zvyšok vyplýva zo vzťahu $[uv]' = u'v + uv'$, t. j. $uv' = [uv]' - u'v$.
Pre všetky $x\in I$ platí $u(x)v'(x) = \big[u(x)v(x)\big]' - u'(x)v(x)$. Potom

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int \big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,\ x\in I. \blacksquare$$

Predchádzajúci vzorec môžeme písať tiež v tvare

$$\int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x,\ x\in I.$$

Príklad 1.1.7.

a) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c,\ x\in R,\ c\in R.$

b) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$

c) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{0+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\big|1+x^2\big| + c = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + c,\ x\in R,\ c\in R.$ ■

[7] Namiesto zápisu $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ sa často používa zápis $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$.

Príklad 1.1.8.
Vypočítajte neurčitý integrál $I = \displaystyle\int \cos 5x \sin 4x \, dx$.

Riešenie.

$$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx = \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u = \frac{\sin 5x}{5} \\ v = \sin 4x & v' = 4\cos 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \sin 5x \cos 4x \, dx$$
$$= \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 5x & u = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v = \cos 4x & v' = -4\sin 4x \end{array} \right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5} \left[-\frac{\cos 5x \cos 4x}{5} - \frac{4}{5} \int \cos 5x \sin 4x \, dx \right]$$
$$= \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} \int \cos 5x \sin 4x \, dx = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cos 4x}{25} + \frac{16}{25} I.$$

Dostali sme rovnicu s neznámym parametrom I. Pre všetky $x \in R$ platí[8]

$$\frac{9}{25} I = I - \frac{16}{25} I = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cos 4x}{25} + c_1, \text{ kde } c_1 \in R.$$

Potom[9] $I = \frac{25}{9} \left[\frac{\sin 5x \sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x \cos 4x}{25} + c_1 \right] = \frac{5\sin 5x \sin 4x + 4\cos 5x \cos 4x}{9} + c$, $x \in R$, $c \in R$.

Iné riešenie.
Použijeme vzorec[10] $\sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{2}$.
Ak položíme $4x = \frac{\alpha-\beta}{2}$, $5x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, dostaneme rovnosti $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = 5x + 4x = 9x$, $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = 5x - 4x = x$. Potom platí

$$I = \int \cos 5x \sin 4x \, dx = \int \frac{\sin 9x - \sin x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int \left[\sin 9x - \sin x \right] dx$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos 9x}{9} - (-\cos x) \right] + c = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c, \quad x \in R, \quad c \in R. \blacksquare$$

Poznámka 1.1.5.
Obe riešenia príkladu 1.1.8 sú správne.
Ukážeme, že výsledky sa na množine R líšia o konštantu. V tomto prípade sú rovnaké.
Použijeme vzorce[10] $\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}$, $\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{2}$.
Opäť položíme $4x = \frac{\alpha-\beta}{2}$, $5x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, t. j. $\alpha = 9x$, $\beta = x$. Potom pre všetky $x \in R$ platí

$$\frac{5\sin 5x \sin 4x}{9} + \frac{4\cos 5x \cos 4x}{9} = \frac{5}{9} \frac{\cos x - \cos 9x}{2} + \frac{4}{9} \frac{\cos x + \cos 9x}{2} = \frac{9\cos x - \cos 9x}{9 \cdot 2} = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18}.$$

Alebo priamo overíme derivovaním.

$$\left[\frac{5\sin 5x \sin 4x + 4\cos 5x \cos 4x}{9} \right]' = \frac{5 \cdot 5\cos 5x \sin 4x + 5\sin 5x \cdot 4\cos 4x - 4 \cdot 5\sin 5x \cos 4x - 4\cos 5x \cdot 4\sin 4x}{9}$$
$$= \frac{(25-16)\cos 5x \sin 4x + (20-20)\sin 5x \cos 4x}{9} = \frac{9\cos 5x \sin 4x}{9} = \cos 5x \sin 4x.$$

Pre úpravu druhého výsledku použijeme vzorec[10] $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{2} = \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$.

$$\left[\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} \right]' = -\frac{\sin x}{2} + \frac{9\sin 9x}{18} = \frac{\sin 9x - \sin x}{2} = \sin \frac{9x-x}{2} \cos \frac{9x+x}{2} = \sin 4x \cos 5x.$$

---

[8] Integrál je množina všetkých primitívnych funkcií, preto musíme na pravej strane doplniť konštantu.
[9] Keďže $c_1 \in R$ je ľubovoľná konštanta, je aj jej násobok $c = \frac{25c_1}{9}$ ľubovoľná konštanta.
[10] ma1: veta 3.1.9: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Poznámka 1.1.6.
Nie každá voľba funkcií u, v musí viesť k cieľu, napr. v príklade 1.1.7 a) je to voľba

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u'=x & u=\frac{x^2}{2} \\ v=\cos x & v'=-\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} + \int \frac{x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \cdots .$$

Metódu per partes môžeme použiť viackrát za sebou, ale musíme si dať pozor, aby sme sa pri jej opätovnom použití nevrátili k pôvodnemu integrálu. Pri opačnej voľbe funkcií u, v pri druhom použití metódy per partes v príklade 1.1.8 dostaneme

$$I = \int \cos 5x \sin 4x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u'=\cos 5x & u=\frac{\sin 5x}{5} \\ v=\sin 4x & v'=4\cos 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \sin 5x\cos 4x\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\begin{array}{l|l} u'=\cos 4x & u=\frac{\sin 4x}{4} \\ v=\sin 5x & v'=5\cos 5x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x\sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\left[\frac{\sin 5x \sin 4x}{4} - \frac{5}{4}\int \cos 5x \sin 4x\,\mathrm{d}x\right] = I.$$

Príklad 1.1.9.
Vypočítajte neurčitý integrál $I_n = \int x^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Riešenie.
Pre $n\in N$, $x\in R$ platí

$$I_n = \int x^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u=x^n & u'=nx^{n-1} \\ v'=\mathrm{e}^x & v=\mathrm{e}^x \end{array}\right] = x^n\mathrm{e}^x - n\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^n\mathrm{e}^x - nI_{n-1}.$$

Špeciálne pre $n = 0, 1, 2, 3$, $x\in R$, $c\in R$ platí:

$$I_0 = \int x^0\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,$$
$$I_1 = x\,\mathrm{e}^x - I_0 = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c = (x-1)\,\mathrm{e}^x + c,$$
$$I_2 = x^2\mathrm{e}^x - 2I_1 = x^2\mathrm{e}^x - 2(x-1)\,\mathrm{e}^x\,] + c = (x^2-2x+2)\,\mathrm{e}^x + c,$$
$$I_3 = x^3\mathrm{e}^x - 3I_2 = x^3\mathrm{e}^x - 3(x^2-2x+2)\,\mathrm{e}^x + c = (x^3-3x^2+6x-6)\,\mathrm{e}^x + c. \blacksquare$$

V predchádzajúcom príklade sme vyjadrili integrál I_n **rekurentným vzťahom** pomocou I_{n-1}. Pre konkrétne $n\in N$ musíme tento vzťah použiť niekoľkokrát za sebou. Iné riešenie tohto integrálu pre $n = 3$ nájdeme v príklade 1.1.10 b).

Poznámka 1.1.7.
Metóda per partes sa používa pomerne často a môžeme ju použiť pre mnohé druhy integrálov. Vhodná je napríklad pre integrovanie funkcií

$$P(x)\,\mathrm{e}^{ax},\quad P(x)\cos ax,\quad P(x)\sin ax,\quad P(x)\ln Q(x),\quad P(x)\,\mathrm{arctg}\,Q(x),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ sú reálne polynómy, $a\in R$, $a \neq 0$.

Vyššie uvedené funkcie môžeme samozrejme integrovať aj inými metódami. Niekedy dokážeme neurčitý integrál funkcie $f(x)$ odhadnúť[11] neurčitým výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots)$

[11] V príklade 1.1.9 to môže byť odhad $I_n = \mathrm{e}^x(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) + c$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sú neznáme koeficienty, ktoré musíme vypočítať.

s konečným počtom neznámych koeficientov $a_1, a_2, \dots$. Často nám typ hľadanej primitívnej funkcie naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes. Pri výpočte koeficientov $a_1, a_2, \dots$ nahradíme integrovanie derivovaním výrazu $F(x, a_1, a_2, \dots)$. Pre neznáme koeficienty $a_1, a_2, \dots$ dostaneme systém algebraických rovníc. To znamená, že namiesto integrovania derivujeme a riešime sústavu rovníc (príklad 1.1.10). Táto metóda sa nazýva **metóda neurčitých koeficientov**. Symbolicky ju môžeme znázorniť nasledujúcou schémou ($c \in R$ je integračná konštanta)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{F(x, a_1, a_2, \dots) + c}_{\text{odhad integrálu}}. \implies \underbrace{f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \dots)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \dots)}_{\text{riešenie systému rovníc s neznámymi } a_1, a_2, \dots}.$$

Príklad 1.1.10.
Vypočítajte neurčité integrály: a) $I_e = \displaystyle\int x^3\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, b) $I_s = \displaystyle\int x^3 \sin x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.
a) Výsledok odhadneme výrazom $I_e = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x + c$, $x \in R$, $c \in R$ s neznámymi koeficientami $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Po zderivovaní dostaneme rovnosť dvoch polynómov

$$\begin{aligned} x^3\,\mathrm{e}^x = I_e' &= (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x \\ &= \left[x^3 + (3x^2 + \alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + \beta + \gamma\right]\mathrm{e}^x, \end{aligned}$$

t. j. $x^3 = x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = x^3 + (3 + \alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + \beta + \gamma$.
Z poslednej rovnosti vyplývajú tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ:

$$\left.\begin{aligned} x^2&\colon 0 = 3 + \alpha, \\ x^1&\colon 0 = 2\alpha + \beta, \\ x^0&\colon 0 = \beta + \gamma. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow \alpha = -3,\ \beta = -2\alpha = 6,\ \gamma = -\beta = -6. \\ &\qquad \Rightarrow I_e = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,\mathrm{e}^x + c,\ x \in R,\ c \in R. \end{aligned}$$

b) Odhadneme výsledok[12] $I_s = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (\varepsilon x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu)\sin x + c$ a zderivujeme

$$\begin{aligned} x^3 \sin x &= I_s' = (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x \\ &\qquad + (3\varepsilon x^2 + 2\varphi x + \mu)\sin x + (\varepsilon x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu)\cos x \\ &= \left[-\alpha x^3 + (3\varepsilon - \beta)x^2 + (2\varphi - \gamma)x + (\mu - \delta)\right]\sin x \\ &\qquad + \left[\varepsilon x^3 + (3\alpha + \varphi)x^2 + (2\beta + \mu)x + (\gamma + \nu)\right]\cos x. \end{aligned}$$

Ak uvážime rovnosť $x^3 \sin x = (x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0)\sin x + (0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0)\cos x$, dostaneme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \mu, \nu \in R$:[13]

$$\left.\begin{aligned} x^3 \sin x&\colon 1 = -\alpha, & x^3 \cos x&\colon 0 = \varepsilon, \\ x^2 \sin x&\colon 0 = 3\varepsilon - \beta, & x^2 \cos x&\colon 0 = 3\alpha + \varphi, \\ x^1 \sin x&\colon 0 = 2\varphi - \gamma, & x^1 \cos x&\colon 0 = 2\beta + \mu, \\ x^0 \sin x&\colon 0 = \mu - \delta, & x^0 \cos x&\colon 0 = \gamma + \nu. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow \alpha = -1,\ \varphi = 3,\ \gamma = 6,\ \nu = -6, \\ &\qquad \varepsilon = 0,\ \beta = 0,\ \mu = 0,\ \delta = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_s = (-x^3 + 6x)\cos x + (3x^2 - 6)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R. \ \blacksquare$$

[12] V odhade musí byť $\sin x$ a súčasne $\cos x$, pretože $[\sin x]' = \cos x$, $[\cos x]' = -\sin x$.
[13] Pri hlbšom preskúmaní metódy per partes pre tento integrál by sme mohli postup zjednodušiť na tri neznáme koeficienty a odhad $(-x^3 + \gamma x)\cos x + (\varphi x^2 + \nu)\sin x + c$, $\gamma, \varphi, \nu \in R$.

Veta 1.1.6 (1. metóda substitúcie, 1. ms).
$F(t)$ je primitívna k $f(t)$ na intervale J, $t=\varphi(x)$ má deriváciu na intervale I, $\varphi(I)\subset J$.
$\implies$ Funkcia $F\big(\varphi(x)\big)$ je primitívna k funkcii $f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)$ na I a platí

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}t=\int f(t)\,\mathrm{d}x=F(t)+c=F\big(\varphi(x)\big)+c,\ x\in I,\ c\in R.$$

Dôkaz.
Pre všetky $t\in J$, $t=\varphi(x)$, $x\in I$ platí (ma1: veta 4.1.7 o derivácii zloženej funkcie)

$$F'(t)=\Big[F\big(\varphi(x)\big)\Big]'=F'\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)=f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x).$$

To znamená, že $F\big(\varphi(x)\big)$ je primitívna k $f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(x)$ na I a veta je dokázaná. ■

Veta 1.1.6 (1. ms) sa používa na výpočet integrálov typu

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}t,$$

v ktorých integrand obsahuje aj deriváciu nahrádzanej funkcie. Pri substitúcii (nahradení premennej) $t=\varphi(x)$ platí $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\varphi(x)=\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Potom dostaneme neurčitý integrál funkcie $f(t)$ s premennou t, ktorý vypočítame, t. j. nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$ k funkcii $f(t)$. Následne rovnakou substitúciou $t=\varphi(x)$ dostaneme riešenie pôvodného integrálu, t. j. primitívnu funkciu $F\big(\varphi(x)\big)$.

V praxi overujeme splnenie predpokladov vety väčšinou až na konci riešenia po úspešnom integrovaní. Na rozdiel od 2. ms (veta 1.1.8) nepoužívame inverznú substitúciu. Existenciu primitívnej funkcie nám zaručí napríklad spojitosť funkcie f (veta 1.1.3).

Príklad 1.1.11.
a) $\displaystyle\int\sin^3x\cos x\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } t=\sin x & x\in R\\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x & t\in\langle-1;1\rangle\end{array}\right]=\int t^3\,\mathrm{d}t=\frac{t^{3+1}}{3+1}+c=\frac{\sin^4x}{4}+c,\ x\in R,\ c\in R.$

Podmienky 1. ms sú splnené.
Funkcia $f(t)=t^3$, $t\in R$ je spojitá na intervale $I=R$, funkcia $t=\varphi(x)=\sin x$, $x\in R$ má na intervale $J=R$ (spojitú) deriváciu $\varphi'(x)=\cos x$ a $\varphi(R)=\langle-1;1\rangle\subset R$.

b) $\displaystyle\int\sin^3t\cos t\,\mathrm{d}t=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } x=\sin t & t\in R\\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & x\in\langle-1;1\rangle\end{array}\right]^{14}=\int x^3\,\mathrm{d}x=\frac{x^{3+1}}{3+1}+c=\frac{\sin^4t}{4}+c,\ t\in R,\ c\in R.$

c) $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c}\text{Subst. } t=f(x)\\ \mathrm{d}t=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{array}\right]=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+c=\ln|f(x)|+c,\ x\in D(f),\ f(x)\neq0,\ c\in R.$

d) $\displaystyle\int\frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t=\left[\begin{array}{c}\text{Subst. } x=f(t)\\ \mathrm{d}x=f'(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right]^{14}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+c=\ln|f(t)|+c,\ t\in D(f),\ f(t)\neq0,\ c\in R.$

e) $\displaystyle\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^3+1}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } t=x^3+1 & x\in R-\{-1\}\\ \mathrm{d}t=3x^2\,\mathrm{d}x & t\in R-\{0\}\end{array}\right]=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+c=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c,$
$x\in R-\{-1\},\ c\in R.$

[14] Premenné x a t sú navzájom vymenené vzhľadom na vetu 1.1.6.

f) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } t=x^3 & x\in R \\ dt = 3x^2\,dx & t\in R \end{array}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\, t + c = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\, x^3 + c,\ x\in R,\ c\in R.$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^6-1} = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } t=x^3 & x\in R-\{\pm1\} \\ dt = 3x^2\,dx & t\in R-\{\pm1\} \end{array}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|,$

$x\in R-\{\pm1\},\ c\in R.$ ■

Príklad 1.1.12.
Ak má $f(t)$ na intervale J primitívnu funkciu $F(t)$, potom pre $a, b\in R$, $a\neq 0$ platí[15]

$$\int f(ax+b)\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{Subst. } t=ax+b \\ dt = a\,dx \end{array}\right] = \int \frac{f(t)\,dt}{a} = \frac{F(t)}{a} + c = \frac{F(ax+b)}{a} + c,\ \ x\in(\alpha;\beta),\ \ c\in R,$$

pričom $J=(a\alpha+b; a\beta+b)$ pre $a>0$, resp. $J=(a\beta+b; a\alpha+b)$ pre $a<0$.
Špeciálne pre $a=1$, $b\in R$, $x\in(\alpha;\beta)$, $t\in J=(\alpha+b;\beta+b)$ platí

$$\int f(x+b)\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{Subst. } t=x+b \\ dt = dx \end{array}\right] = \int f(t)\,dt = F(t)+c = F(ax+b)+c,\ \ c\in R.$$

Špeciálne pre $a=-1$, $b=0$, $x\in(\alpha;\beta)$, $t\in J=(-\beta;-\alpha)$ platí

$$\int f(-x)\,dx = \left[\begin{array}{c} \text{Subst. } t=-x \\ dt = -\,dx \end{array}\right] = -\int f(t)\,dt = -F(t)+c = -F(-x)+c,\ \ c\in R. \ ■$$

Príklad 1.1.13.
a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+2} = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } t=x+2 & x\in R-\{2\} \\ dt = dx & t\in R-\{0\} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x+2| + c,\ x\in R-\{2\},\ c\in R.$

b) $\displaystyle\int \cos(-x)\,dx = \left[\begin{array}{c|c} \text{Subst. } t=-x & x\in R \\ dt = -\,dx & t\in R \end{array}\right] = -\int \cos t\,dt = -\sin t + c$

$= -\sin(-x) + c = \sin x + c,\ x\in R,\ c\in R.$ ■

Poznámka 1.1.8.
Pri výpočte integrálov môžeme niekedy využiť špeciálne vlastnosti integrovaných funkcií (párnosť, nepárnosť ap.) a pred vlastným integrovaním ich zjednodušiť. Pri úprave výsledku v predchádzajúcom príklade 1.1.13 b) sme využili nepárnosť funkcie sínus. Ak využijeme párnosť funkcie kosínus pred integrovaním, dostaneme rovnaký výsledok priamo.

$$\int \cos(-x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + c,\ \ x\in R,\ \ c\in R.$$

Pri dôkaze 2. vety o substitúcii budeme potrebovať nasledujúce tvrdenie.

Lema 1.1.7.
Funkcia $x=\varphi(t)$, $t\in J$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t)\neq 0$ na intervale J.
$\Longrightarrow$ φ je rýdzo monotónna na intervale J, t. j. rastúca alebo klesajúca.

[15] $x\in(\alpha;\beta)$, $t\in J$ s hranicami $a\alpha+b$ a $a\beta+b$.

Dôkaz.
Funkcia φ má na J deriváciu, t. j. φ je spojitá na J (ma1: veta 4.1.4).
Tvrdenie lemy dokážeme sporom.
Predpokladajme, že funkcia φ nie je rýdzo monotónna na J, potom sú dve možnosti.

1. Existujú body $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$ také, že na intervale $\langle t_1; t_2\rangle$ je φ konštantná, t. j. pre všetky body $t \in \langle t_1; t_2\rangle$ platí $\varphi'(t) = 0$. To je spor.

2. Existujú body $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$ také, že:
   - funkcia φ klesá v bode t_1 a rastie v bode t_2, t. j. $\varphi'(t_1) < 0$, $\varphi'(t_2) > 0$, resp.
   - funkcia φ rastie v bode t_1 a klesá v bode t_2, t. j. $\varphi'(t_1) > 0$, $\varphi'(t_2) < 0$.

To znamená, že existuje bod $t_0 \in (t_1; t_2)$, v ktorom má φ extrém (v prvom prípade minimum a v druhom prípade maximum), t. j. $\varphi'(t_0) = 0$. To je spor. ■

Veta 1.1.8 (2. metóda substitúcie, 2. ms).
I, J sú intervaly, funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to I$ má nenulovú deriváciu $\varphi'(t) \neq 0$ na intervale J, funkcia $F(t)$ je primitívna k $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na J.

$\implies$ $F\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I a platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + c,\ \ x \in I,\ \ c \in R.$$

Dôkaz.
Funkcia φ je rýdzo monotónna, t. j. rastúca alebo klesajúca na J (lema 1.1.7). To znamená, že je prostá (ma1: veta 3.3.13) a existuje k nej inverzná funkcia $t = \varphi^{-1}(x)\colon I \to J$.
Pre $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ potom platí (derivácia zloženej a inverznej funkcie)

$$\begin{aligned}\big[F\big(\varphi^{-1}(x)\big)\big]' &= F'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = F'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' \\ &= f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \cdot \big[\varphi^{-1}(x)\big]' = f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \cdot \tfrac{1}{\varphi'(t)} = f\big(\varphi(t)\big) = f(x).\end{aligned}$$

To znamená, že $F\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na I a veta je dokázaná. ■

Použitie vety 1.1.8 (2. ms) je podobné ako vety 1.1.6 (1. ms). Vetu používame na výpočet neurčitého integrálu funkcie $f(x)$. Pomocou substitúcie $x = \varphi(t)$ zostrojíme integrál

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

ktorý vypočítame, t. j. nájdeme primitívnu funkciu $F(t)$. Potom použijeme **inverznú substitúciu** $t = \varphi^{-1}(x)$ a dostaneme primitívnu funkciu $F\big(\varphi^{-1}(x)\big)$. Aj v tomto prípade overujeme splnenie predpokladov vety väčšinou až po úspešnom integrovaní.

Príklad 1.1.14.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \sin t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t,\ \ (\sin t)' = \cos t > 0 \text{ pre } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ t = \arcsin x & t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \mathrm{d}t = t + c = \arcsin x + c,\ x \in (-1;1),\ c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x = \cos t & x \in (-1;1) & \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t,\ \ -(\cos t)' = \sin t > 0 \text{ pre } t \in (0;\pi) \\ t = \arccos x & t \in (0;\pi) & \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t| = \sin t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t} = -\int \mathrm{d}t = -t + c = -\arccos x + c,\ x \in (-1;1),\ c \in R.\ ■$$

Poznámka 1.1.9.
Obe riešenia sú správne, pretože pre všetky $x \in \langle -1;1\rangle$ *platí rovnosť* $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, *t. j. platí* $\arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}$ *(ma1: veta 3.1.11). To znamená, že obe primitívne funkcie sa na intervale* $(-1;1)$ *líšia iba o konštantu* $\frac{\pi}{2}$.

Pri integrovaní sa často rôzne metódy kombinujú, pričom ich niekedy treba použiť aj viackrát za sebou. Ak použijeme pri integrovaní rôzne postupy (rôzne metódy, rôzne substitúcie ap.), môžeme dospieť k rôznym primitívnym funkciám (poznámka 1.1.9). Pokiaľ sme sa nepomýlili, tieto primitívne funkcie sa líšia iba o konštantu. Pri niektorých postupoch sa môže obor definície integrálu obmedziť. O správnosti výsledku sa presvedčíme napríklad jeho spätným derivovaním.

Príklad 1.1.15.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle & \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t,\ (\sin t)'=\cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})-\{0\} \\ t=\arcsin x & t\in\langle -\frac{\pi}{2};0)\cup(0;\frac{\pi}{2}\rangle & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int \frac{\cos^2 t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int \frac{1-\sin^2 t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \int \Big(\frac{1}{\sin^2 t}-1\Big)\,\mathrm{d}t = -\operatorname{cotg} t - t + c$$

$$= -\frac{\cos t}{\sin t} - t + c = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c,\ x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u=\sqrt{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac12} & u'=-2x\cdot\frac12\cdot(1-x^2)^{-\frac12}=-x(1-x^2)^{-\frac12}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v'=\frac{1}{x^2}=x^{-2} & v=\frac{x^{-1}}{-1}=-x^{-1}=-\frac1x \end{array}\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c,\ x\in(-1;0)\cup(0;1),\ c\in R. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.16.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in(0;\infty) \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x} & t\in R \end{array}\right] = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}+c = \frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln x & u'=\frac1x \\ v'=\frac1x & v=\ln x \end{array}\right] = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$$\Longrightarrow\ 2\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2 x + 2c.\ \Longrightarrow\ \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + c,\ x>0,\ c\in R.$$ [16] $\blacksquare$

Príklad 1.1.17.

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac12\int \mathrm{d}x + \frac12\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=2x & x\in R \\ x=\frac{t}{2},\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2} & t\in R \end{array}\right]$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2\cdot 2}\int \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2} + \frac14\sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u=\cos x & u'=-\sin x \\ v'=\cos x & v=\sin x \end{array}\right] = \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 2x}{2} + \int (1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sin 2x}{2} + x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x.\ \Longrightarrow\ 2\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 2x}{2} + x + 2c.$$

$$\Longrightarrow\ \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$ [16] $\blacksquare$

[16] Keďže c predstavuje ľubovoľnú konštantu, predstavuje aj $2c$ ľubovoľnú konštantu. V tomto prípade je výhodnejšie najprv zvoliť $2c$ a nemeniť znak konštanty.

Príklad 1.1.18.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \operatorname{tg} x & \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,\mathrm{d}x = (t^2+1)\,\mathrm{d}x, \quad t \in R \\ x = \operatorname{arctg} t & \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}, \qquad x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ k \in Z \end{array} \right] = \int \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$= \int \frac{t^3+t-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t\cdot(t^2+1)-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1)'\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$= \frac{t^2}{2} - \ln(t^2+1) + c = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + c,$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in Z,\ c \in R. \ \blacksquare$$

Poznámka 1.1.10.
V príklade 1.1.18 sme vzťah $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$ *vypočítali najprv zložitejšie priamo zo substitúcie* $t = \operatorname{tg} x$ *a potom v druhom riadku jednoducho z inverznej substitúcie* $x = \operatorname{arctg} t$.
V praxi si väčšinou vyberieme jednoduchší spôsob výpočtu vzťahu medzi diferenciálmi.

Príklad 1.1.19.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1}} = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t = \mathrm{e}^x & x \in R & \mathrm{e}^{2x} = t^2 & (\ln t)' = \frac{1}{t} > 0 \\ x = \ln t & t \in (0;\infty) & \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t} & \end{array} \right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u = \frac{1}{t} & t \in (0;\infty) & (\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} < 0 & \sqrt{t^2+t+1} = \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + 1} = \frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u} \\ t = \frac{1}{u} & u \in (0;\infty) & \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2} & \sqrt{1+u+u^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u}\,\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}$$

$$= \int \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } v = u + \frac{1}{2} & u \in (0;\infty) & 1 + u + u^2 = u^2 + u + 1 \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}v & v \in (\frac{1}{2};\infty) & \quad = (u + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4} = v^2 + \frac{3}{4} \end{array} \right] = -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$= -\ln\left(v + \sqrt{v^2 + \tfrac{3}{4}}\right) + c_1 = -\ln\left(u + \tfrac{1}{2} + \sqrt{1+u+u^2}\right) + c_1$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right) + c_1 = -\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t} + c_1 = \ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}} + c_1$$

$$= \ln 2 + \ln t - \ln\left(2 + t + 2\sqrt{t^2+t+1}\right) + c_1 = \left[\ c = c_1 + \ln 2,\ c \in R,\ c_1 \in R\ \right]$$

$$= x - \ln\left(2 + \mathrm{e}^x + 2\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1}\right) + c,\ x \in R,\ c \in R. \ \blacksquare$$

Poznámka 1.1.11.
V predchádzajúcom príklade 1.1.19 sme použili postupne tri rôzne substitúcie

$$t = \mathrm{e}^x,\ x \in R,\ t \in (0;\infty), \qquad u = \frac{1}{t},\ u \in (0;\infty), \qquad v = u + \frac{1}{2},\ v \in (\tfrac{1}{2};\infty).$$

Môžeme ich spojiť do jednej substitúcie $v = u + \frac{1}{2} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{2}$, $x \in R$, $v \in (\frac{1}{2};\infty)$ *a dostaneme rovnaký výsledok.*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \textit{Subst. } v = \frac{1}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{2} & \frac{1}{\mathrm{e}^x} = v - \frac{1}{2} = \frac{2v-1}{2},\ \ \mathrm{e}^x = \frac{2}{2v-1} & x \in R & \mathrm{d}x = \left[\ln 2 - \ln(2v-1)\right]'\mathrm{d}v \\ & x = \ln\frac{2}{2v-1} = \ln 2 - \ln(2v-1) & v \in (\frac{1}{2};\infty) & \quad = \left[0 - \frac{2}{2v-1}\right]\mathrm{d}v = -\frac{2\,\mathrm{d}v}{2v-1} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l|l} \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1 = \left[\frac{2}{2v-1}\right]^2 + \frac{2}{2v-1} + 1 = \frac{4+2(2v-1)+(2v-1)^2}{(2v-1)^2} & \sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1} = \frac{2\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}}{2v-1} \\ \quad = \frac{4+4v-2+4v^2-4v+1}{(2v-1)^2} = \frac{4v^2+3}{(2v-1)^2} = \frac{4(v^2+\frac{3}{4})}{(2v-1)^2} & \end{array} \right] = \int \frac{-\frac{2\,\mathrm{d}v}{2v-1}}{\frac{2\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}}{2v-1}}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}} = \cdots = x - \ln\left(2 + \mathrm{e}^x + 2\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1}\right) + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

Ak pripustíme neexistenciu funkcie f alebo jej derivácie f' v konečnom počte bodov daného intervalu I, potom môžeme pojem primitívnej funkcie na I zovšeobecniť.

Funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **zovšeobecnená primitívna funkcia k funkcii** $f(x)$, $x \in I$ **na intervale** I, ak pre všetky $x \in I$ okrem konečného počtu bodov existuje derivácia $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 1.1.12.
Interval I nemusí byť otvorený.
Primitívna funkcia je zároveň aj zovšeobecnenou primitívnou funkciou.

Poznámka 1.1.13.
Ak je $F(x)$ zovšeobecnená primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I a $c \in R$ je konštanta, potom $G(x) = F(x) + c$ je tiež zovšeobecnená primitívna funkcia k $f(x)$ na I (veta 1.1.1).
Ak sú F, G zovšeobecnené primitívne funkcie k f na intervale I, potom $F - G$ je konštantná funkcia na intervale I (veta 1.1.2).
Dá sa dokázať, že ku každej po častiach spojitej funkcii f na intervale I existuje na tomto intervale zovšeobecnená primitívna funkcia (viď veta 1.2.27 a jej dôsledky).

Heavisideova[17] jednotková funkcia je definovaná vzťahom $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pre } x < 0, \\ 1 \text{ pre } x \geq 0. \end{cases}$

Príklad 1.1.20.
Heavisideova jednotková funkcia f nemá na R primitívnu funkciu.

Riešenie.
Predpokladajme, že F je primitívna funkcia k f na R, t. j. je aj spojitá na R.
Pre $x < 0$ platí $F'(x) = f(x) = 0$, t. j. $F(x) = c_1$.
Pre $x \geq 0$ platí $F'(x) = f(x) = 1$, t. j. $F(x) = x + c_2$.
Aby bola F spojitá v bode 0, musí platiť $c_1 = F(0) = 0 + c_2$, t. j. $c_1 = c_2$.
Pre jednostranné derivácie v bode 0 potom platí:

$$\left.\begin{array}{l} F'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{c_1 - c_2}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{0}{x} = 0. \\ F'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x+c_2-c_2}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1. \end{array}\right\} \Rightarrow F'_-(0) \neq F'_+(0).$$

To znamená, že $F'(0)$ nexistuje a f nemá na R primitívnu funkciu. ■

Poznámka 1.1.14.
Heavisideova jednotková funkcia f má na $(-\infty; 0)$ primitívnu funkciu $F_1(x) = c_1$, $c_1 \in R$ a na $(0; \infty)$ primitívnu funkciu $F_2(x) = x + c_2$, $c_2 \in R$.
Ak položíme $c_1 = c_2 = c$, potom zovšeobecnenou primitívnou funkciou k f na R je funkcia[18]

$$F(x) = \begin{cases} c & \text{pre } x < 0, \\ x + c & \text{pre } x \geq 0, \quad c \in R. \end{cases}$$

1.1.2 Integrovanie racionálnych funkcií

Integrovanie polynómu $a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^n$ stupňa n, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, $a_n \neq 0$, je triviálne. Platí

$$\int \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) \mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + c, \ c \in R.$$

[17] *Oliver Heaviside* [1850 – 1925] — anglický matematik, fyzik a elektrotechnik.
[18] Funkciu F môžeme vyjadriť aj v tvare $F(x) = \frac{x+|x|}{2} + c$, $x \in R$, $c \in R$.

Integrovanie racionálnej lomenej funkcie $f(x) = \frac{f_m(x)}{f_n(x)}$, kde $f_m(x)$, $f_n(x)$ sú polynómy stupňov $m, n \in N \cup \{0\}$, je pomerne jednoduchá, ale mnohokrát veľmi prácna záležitosť.

Vo väčšine prípadov musíme funkciu f najprv upraviť na jednoduchší, ľahšie integrovateľný tvar. Tieto úpravy sú algebraickej povahy a nesúvisia s vlastným integrovaním, preto nasledujúce úvahy a tvrdenia uvádzame bez dôkazov (viď napr. [7, 11, 34]).

Každá funkcia $f(x) = \frac{f_m(x)}{f_n(x)}$, $m, n \in N \cup \{0\}$, $m \geq n$ sa dá rozložiť na tvar[19]

$$f(x) = f_{m-n}(x) + \tfrac{f_k(x)}{f_n(x)}, \text{ kde } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

pričom $f_{m-n}(x)$, $f_k(x)$ sú polynómy stupňov $m-n$, k. Uvedený rozklad získame delením $f_m(x)$ polynómom $f_n(x)$, pričom $f_k(x)$ predstavuje zvyšok tohto delenia.

V ďalších úvahách sa obmedzíme na vyšetrovanie racionálnej rýdzo lomenej funkcie (t. j. pre $m < n$) a jej rozklad na parciálne zlomky, ktoré vieme jednoducho integrovať.

Parciálnym (čiastočným) zlomkom nazývame každú funkciu v tvare

$$f(x) = \tfrac{a}{(x-b)^n}, \text{ resp. } f(x) = \tfrac{px+q}{(x^2+rx+s)^n},$$

kde $n \in N$, $a, b \in R$, $a \neq 0$ a v druhom prípade[20] $n \in N$, $p, q, r, s \in R$, $px+q \neq 0$, $r^2 - 4s < 0$.

Zo základnej vety algebry a jej dôsledkov pre reálne polynómy vyplýva, že každý polynóm stupňa $n \in N$ s reálnymi koeficientami $a_0, a_2, \ldots, a_n \in R$

$$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

sa dá nad poľom komplexných čísel C rozložiť na súčin

$$f_n(x) = a_n \underbrace{(x-b_1)^{n_1}(x-\overline{b_1})^{n_1} \cdots (x-b_k)^{n_k}(x-\overline{b_k})^{n_k}}_{\text{komplexne združené korene}} \cdot \underbrace{(x-b_{k+1})^{n_{k+1}} \cdots (x-b_l)^{n_l}}_{\text{reálne korene}},$$

pričom $b_1, \ldots, b_k \in C$ a $b_{k+1}, \ldots, b_l \in R$ sú (komplexné a reálne) korene s násobnosťami $n_1, \ldots, n_l$ a pre násobnosti platí $2(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) + n_{k+1} + \cdots + n_l = n$.

Poznámka 1.1.15.
Ak má polynóm $f_n(x)$ s reálnymi koeficientami komplexný koreň $b = u + \mathrm{i}\,v$, $u, v \in R$, $v \neq 0$, potom má aj komplexne združený koreň $\overline{b} = u - \mathrm{i}\,v$. To znamená, že ak je n nepárne, polynóm $f_n(x)$ má aj reálny koreň. Pre kvadratický člen $f_2(x) = x^2 + rx + s$, ktorý má iba komplexné korene $b = u + \mathrm{i}\,v$, $\overline{b} = u - \mathrm{i}\,v$ potom platí

$$\begin{aligned} f_2(x) = x^2 + rx + s &= (x-b)(x-\overline{b}) = (x-u-\mathrm{i}\,v)(x-u+\mathrm{i}\,v) \\ &= (x-u)^2 - (\mathrm{i}\,v)^2 = (x-u)^2 + v^2 = x^2 - 2ux + u^2 + v^2, \end{aligned}$$

t. j. pre koeficienty platí $r = -2u$, $s = u^2 + v^2$, $r^2 - 4s = -4v^2 < 0$.

Pri hľadaní rozkladu funkcie $\frac{f_m(x)}{f_n(x)}$, $m < n$ na parciálne zlomky môžeme predpokladať, že polynómy $f_m(x)$, $f_n(x)$ nemajú spoločné korene, t. j. že sú nesúdeliteľné.

[19] $f_m(x) = f(x) f_n(x) = f_{m-n}(x) f_n(x) + f_k(x)$.

[20] To znamená, že kvadratický člen $x^2 + rx + s$ nemá reálne korene, ale dva komplexne združené korene.

V prípade súdeliteľnosti polynómov $f_m(x)$, $f_n(x)$ existuje ich spoločný koreň $b \in C$ (jeden reálny alebo dva komplexne združené) a existujú polynómy $f_{m-1}(x)$, $f_{n-1}(x)$ stupňov $m-1$, $n-1$ také, že $f_m(x) = (x-b)f_{m-1}(x)$, $f_n(x) = (x-b)f_{n-1}(x)$. Potom platí

$$\tfrac{f_m(x)}{f_n(x)} = \tfrac{(x-b)f_{m-1}(x)}{(x-b)f_{n-1}(x)} = \tfrac{f_{m-1}(x)}{f_{n-1}(x)},$$

t. j. krátime čitateľa aj menovateľa výrazom $x-b$. Tento postup opakujeme, pokým sú čitateľ a menovateľ súdeliteľné.

Veta 1.1.9 (Rozklad na parciálne zlomky).
$f_m(x)$, $f_n(x)$ sú reálne polynómy so stupňami m, n, $m<n$, $m\in N\cup\{0\}$, $n\in N$. Polynóm $f_n(x)$ má komplexné korene $b_1 = u_1 + \mathrm{i}\,v_1, \ldots, b_k = u_k + \mathrm{i}\,v_k$, $u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k \in R$, $u_1 \neq 0, \ldots, u_k \neq 0$ a reálne korene $b_{k+1}, \ldots, b_l \in R$ s násobnosťami $n_1, \ldots, n_k, \ldots, n_l$.

$\Longrightarrow$ Existujú jednoznačne určené $\alpha_{ji}, \beta_{ji} \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n_j$ pre $j = 1, \ldots, k$ a $\gamma_{ji} \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n_j$ pre $j = k+1, \ldots, l$ také, že platí[21]

$$\begin{aligned}
\tfrac{f_m(x)}{f_n(x)} = {} & \tfrac{\alpha_{11}x+\beta_{11}}{(x-u_1)^2+v_1^2} + \tfrac{\alpha_{12}x+\beta_{12}}{\left[(x-u_1)^2+v_1^2\right]^2} + \cdots + \tfrac{\alpha_{1n_1}x+\beta_{1n_1}}{\left[(x-u_1)^2+v_1^2\right]^{n_1}} \\
& + \tfrac{\alpha_{21}x+\beta_{21}}{(x-u_2)^2+v_2^2} + \tfrac{\alpha_{22}x+\beta_{22}}{\left[(x-u_2)^2+v_2^2\right]^2} + \cdots + \tfrac{\alpha_{2n_2}x+\beta_{2n_2}}{\left[(x-u_2)^2+v_2^2\right]^{n_2}} \\
& \cdots + \tfrac{\alpha_{k1}x+\beta_{k1}}{(x-u_k)^2+v_k^2} + \tfrac{\alpha_{k2}x+\beta_{k2}}{\left[(x-u_k)^2+v_k^2\right]^2} + \cdots + \tfrac{\alpha_{kn_k}x+\beta_{kn_k}}{\left[(x-u_k)^2+v_k^2\right]^{n_k}} \\
& + \tfrac{\gamma_{k+1,1}}{x-b_{k+1}} + \tfrac{\gamma_{k+1,2}}{(x-b_{k+1})^2} + \cdots + \tfrac{\gamma_{k+1,n_{k+1}}}{(x-b_{k+1})^{n_{k+1}}} \\
& + \tfrac{\gamma_{k+2,1}}{x-b_{k+2}} + \tfrac{\gamma_{k+2,2}}{(x-b_{k+2})^2} + \cdots + \tfrac{\gamma_{k+2,n_{k+2}}}{(x-b_{k+2})^{n_{k+2}}} \\
& \cdots + \tfrac{\gamma_{l1}}{x-b_l} + \tfrac{\gamma_{l2}}{(x-b_l)^2} + \cdots + \tfrac{\gamma_{ln_l}}{(x-b_l)^{n_l}}.
\end{aligned}$$

Koeficienty α_{ji}, β_{ji}, γ_{ji} z predchádzajúcej vety určíme napríklad metódou neurčitých koeficientov (pr. 1.1.25).

Príklad 1.1.21.
Vypočítajte integrál $I_n = \displaystyle\int \tfrac{\mathrm{d}x}{(x-b)^n}$ pre $n\in N$, $b\in R$.

Riešenie.

$$I_n = \int \tfrac{\mathrm{d}x}{(x-b)^n} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x-b & x\in(-\infty;b),\ t\in(-\infty;0) \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & x\in(b;\infty),\quad t\in(0;\infty) \end{array} \right] = \int \tfrac{\mathrm{d}t}{t^n}.$$

$$I_1 = \int \tfrac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|x-b| + c,\ x\in R - \{b\},\ c\in R.$$

$$I_n = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \tfrac{t^{-n+1}}{-n+1} + c = \tfrac{(x-b)^{1-n}}{1-n} + c = c - \tfrac{1}{(n-1)(x-b)^{n-1}},$$

$$x\in R - \{b\},\ c\in R \text{ pre } n = 2, 3, 4, \ldots \ \blacksquare$$

[21] Sú to koeficienty α_{11}, β_{11}, α_{12}, β_{12}, $\ldots$, $\alpha_{1n_1}, \beta_{1n_1}$, resp. α_{21}, β_{21}, α_{22}, β_{22}, $\ldots$, $\alpha_{2n_2}, \beta_{2n_2}$, atď. α_{k1}, β_{k1}, α_{k2}, β_{k2}, $\ldots$, $\alpha_{kn_k}, \beta_{kn_k}$ a analogicky koeficienty $\gamma_{k+1,1}$, $\gamma_{k+1,2}$, $\ldots$, $\gamma_{k+1,n_{k+1}}$, resp. $\gamma_{k+2,1}$, $\gamma_{k+2,2}$, $\ldots$, $\gamma_{k+2,n_{k+2}}$, atď. γ_{l1}, γ_{l2}, $\ldots$, γ_{ln_l}.

Príklad 1.1.22.
Vypočítajte $I_n = \int \frac{(x+\frac{r}{2})\,\mathrm{d}x}{(x^2+rx+s)^n}$, $J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+rx+s)^n}$ pre $n\in N$, $r,s\in R$, $r^2-4s<0$.

Riešenie.
Označme $4s-r^2=4\alpha^2$, potom platí $x^2+rx+s=(x+\frac{r}{2})^2+s-\frac{r^2}{4}=(x+\frac{r}{2})^2+\alpha^2>0$.

$$I_n=\int\frac{(x+\frac{r}{2})\,\mathrm{d}x}{(x^2+rx+s)^n}=\int\frac{(x+\frac{r}{2})\,\mathrm{d}x}{\big[(x+\frac{r}{2})^2+\alpha^2\big]^n}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } t=(x+\frac{r}{2})^2+\alpha^2 & x\in(-\infty;-\frac{r}{2}\rangle,\ t\in\langle\alpha^2;\infty)\\ \mathrm{d}t=2(x+\frac{r}{2})\,\mathrm{d}x & x\in\langle-\frac{r}{2};\infty),\quad t\in\langle\alpha^2;\infty)\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^n}.$$

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+c=\frac{1}{2}\ln t+c=\frac{1}{2}\ln\big(x^2+rx+s\big)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

$$I_n=\frac{1}{2}\int t^{-n}\,\mathrm{d}t=\frac{t^{-n+1}}{2(-n+1)}+c=\frac{(x^2+rx+s)^{1-n}}{2(1-n)}+c=c-\frac{1}{2(n-1)(x^2+rx+s)^{n-1}},$$
$$x\in R,\ c\in R \text{ pre } n=2,3,4,\ldots.$$

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+rx+s)^n}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\big[(x+\frac{r}{2})^2+\alpha^2\big]^n}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } t=x+\frac{r}{2} & x\in R\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x & t\in R\end{array}\right]=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^n}.$$

$$J_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}+c=\frac{1}{\sqrt{s-\frac{r^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{r}{2}}{\sqrt{s-\frac{r^2}{4}}}+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^n}=\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{\alpha^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^n}=\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{t^2+\alpha^2-t^2}{(t^2+\alpha^2)^n}\,\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{(t^2+\alpha^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^n}-\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^n}=\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}}-\frac{1}{2\alpha^2}\int\frac{2t\cdot t\,\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^n}$$
$$=\left[\begin{array}{l|l}u'=\frac{2t}{(t^2+\alpha^2)^n}=2t\cdot(t^2+\alpha^2)^{-n} & u=\frac{(t^2+\alpha^2)^{-n+1}}{-n+1}=\frac{1}{(1-n)(t^2+\alpha^2)^{n-1}}\\ v\ =t & v'=1\end{array}\right]$$
$$=\frac{1}{\alpha^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}}-\frac{1}{2\alpha^2}\left[\frac{t}{(1-n)(t^2+\alpha^2)^{n-1}}-\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-n)(t^2+\alpha^2)^{n-1}}\right]$$
$$=\frac{2(1-n)}{2\alpha^2(1-n)}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}}-\frac{t}{2\alpha^2(1-n)(t^2+\alpha^2)^{n-1}}+\frac{1}{2\alpha^2(1-n)}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}}$$
$$=\frac{2(1-n)+1}{2\alpha^2(1-n)}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\alpha^2)^{n-1}}-\frac{t}{2\alpha^2(1-n)(t^2+\alpha^2)^{n-1}}=\frac{3-2n}{2\alpha^2(1-n)}J_{n-1}+\frac{t}{2\alpha^2(n-1)(t^2+\alpha^2)^{n-1}}$$
$$=\frac{(3-2n)}{(2s-\frac{r^2}{2})(1-n)}J_{n-1}-\frac{x+\frac{r}{2}}{(2s-\frac{r^2}{2})(1-n)(x^2+rx+s)^{n-1}},\ x\in R \text{ pre } n=2,3,4,\ldots. \blacksquare$$

Pomocou príkladov 1.1.21 a 1.1.22 môžeme vypočítať integrál každého parciálneho zlomku, pretože pre $a,b\in R$ a $p,q,r,s\in R$ platí

$$\int\frac{a\,\mathrm{d}x}{(x-b)^n}=a\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-b)^n},\quad \int\frac{(px+q)\,\mathrm{d}x}{(x^2+rx+s)^n}=p\int\frac{(x+\frac{r}{2})\,\mathrm{d}x}{(x^2+rx+s)^n}+\big(q-\frac{pr}{2}\big)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+rx+s)^n}.$$

Príklad 1.1.23.
a) $$\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\cdot x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=\left[\begin{array}{l|l}u'=\frac{2x}{(x^2+1)^2}=2x\cdot(x^2+1)^{-2} & u=\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x^2+1}\\ v\ =x & v'=1\end{array}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

b) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=\int\frac{(x^2+1-x^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=\int\frac{(x^2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}-\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}-\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\operatorname{arctg}x-\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(x^2+1)}\right]+c=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}+c,\ x\in R,\ c\in R. \blacksquare$$

Príklad 1.1.24.
Vypočítajte neurčitý integrál $\int\frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}$.

Riešenie.
Ak použijeme výsledky príkladu 1.1.22 a dosadíme $n=2$, $r=2$, $s=3$, potom platí:

$$\int\frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{(2x+2+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}=2\int\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}=2I_2+J_2$$
$$=-2\cdot\frac{1}{2(2-1)(x^2+2x+3)^{2-1}}+\frac{3-2\cdot2}{(2\cdot3-\frac{2^2}{2})(1-2)}J_1-\frac{x+\frac{2}{2}}{(2\cdot3-\frac{2^2}{2})(1-2)(x^2+2x+3)^{2-1}}$$
$$=-\frac{4}{4(x^2+2x+3)}+\frac{1}{4}J_1+\frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-\frac{2^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{2}{2}}{\sqrt{3-\frac{2^2}{4}}}+\frac{x-3}{4(x^2+2x+3)}+c$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{x-3}{4(x^2+2x+3)}+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Iné riešenie.
Integrál môžeme priamo vypočítať podľa vzoru z príkladu 1.1.22.

$$\int\frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}+\int\frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}=\circledast$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst.}\qquad z=x+1,\ \mathrm{d}z=\mathrm{d}x & x\in R\\ x^2+2x+3=(x+1)^2+2=z^2+(\sqrt{2})^2 & z\in R\end{array}\right]=\int\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2\,\mathrm{d}z}{(z^2+2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{(z^2+2-z^2)\,\mathrm{d}z}{(z^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}-\frac{1}{4}\int\frac{2z\cdot z\,\mathrm{d}z}{(z^2+2)^2}=\left[\begin{array}{l|l}u'=\frac{2z}{(z^2+2)^2} & u=-\frac{1}{z^2+2}\\ v=z & v'=1\end{array}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}-\frac{1}{4}\left[-\frac{z}{z^2+2}+\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}\right]=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}+\frac{z}{4(z^2+2)}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+(\sqrt{2})^2}+\frac{z}{4(z^2+2)}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{z}{4(z^2+2)}+c_1=\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}+c_1,\ x\in R,\ c_1\in R.$$

$$\int\frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } t=x^2+2x+3=(x+1)^2+2 & x\in R\\ \mathrm{d}t=(2x+2)\,\mathrm{d}x & t\in\langle 2;\infty)\end{array}\right]=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\int t^{-2}\,\mathrm{d}t=\frac{t^{-1}}{-1}+c_2$$
$$=c_2-\frac{1}{t}=c_2-\frac{1}{x^2+2x+3}=c_2-\frac{4}{4(x^2+2x+3)},\ x\in R,\ c_2\in R.$$

$$\circledast=\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{x-3}{4(x^2+2x+3)}+c,\ x\in R,\ \text{pričom } c=c_1+c_2,\ c\in R.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.25.

a) $$\int\frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x=\int\left[x^2+x+1+\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\left[\begin{array}{l|rl|rl}\text{Rozklad na parciálne zlomky:} & 1= & \alpha+\gamma & \alpha= & \frac{1}{2}\\ \frac{x^3-x^2+2x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}=\frac{\alpha(x-1)(x^2+1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} & -1= & -\alpha+\beta+\delta-2\gamma & \beta= & 1\\ x^3-x^2+2x+0=\alpha(x-1)(x^2+1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x-1)^2 & 2= & \alpha+\gamma-2\delta & \gamma= & \frac{1}{2}\\ \qquad=(\alpha+\gamma)x^3+(-\alpha+\beta+\delta-2\gamma)x^2+(\alpha-2\delta+\gamma)x+(-\alpha+\beta+\delta) & 0= & -\alpha+\beta+\delta & \delta= & -\frac{1}{2}\end{array}\right]$$
$$=\int\left[x^2+x+1\right]\mathrm{d}x+\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int(x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c,\ x\in R-\{1\},\ c\in R.$$

b) $$\int\frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\left[\begin{array}{l|l|rl}\text{Rozklad na parciálne zlomky:} & -2=\alpha+\gamma & \beta= & 1\\ \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{x+1}+\frac{\delta}{(x+1)^2}=\frac{\alpha x(x+1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma x^2(x+1)+\delta x^2}{x^2(x+1)^2} & 0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta & \alpha= & -2\\ -2x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+1=\alpha x(x+1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma x^2(x+1)+\delta x^2 & 0=\alpha+2\beta & \gamma= & 0\\ \qquad=(\alpha+\gamma)x^3+(2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2+(\alpha+2\beta)x+\beta & 1=\beta & \delta= & 3\end{array}\right]$$
$$=\int\left[-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x=-2\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{3}{x+1}+c,\ x\in R-\{0,-1\},\ c\in R.\ \blacksquare$$

1.1.3 Integrovanie iracionálnych funkcií

S integrovaním iracionálnych funkcií sú väčšinou problémy a často sa nezaobídeme bez nekonečných radov. Existujú skupiny iracionálnych funkcií, ktoré dokážeme integrovať relatívne bez problémov. Väčšinou ich vhodným spôsobom (najčastejšie substitúciou) prevedieme na integrály racionálnych funkcií (tzv. **integrál racionalizujeme**).

- **Integrály typu** $\int f\Big(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\Big)\,\mathrm{d}x$**,** $n\in N$**,** $a,b,d,e\in R$**,** $ae-bd\neq 0$

Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba x, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.

Predpoklad $ae-bd\neq 0$ zaručuje, že podiel $\frac{ax+b}{dx+e}$ nie je konštantný.[22] Uvedené integrály najčastejšie racionalizujeme pomocou substitúcie

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}},\ \text{resp. } t^n=\frac{ax+b}{dx+e}.\ \Rightarrow\ t^n(dx+e)=ax+b,\ x=\frac{b-et^n}{dt^n-a}.$$

Príklad 1.1.26.

$$\int\frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c|c} x-x^2=x(1-x)>0 & x>0,1-x>0.\ \Rightarrow\ 0<x,x<1.\ \Rightarrow\ x\in(0;1). & x>0,1-x>0\\ x\in(0;1)\cup\emptyset\Rightarrow x\in(0;1) & x<0,1-x<0.\ \Rightarrow\ 0>x,x>1.\ \Rightarrow\ x\in\emptyset. & \sqrt{x^2}=|x|=x\end{array}\right]$$

$$=\int\frac{1-x}{x\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1-x}{x}\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}}=\int\frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x}{x}=\left[\begin{array}{c|c|c}\text{Subst.}\qquad t=\sqrt{\frac{1-x}{x}} & x=\frac{1}{1+t^2} & x\in(0;1)\\ t^2=\frac{1-x}{x},\ t^2x=1-x & \mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} & t\in(1;\infty)\end{array}\right]$$

$$=\int\frac{t\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=-2\int\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=-2\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=-2\int\Big[1-\frac{1}{1+t^2}\Big]\,\mathrm{d}t$$

$$=-2(t-\operatorname{arctg}t)+c=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}-2\sqrt{\frac{1-x}{x}}+c,\ x\in(0;1),\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c|c} x-x^2=x(1-x)>0 & x>0,1-x>0.\ \Rightarrow\ 0<x,x<1.\ \Rightarrow\ x\in(0;1). & x>0,1-x>0\\ x\in(0;1)\cup\emptyset\Rightarrow x\in(0;1) & x<0,1-x<0.\ \Rightarrow\ 0>x,x>1.\ \Rightarrow\ x\in\emptyset. & \sqrt{x^2}=|x|=x\end{array}\right]$$

$$=\int\frac{1-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c}\text{Subst.}\qquad t=\frac{1}{x} & x\in(0;1)\\ x=\frac{1}{t},\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & t\in(1;\infty)\end{array}\right]=-\int\frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}}{\sqrt{\frac{1}{t^3}}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$=-\int\frac{\sqrt{\frac{t-1}{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=-\int\frac{\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}t}{t}=\left[\begin{array}{c|c}\text{Subst.}\ \ u=\sqrt{t-1}=\sqrt{\frac{1}{x}-1}=\sqrt{\frac{1-x}{x}} & t\in(1;\infty)\\ u^2=t-1,\ t=1+u^2,\ \mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u & u\in(0;\infty)\end{array}\right]=-\int\frac{u\cdot 2u\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$=-2\int\frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=-2\int\frac{1+u^2-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=-2\int\Big[1-\frac{1}{1+u^2}\Big]\,\mathrm{d}u$$

$$=-2(u-\operatorname{arctg}u)+c=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}-2\sqrt{\frac{1-x}{x}}+c,\ x\in(0;1),\ c\in R.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.27.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=\left[\begin{array}{c|c|c}\text{Subst.}\qquad t=\sqrt[6]{x+1} & \sqrt{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^3=t^3 & x\in(-1;\infty)\\ t^6=x+1,\ 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^2=t^2 & t\in(0;\infty)\end{array}\right]=\int\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}$$

$$=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t=6\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1}\,\mathrm{d}t=6\int\Big[t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\Big]\,\mathrm{d}t$$

$$=6\Big[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\Big]+c=2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+c$$

$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln\big(\sqrt[6]{x+1}+1\big)+c,\ x\in(-1;\infty),\ c\in R.\ \blacksquare$$

---

[22] Ak konštanta $k\in R$, $k\neq 0$ je taká, že platí $k=(ax+b)/(dx+e)$, t. j. $ax+b=k(dx+e)$. Z toho vyplýva $(a-kd)x+(b-ke)=0$. Keďže polynóm je nulový, iba ak sú nulové jeho všetky koeficienty, platí $a=kd$, $b=ke$. Potom $a\cdot ke=b\cdot kd$, t. j. $ae=bd$. To znamená, že pre $ae-bd\neq 0$ podiel nie je konštantný. Z pohľadu lineárnej algebry hovoríme, že sú vektory (polynómy) $ax+b$, $dx+e$ lineárne nezávislé.

Príklad 1.1.28.

a) $$\int \frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.} \quad t=\sqrt[6]{x} & \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3,\ t^2=\sqrt[3]{x} & x\in(0;\infty) \\ t^6=x,\ 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x & \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t^6-1)6t^5\,\mathrm{d}t}{(t^3+t^4)t^6}$$

$$= 6\int \frac{(t^6-1)\,\mathrm{d}t}{t^4+t^5} = \left[\begin{array}{l} \frac{t^6-1}{t^5+t^4} = \frac{t^6+t^5-t^5-t^4+t^4+t^3-t^3-t^2+t^2+t-t-1}{t^5+t^4} \\ \qquad = \frac{t^5(t+1)-t^4(t+1)+t^3(t+1)-t^2(t+1)+t(t+1)-(t+1)}{t^4(t+1)} = t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4} \end{array}\right]$$

$$= 6\int \left(t-1+\tfrac{1}{t}-\tfrac{1}{t^2}+\tfrac{1}{t^3}-\tfrac{1}{t^4}\right)\mathrm{d}t = 6\int \left(t-1+\tfrac{1}{t}-t^{-2}+t^{-3}-t^{-4}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 6\left(\tfrac{t^2}{2}-t+\ln|t|-\tfrac{t^{-1}}{-1}+\tfrac{t^{-2}}{-2}+\tfrac{t^{-3}}{-3}\right)+c = 3t^2-6t+6\ln t+\tfrac{6}{t}-\tfrac{12}{t^2}+\tfrac{18}{t^3}+c$$

$$= 3t^2-6t+\ln t^6+\tfrac{6}{t}-\tfrac{12}{t^2}+\tfrac{18}{t^3}+c = 3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+\ln x+\tfrac{6}{\sqrt[6]{x}}-\tfrac{12}{\sqrt[3]{x}}+\tfrac{18}{\sqrt{x}}+c,$$

$$x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

b) $$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[\ x\geq 0,\ 1-\sqrt{x}\geq 0, x\in\langle 0;1\rangle\ \right] = \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[\ x\neq 1, x\in\langle 0;1)\ \right]$$

$$= \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} - \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \circledast$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z=1-x & x\in\langle 0;1) \\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z & z\in(0;1\rangle \end{array}\right] = \int \frac{-\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = -\int z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = -\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c_1 = -2\sqrt{z}+c_1$$

$$= -2\sqrt{1-x}+c_1,\ x\in\langle 0;1),\ c_1\in R.$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}},\ t^2(1-x)=x & x\in\langle 0;1) \\ x=\frac{t^2}{t^2+1},\ \mathrm{d}x=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & t\in\langle 0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u=t & u'=1 \\ v'=\frac{2t}{(t^2+1)^2} & v=\frac{-1}{t^2+1} \end{array}\right]$$

$$= \frac{-t}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = -\frac{t}{t^2+1}+\operatorname{arctg} t+c_2 = \left[\ \tfrac{t}{t^2+1}=\tfrac{1}{t}\cdot\tfrac{t^2}{t^2+1}=\tfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\cdot x=\sqrt{(1-x)x}=\sqrt{x-x^2}\ \right]$$

$$= -\sqrt{x-x^2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c_2,\ x\in\langle 0;1),\ c_2\in R.$$

$$\circledast = -2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+c,\ x\in\langle 0;1),\ \text{pričom } c=c_1+c_2,\ c\in R. \ \blacksquare$$

- **Integrály typu** $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+e}\right)\mathrm{d}x$**,** $a,b,e\in R$**,** $a\neq 0$

Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú iba x, $\sqrt{ax^2+bx+e}$ konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.

Tieto integrály môžeme racionalizovať niektorou z troch **Eulerových substitúcií** (ozn. 1. es, 2. es, 3. es). Použitie Eulerových substitúcií je síce účinné, ale väčšinou veľmi prácne. V dnešnej dobe, keď existujú účinné programy na symbolické výpočty (napr. komerčné `Wolfram Mathematica`, `Maple` alebo Open Source `wxMaxima`) tento problém už nie je relevantný. V niektorých prípadoch môžeme použiť iba jednu zo substitúcií a niekedy môžeme použiť aj všetky tri. Substitúcia použitá v príklade 1.1.26 je 3. es.

Často nám pri integrovaní pomôže substitúcia pomocou goniometrickej alebo hyperbolickej funkcie (príklady 1.1.30, 1.1.31), prípadne iná substitúcia (napr. $t=\frac{1}{x}$).

1. es má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x$ a používa sa pre $a>0$. Substitúcie $t\pm\sqrt{a}x$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme. Platí

$$ax^2+bx+e=t^2\pm 2t\sqrt{a}x+ax^2,\ \text{t. j. } bx\mp 2t\sqrt{a}x=t^2-e.\ \Rightarrow\ x=\frac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t}.$$

$$\sqrt{ax^2+bx+e}=t\pm\sqrt{a}x=t\pm\sqrt{a}\frac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t}=\frac{tb\mp 2\sqrt{a}t^2\pm\sqrt{a}t^2\mp e\sqrt{a}}{b\mp 2\sqrt{a}t}=\frac{\mp\sqrt{a}t^2+tb\mp e\sqrt{a}}{b\mp 2\sqrt{a}t}.$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2t(b\mp 2\sqrt{a}t)-(t^2-e)(\mp 2\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2tb\mp 4\sqrt{a}t^2\pm 2\sqrt{a}t^2\mp 2e\sqrt{a}}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2(\mp\sqrt{a}t^2+tb\mp e\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. es má tvar $\sqrt{ax^2+bx+e} = xt \pm \sqrt{e}$ a používa sa pre $e>0$. Substitúcie $xt \pm \sqrt{e}$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z nich si vyberieme. Platí

$$ax^2+bx+e = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{e}+e, \text{ t. j. } ax^2+bx = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{e}.$$
$$\Rightarrow\ (a-t^2)x^2 = (\pm 2\sqrt{e}t-b)x. \ \Rightarrow\ x = \tfrac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}.$$
$$\sqrt{ax^2+bx+e} = xt \pm \sqrt{e} = \tfrac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}t \pm \sqrt{e} = \tfrac{\pm 2\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e}\mp\sqrt{e}t^2}{a-t^2} = \tfrac{\pm\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e}}{a-t^2}.$$
$$\mathrm{d}x = \tfrac{\pm 2\sqrt{e}(a-t^2)-(\pm 2\sqrt{e}t-b)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{2(\pm\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e})}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. es má tvar $t = \sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ a používa sa, ak platí $ax^2+bx+e = a(x-\alpha)(x-\beta)$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha\neq\beta$, t. j. ak má polynóm ax^2+bx+e dva rôzne reálne korene α, β. V konkrétnych prípadoch musíme určiť definičný obor pre t a znamienko výrazu $a-t^2$. Platí

$$t\geq 0, t^2 = a\tfrac{x-\alpha}{x-\beta}, \text{ t. j. } t^2x-\beta t^2 = ax-a\alpha. \ \Rightarrow\ x = \tfrac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}.$$
$$(x-\alpha)(x-\beta) = \big(\tfrac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}-\alpha\big)\big(\tfrac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}-\beta\big)$$
$$= \tfrac{a\alpha-\beta t^2-a\alpha+\alpha t^2}{a-t^2}\cdot\tfrac{a\alpha-\beta t^2-a\beta+\beta t^2}{a-t^2} = \tfrac{(\alpha t^2-\beta t^2)\cdot(a\alpha-a\beta)}{(a-t^2)^2} = \tfrac{a(\alpha-\beta)^2t^2}{(a-t^2)^2}.$$
$$\sqrt{ax^2+bx+e} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{a\cdot\tfrac{a(\alpha-\beta)^2t^2}{(a-t^2)^2}} = \tfrac{|a(\alpha-\beta)|}{|a-t^2|}t.$$
$$\mathrm{d}x = \tfrac{-2\beta t(a-t^2)-(a\alpha-\beta t^2)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{-2a\beta t+2\beta t^3+2a\alpha t-2\beta t^3}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{2a(\alpha-\beta)t}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Príklad 1.1.29.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \left[\begin{array}{rr|l|ll} \text{1. es:} & \sqrt{x^2-1} = t-x & = t-\frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t} & x\in(-\infty;-1), & t\in(-1;0) \\ x^2-1 = t^2-2tx+x^2 & \Rightarrow\ t^2+1 = 2tx & = 2x(x+\sqrt{x^2-1}) & x\in(1;\infty), & t\in(1;\infty) \\ x = \frac{t^2+1}{2t},\ \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)2}{4t^2}\,\mathrm{d}t & = \frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t & & x\to\pm 1, & t\to\pm 1 \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{l|l} t = x+\sqrt{x^2-1} = \big(x+\sqrt{x^2-1}\big)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} & x\to-\infty,\ t\to 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{-\infty-\infty} = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty}\big(x+\sqrt{x^2-1}\big) = \infty+\infty = \infty & x\to\infty,\quad t\to\infty \end{array}\right] = \int\frac{\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}\cdot\frac{t^2-1}{2t}}$$
$$= \int\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = t^2+1 & t\in(-1;0),\ z\in(1;2) \\ \mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t & t\in(1;\infty),\ \ z\in(2;\infty) \end{array}\right] = \int\frac{2\,\mathrm{d}z}{z^2} = \int 2z^{-2}\,\mathrm{d}z = \frac{2z^{-1}}{-1}+c$$
$$= -\frac{2}{z}+c = -\frac{2}{t^2+1}+ = -\frac{2}{2x(x+\sqrt{x^2-1})}+c = -\frac{1}{x^2+x\sqrt{x^2-1}}+c,$$
$$x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty),\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \left[\begin{array}{lr|ll|l} \text{Subst.} & t = \frac{1}{x} & x\in(-\infty;-1), & t\in(-1;0) & \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t} \\ \multicolumn{2}{l|}{x = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}} & x\in(1;\infty), & t\in(0;1) & \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x\cdot\operatorname{sgn} x} \end{array}\right]$$
$$= \int\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn} t}} = \int\frac{-2t\cdot\operatorname{sgn} t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = 1-t^2 & t\in(-1;0),\ z\in(0;1) \\ \mathrm{d}z = -2t\,\mathrm{d}t & t\in(0;1),\quad z\in(0;1) \end{array}\right] = \circledast.$$

Pre $x\in(1;\infty)$ platí $t\in(0;1)$, $z\in(0;1)$, $\operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn} x = 1$. Z toho vyplýva:

$$\circledast = \int\frac{+\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \int\frac{z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z}{2} = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}}+c = \sqrt{z}+c = \sqrt{1-t^2}+c = \frac{\sqrt{x^2-1}}{+x}+c,\ c\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-1)$ platí $t\in(-1;0)$, $z\in(0;1)$, $\operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn} x = -1$. Z toho vyplýva:

$$\circledast = \int\frac{-\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = -\sqrt{z}+c = -\sqrt{1-t^2}+c = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x}+c = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c,\ c\in R.$$

$$\Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c,\ x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty),\ c\in R. \ \blacksquare$$

Obe riešenia príkladu 1.1.29 sú správne (môžeme jednoducho overiť derivovaním). Tieto riešenia sú posunuté o konštantu, pretože pre všetky $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ platí

$$-\frac{1}{x^2+x\sqrt{x^2-1}}=-\frac{1}{x[x+\sqrt{x^2-1}]}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x[x^2-(x^2-1)]}=-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x\cdot 1}=-1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

Príklad 1.1.30.
Vypočítajte[23] $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, kde $a>0$.

Riešenie.

$$I=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{2. es:}\quad \sqrt{a^2-x^2}=a-xt & =a-\frac{2at}{t^2+1}t=\frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1}=\frac{a(1-t^2)}{t^2+1} & x\in(-a;0),\ t\in(-1;0) \\ a^2-x^2=a^2-2axt+x^2t^2 & x=\frac{2at}{t^2+1},\quad t=\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x},\quad x\neq 0 & x\in(0;a),\quad t\in(0;1) \\ 2axt=x^2t^2+x^2\Rightarrow 2at=xt^2+x & dx=\frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{2a(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2} & x\to\pm a,\quad t\to\pm 1 \\ \multicolumn{3}{l}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}=\left[\text{L'H}\,\tfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{0}{\sqrt{a^2-0}}=0} \end{array}\right]=\int\frac{\frac{2a(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{t^2+1}}$$

$$=\int\frac{2\,dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg}t+c=2\operatorname{arctg}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}+c,\ x\in(-a;0)\cup(0;a),\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$I=\left[\begin{array}{r|l|l|r} \text{Subst. } x=a\sin t & \sin t=\frac{x}{a},\quad t=\arcsin\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ dx=a\cos t\,dt & \cos t>0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & =a\sqrt{\cos^2 t}=a\,|\cos t|=a\cos t \end{array}\right]$$

$$=\int\frac{a\cos t\,dt}{a\cos t}=\int dt=t+c=\arcsin\frac{x}{a}+c,\ x\in(-a;a),\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$I=\left[\begin{array}{r|l|l|r} \text{Subst. } x=a\cos t & \cos t=\frac{x}{a},\ t=\arccos\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)} \\ dx=-a\sin t\,dt & \sin t>0 \text{ pre } t\in(0;\pi) & t\in(0;\pi) & =a\sqrt{\sin^2 t}=a\,|\sin t|=a\sin t \end{array}\right]$$

$$=\int\frac{-a\sin t\,dt}{a\sin t}=-\int dt=-t+c=-\arccos\frac{x}{a}+c,\ x\in(-a;a),\ c\in R. \blacksquare$$

Príklad 1.1.31.
Vypočítajte $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, kde $a>0$.

Riešenie.

$$I=\left[\begin{array}{r|l|l} \text{1. es:}\quad \sqrt{x^2-a^2}=t-x & =t-\frac{t^2+a^2}{2t}=\frac{2t^2-t^2-a^2}{2t}=\frac{t^2-a^2}{2t} & x\in(-\infty;-a),\ t\in(-a;0) \\ x^2-a^2=t^2-2tx+x^2 & dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,dt=\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,dt & x\in(a;\infty),\quad t\in(a;\infty) \\ x=\frac{t^2+a^2}{2t},\quad t=x+\sqrt{x^2-a^2} & \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\infty+\infty=\infty & x\to\pm a,\quad t\to\pm a \\ \multicolumn{3}{l}{\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{a^2}{-\infty-\infty}=0} \end{array}\right]=\int\frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2-a^2}{2t}}$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty),\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$I=\left[\begin{array}{l|l|l} \text{3. es:}\quad t=\sqrt{\frac{x-a}{x+a}},\quad \sqrt{x^2-a^2}=\frac{2at}{|1-t^2|} & x\in(-\infty;-a),\ t\in(1;\infty) & x\to\pm\infty,\ t\to 1 \\ x-a=t^2(x+a)=t^2x+t^2a,\ \ x=\frac{a(1+t^2)}{1-t^2} & x\in(a;\infty),\quad t\in(0;1) & x\to a,\quad t\to 0 \\ dx=\frac{2at(1-t^2)-a(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,dt=\frac{4at}{(1-t^2)^2}\,dt & \multicolumn{2}{l}{\lim\limits_{x\to-a^-}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\sqrt{\frac{-2a}{0^-}}=\sqrt{\infty}=\infty} \\ \multicolumn{3}{l}{x^2-a^2=a^2\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}-a^2=\frac{a^2(1+t^2)^2-a^2(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2}=\frac{a^2[1+2t^2+t^4-(1-2t^2+t^4)]}{(1-t^2)^2}=\frac{4t^2a^2}{(1-t^2)^2}} \end{array}\right]=\int\frac{\frac{4at\,dt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2at}{|1-t^2|}}$$

$$=\int\frac{2\left|1-t^2\right|dt}{(1-t^2)^2}=\int\frac{2\left|t^2-1\right|dt}{|t^2-1|^2}=\int\frac{2\,dt}{|t^2-1|}=\circledast$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$, $t\in(1;\infty)$ platí $\left|t^2-1\right|=t^2-1$,

---

[23]Pre $a=1$ dostaneme príklad 1.1.14.

$$\circledast = \left[\begin{array}{l} t\pm 1 = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} \pm 1 = \frac{\sqrt{-x+a}}{\sqrt{-x-a}} \pm 1 = \frac{\sqrt{-x+a}\pm\sqrt{-x-a}}{\sqrt{-x-a}}. \Rightarrow \frac{t-1}{t+1} = \frac{\sqrt{-x+a}-\sqrt{-x-a}}{\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a}} \\ = \frac{\sqrt{-x+a}-\sqrt{-x-a}}{\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a}} \cdot \frac{\sqrt{-x+a}-\sqrt{-x-a}}{\sqrt{-x+a}-\sqrt{-x-a}} = \frac{(-x+a)-2\sqrt{(-x+a)(-x-a)}+(-x-a)}{(-x-a)-(-x-a)} = \frac{-2x-2\sqrt{(-x)^2-a^2}}{-2a} = \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}. \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_1 = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_1 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c_1,\ c_1\in R.$$

Pre $x\in(a;\infty)$, $t\in(0;1)$ platí $\left|t^2-1\right| = 1-t^2$,

$$\circledast = \left[\begin{array}{l} t\pm 1 = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} \pm 1 = \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}} \pm 1 = \frac{\sqrt{x-a}\pm\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}}. \Rightarrow \frac{t+1}{t-1} = \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}} \\ = \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}} \cdot \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}} = \frac{(x-a)+2\sqrt{(x-a)(x+a)}+(x+a)}{(x-a)-(x+a)} = \frac{2x+2\sqrt{x^2-a^2}}{-2a} = \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{-a}. \end{array} \right]$$

$$= -\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = -\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_1 = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c_1 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{-a}\right| + c_1,\ c_1\in R.$$

$$\Rightarrow\ I = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + c_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c,^{24}$$

$$x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty),\ \text{pričom } c = c_1 - \ln a,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

Môžeme použiť substitúciu $x = \cosh t$, ale musíme riešenie rozdeliť na dve časti, pretože obor integrovania $x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$, ale obor hodnôt funkcie $x = \cosh t\in(a;\infty)$.

Pre $x\in(a;\infty)$ platí

$$I = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = a\cosh t & \cosh t = \frac{x}{a},\ t = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} & x\in(a;\infty) & \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)} \\ \mathrm{d}x = a\sinh t\,\mathrm{d}t & \sinh t > 0 \text{ pre } t\in(0;\infty) & t\in(0;\infty) & \quad = a\sqrt{\sinh^2 t} = a\,|\sinh t| = a\sinh t \end{array} \right] = \int \frac{a\sinh t\,\mathrm{d}t}{a\sinh t}$$

$$= \int t\,\mathrm{d}t = t + c_1 = \operatorname{argcosh}\frac{x}{a} + c_1 = {}^{25}\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{(\tfrac{x}{a})^2-1}\right) + c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + c_1$$

$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) - \ln a + c_1 = \left[\begin{array}{c} c = c_1 - \ln a \\ c_1\in R,\ c\in R \end{array} \right] = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + c,\ c\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ platí

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = -z & x\in(-\infty;-a) \\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}z & z\in(a;\infty) \end{array} \right] = -\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-a^2}} = \left[\begin{array}{c} \text{Predchádzajúci} \\ \text{odstavec} \end{array} \right] = -\ln\left(z+\sqrt{z^2-a^2}\right) + c_2$$

$$= \ln\frac{1}{z+\sqrt{z^2-a^2}} + c_2 = \ln\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}} + c_2 = \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right| + c_2$$

$$= \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right| + c_2 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x^2-(x^2-a^2)}\right| + c_2 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right| + c_2$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a^2 + c_2 = \left[\begin{array}{c} c = c_2 - \ln a^2 = c_2 - 2\ln a \\ c_2\in R,\ c\in R \end{array} \right] = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c,$$

$$x\in(-\infty;-a),\ c\in R.$$

$$\Rightarrow\ I = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c,\ x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty),\ c\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-a)$ môžeme taktiež použiť substitúciu $x = -a\cosh t$, t. j. $t = \operatorname{argcosh}\frac{-x}{a}$, $t\in(0;\infty)$ a pokračovať analogicky ako v prvej časti riešenia pre $x\in(a;\infty)$. ■

Príklad 1.1.32.

Vypočítajte $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $a > 0$.

Riešenie.

$$I = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{1. es:}\quad \sqrt{x^2+a^2} = t - x & = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t} & x\in(-\infty;0),\ t\in(0;a) \\ x^2+a^2 = t^2-2tx+x^2 & \mathrm{d}x = \frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t & x\in\langle 0;\infty),\quad t\in\langle a;\infty) \\ x = \frac{t^2-a^2}{2t},\quad t = x+\sqrt{x^2+a^2} & \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2}) = \infty+\infty = \infty & x\to 0,\qquad t\to a \\ \multicolumn{3}{l}{\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2}) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{-a^2}{-\infty-\infty} = 0} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2+a^2}{2t}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \left[\begin{array}{c} t\in(0;\infty) \\ |t| = t \end{array} \right] = \ln t + c = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

---

[24] Kedže sú čísla $c_1\in R$ (ľubovoľné) a $\ln a$ konštanty, je výraz $c = c_1 - \ln a$ opäť ľubovoľná konštanta.

[25] Funkciu môžeme vyjadriť v tvare $\operatorname{argcosh} x = \ln\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]$, $x\in\langle 1;\infty)$ (napr. ma1: str. 90).

Iné riešenie.

$$I = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = a\sinh t & \sinh t = \frac{x}{a}, \quad t = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} & x\in R & \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} \\ \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t & \cosh t > 0 \text{ pre všetky } t\in R & t\in R & \quad = a\sqrt{\cosh^2 t} = a\,|\cosh t| = a\cosh t \end{array} \right] = \int \frac{a\cosh t\,\mathrm{d}t}{a\cosh t}$$

$$= \int \mathrm{d}t = t + c_1 = \operatorname{argsinh}\frac{x}{a} + c_1 =^{26} \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right) + c_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} + c_1$$

$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \ln a + c_1 = \left[\begin{array}{l} c = c_1 - \ln a \\ c_1\in R,\ c\in R \end{array} \right] = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c,\ c\in R. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.33.
Vypočítajte integrál $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, kde $a>0$.

Riešenie.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x = a\sin t & \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a} & x\in(-a;a) & \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \cos t > 0 \text{ pre } t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & t\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) & \quad = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,|\cos t| = a\cos t \end{array} \right]$$

$$= \int a^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2\cdot 2}\right) + c = \frac{a^2 t}{2} + \frac{2a^2\sin t\cos t}{4} + c$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a\sin t\cdot a\cos t}{2} + c = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + c,\ x\in\langle -a;a\rangle,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$I = \int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int\frac{-x\cdot x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} & v = \sqrt{a^2-x^2} \end{array} \right]$$

$$= \int\frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + x\sqrt{a^2-x^2} - I.$$

Dostali sme rovnicu, v ktorej integrál I považujeme za neznámy parameter. Platí

$$2I = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \text{ t. j. } I = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Potom (pr. 1.1.30) platí $\displaystyle I = \int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c,\ x\in(-a;a).$ ■

Poznámka 1.1.16.
Analogicky môžeme počítať taktiež integrály:[27]

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c,\ x\in R.$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c,$$
$$x\in(-\infty;a)\cup(a;\infty).$$

1.1.4 Integrovanie goniometrických a hyperbolických funkcií

Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické. Môže byť ale veľmi prácne.

- **Integrály typu** $\displaystyle\int f\left(\sin x, \cos x\right)\mathrm{d}x$

Integrandy obsahujú iba funkcie $\sin x$, $\cos x$ (môžu byť aj implicitne zadané, napr. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$) a konštanty (nie x a jeho mocniny), resp. ich kombinácie, ktoré vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia.

[26] Funkciu môžeme vyjadriť v tvare $\operatorname{argsinh} x = \ln\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$, $x\in R$ (napr. ma1: str. 90).
[27] Tieto integrály môžeme tiež riešiť pomocou binomických substitúcií (poznámka 1.1.22 na strane 44).

Na racionalizovanie takýchto integrálov sa používa tzv. **univerzálna goniometrická substitúcia** $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (ozn. Ugs) . Substitúciu môžeme použiť iba na intervaloch, ktoré neobsahujú body $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$, pretože v týchto bodoch nie je funkcia $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ definovaná. V týchto bodoch platí $\cos\frac{x}{2} = 0$. Ugs (podobne ako Eulerove substitúcie) je účinná, ale väčšinou prácna, pretože jej použitie vedie na racionálne lomené funkcie s polynómami vyšších stupňov.

Pre substitúciu $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na intervale $x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in Z$ platí:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad t \in (-\infty; \infty), \qquad \operatorname{arctg} t = \frac{x}{2}, \qquad x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}.$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

Príklad 1.1.34.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Ugs: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq 0 & x \in (-\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi),\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 0,\ t \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq k\pi, k \in Z & x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0,\ t \in (0; \infty) \end{array}\right] = \int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$= \ln|t| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c,\ x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z,\ c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \frac{x}{2} & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi),\ k \in Z \\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t \in \left(0 + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right),\ k \in Z \end{array}\right] = \int\frac{\mathrm{d}t}{\sin t\cos t} = \int\frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t}{\sin t\cos t}$$
$$= \int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t} - \int\frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln|\sin t| - \ln|\cos t| + c = \ln|\operatorname{tg} t| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c,$$
$$x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z,\ c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \cos x & x \in (0 + k\pi; \pi + k\pi), k \in Z \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x & t \in (-1; 1) \end{array}\right] = \int\frac{-\,\mathrm{d}t}{1-t^2} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + c = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + c,\ x \in R,\ x \neq k\pi,\ k \in Z,\ c \in R. \blacksquare$$

Príklad 1.1.35.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Ugs: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq 0 & x \in \left(-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\quad t \in (-1; 1) \\ & t \neq \pm 1 & x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right),\quad t \in (1; \infty) \end{array}\right] = \int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}$$
$$= -\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = -\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + c,$$
$$x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in Z,\ c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \sin x & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & t \in (-1; 1) \qquad\qquad k \in Z \end{array}\right] = \int\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + c = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + c,\ x \in R,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,\ c \in R. \blacksquare$$

Príklad 1.1.36.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Ugs: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \neq -1 & x \in (-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ t \in (-\infty; -1) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z & x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right),\ t \in (-1; \infty) \end{array}\right] = \int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}}$$
$$= \int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{t^2+1+2t}{t^2+1}} = \int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } u = t+1 & t \in (-\infty; -1),\ u \in (-\infty; 0) \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & t \in (-1; \infty),\ u \in (0; \infty) \end{array}\right] = 2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = 2\int u^{-2}\,\mathrm{d}u$$

$$= 2\frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{2}{u} + c = -\frac{2}{t+1} + c = c - \frac{2}{t+1} = c - \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1},$$
$$x\in R,\ x \neq -\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{-\sin x\,dx}{\cos^2 x}$$
$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\cos x & \cos x \neq 0 & x\in\langle -\pi+2k\pi; -\frac{\pi}{2}+2k\pi),\ t\in\langle -1;0) & x\in\langle 0+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi),\ t\in(0;1\rangle \\ dt = -\sin x\,dx & x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z & x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi; 0+2k\pi\rangle,\quad t\in(0;1\rangle & x\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi\rangle,\ t\in\langle -1;0) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dt}{t^2} = \operatorname{tg} x + \int t^{-2}\,dt = \operatorname{tg} x + \frac{t^{-1}}{-1} + c = \operatorname{tg} x - \frac{1}{t} + c$$
$$= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} + c = \frac{\sin x - 1}{\cos x} + c,\ x\in R,\ x\neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in Z,\ c\in R. \blacksquare$$

Príklad 1.1.37.

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Ugs: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \neq -1 & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi) \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & x\neq \pi+2k\pi, k\in Z & t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}} = \int dt$$
$$= t + c = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c,\ x\in R,\ x\neq \pi + 2k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=\frac{x}{2} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi),\ k\in Z \\ dt = \frac{dx}{2} & t\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi),\ k\in Z \end{array}\right] = \int \frac{dt}{\cos^2 t}$$
$$= \operatorname{tg} t + c = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c,\ x\in R,\ x\neq \pi + 2k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$$
$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t=\sin x & \sin x \neq 0 & x\in(-\pi+2k\pi; -\frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle,\ t\in\langle -1;0) & x\in(0+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle,\ t\in(0;1\rangle \\ dt = \cos x\,dx & x\neq k\pi, k\in Z & x\in\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi; 0+2k\pi),\quad t\in\langle -1;0) & x\in\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi; \pi+2k\pi),\ t\in(0;1\rangle \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dt}{t^2} = -\operatorname{cotg} x - \int t^{-2}\,dt = -\operatorname{cotg} x - \frac{t^{-1}}{-1} + c = -\operatorname{cotg} x + \frac{1}{t} + c$$
$$= -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} + c = \frac{1-\cos x}{\sin x} + c,\ x\in R,\ x\neq k\pi,\ k\in Z,\ c\in R. \blacksquare$$

Príklad 1.1.38.

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Ugs: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi), k\in Z \\ dx = \frac{2\,dt}{t^2+1} & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\left(\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2} - \frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}\right)\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4} + \frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = \int \frac{\frac{(1-t^2)^2-4t^2}{(t^2+1)^2}\,\frac{2\,dt}{t^2+1}}{\frac{16t^4+(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}} = 2\int \frac{\left[(1-t^2)^2-4t^2\right](t^2+1)\,dt}{16t^4+(1-t^2)^4} = \cdots \text{☹}.$$

Je zrejmé, že týmto smerom pre normálneho smrteľníka bez vhodného softvérového vybavenia cesta riešenia nevedie. Integrand musíme pred použitím Ugs najprv upraviť.

Iné riešenie.

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left[\begin{array}{l} \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\ \quad = \frac{(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)+(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)}{4} = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{1+\cos^2 2x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\cos 2x\,dx}{1+\cos^2 2x} = \circledast$$

Môžeme nahradiť $u = 2x$ a následne použiť Ugs $t = \operatorname{tg}\frac{u}{2}$. Ale tento postup je tiež náročný.

$$\circledast = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } u=2x & x\in R \\ du = 2\,dx & u\in R \end{array}\right] = \int \frac{\cos u\,du}{1+\cos^2 u} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Ugs: } t=\operatorname{tg}\frac{u}{2} & t=\operatorname{tg} x & u\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi), k\in Z \\ \cos u = \frac{1-t^2}{t^2+1} & du = \frac{2\,dt}{t^2+1} & x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi), k\in Z,\ t\in(-\infty;\infty) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\cdot\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{(t^2+1)^2+(1-t^2)^2} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{t^4+2t^2+1+1-2t^2+t^4} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{2t^4+2} = \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4+1}$$
$$= \left[\begin{array}{l} \text{Korene } t^4+1: \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm i) \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} [t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1+i)]\cdot[t-\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1-i)] = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}[\sqrt{2}t-(\pm 1+i)]\cdot[\sqrt{2}t-(\pm 1-i)] \\ \quad = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}t\mp 1)+i]\cdot[(\sqrt{2}t\mp 1)-i] = \frac{1}{2}[(2t^2\mp 2\sqrt{2}t+1)-(-1)] = t^2\mp\sqrt{2}t+1 \end{array}\right]$$

$$= \left[t^4+1=(t^2+\sqrt{2}t+1)\cdot(t^2-\sqrt{2}t+1)\right] = \int \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \left[\begin{array}{c}\text{Rozklad na}\\ \text{parciálne zlomky}\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left[\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left[\frac{(t^2+\sqrt{2}t+1)'}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{(t^2-\sqrt{2}t+1)'}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right] \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln\left|t^2+\sqrt{2}t+1\right| - \ln\left|t^2-\sqrt{2}t+1\right|\right] + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right| + c$$

$$= \left[t^2 \pm \sqrt{2}t+1 = (t \pm \tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + \tfrac{1}{2} > 0\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{2}\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}^2 x-\sqrt{2}\operatorname{tg} x+1} + c,$$

$$x \in R,\ x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z,\ c \in R.$$

Rozumnejšie je integrand ďalej upravovať. Potom platí:

$$\circledast = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+1-\sin^2 2x} = \int \frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{2-\sin^2 2x} = \left[\begin{array}{r|l}\text{Subst.}\ \ t=\sin 2x & x\in\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\rangle, k\in Z, t\in\langle -1;1\rangle\\ \mathrm{d}t = 2\cos 2x\,\mathrm{d}x & x\in\langle \frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\rangle, k\in Z, t\in\langle -1;1\rangle\end{array}\right]$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{2-t^2} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x} + c,\ x \in R,\ c \in R. \blacksquare$$

- **Integrály typu** $\int f\big(\sinh x, \cosh x\big)\,\mathrm{d}x$

Integrandy obsahujú $\sinh x$, $\cosh x$ (aj implicitne), konštanty a ich kombinácie, ktoré vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia. Na racionalizovanie takýchto integrálov môžeme použiť tzv. **univerzálnu hyperbolickú substitúciu** $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$, $x \in R$ (ozn. Uhs), ktorá má analogické použitie a vlastnosti ako Ugs.

Ak použijeme substitúciu $t = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$, $x \in R$, potom $t \in (-1;1)$ a platí:

$$t = \operatorname{tgh} \tfrac{x}{2},\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2 \frac{x}{2}} = \frac{(\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2})\,\mathrm{d}x}{2\cosh^2 \frac{x}{2}} = \frac{(1-\operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2})\,\mathrm{d}x}{2} = \frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}x}{2}. \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}.$$

$$\sinh x = 2\sinh \tfrac{x}{2}\cosh \tfrac{x}{2} = \frac{2\sinh \frac{x}{2}\cosh \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2\frac{\sinh \frac{x}{2}}{\cosh \frac{x}{2}}}{1-\frac{\sinh^2 \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tgh} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$$\cosh x = \cosh^2 \tfrac{x}{2} + \sinh^2 \tfrac{x}{2} = \frac{\cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1+\frac{\sinh^2 \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2}}}{1-\frac{\sinh^2 \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1+\operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Príklad 1.1.39.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \left[\begin{array}{r|l}\text{Uhs:}\ \ t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2} & \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}\\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} & x\in R,\ t\in(-1;1)\end{array}\right] = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int \mathrm{d}t = t + c = \operatorname{tgh} \tfrac{x}{2} + c,$$

$$x \in R,\ c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2 \frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{r|l}\text{Subst.}\ \ t=\frac{x}{2} & x\in R\\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} & t\in R\end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t} = \operatorname{tgh} t + c = \operatorname{tgh} \tfrac{x}{2} + c,\ x \in R,\ c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \int \frac{(\cosh x-1)\,\mathrm{d}x}{(\cosh x+1)(\cosh x-1)} = \int \frac{(\cosh x-1)\,\mathrm{d}x}{\cosh^2 x-1} = \int \frac{(\cosh x-1)\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \int \frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x}$$

$$= \left[\begin{array}{r|l}\text{Subst.}\ \ t=\sinh x & x\in(-\infty;0),\ t\in(-\infty;0)\\ \mathrm{d}t = \cosh x\,\mathrm{d}x & x\in(0;\infty),\quad t\in(0;\infty)\end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \frac{t^{-1}}{-1} - \operatorname{cotgh} x + c$$

$$= -\frac{1}{t} - \operatorname{cotgh} x + c = -\frac{1}{\sinh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} + c = -\frac{1+\cosh x}{\sinh x} + c,\ x \in R,\ x \neq 0,\ c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\;\; t=\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{t} & x\in R \\ x=\ln t & \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t} & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t+\frac{1}{t})}$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+1} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = 2\int (t+1)^{-2}\,\mathrm{d}t = 2\frac{(t+1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{2}{\mathrm{e}^x+1} + c,\ x\in R,\ c\in R. \ \blacksquare$$

1.1.5 Riešené príklady

Príklad 1.1.40.

Vypočítajte $I = \displaystyle\int \min_{x\in(0;\infty)} \{1, \tfrac{1}{x}\}\,\mathrm{d}x.$

Riešenie.

Pre integrand platí $f(x) = \displaystyle\min_{x\in(0;\infty)} \{1, \tfrac{1}{x}\} = \begin{cases} 1 \text{ pre } x\in(0;1\rangle, & \text{pretože } \frac{1}{x} \geq 1, \\ \frac{1}{x} \text{ pre } x\in\langle 1;\infty), & \text{pretože } \frac{1}{x} \leq 1. \end{cases}$

$$I = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int \mathrm{d}x = x + c, & x\in(0;1\rangle,\ c\in R, \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c_1, & x\in\langle 1;\infty),\ c_1\in R. \end{cases}$$

Vypočítali sme primitívne funkcie k f na intervaloch $(0;1\rangle$ a $\langle 1;\infty)$. Ak chceme určiť primitívnu funkciu k f na intervale $(0;\infty)$, musíme zabezpečiť jej spojitosť v bode $x=1$. To znamená, že musí platiť $1+c = \ln 1 + c_1 = 0 + c_1$, t. j. $c_1 = c+1$. Potom

$$I = \int \min_{x\in(0;\infty)} \{1, \tfrac{1}{x}\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x + c, & x\in(0;1\rangle, \\ \ln|x| + c + 1, & x\in\langle 1;\infty),\ c\in R. \ \blacksquare \end{cases}$$

Príklad 1.1.41.

a) $$\int (x+1)^2 \ln(x-1)^5\,\mathrm{d}x = 5\int (x+1)^2 \ln(x-1)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.}\;\; t=x-1 & t+2=x+1 \\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x & x\in(1;\infty), t\in(0;\infty) \end{array}\right]$$

$$= 5\int (t+2)^2 \ln t\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=(t+2)^2 & v=\frac{(t+2)^3}{3} \end{array}\right] = \frac{5(t+2)^3}{3}\ln t - \frac{5}{3}\int \frac{(t+2)^3\,\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \frac{5(t+2)^3}{3}\ln t - \frac{5}{3}\int \frac{t^3+6t^2+12t+8}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{5(t+2)^3}{3}\ln t - \frac{5}{3}\int \left(t^2+6t+12+\frac{8}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{5(t+2)^3}{3}\ln t - \frac{5}{3}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{6t^2}{2}+12t+8\ln t\right) + c = \frac{5(t+2)^3-40}{3}\ln t - \frac{5t^3}{9} - 5t^2 - 20t + c$$

$$= \frac{5(x+1)^3-40}{3}\ln(x-1) - \frac{5(x-1)^3}{9} - 5(x-1)^2 - 20(x-1) + c,\ x\in(1;\infty),\ c\in R.$$

b) $$\int \ln(x-1)^5\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.}\;\; t=x-1 & x\in(1;\infty) \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \ln t^5\,\mathrm{d}t = 5\int \ln t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=1 & v=t \end{array}\right]$$

$$= 5t\ln t - 5\int \mathrm{d}t = 5t\ln t - 5t + c_1 = 5(x-1)\ln(x-1) - 5(x-1) + c_1$$

$$= \left[\, c=c_1+5, c_1\in R, c\in R \,\right] = 5(x-1)\ln(x-1) - 5x + c,\ x\in(1;\infty),\ c\in R.$$

c) $$\int \frac{(x-2)^4\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.}\;\; t=x-1 & x\in(-\infty;1),\ t\in(-\infty;0) \\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x & x\in(1;\infty),\quad t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{(t-1)^4\,\mathrm{d}t}{t^2} = \int \frac{(t^4-4t^3+6t^2-4t+1)\,\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$= \int \left(t^2-4t+6-\frac{4}{t}+t^{-2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{4t^2}{2} + 6t - 4\ln|t| - \frac{1}{t} + c$$

$$= \frac{(x-1)^3}{3} - 2(x-1)^2 + 6(x-1) - 4\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c,\ x\in R,\ x\neq 1,\ c\in R.$$

d) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{2^x+1} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\qquad t=2^x+1 & 2^x=t-1 & x\in R \\ x=\log_2(t-1)=\frac{\ln(t-1)}{\ln 2} & \mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}\frac{\mathrm{d}t}{t-1} & t\in(1;\infty) \end{array}\right] = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)} = \frac{1}{\ln 2}\int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\big(\ln(t-1) - \ln t\big) + c = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{t-1}{t} + c = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{2^x}{2^x+1} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

e) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2^x+1}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt{2^x+1} & t^2=2^x+1 & 2^x=t^2-1 \\ x=\log_2(t^2-1)=\frac{\ln(t^2-1)}{\ln 2} & \mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2-1} & x\in R,\ t\in(1;\infty)\end{array}\right] = \frac{1}{\ln 2}\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t(t^2-1)} = \frac{2}{\ln 2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$$
$$= \frac{2}{2\ln 2}\ln\frac{t-1}{t+1}+c = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{\sqrt{2^x+1}-1}{\sqrt{2^x+1}+1}+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

f) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x-2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt{x-2} & t^2=x-2 & x-1=t^2+1 \\ x=t^2+2 & \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t & x\in(2;\infty),\ t\in(0;\infty)\end{array}\right] = \int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)t} = \int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
$$= \int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + c = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-2}+c,\ x\in(2;\infty),\ c\in R.$$

g) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1-x}} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt{1-x} & x+1=2-t^2 & x\in(-\infty;-1),\ t\in(\sqrt{2};\infty) \\ t^2=1-x,\ x=1-t^2 & \mathrm{d}x=-2t\,\mathrm{d}t & x\in(-1;1),\quad t\in(0;\sqrt{2})\end{array}\right] = \int\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(2-t^2)t}$$
$$= 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-2} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+c = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right|+c,\ x\in(-\infty;1),\ x\neq-1,\ c\in R.$$

h) $$\int\frac{\sqrt{1-x}}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt{1-x} & x+1=2-t^2 & x\in(-\infty;-1),\ t\in(\sqrt{2};\infty) \\ t^2=1-x,\ x=1-t^2 & \mathrm{d}x=-2t\,\mathrm{d}t & x\in(-1;1\rangle,\quad t\in\langle 0;\sqrt{2})\end{array}\right] = \int\frac{t(-2t)\,\mathrm{d}t}{2-t^2}$$
$$= 2\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2-2} = 2\int\frac{t^2-2+2\,\mathrm{d}t}{t^2-2} = 2\int\mathrm{d}t + 4\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-2} = 2t+\frac{4}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+c$$
$$= 2\sqrt{1-x}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right|+c,\ x\in(-\infty;1\rangle,\ x\neq-1,\ c\in R.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.42.

a) $$\int\frac{\cos x}{4+3\sin x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.}\quad t=4+3\sin x & x\in\left\langle-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right\rangle, k\in Z \\ \mathrm{d}t=3\cos x\,\mathrm{d}x & t\in\langle 1;7\rangle\end{array}\right] = \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{3}\ln t + c$$
$$= \frac{1}{3}\ln(4+3\sin x)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

b) $$\int\frac{1+3\sin x+2\cos x}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x}+\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.}\quad t=2x & x\neq\frac{k\pi}{2} \\ \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x & t\neq k\pi, k\in Z\end{array}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}+\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}+\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \left[\text{pr. 1.1.34, 1.1.35}\right] = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c,\ x\in R,\ x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z,\ c\in R.$$

c) $$\int\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[4]{\sin x+\cos x}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sin x+\cos x & \sin x\neq\pm\cos x, & x\in\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\rangle,\ t\in\left(0;\sqrt{2}\right\rangle \\ \mathrm{d}t=(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x & x\neq\pm\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z & x\in\left\langle\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right),\ t\in\left(0;\sqrt{2}\right\rangle \\ \hline \multicolumn{3}{l}{\text{Pre } x\in\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right) \text{ je funkcia } t=\sin x+\cos x \text{ záporná, platí } t\in\langle-\sqrt{2};0).}\end{array}\right]$$
$$= -\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[4]{t}} = -\int t^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t = -\frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+c = c-\frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} = c-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(\sin x+\cos x)^3},$$
$$x\in\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in Z,\ c\in R.$$

d) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{4\cos^2 x+\sin^2 x} = \int\frac{\mathrm{d}x}{4\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 2x}{2}} = \int\frac{2\,\mathrm{d}x}{4(1+\cos 2x)+(1-\cos 2x)} = \int\frac{2\,\mathrm{d}x}{5+3\cos 2x}$$
$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.}\quad t=2x & x\in R \\ \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x & t\in R\end{array}\right] = \int\frac{\mathrm{d}t}{5+3\cos t} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Ugs: } u=\operatorname{tg}\frac{t}{2} & \cos t=\frac{1-u^2}{u^2+1},\quad \mathrm{d}t=\frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+1} \\ u\in R & t\in(-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi), k\in Z\end{array}\right] = \int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+1}}{5+3\frac{1-u^2}{u^2+1}}$$
$$= \int\frac{2\,\mathrm{d}u}{5(u^2+1)+3(1-u^2)} = \int\frac{2\,\mathrm{d}u}{2u^2+8} = \int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2}+c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{2}+c$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{2}+c,\ x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

e) $$\int\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln|\sin x+\cos x|+c,\ x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

f) $\displaystyle\int x\,\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int x\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \frac{x^2}{2}$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u=x & u'=1 \\ v'=\frac{1}{\cos^2 x} & v=\mathrm{tg}\,x=\frac{\sin x}{\cos x} \end{array}\right] = x\,\mathrm{tg}\,x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x - \frac{x^2}{2} = x\,\mathrm{tg}\,x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + c,$$

$$x\in R,\ x\neq \tfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

g) $\displaystyle\int\sqrt{1+\frac{1}{\sin x}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} 0<\sin x\le 1. \Rightarrow 1\le \frac{1}{\sin x}. \ \Rightarrow 2\le 1+\frac{1}{\sin x}. \Rightarrow x\in(0+2k\pi;\pi+2k\pi), k\in Z. \\ -1\le \sin x<0. \Rightarrow \frac{1}{\sin x}\le -1 \Rightarrow 1+\frac{1}{\sin x}\le 0. \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in Z \text{ (izolované body).[28]} \end{array}\right]$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=1+\frac{1}{\sin x} & \sin x=\frac{1}{t-1}, \qquad x\in(0+2k\pi;\pi+2k\pi), k\in Z,\ t\in(2;\infty), \qquad t\neq 2,\ x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z \\ x=\arcsin\frac{1}{t-1} & \mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(t-1)^2}}}\cdot\frac{-1}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{-\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\frac{(t-1)^2-1}{(t-1)^2}}(t-1)^2}=\frac{-\,\mathrm{d}t}{\frac{\sqrt{t^2-2t+1-1}}{t-1}(t-1)^2}=\frac{-\,\mathrm{d}t}{(t-1)\sqrt{t^2-2t}}=\frac{-\,\mathrm{d}t}{(t-1)\sqrt{t}\sqrt{t-2}} \end{array}\right]$$

$$= \int\frac{-\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{(t-1)\sqrt{t}\sqrt{t-2}} = \int\frac{-\,\mathrm{d}t}{(t-1)\sqrt{t-2}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=\sqrt{t-2} & =\sqrt{\frac{1}{\sin x}-1} & t\in(2;\infty) \\ u^2=t-2 & 2u\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}t & u\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int\frac{-2u\,\mathrm{d}u}{(u^2+1)u}$$

$$= -2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = -2\,\mathrm{arctg}\,u + c = -2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1}{\sin x}-1} + c,$$

$$x\in(0+2k\pi;\pi+2k\pi),\ x\neq\tfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

h) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3 x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=\mathrm{tg}\,x & x=\mathrm{arctg}\,t+2k\pi, \quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \\ t\in R & x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi),\ k\in Z \end{array}\right] = \int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int\frac{t^3+t-t\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$

$$= \int t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int\frac{(t^2+1)'\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \ln\big(t^2+1\big) + c$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \ln\big(\mathrm{tg}^2 x+1\big) + c,\ x\in\big(-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi;\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\big),\ k\in Z,\ c\in R. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.43.
Vypočítajte $I_n = \displaystyle\int \sinh^n x\,\mathrm{d}x$, kde $n=0,1,2,\ldots$.
Riešenie.

$$I_n = \int \sinh x\cdot\sinh^{n-1}x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u=\sinh^{n-1}x & u'=(n-1)\sinh^{n-2}x\cdot\cosh x \\ v'=\sinh x & v=\cosh x \end{array}\right]$$

$$= \sinh^{n-1}x\cdot\cosh x - (n-1)\int\sinh^{n-2}x\cdot\cosh^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \sinh^{n-1}x\cdot\cosh x - (n-1)\int\sinh^{n-2}x\cdot(1+\sinh^2 x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sinh^{n-1}x\cdot\cosh x - (n-1)\int\sinh^{n-2}x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int\sinh^n x\,\mathrm{d}x$$

$$= \sinh^{n-1}x\cdot\cosh x - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \text{ pre } n=2,3,4,\ldots.$$

Dostali sme rovnicu s neznámym parametrom I_n. Pre $n\in N$, $n\ge 2$ platí

$$nI_n = \sinh^{n-1}x\cdot\cosh x - (n-1)I_{n-2}, \qquad \text{t. j. } I_n = \frac{\sinh^{n-1}x\cdot\cosh x}{n} - \frac{n-1}{n}I_{n-2},$$

pričom $I_0 = x + c$, $I_1 = \cosh x + c$, $x\in R$, $c\in R$.

Iné riešenie.
Pre nepárne $n = 2k+1$, $k\in N\cup\{0\}$, môžeme použiť substitúciu $t=\cosh x$.

$$I_{2k+1} = \int\sinh^{2k+1}x\,\mathrm{d}x = \int\big(\sinh^2 x\big)^k\sinh x\,\mathrm{d}x = \int\big(\cosh^2 x-1\big)^k\sinh x\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=\cosh x & x\in R \\ \mathrm{d}t=\sinh x\,\mathrm{d}x & t\in\langle 1;\infty) \end{array}\right] = \int(t^2-1)^k\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c}\text{binomická}\\ \text{veta}\end{array}\right] = \int\Big[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(t^2)^i(-1)^{k-i}\Big]\,\mathrm{d}t$$

[28] Tieto body sú izolované a netvoria interval.

$$= \int \Big[\sum_{i=0}^{k} \tbinom{k}{i} (-1)^{k-i} t^{2i} \Big] \, dt = \sum_{i=0}^{k} \Big[\tbinom{k}{i} (-1)^{k-i} \int t^{2i} \, dt \Big] = \sum_{i=0}^{k} \Big[\tbinom{k}{i} (-1)^{k-i} \tfrac{t^{2i+1}}{2i+1} \Big] + c$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cosh^{2i+1}}{2i+1} + c, \; x \in R, \; c \in R. \; \blacksquare$$

Poznámka 1.1.17.

Pre neurčité integrály funkcií $\sin^n x$, $\cos^n x$, $\cosh^n x$, $n \in N$ platia analogické vzorce.
Pre $n \in N$, $n \neq 1$, $m \in N \cup \{0\}$, $x \in R$ platí

$$I_n = \int \sin^n x \, dx = -\tfrac{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}{n} + \tfrac{n-1}{n} I_{n-2}, \text{ pričom } I_0 = x + c, \; I_1 = -\cos x + c,$$

$$\text{resp. } I_{2k+1} = \int \sin^{2k+1} x \, dx = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k+1} \binom{k}{i} \cos^{2i+1} x}{2i+1} + c, \; c \in R.$$

$$I_n = \int \cos^n x \, dx = \tfrac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n} + \tfrac{n-1}{n} I_{n-2}, \text{ pričom } I_0 = x + c, \; I_1 = \sin x + c,$$

$$\text{resp. } I_{2k+1} = \int \cos^{2k+1} x \, dx = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k} \binom{k}{i} \sin^{2i+1} x}{2i+1} + c, \; c \in R.$$

$$I_n = \int \sinh^n x \, dx = \tfrac{\sinh^{n-1} x \cdot \cosh x}{n} - \tfrac{n-1}{n} I_{n-2}, \text{ pričom } I_0 = x + c, \; I_1 = \cosh x + c,$$

$$\text{resp. } I_{2k+1} = \int \sinh^{2k+1} x \, dx = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cosh^{2i+1} x}{2i+1} + c, \; c \in R.$$

$$I_n = \int \cosh^n x \, dx = \tfrac{\cosh^{n-1} x \cdot \sinh x}{n} + \tfrac{n-1}{n} I_{n-2}, \text{ pričom } I_0 = x + c, \; I_1 = \sinh x + c,$$

$$\text{resp. } I_{2k+1} = \int \cosh^{2k+1} x \, dx = \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i} \sinh^{2i+1} x}{2i+1} + c, \; c \in R.$$

Príklad 1.1.44.

$$\int \cos^n (ax) \sin (ax) \, dx = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst. } \; t = \cos (ax) & x \in \langle 0 + k\pi ; \pi + k\pi \rangle, k \in Z \\ dt = -a \sin (ax) \, dx & t \in \langle -1 ; 1 \rangle \end{array} \right] = -\int \frac{t^n \, dt}{a}$$

$$= -\frac{t^{n+1}}{a(n+1)} + c = -\frac{\cos^{n+1} (ax)}{a(n+1)} + c, \; x \in R, \; c \in R \text{ pre } a \in R - \{0\}, \; n \in N. \; \blacksquare$$

Príklad 1.1.45.

Pre $a, b \in R - \{0\}$, $a \neq b$ platí:

$$\int \sin^2 (ax) \, dx = \int \frac{1 - \cos (2ax)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin (2ax)}{2 \cdot 2a} + c = \frac{x}{2} - \frac{\sin (2ax)}{4a} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$\int \cos^2 (ax) \, dx = \int \frac{1 + \cos (2ax)}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin (2ax)}{2 \cdot 2a} + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin (2ax)}{4a} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$\int \sin (ax) \sin (bx) \, dx = \int \frac{\cos (ax + bx) - \cos (ax - bx)}{-2} \, dx = \int \Big[\frac{\cos (a-b)x}{2} - \frac{\cos (a+b)x}{2} \Big] \, dx$$

$$= \frac{\sin (a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin (a+b)x}{2(a+b)} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$\int \cos (ax) \cos (bx) \, dx = \int \frac{\cos (ax + bx) + \cos (ax - bx)}{2} \, dx = \int \Big[\frac{\cos (a-b)x}{2} + \frac{\cos (a+b)x}{2} \Big] \, dx$$

$$= \frac{\sin (a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin (a+b)x}{2(a+b)} + c, \; x \in R, \; c \in R.$$

$$\int \sin (ax) \cos (bx) \, dx = \int \frac{\sin (ax + bx) + \sin (ax - bx)}{2} \, dx = \int \Big(\frac{\sin (a-b)x}{2} + \frac{\sin (a+b)x}{2} \Big) \, dx$$

$$= -\frac{\cos (a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos (a+b)x}{2(a+b)} + c, \; x \in R, \; c \in R. \; \blacksquare$$

Poznámka 1.1.18.
V predchádzajúcom príklade sme použili vzorce:

$$\begin{aligned} \sin u\cdot\cos v &= \tfrac{\sin(u+v)+\sin(u-v)}{2}, & \sinh u\cdot\cosh v &= \tfrac{\sinh(u+v)+\sinh(u-v)}{2},\\ \cos u\cdot\cos v &= \tfrac{\cos(u+v)+\cos(u-v)}{2}, & \cosh u\cdot\cosh v &= \tfrac{\cosh(u+v)+\cosh(u-v)}{2},\\ \sin u\cdot\sin v &= \tfrac{\cos(u+v)-\cos(u-v)}{-2}, & \sinh u\cdot\sinh v &= \tfrac{\cosh(u+v)-\cosh(u-v)}{2}. \end{aligned}$$

Vzorce môžeme odvodiť napr. zo vzťahov pre $\sin x\pm\sin y$, $\cos x\pm\cos y$ *(ma1: veta 3.1.9) a vzťahov pre* $\sinh x\pm\sinh y$, $\cosh x\pm\cosh y$ *(ma1: veta 3.1.14).*[29]

Príklad 1.1.46.
Vypočítajte integrály $I_n=\int x^n\sin(ax)\,dx$, $J_n=\int x^n\cos(ax)\,dx$, $n\in N$, $a\in R-\{0\}$.

Riešenie.
Pre všetky $n\in N$, $x\in R$, $a\in R-\{0\}$ platí:

$$I_n=\left[\begin{array}{l|l} u=x^n & u'=nx^{n-1}\\ v'=\sin(ax) & v=-\frac{\cos(ax)}{a}\end{array}\right]=-\frac{x^n\cos(ax)}{a}+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos(ax)\,dx=-\frac{x^n\cos(ax)}{a}+\frac{n}{a}J_{n-1}.$$

$$J_n=\left[\begin{array}{l|l} u=x^n & u'=nx^{n-1}\\ v'=\cos(ax) & v=\frac{\sin(ax)}{a}\end{array}\right]=\frac{x^n\sin(ax)}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin(ax)\,dx=\frac{x^n\sin(ax)}{a}-\frac{n}{a}I_{n-1}.$$

$$I_0=\int\sin(ax)\,dx=-\frac{\cos(ax)}{a}+c,\quad J_0=\int\cos(ax)\,dx=\frac{\sin(ax)}{a}+c,\ c\in R.$$

Špeciálne napríklad $I_2=-\frac{x^2\cos(ax)}{a}+\frac{2}{a}J_1=-\frac{x^2\cos(ax)}{a}+\frac{2}{a}\left[\frac{x\sin(ax)}{a}-\frac{1}{a}I_0\right]$. ■

Príklad 1.1.47.

a) $$\int\frac{dx}{x^3-7x-6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-1)(x+3)}=\left[\begin{array}{c}\text{Rozklad na}\\ \text{parciálne zlomky}\end{array}\right]=\int\left(\frac{\frac{1}{5}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{20}}{x+3}\right)dx$$
$$=\frac{1}{5}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{20}\ln|x+3|+c,\ x\in R-\{1,2,-3\},\ c\in R.$$

b) $$\int\frac{dx}{x^3-2x^2-x+2}=\int\frac{dx}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\left[\begin{array}{c}\text{Rozklad na}\\ \text{parciálne zlomky}\end{array}\right]=\int\left(\frac{\frac{1}{6}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x-2|+c,\ x\in R-\{\pm1,2\},\ c\in R.$$

c) $$\int\frac{dx}{x^3-3x-2}=\int\frac{dx}{(x-2)(x+1)^2}=\left[\begin{array}{c}\text{Rozklad na}\\ \text{parciálne zlomky}\end{array}\right]=\int\left(\frac{\frac{1}{9}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{9}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}}{(x+1)^2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{9}\ln|x-2|-\frac{1}{9}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c=\frac{1}{9}\ln|x-2|-\frac{1}{9}\ln|x+1|+\frac{1}{3(x+1)}+c,$$
$$x\in R-\{-1,2\},\ c\in R.$$

d) $$\int\frac{dx}{x^3+x^2-x-1}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}=\left[\begin{array}{c}\text{Rozklad na}\\ \text{parciálne zlomky}\end{array}\right]=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)^2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}+c,$$
$$x\in R-\{\pm1\},\ c\in R.$$

e) $$\int\frac{dx}{x^3-2x-4}=\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)(x-2)}=\left[\begin{array}{c}\text{Rozklad na}\\ \text{parciálne zlomky}\end{array}\right]=\int\left(\frac{\frac{1}{10}}{x-2}+\frac{-\frac{x}{10}-\frac{4}{10}}{x^2+2x+2}\right)dx$$

[29] Napr. zo vzťahu $\sinh x+\sinh y=2\sinh\frac{x+y}{2}\cdot\cosh\frac{x-y}{2}$ vyplýva $\frac{\sinh(u+v)+\sinh(u-v)}{2}=\sinh u\cdot\cosh v$. Ak označíme $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{x-y}{2}$ pre $x,y\in R$, potom platí $u+v=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x$, $u-v=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=y$.

$$= \frac{1}{10}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{10}\int \frac{x+4}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\ln|x-2| - \frac{1}{20}\int \frac{2x+2+6}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\begin{array}{c} x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0 \\ (x^2+2x+2)'=2x+2 \end{array}\right] = \frac{1}{20}\ln(x-2)^2 - \frac{1}{20}\int \frac{(x^2+2x+2)'\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} - \frac{3}{10}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}$$
$$= \frac{1}{20}\ln\left(x^2-2x+1\right) - \frac{1}{20}\ln\left(x^2+2x+2\right) - \frac{3}{10}\operatorname{arctg}(x+1)+c$$
$$= \frac{1}{20}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+2} - \frac{3}{10}\operatorname{arctg}(x+1)+c,\ x\in R-\{2\},\ c\in R.$$

f) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-3x^2+4x-2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)(x-1)} = \left[\begin{array}{c}\text{Rozklad na} \\ \text{parciálne zlomky}\end{array}\right] = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2-2x+2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\begin{array}{c} x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0 \\ (x^2-2x+2)'=2x-2 \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+2} = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)+c,$$
$$x\in R-\{1\},\ c\in R. \blacksquare$$

Poznámka 1.1.19.
Pre rozklady integrandov na jednotlivé parciálne zlomky v predchádzajúcom príklade môžeme použiť napríklad Open Source program `wxMaxima`*, resp. online webovú aplikáciu na stránke https://www.wolframalpha.com (viď QR kódy).*

Príklad 1.1.48.
a) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst. } t=x+1 & x^2+2x-3=(x-1)(x+3) & x\in(-\infty;-3),\ t\in(-\infty;-2) \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t & =(x+1)^2-4=t^2-4>0 & x\in(1;\infty),\quad t\in(2;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-4}}$$
$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|+c = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|+c,\ x\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty),\ c\in R.$$

b) $$\int \sqrt{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c|c} \text{Subst. } t=x+1 & x^2+2x-3=(x-1)(x+3) & x\in(-\infty;-3),\ t\in(-\infty;-2) \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t & =(x+1)^2-4=t^2-4>0 & x\in(1;\infty),\quad t\in(2;\infty) \end{array}\right]$$
$$= \int \sqrt{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \frac{t\sqrt{t^2-4}}{2} - \frac{4}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-4}} = \frac{t\sqrt{t^2-4}}{2} - 2\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right|+c,$$
$$= \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}{2} - 2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|+c\ x\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty),\ c\in R.$$

c) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2+3}} = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

d) $$\int \sqrt{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{(x+1)^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{(x+1)\sqrt{(x+1)^2+3}}{2} + \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2+3}}$$
$$= \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x+4}}{2} + \frac{3}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right)+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

e) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-(x-1)^2+4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{2}+c,\ x\in(-1;3),\ c\in R. \blacksquare$$

Poznámka 1.1.20.
Využili sme výsledky príkladu 1.1.12. Pre substitúciu $t=x+1$ *platí* $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ *a pre primitívne funkcie platí* $F(t)=\ln\left(t+\sqrt{t^2+3}\right)=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right)=F(x+1)$*, t. j.*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2+3}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+3}} = \ln\left(t+\sqrt{t^2+3}\right)+c = \ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+3}\right)+c.$$

Príklad 1.1.49.
$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\sqrt{\frac{(x-1)+2}{x-1}}=\sqrt{1+\frac{2}{x-1}},\quad t^2=\frac{x+1}{x-1} & x\in(-\infty;-1\rangle,\ t\in\langle 0;1) \\ t^2(x-1)=x+1,\ x=\frac{t^2+1}{t^2-1},\ \mathrm{d}x=\frac{2t(t^2-1)-(t^2+1)\cdot 2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{-4t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} & x\in(1;\infty),\quad t\in(1;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{-4t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = 2t & u' = 2 \\ v' = \frac{-2t}{(t^2-1)^2} & v = \frac{1}{t^2-1} = (t^2-1)^{-1} \end{array} \right] = \frac{2t}{t^2-1} - \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{2t}{t^2-1} - \frac{2}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c$$

$$= \frac{2t}{t^2-1} + \ln|t+1| - \ln|t-1| + c = \left[\frac{2t}{t^2-1} = \frac{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = \frac{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{2}{x-1}} = (x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right]$$

$$= (x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \ln\left[\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right] - \ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right| + c,\ x \in (-\infty; -1\rangle \cup (1; \infty),\ c \in R. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.50.

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|l} 0 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq 1 & x-1 > 0. \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq x-1. \Rightarrow -1 \leq x,\ 1 \leq -1. \Rightarrow x \in \emptyset. \\ x \neq 1 & x-1 < 0. \Rightarrow 0 \geq x+1 \geq x-1. \Rightarrow -1 \geq x,\ 1 \geq -1. \Rightarrow x \in (-\infty; -1\rangle. \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} & u' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-2)}{\sqrt{\frac{x-1-(x+1)}{x-1}}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\sqrt{(x-1)^4}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{-2}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x-1}\cdot(x-1)^4}} \\ v' = 1 & v = x \qquad = \frac{-1}{\sqrt{-2(x+1)\cdot(x-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}\,|x-1|\,\sqrt{-(x+1)}} = \frac{-\sqrt{2}}{2(1-x)\sqrt{-(x+1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2(x-1)\sqrt{-x-1}} \end{array} \right]$$

$$= x \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{-x-1}} = \circledast$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{-x-1}} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t^2 = -x-1 & x = -t^2-1 & x \in (-\infty; -1) \\ x-1 = -t^2-2 & \mathrm{d}x = -2t\,\mathrm{d}t & t \in (0; \infty) \end{array} \right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{(-t^2-1)(-2t)\,\mathrm{d}t}{(-t^2-2)t}$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{(t^2+1)\,\mathrm{d}t}{t^2+2} = \sqrt{2} \int \frac{(t^2+2-1)\,\mathrm{d}t}{t^2+2} = \sqrt{2} \int \mathrm{d}t - \sqrt{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \sqrt{2}\sqrt{-x-1} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-x-1}}{\sqrt{2}} + c,\ x \in (-\infty; -1),\ c \in R.$$

$$\circledast = x \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{2}\sqrt{-x-1} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-x-1}}{\sqrt{2}} + c,\ x \in (-\infty; -1),\ c \in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|l} 0 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq 1 & x-1 > 0. \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq x-1. \Rightarrow -1 \leq x,\ 1 \leq -1. \Rightarrow x \in \emptyset. \\ x \neq 1 & x-1 < 0. \Rightarrow 0 \geq x+1 \geq x-1. \Rightarrow -1 \geq x,\ 1 \geq -1. \Rightarrow x \in (-\infty; -1\rangle. \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x-1 & x \in (-\infty; -1\rangle \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x & t \in (-\infty; -2\rangle \end{array} \right] = \int \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}}\,\mathrm{d}t = \int \arcsin \sqrt{1+\frac{2}{t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = \arcsin \sqrt{1+\frac{2}{t}} & u' = \frac{1}{\sqrt{1-(1+\frac{2}{t})}} \cdot \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}(-2t^{-2}) = \frac{-1}{\sqrt{-\frac{2}{t}}\sqrt{\frac{t+2}{t}}\sqrt{t^4}} = \frac{-1}{\sqrt{-2(t+2)t^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2(-t)\sqrt{-t-2}} = \frac{\sqrt{2}}{2t\sqrt{-t-2}} \\ v' = 1 & v = t \end{array} \right]$$

$$= t \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t\sqrt{-t-2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } z = -t-2 & = -(x-1)-2 = -x-1 \\ \mathrm{d}z = -\mathrm{d}t & t \in (-\infty; -2),\ z \in (0; \infty),\ x \in (-\infty; -1) \end{array} \right]$$

$$= t \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{-\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = t \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z$$

$$= t \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = t \arcsin \sqrt{\frac{t+2}{t}} + \sqrt{2}\sqrt{z} + c$$

$$= (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{2}\sqrt{-x-1} + c,\ x \in (-\infty; -1),\ c \in R. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.51.

a) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} = \left[\begin{array}{c} \text{Rozklad na} \\ \text{parciálne zlomky} \end{array} \right] = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{\frac{x}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{-\frac{x}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{(2x+\frac{4}{\sqrt{3}})\,\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{3}x+1} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{(2x-\frac{4}{\sqrt{3}})\,\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{3}x+1} = \left[\pm\frac{4}{\sqrt{3}} = \pm\frac{3+1}{\sqrt{3}} = \pm\sqrt{3} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\sqrt{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\,\mathrm{d}x = \left[2x \pm \sqrt{3} = (x^2 \pm \sqrt{3}x + 1)' \right]$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \left(\frac{(x^2+\sqrt{3}x+1)'}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1} \right) \mathrm{d}x - \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \left(\frac{(x^2-\sqrt{3}x+1)'}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } u = x+\frac{\sqrt{3}}{2} & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & x^2+\sqrt{3}x+1 = (x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 1 - \frac{3}{4} = (x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4} = u^2 + \frac{1}{4} > 0 & x \in R,\ u \in R \\ v = x-\frac{\sqrt{3}}{2} & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & x^2-\sqrt{3}x+1 = (x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 1 - \frac{3}{4} = (x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4} = v^2 + \frac{1}{4} > 0 & x \in R,\ v \in R \end{array} \right]$$

$$= \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \tfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln(x^2+\sqrt{3}x+1) + \tfrac{1}{12}\int\frac{du}{u^2+\frac{1}{4}} - \tfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln(x^2-\sqrt{3}x+1) + \tfrac{1}{12}\int\frac{dv}{v^2+\frac{1}{4}}$$
$$= \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \tfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\tfrac{u}{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\tfrac{v}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \tfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \tfrac{1}{6}\operatorname{arctg} 2u + \tfrac{1}{6}\operatorname{arctg} 2v + c$$
$$= \frac{2\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})}{6} + \tfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

b) $$\int\frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \Big[\text{Rozklad na parciálne zlomky}\Big] = \int\Big(\frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{6}}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{\frac{1}{6}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\Big)\,dx$$
$$= \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst. } u = x+\frac{\sqrt{3}}{2} & du = dx & x^2+\sqrt{3}x+1 = (x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+1-\frac{3}{4} = (x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4} = u^2+\frac{1}{4} > 0 & x\in R,\ u\in R \\ \phantom{\text{Subst. }} v = x-\frac{\sqrt{3}}{2} & dv = dx & x^2-\sqrt{3}x+1 = (x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+1-\frac{3}{4} = (x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4} = v^2+\frac{1}{4} > 0 & x\in R,\ v\in R \end{array}\right]$$
$$= -\tfrac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1} + \tfrac{1}{6}\int\frac{du}{u^2+\frac{1}{4}} + \tfrac{1}{6}\int\frac{dv}{v^2+\frac{1}{4}} = -\tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\tfrac{u}{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\tfrac{v}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= -\tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 2u + \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 2v + c$$
$$= \frac{-\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})}{3} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Iné riešenie.
$$\int\frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^3 & x\in R \\ dt = 3x^2\,dt & t\in R \end{array}\right] = \tfrac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+1} = \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} t + c = \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

c) $$\int\frac{x^5\,dx}{x^6+1} = \Big[\text{Rozklad na parciálne zlomky}\Big] = \int\Big(\frac{\frac{2x}{6}}{x^2+1} + \frac{\frac{2x}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{\frac{2x}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\Big)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{6}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1} + \tfrac{1}{6}\int\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\,dx + \tfrac{1}{6}\int\frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\,dx = \Big[2x\pm\sqrt{3} = (x^2\pm\sqrt{3}x+1)'\Big]$$
$$= \tfrac{1}{6}\ln(x^2+1) + \tfrac{1}{6}\ln(x^2+\sqrt{3}x+1) + \tfrac{1}{6}\ln(x^2-\sqrt{3}x+1) + c$$
$$= \tfrac{1}{6}\ln\big[(x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)\big] + c = \tfrac{1}{6}\ln(x^6+1) + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Iné riešenie.
$$\int\frac{x^5\,dx}{x^6+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^6+1 & x\in\langle 0;\infty),\quad t\in\langle 0;\infty) \\ dt = 6x^5\,dx & x\in(-\infty;0\rangle,\ t\in\langle 0;\infty) \end{array}\right] = \tfrac{1}{6}\int\frac{dt}{t} = \tfrac{1}{6}\ln t + c = \tfrac{1}{6}\ln(x^6+1) + c,$$
$$x\in R,\ c\in R.\ \blacksquare$$

Poznámka 1.1.21.
Integrály z príkladu 1.1.51 sú riešené rozkladom na parciálne zlomky a následnou úpravou na tabuľkové integrály. Niekedy je rozumnejšie najprv použiť nejakú vhodnú substitúciu a až potom integrand rozkladať na parciálne zlomky.

Príklad 1.1.52.
a) $$\int\frac{dx}{x\ln x} = \int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \int\frac{(\ln x)'}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + c,\ x\in(0;\infty),\ x\neq 1,\ c\in R.$$

b) $$\int\frac{\ln\operatorname{arctg} x}{x^2+1} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = \operatorname{arctg} x & x\in(0;\infty) \\ dt = \frac{dx}{x^2+1} & t\in(0;\frac{\pi}{2}) \end{array}\right] = \int\ln t\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln t & u' = \frac{1}{t} \\ v' = 1 & v = t \end{array}\right] = t\ln t - \int dt$$
$$= t\ln t - t + c = \operatorname{arctg} x\cdot\ln\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x + c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

c) $$\int x^x(1+\ln x)\,dx = \left[\begin{array}{l|c} u = x^x & u' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}\big(\ln x + \frac{x}{x}\big) = x^x(1+\ln x) \\ v' = & \text{per partes nie je nutné, pretože } (x^x)' = x^x(1+\ln x) \end{array}\right] = \int(x^x)'\,dx$$
$$= x^x + c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

d) $$\int\ln(x^2+1)\,dx = \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u = x \\ v = \ln(x^2+1) & v' = \frac{2x}{x^2+1} \end{array}\right] = x\ln(x^2+1) - \int\frac{2x^2\,dx}{x^2+1}$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2\int \tfrac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2+1) - 2\int\left(1-\tfrac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

e) $$\int \tfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^{-\frac{1}{2}} & v = 2x^{\frac{1}{2}} \end{array}\right] = 2x^{\frac{1}{2}}\ln x - \int \tfrac{2x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}{x} = 2x^{\frac{1}{2}}\ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\sqrt{x}\ln x - \tfrac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

f) $$\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln^2 x & u' = \frac{2\ln x}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \tfrac{x^2\ln^2 x}{2} - \int x\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right]$$
$$= \tfrac{x^2\ln^2 x}{2} - \left[\tfrac{x^2\ln x}{2} - \int\tfrac{x\,\mathrm{d}x}{2}\right] = \tfrac{x^2\ln^2 x}{2} - \tfrac{x^2\ln x}{2} + \tfrac{x^2}{4} + c,\ x\in(0;\infty),\ c\in R.$$

g) $$\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) & u' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right]$$
$$= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \int\tfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2+1 & x\in\langle 0;\infty),\quad t\in\langle 0;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & x\in(-\infty;0\rangle,\ t\in\langle 0;\infty) \end{array}\right]$$
$$= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \tfrac{1}{2}\int\tfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

h) $$\int \ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right) & u' = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{l} u' = \left[\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}\right)\right]' = \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\ \quad = \frac{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x-2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}+1+x}{[(1-x)-(1+x)]\cdot 2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{-2x\cdot 2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{2x\sqrt{1-x^2}} \end{array}\right]$$
$$= x\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right) - \int\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$$
$$= x\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right) - \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x + c,\ x\in(-1;0)\cup(0;1),\ c\in R.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.53.

a) $$\int\tfrac{\mathrm{d}x}{(x-\sqrt{x^2-1})^2} = \int\tfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2\,\mathrm{d}x}{(x-\sqrt{x^2-1})^2\cdot(x+\sqrt{x^2-1})^2} = \int\tfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2\,\mathrm{d}x}{[(x-\sqrt{x^2-1})\cdot(x+\sqrt{x^2-1})]^2} = \int\tfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2\,\mathrm{d}x}{[x^2-(x^2-1)]^2}$$
$$= \int\tfrac{(x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1)\,\mathrm{d}x}{1} = \int(2x^2-1)\,\mathrm{d}x + \int 2x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = x^2-1 & x\in(-\infty;-1\rangle,\ t\in\langle 0;\infty) \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x & x\in\langle 1;\infty),\qquad t\in\langle 0;\infty) \end{array}\right] = \tfrac{2x^3}{3} - x + \int\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{2x^3}{3} - x + \tfrac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \tfrac{2x^3}{3} - x + \tfrac{2\sqrt{t^3}}{3} + c = \tfrac{2x^3}{3} - x + \tfrac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + c,\ x\in(-\infty;-1\rangle\cup\langle 1;\infty),\ c\in R.$$

b) $$\int\tfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - \tfrac{1}{2}\int\tfrac{-2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t = 1-x^2 & x\in(-1;0\rangle,\ t\in(0;1\rangle \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x & x\in\langle 0;1),\quad t\in(0;1\rangle \end{array}\right]$$
$$= \arcsin x - \tfrac{1}{2}\int\tfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \arcsin x - \tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}} + c = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c,\ x\in(-1;1),\ c\in R.$$

c) $$\int\tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}} = \int\tfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}}{(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4})\cdot(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4})}\,\mathrm{d}x = \int\tfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}}{x-3-(x-4)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}\right)\mathrm{d}x = \int\left((x-3)^{\frac{1}{2}}-(x-4)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x = \tfrac{(x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \tfrac{(x-4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3} - \tfrac{2}{3}\sqrt{(x-4)^3} + c,\ x\in\langle 4;\infty),\ c\in R.$$

d) $$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u=\sqrt{1-x^2} & u'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ v'=\frac{1}{x^2} & v=-\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c,$$
$$x\in(-1;0)\cup(0;1),\ c\in R.$$

e) $$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2\,\mathrm{d}x}{(1-\sqrt{1-x^2})\cdot(1+\sqrt{1-x^2})} = \int \frac{1+2\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{1-(1-x^2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \Big(\frac{2}{x^2}-1\Big)\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \big[\text{Časť d)}\big] = -\frac{2}{x} - x - \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x} - 2\arcsin x + c,$$
$$x\in(-1;0)\cup(0;1),\ c\in R.$$

f) $$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt{x} & x\in\langle 0;1) \\ x=t^2,\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;1) \end{array}\right] = \int \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}} = \left[\begin{array}{l|l} \text{Subst.}\quad u=1-t^3 & t\in\langle 0;1) \\ \mathrm{d}u=-3t^2\,\mathrm{d}t & u\in(0;1\rangle \end{array}\right]$$
$$= -\int \frac{2\,\mathrm{d}u}{3\sqrt{u}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} + c = c - \frac{4\sqrt{u}}{3} = c - \frac{4\sqrt{1-t^3}}{3} = c - \frac{4\sqrt{1-x\sqrt{x}}}{3},\ x\in\langle 0;1),\ c\in R.$$

g) $$\int \frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{3. es:}\quad t=\sqrt{\frac{1-x}{x}} & x=\frac{1}{t^2+1} & \frac{1-x}{\sqrt{x(1-x)}}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t & x\in(0;1) \\ t^2=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1 & \mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x-x^2=x(1-x)>0 & t\in(0;\infty) \end{array}\right] = \int \frac{t}{\frac{1}{t^2+1}}\,\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$
$$= -2\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = -2\int \frac{(t^2+1-1)\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = -2\int \Big(1-\frac{1}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t = -2t + 2\operatorname{arctg} t + c$$
$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + c,\ x\in(0;1),\ c\in R.$$

h) $$\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{3. es:}\quad t=\sqrt{\frac{1-x}{x}} & x=\frac{1}{t^2+1} & \frac{1-x}{\sqrt{x(1-x)}}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t & x\in(0;1\rangle \\ t^2=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1 & \mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} & x-x^2=x(1-x)\geq 0 & t\in\langle 0;\infty) \end{array}\right] = -\int \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$$
$$= \left[\begin{array}{l|l} u'=\frac{2t}{(t^2+1)^2}=2t\cdot(t^2+1)^{-2} & u=\frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{t^2+1} \\ v=t & v'=1 \end{array}\right] = \frac{t}{t^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t + c$$
$$= x\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}} + c = \sqrt{x-x^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}} + c,\ x\in(0;1\rangle,\ c\in R.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.54.

a) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\frac{1}{x^2+1} & x^2+1=\frac{1}{t} & 1-t=1-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1} & x\in(-\infty;0),\ t\in(0;1) \\ x=\sqrt{\frac{1}{t}-1}=\sqrt{\frac{1-t}{t}} & x^2=\frac{1}{t}-1 & \mathrm{d}x=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1-t}{t}}}\cdot\frac{-t-(1-t)}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{-\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{2t^2\sqrt{1-t}} & x\in(0;\infty),\quad t\in(0;1) \end{array}\right]$$
$$= \int \frac{1}{\frac{1-t}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}}\cdot\frac{-\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{2t^2\sqrt{1-t}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{1-t}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{1-t}} = -\frac{1}{2}\int (1-t)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{-(1-t)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = c - \frac{1}{\sqrt{1-t}} = c - \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}} = c - \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}},\ x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty),\ c\in R.$$

b) $$\int \sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x = \big[\,1+\mathrm{e}^x>1>0 \text{ pre } x\in R,\ 1-\mathrm{e}^x\geq 0 \text{ pre } x\leq 0.\ \Rightarrow\ x\in(-\infty;0\rangle.\,\big]$$
$$\left[\begin{array}{l|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}} & t^2=\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} & t^2(1+\mathrm{e}^x)=t^2+t^2\,\mathrm{e}^x=1-\mathrm{e}^x & x\in(-\infty;0\rangle,\ t\in\langle 0;1) \\ x=\ln\frac{1-t^2}{1+t^2} & \mathrm{e}^x=\frac{1-t^2}{1+t^2} & x=\ln(1-t^2)-\ln(1+t^2) & \mathrm{d}x=\big(\frac{-2t}{1-t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\big)\,\mathrm{d}t=2\big(\frac{t}{t^2-1}-\frac{t}{t^2-1}\big)\,\mathrm{d}t \end{array}\right]$$
$$= 2\int t\Big(\frac{t}{t^2-1}-\frac{t}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t = 2\int \Big(\frac{t^2-1+1}{t^2-1}-\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t = 2\int \Big(1+\frac{1}{t^2-1}-1+\frac{1}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{2}{2}\ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big| + 2\operatorname{arctg} t + c = \ln\frac{1-t}{1+t} + 2\operatorname{arctg} t + c$$
$$= \left[\,\frac{1-t}{1+t} = \frac{1-\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}}{1+\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}}\cdot\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} = \frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}\cdot\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-\sqrt{1-\mathrm{e}^x}} = \frac{(1+\mathrm{e}^x)-2\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\sqrt{1-\mathrm{e}^x}+(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)-(1-\mathrm{e}^x)} = \frac{2-2\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{2\,\mathrm{e}^x} = \frac{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^x}\,\right]$$
$$= \ln\frac{1-1\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}} + c = \ln\big(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\big) - \ln\mathrm{e}^x + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}} + c$$
$$= \ln\big(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\big) - x + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}} + c,\ x\in(-\infty;0\rangle,\ c\in R.$$

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\left[\begin{array}{l|l|l}\text{Subst.}\quad t=\frac{1}{x} & \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}=\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn}t} & x\in(-\infty;-1),\ t\in(-1;0)\\ x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2} & & x\in(1;\infty),\quad t\in(0;1)\end{array}\right]$

$$=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\cdot\operatorname{sgn}t}}=\int\frac{-\operatorname{sgn}t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\circledast$$

Pre $x\in(1;\infty)$ platí $t\in(0;1)$, $\operatorname{sgn}t=\operatorname{sgn}x=1$, $|x|=x$. Potom platí:

$$\circledast=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+c=-\arcsin\frac{1}{x}+c=-\arcsin\frac{1}{|x|}+c,\ c\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;-1)$ platí $t\in(-1;0)$, $\operatorname{sgn}t=\operatorname{sgn}x=-1$, $|x|=-x$. Potom platí:[30]

$$\circledast=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+c=\arcsin\frac{1}{x}+c=-\arcsin\frac{1}{-x}+c=-\arcsin\frac{1}{|x|}+c,\ c\in R.$$

d) $\displaystyle\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x\cdot x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst.}\ t=1-x^2 & x\in(-1;0\rangle,\ t\in(0;1\rangle\\ dt=-2x\,dx & x\in\langle 0;1),\quad t\in(0;1\rangle\end{array}\right]=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-t)^2\,dt}{\sqrt{t}}$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1-2t+t^2}{\sqrt{t}}\,dt=\int\Big(-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}}\Big)\,dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c$$

$$=-\sqrt{t}+\frac{2\sqrt{t^3}}{3}-\frac{\sqrt{t^5}}{5}+c=-\sqrt{1-x^2}+\frac{2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}-\frac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5}+c,\ x\in(-1;1),\ c\in R.$$

e) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst.}\quad x=t^3 & x\in\langle 0;\infty)\\ t=\sqrt[3]{x},\ dx=3t^2\,dt & t\in\langle 0;\infty)\end{array}\right]=3\int\frac{t^2\,dt}{1+t}=3\int\frac{t^2+t-t-1+1}{t+1}\,dt$

$$=3\int\Big(t-1+\frac{1}{t+1}\Big)\,dt=\frac{3t^2}{2}-3t+3\ln(t+1)+c$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}-3\sqrt[3]{x}+3\ln(1+\sqrt[3]{x})+c,\ x\in\langle 0;\infty),\ c\in R.$$

f) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\left[\begin{array}{r|l|l}\text{Subst.}\quad x=t^6 & \sqrt{x}=\sqrt{t^6}=t^3 & x\in(0;\infty)\\ t=\sqrt[6]{x},\ dx=6t^5\,dt & \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{t^6}=t^2 & t\in(0;\infty)\end{array}\right]=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3\,dt}{t+1}$

$$=6\int\frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\,dt=6\int\Big(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\Big)\,dt=6\Big[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\Big]+c$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+c=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+c,$$

$$x\in(0;\infty),\ c\in R.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.55.
Vypočítajte integrál $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

Riešenie.
Neurčitý integrál I je definovaný pre $x\in(-\infty;1)$. Výpočet rozdelíme na dve časti.
Pre $x\in(0;1)$ platí $\frac{1}{x}>1$, $\frac{1}{x^3}>1$, t. j. $\frac{1}{x^3}-1=\frac{1-x^3}{x^3}>0$. Potom platí:

$$I=\left[\begin{array}{l|l|l|l}\text{Subst.}\quad t=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1} & =\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}}=\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{|x|}=\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} & t^3x^3=1-x^3,\ x^3=\frac{1}{t^3+1} & x\in(0;1)\\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}}=(t^3+1)^{-\frac{1}{3}} & dx=\frac{-\frac{1}{3}\cdot 3t^2\,dt}{\sqrt[3]{(t^3+1)^4}}=\frac{-t^2\,dt}{(t^3+1)\sqrt[3]{t^3+1}} & \sqrt[3]{1-x^3}=tx=\frac{t}{\sqrt[3]{t^3+1}} & t\in(0;\infty)\end{array}\right]$$

$$=\int\frac{1}{\frac{t}{\sqrt[3]{t^3+1}}}\cdot\frac{-t^2\,dt}{(t^3+1)\sqrt[3]{t^3+1}}=\int\frac{-t\,dt}{t^3+1}=\left[\begin{array}{c}\text{Rozklad na}\\ \text{parciálne zlomky}\end{array}\right]=\int\Big(\frac{\frac{1}{3}}{t+1}+\frac{-\frac{t}{3}-\frac{1}{3}}{t^2-t+1}\Big)\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{6}\int\frac{2t+2}{t^2-t+1}\,dt=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{6}\int\frac{2t-1+3}{t^2-t+1}\,dt$$

$$=\left[\begin{array}{r|lll}\text{Subst.}\quad u=t-\frac{1}{2} & t^2-t+1=(t-\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=u^2+\frac{3}{4}>0 & & \\ du=dt & (t^2-t+1)'=2t-1, & t\in(0;\infty), & u\in(-\frac{1}{2};\infty)\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{6}\int\frac{(t^2-t+1)'\,dt}{t^2-t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{u^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\ln\left|t^2-t+1\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c$$

---

[30]Funkcia arkussínus je nepárna. Pre všetky $|x|\geq 1$, t. j. $\frac{1}{x}\in(-1;1)-\{0\}$ platí $\arcsin\frac{1}{x}=-\arcsin\frac{1}{-x}$.

$$= \tfrac{1}{6}\ln(t+1)^2 - \tfrac{1}{6}\ln(t^2-t+1) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + c = \tfrac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} = \frac{(t+1)^3}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{(t+1)^3}{t^3+1} = x^3(\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}+1)^3 = (\sqrt[3]{1-x^3}+x)^3 \\ \frac{2t-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2t-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x} = \frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{\sqrt{3}x} \end{array}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{\sqrt{3}x} + c,\ c\in R.$$

Pre $x\in(-\infty;0)$ platí $\frac{1}{x}<0$, $-\frac{1}{x^3}>0$, t. j. $1-\frac{1}{x^3}=\frac{x^3-1}{x^3}>1$. Potom platí:

$$I = \left[\begin{array}{c|l|l|l} \text{Subst.}\quad t=\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} & = \sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{|x|} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{-x} & -t^3x^3 = 1-x^3,\ x^3 = \frac{1}{1-t^3} = -\frac{1}{t^3-1} & x\in(-\infty;0) \\ x = -\frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}} = -(t^3-1)^{-\frac{1}{3}} & \mathrm{d}x = -\frac{-\frac{1}{3}\cdot 3t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}} = \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^3-1)\sqrt[3]{t^3-1}} & \sqrt[3]{1-x^3} = -tx = -\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} & t\in(1;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int\frac{1}{\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}}\cdot\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^3-1)\sqrt[3]{t^3-1}} = \int\frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3-1} = \left[\begin{array}{c}\text{Rozklad na}\\ \text{parciálne zlomky}\end{array}\right] = \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{t-1}+\frac{-\frac{t}{3}-\frac{1}{3}}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{3}\int\frac{t-1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{6}\int\frac{2t-2}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{6}\int\frac{2t+1-3}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst.}\quad u = t+\frac{1}{2} & t^2+t+1 = (t+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4} = (t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} = u^2+\frac{3}{4} > 0 \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & (t^2+t+1)' = 2t+1, \qquad t\in(1;\infty), \qquad u\in\left(\frac{3}{2};\infty\right) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{6}\int\frac{(t^2+t+1)'\,\mathrm{d}t}{t^2+t+1} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln\left|t^2+t+1\right| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c$$

$$= \tfrac{1}{6}\ln(t-1)^2 - \tfrac{1}{6}\ln(t^2+t+1) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + c = \tfrac{1}{6}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} = \frac{(t-1)^3}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{(t-1)^3}{t^3+1} = -x^3(\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{-x}-1)^3 = (\sqrt[3]{1-x^3}+x)^3 \\ \frac{2t+1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2t+1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{-x}+1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{-x} = \frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{-\sqrt{3}x} \end{array}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{-\sqrt{3}x} + c = \left[\text{funkcia arctg je nepárna}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{\sqrt{3}x} + c,\ c\in R. \ \blacksquare$$

Poznámka 1.1.22.
Nasledujúce integrály (viď príklad 1.1.55) patria medzi tzv. ***binomické integrály***

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{x^n\pm 1}}, \quad \int\sqrt[n]{x^n\pm 1}\,\mathrm{d}x, \quad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}}, \quad \int\sqrt[n]{1-x^n}\,\mathrm{d}x, \quad n=2,3,4\ldots$$

a môžeme ich racionalizovať pomocou substitúcií $t=\sqrt[n]{1\pm\frac{1}{x^n}}$, *resp.* $t=\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}\pm 1}$.

Príklad 1.1.56.
Nech má funkcia f spojitú druhú deriváciu f'' na intervale I. Vypočítajte $\displaystyle\int x f''(x)\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.
$$\int x f''(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = f''(x) & v = f'(x) \end{array}\right] = x f'(x) - \int f'(x)\,\mathrm{d}x = x f'(x) - f(x) + c,\ x\in I,\ c\in R. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.57.
Nájdite predpis pre funkciu $f(x)$, ak platí $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$ pre všetky $x\in R$.

Riešenie.
Pre deriváciu platí $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x = 1-\sin^2 x$. Ak označíme $t=\sin^2 x$, potom $t\in\langle 0;1\rangle$ a pre všetky argumenty $t=\sin^2 x$ platí $f'(t) = 1-t$, $t\in\langle 0;1\rangle$. Potom

$$f(t) = \int f'(t)\,\mathrm{d}t = \int(1-t)\,\mathrm{d}t = t - \frac{t^2}{2} + c,\ \ t\in\langle 0;1\rangle,\ \ c\in R.$$

Z toho vyplýva, že podmienkam úlohy vyhovuje každá spojitá funkcia $f(x)$, $x\in R$, ktorej zúženie na interval $\langle 0;1\rangle$ má tvar $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + c$, kde $c\in R$ je ľubovoľná konštanta. $\blacksquare$

Cvičenia

1.1.1. Dokážte, že ak je funkcia $f(x)$, $x \in R$ periodická s periódou p, potom k nej primitívna funkcia $F(x)$, $x \in R$ je tiež periodická s periódou p.

1.1.2. Vypočítajte $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, ak $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{pre } |x| \le 1, \\ 1 - |x| & \text{pre } |x| > 1. \end{cases}$ ♣

1.1.3. Dokážte, že funkcie $f(x) = 2\cos^2 x$, $f(x) = -2\sin^2 x$ a $g(x) = \cos 2x$ sú na množine R primitívne k tej istej funkcii. ♣

1.1.4. Určte $\int f'(2x)\,\mathrm{d}x$, ak má funkcia f spojitú druhu deriváciu f'' na intervale I. ♣

1.1.5. Nájdite funkciu $f(x)$, ak pre všetky $x \in (0;\infty)$ platí $f'(x^2) = \frac{1}{x}$. ♣

1.1.6. Nájdite funkciu $f(x)$, ak $f'(\ln x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in (0;1\rangle, \\ x & \text{pre } x \in (1;\infty). \end{cases}$ ♣

1.1.7. Vypočítajte: ♣

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6}$, b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$, c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}$, d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}$,

e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+2}$, f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$, g) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-3x^2-x+3}$, h) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-7x+6}$,

i) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+2x^2-x-2}$, j) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-x^2-4x+4}$, k) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-4x^2+5x-2}$, l) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+4x^2+5x+2}$,

m) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+3x^2-4}$, n) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-3x+2}$, o) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+2x^2+2x+1}$, p) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-2x^2+3x-2}$,

q) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-3x^2+3x-2}$, r) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$, s) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)x^2}$, t) $\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^3}$,

u) $\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+6)^3}$, v) $\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^3}$, w) $\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+3)^3}$, x) $\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+2)^3}$.

1.1.8. Vypočítajte: ♣

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6(1+x^2)}$, b) $\int \frac{(x-1)^2\,\mathrm{d}x}{(2-x)^5}$, c) $\int \frac{(x-2)^3\,\mathrm{d}x}{(1-x)^5}$, d) $\int \frac{(x+1)^6\,\mathrm{d}x}{(-2-x)^3}$,

e) $\int \frac{(x+1)^4\,\mathrm{d}x}{(2-x)^3}$, f) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$, g) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$, h) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^4}$,

i) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+6}}$, j) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}$, k) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x-3}}$, l) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+3}}$,

m) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x+6}}$, n) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x-2}}$, o) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x-5}}$, p) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$,

q) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2-4x-2}}$, r) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$, s) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{2+3x}}$, t) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{-2+3x}}$,

u) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{-1-3x}}$, v) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{1-2x}}$, w) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{-1-2x}}$, x) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{2+3x}}$.

1.1.9. Vypočítajte: ♣

a) $\displaystyle\int |x-1|(x-1)^6\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int |x-1|(x-1)^7\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x$,
d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x-3}\,\mathrm{d}x$,
g) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+4x-2}\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$, i) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$,
j) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+4x-5}\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, l) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2-4x-2}\,\mathrm{d}x$,
m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, n) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2-4x-3}\,\mathrm{d}x$, o) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}$,
p) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt[10]{x^7}+\sqrt[20]{x^{13}}}$, q) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$, r) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

1.1.10. Vypočítajte: ♣

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$, b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+3x}\,\mathrm{d}x}{x-2}$, c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{-1-2x}\,\mathrm{d}x}{x-1}$, d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+3x}\,\mathrm{d}x}{x+2}$, e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-2x}\,\mathrm{d}x}{x-1}$,
f) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$, i) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$, j) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$,
k) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$, m) $\displaystyle\int \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x+1}}$, n) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x}$, o) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,
p) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, q) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}$, r) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^3}}$, s) $\displaystyle\int \frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}}$, t) $\displaystyle\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}$,
u) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, v) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, w) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^4-1}}$, x) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x^4}}$, y) $\displaystyle\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$.

1.1.11. Vypočítajte: ♣

a) $\displaystyle\int \sin^3 2x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \sin^4 3x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \cos^3 3x\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int \cos^4 2x\,\mathrm{d}x$,
e) $\displaystyle\int \sinh^2 4x\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \sinh^3 2x\,\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int \sinh^4 x\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int x\sinh x\,\mathrm{d}x$,
i) $\displaystyle\int x^2\sinh x\,\mathrm{d}x$, j) $\displaystyle\int x^3\sinh x\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int \cosh^2 3x\,\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int \cosh^3 x\,\mathrm{d}x$,
m) $\displaystyle\int \cosh^4 2x\,\mathrm{d}x$, n) $\displaystyle\int x\cosh x\,\mathrm{d}x$, o) $\displaystyle\int x^2\cosh x\,\mathrm{d}x$, p) $\displaystyle\int x^3\cosh x\,\mathrm{d}x$.

1.1.12. Vypočítajte: ♣

a) $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int x^2\arcsin x\,\mathrm{d}x$,
d) $\displaystyle\int \arccos x\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int x\arccos x\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int x^2\arccos x\,\mathrm{d}x$,
g) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$, i) $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$,
j) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}^2\,x\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int \mathrm{arccotg}\,x\,\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arccotg}\,x\,\mathrm{d}x$,
m) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{arccotg}\,x\,\mathrm{d}x$, n) $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{arccotg}\,x\,\mathrm{d}x$, o) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arccotg}^2\,x\,\mathrm{d}x$,
p) $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}x$, q) $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$, r) $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,\mathrm{d}x$,

s) $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,\mathrm{d}x$, t) $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$, u) $\displaystyle\int \arccos\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}x$,
v) $\displaystyle\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$, w) $\displaystyle\int \arccos\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,\mathrm{d}x$, x) $\displaystyle\int \arccos\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

1.1.13. Vypočítajte: ♣
a) $\displaystyle\int \frac{\ln^4 x\,\mathrm{d}x}{x}$, b) $\displaystyle\int \frac{\ln x^4\,\mathrm{d}x}{x}$, c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$, e) $\displaystyle\int \frac{x^7\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x^2}}$, f) $\displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x^2}}$,
g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2^x+4}}$, h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2^x+3}}$, i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2^x+2}}$, j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2^x+4}$, k) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2^x+3}$, l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2^x+2}$,
m) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2^x-1}}$, n) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2^x-4}}$, o) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2^x-3}}$, p) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2^x-1}$, q) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2^x-4}$, r) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2^x-3}$.

1.1.14. Vypočítajte: ♣
a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+1}$, b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin 3x-5}$, c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin 2x+1}$, d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x-3}$,
e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos 2x-1}$, f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4\cos 2x+5}$, g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos x+1}$, h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos 3x+2}$,
i) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1-2\cos 2x}\,\mathrm{d}x$, j) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{4-3\sin x}\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int \frac{\cos 3x}{2-\sin 3x}\,\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,\mathrm{d}x}{4-3\cos 2x}$,
m) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x\,\mathrm{d}x}{x^2}$, n) $\displaystyle\int \frac{\arccos x\,\mathrm{d}x}{x^2}$, o) $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, p) $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$,
q) $\displaystyle\int \frac{x\arccos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, r) $\displaystyle\int \frac{\arccos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, s) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$, t) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$,
u) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x}{x^2}$, v) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$, w) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arccotg}\,x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$, x) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arccotg}\,x\,\mathrm{d}x}{x^2}$.

1.1.15. Vypočítajte: ♣
a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$, b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}$, c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arccotg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$,
e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$, f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4\cos^2 x+\sin^2 x}$, g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{-2+3x}}{x-2}\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{-1-3x}}{x+1}\,\mathrm{d}x$,
i) $\displaystyle\int \frac{\ln\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x}$, j) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\cos x^4}}$, k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+\ln x}\,\mathrm{d}x}{x}$, l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$,
m) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^3+x^6}}$, n) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$, o) $\displaystyle\int \frac{1-x}{x-\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$, p) $\displaystyle\int \frac{1-x}{x-\sqrt{x^2-x}}\,\mathrm{d}x$,
q) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{3x+4}}$, r) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+1}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x$, s) $\displaystyle\int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3}\,\mathrm{d}x$, t) $\displaystyle\int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}\,\mathrm{d}x$.

1.1.16. Vypočítajte: ♣
a) $\displaystyle\int |x-1|^7\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int |x-1|^8\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{d}x$,
e) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int x^4\ln x\,\mathrm{d}x$,
i) $\displaystyle\int \ln(x+1)^7\,\mathrm{d}x$, j) $\displaystyle\int x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int x^3\ln^2 x\,\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int x^4\ln^2 x\,\mathrm{d}x$,
m) $\displaystyle\int \ln(2x-3)^4\,\mathrm{d}x$, n) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$, o) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, p) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

q) $\displaystyle\int \sqrt[9]{2x-3}\,\mathrm{d}x$, r) $\displaystyle\int \sqrt[7]{3-2x}\,\mathrm{d}x$, s) $\displaystyle\int \frac{(x^3-1)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}$, t) $\displaystyle\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}$,

u) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)\,\mathrm{d}x}{1+\cos x}$, v) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x(1+\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\sin x}$, w) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$, x) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}$.

1.1.17. Vypočítajte: ♣

a) $\displaystyle\int (x^2-1)\sin 2x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (x^3-1)\sin x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int (x^3-1)\cos x\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int (x^2-1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int (x^2+x+1)\sin 3x\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int (x^2+x+1)\cos 3x\,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int (\operatorname{tg} 2x+\operatorname{cotg} 2x)\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int (x+2)^3\ln{(x+1)^6}\,\mathrm{d}x$, i) $\displaystyle\int (x^2-1)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$,

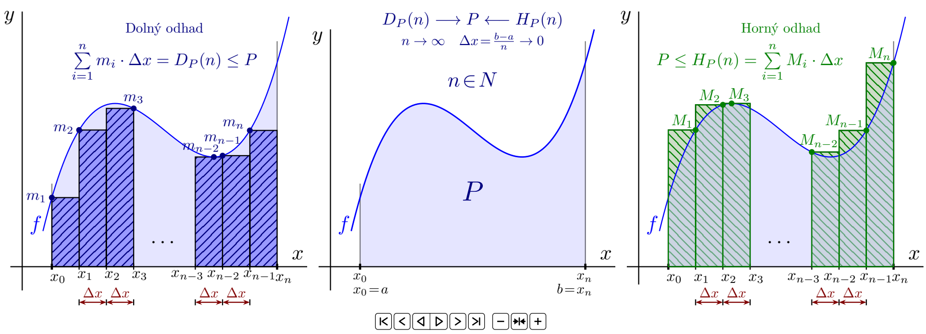
j) $\displaystyle\int (x-1)^4\ln{(x+1)^5}\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sqrt{1-2\,\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int x^2\ln\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$,

m) $\displaystyle\int (x+1)^5\ln{(x-2)^4}\,\mathrm{d}x$, n) $\displaystyle\int (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$, o) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

1.2 Riemannov určitý integrál

V tejto časti sa budeme zaoberať určitým integrálom funkcie, ktorý na rozdiel od neurčitého integrálu nie je funkcia, ale konkrétna hodnota (číslo alebo $\pm\infty$).

Určitý integrál môžeme definovať viacerými spôsobmi. My ho budeme definovať pomocou integrálnych súčtov a nazývať **Riemannov** (**určitý**) **integrál**. Niekedy sa určitý integrál pomocou primitívnej funkcie (**Newtonov integrál**) alebo všeobecnejšie pomocou miery (**Lebesguov**, resp. **Lebesgue-Stieltjesov integrál**).



Obr. 1.2.1: Krivočiary lichobežník P určený nezápornou funkciou f na intervale $\langle a; b\rangle$ a jeho aproximácia pomocou súčtov D_P a H_P z príkladu 1.2.1

Príklad 1.2.1.
Nech $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je kladná a spojitá funkcia, $\langle a; b\rangle$ je nedegenerovaný uzavretý interval, t. j. $a < b$. Určte plošný obsah množiny[31] $P = \big\{(x; y) \in R^2, x \in \langle a; b\rangle, 0 \le y \le f(x)\big\}$.

[31] Množinu P nazývame **krivočiary lichobežník** určený funkciou f a intervalom $\langle a; b\rangle$.

Riešenie.
Vo všeobecnosti sú s našimi doterajšími vedomosťami pri určovaní obsahu P problémy. Uvažujme postup, pri ktorom plochu P pokryjeme neprekrývajúcimi sa obdĺžnikmi a obsah odhadneme pomocou súčtu obsahov týchto obdĺžnikov.
Rozdeľme $\langle a;b\rangle$ pomocou disjunktných bodov $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ na $n \in N$ podintervalov $\langle x_0;x_1\rangle$, $\langle x_1;x_2\rangle$, $\langle x_2;x_3\rangle$, ..., $\langle x_{n-2};x_{n-1}\rangle$, $\langle x_{n-1};x_n\rangle$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$. Pre $i = 1, 2, \ldots, n$ označme

$$m_i = \min\{f(x), x \in \langle x_{i-1};x_i\rangle\}, \quad M_i = \max\{f(x), x \in \langle x_{i-1};x_i\rangle\}.$$

Plochu P odhadneme zdola a zhora hodnotami D_P a H_p (obr. 1.2.1)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x = D_P(n) \leq P \leq H_P(n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x.$$

Keď zväčšíme n, potom sa odhady D_P, H_P zlepšia (v horšom prípade ostanú rovnaké). Pre $n \to \infty$, t. j. $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$ bude platiť $D_P(n) \to P$, $H_P(n) \to P$. ■

Delením intervalu $\langle a;b\rangle$, kde $a < b$, nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}, \ n \in N,$$

pre ktorú platí $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Body x_0, x_1, ..., x_n nazývame **deliace body**. Deliace body jednoznačne určujú delenie D a vytvárajú **deliace intervaly** $d_i = \langle x_{i-1};x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$ s dĺžkami Δx_i. Dĺžku najdlhšieho z deliacich intervalov nazývame **norma delenia** D a značíme $\mu(D)$, t. j. $\mu(D) = \max\{\Delta x_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Pre dĺžky intervalov d_1, d_2, ..., d_n platí (obr. 1.2.2)

$$\Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Ak chceme zdôrazniť delený interval $\langle a;b\rangle$, potom delenie označíme $D_{\langle a;b\rangle}$. **Množinu všetkých delení** intervalu $\langle a;b\rangle$ značíme $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, t. j. $\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} = \{D, D \text{ je delenie } \langle a;b\rangle\}$.[32]

Ak pre delenia $D, D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ platí $D^* \subset D$, potom delenie D nazývame **zjemnenie delenia** D^*. Pre zjednotenie $D = D^* \cup D^{**}$ delení $D^*, D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ platí $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ a nazývame ho **spoločné zjemenenie delení** D^*, D^{**}.

Poznámka 1.2.1.
Je zrejmé, že každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ má nekonečne veľa zjemnení. Ak zvolíme ľubovoľný bod $x^* \in \langle a;b\rangle$, $x^* \notin D$, potom delenie $D^* = D \cup \{x^*\}$ je zjemnením delenia D.

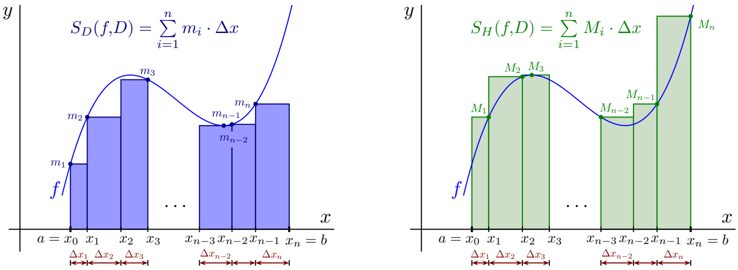
Nech $y = f(x)$, $x \in \langle a;b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D = \{x_i\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$. Ak pre $i = 1, 2, \ldots, n$ označíme

$$m_i = \inf\{f(x), x \in \langle x_{i-1};x_i\rangle\}, \quad M_i = \sup\{f(x), x \in \langle x_{i-1};x_i\rangle\},$$

potom **dolným** $S_D(f, D)$ a **horným Riemannovým (integrálnym) súčtom** $S_H(f, D)$ funkcie f pri delení D nazývame čísla

$$S_D(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i, \quad S_H(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i.$$

[32]Výraz $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ znamená, že množina D je delenie intervalu $\langle a;b\rangle$.



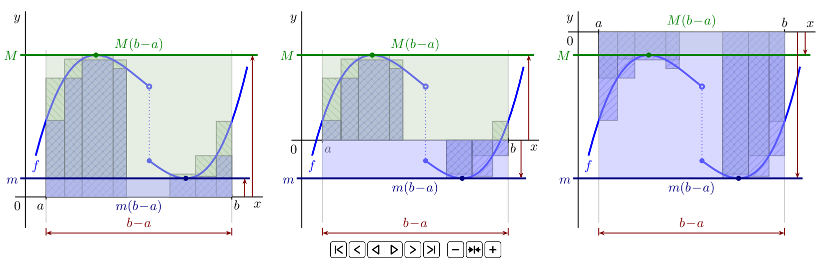
Obr. 1.2.2: Dolné $S_D(f,D)$ a horné $S_H(f,D)$ Riemannové integrálne súčty

Veta 1.2.1.
Funkcia $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, delenie $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$.

$\Longrightarrow$ Množiny $\{S_D(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$ sú ohraničené.

Dôkaz.
Označme $m=\inf\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$, potom pre $i=1,2,\ldots,n$ platí $m\leq m_i\leq M_i\leq M$. Z toho vyplýva (obr. 1.2.3)

$$m(b-a)=m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}m\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=S_D(f,D)$$
$$\leq S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}M\Delta x_i=M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=M(b-a).\ \blacksquare$$



Obr. 1.2.3: Veta 1.2.1

Veta 1.2.2.
Funkcia $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, delenia $D, D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $D\subset D^*$.

$\Longrightarrow$ $S_D(f,D)\leq S_D(f,D^*)\leq S_H(f,D^*)\leq S_H(f,D)$.

Dôkaz.
Delenie D^* vznikne z D pridaním najviac spočítateľného počtu bodov. To znamená, že vetu stačí dokázať pre jeden pridaný bod a matematickou indukciou rozšíriť na daný počet. Uvažujme delenie $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n\in N$ a zjemnenie $D^*=D\cup\{x^*\}$.

Nech $i\in\{1,2,\dots,n\}$ je také, že $x^*\in(x_{i-1};x_i)$. Integrálne súčty pre delenia D, D^* sa líšia iba na intervale $\langle x_{i-1};x_i\rangle=\langle x_{i-1};x^*\rangle\cup\langle x^*;x_i\rangle$. Pre delenie D označme

$$m_i=\inf\{f(x),x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\},\quad M_i=\sup\{f(x),x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}.$$

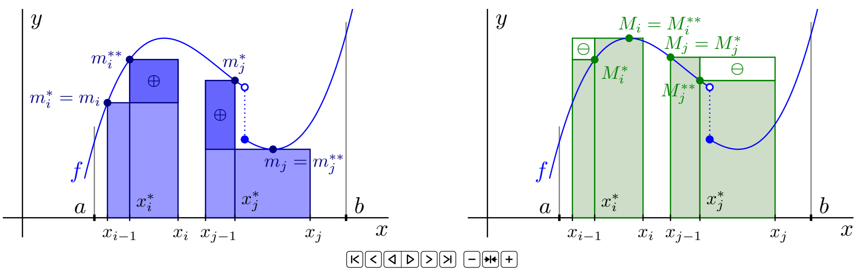
Analogicky pre delenie D^* označme

$$\begin{aligned} m^* &= \inf\{f(x),x\in\langle x_{i-1};x^*\rangle\}, & m^{**} &= \inf\{f(x),x\in\langle x^*;x_i\rangle\},\\ M^* &= \sup\{f(x),x\in\langle x_{i-1};x^*\rangle\}, & M^{**} &= \sup\{f(x),x\in\langle x^*;x_i\rangle\}.\end{aligned}$$

Je zrejmé, že platí $m_i\le m^*$, $m_i\le m^{**}$ a $M^*\le M_i$, $M^{**}\le M_i$ (obr. 1.2.4).[33] Potom platí

$$\begin{aligned} S_H(f,D)-S_H(f,D^*) &= M_i(x_i-x_{i-1})-\big[M^{**}(x_i-x^*)+M^*(x^*-x_{i-1})\big]\\ &\ge M_i(x_i-x_{i-1})-\big[M_i(x_i-x^*)+M_i(x^*-x_{i-1})\big]=0,\\ S_D(f,D^*)-S_D(f,D) &= \big[m^{**}(x_i-x^*)+m^*(x^*-x_{i-1})\big]-m_i(x_i-x_{i-1})\\ &\ge \big[m_i(x_i-x^*)+m_i(x^*-x_{i-1})\big]-m_i(x_i-x_{i-1})=0.\end{aligned}$$

Nerovnosť $S_D(f,D^*)\le S_H(f,D^*)$ je splnená triviálne na základe definície. ■



Obr. 1.2.4: Veta 1.2.2

Dôsledok 1.2.2.a.
Funkcia $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená, delenia $D^*,D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$.

$\Longrightarrow\ S_D(f,D^*)\le S_H(f,D^{**})$.

Dôkaz.
Delenie $D=D^*\cup D^{**}$ je zjemnením oboch delení D^*, D^{**}. Potom (veta 1.2.2) platí

$$\left.\begin{array}{r} S_D(f,D^*)\le S_D(f,D)\le S_H(f,D)\le S_H(f,D^*),\\ S_D(f,D^{**})\le S_D(f,D)\le S_H(f,D)\le S_H(f,D^{**}).\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ S_D(f,D^*)\le S_H(f,D^{**}).\ ■$$

[33] Na obrázku 1.2.4 sú pridané dva body $x_i^*\in(x_{i-1};x_i)$ a $x_j^*\in(x_{j-1};x_j)$.

Ak je funkcia $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ ohraničená, potom čísla

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{S_D(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{S_H(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}$$

nazývame **dolný** a **horný Riemannov** (**určitý**) **integrál funkcie** f **na intervale** $\langle a; b\rangle$ (resp. **od** a **po** b). Z vety 1.2.1 vyplýva, že tieto čísla **vždy existujú** a platí

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a), \tag{1.1}$$

pričom $m = \inf\{f(x), x \in \langle a; b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x), x \in \langle a; b\rangle\}$. Ak platí rovnosť medzi dolným a horným Riemannovým integrálom, potom číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazývame **Riemannov** (**určitý**) **integrál funkcie** f **na intervale** $\langle a; b\rangle$. Funkciu f nazývame **riemannovsky integrovateľná na intervale** $\langle a; b\rangle$ a označujeme $f \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Poznámka 1.2.2.
Z definície vyplýva, že funkcia môže mať najviac jeden určitý integrál. Integračná premenná nemá vplyv na jeho hodnotu a namiesto x môžeme písať ľubovoľný symbol $(t, u, z, \varphi, \dots)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Príklad 1.2.2.
a) $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$, $c \in R$ (konštantná funkcia).

Pre každé delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$ platí $m_i = \inf\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c$, $M_i = \sup\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} = c$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$. Potom

$$S_D(f,D) = S_H(f,D) = \sum_{i=1}^n c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a) = \underline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x.$$

b) Dirichletova funkcia $\chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ pre } x \in \langle 0; 1\rangle,\ x \in Q, \\ 0 \text{ pre } x \in \langle 0; 1\rangle,\ x \notin Q. \end{cases}$

Pre každé delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$1 = \sup\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}. \implies S_H(f,D) = \sum_{i=1}^n 1\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1 - 0 = 1.$$

$$0 = \inf\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}. \implies S_D(f,D) = \sum_{i=1}^n 0\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 = 0.$$

Potom $\underline{\int_0^1} \chi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\overline{\int_0^1} \chi(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^1 \chi(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje. ■

Poznámka 1.2.3.
Špeciálne pre $c=1$ dostaneme $\underline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$

Veta 1.2.3 (Nutná a postačujúca podmienka existencie určitého integrálu).
Funkcia $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená. Potom platí:

$$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}. \iff \text{Pre každé } \varepsilon>0 \text{ existuje } D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} \text{ tak, že } S_H(f,D)-S_D(f,D)<\varepsilon.$$

Dôkaz.
Označme $I_D = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, $I_H = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$NP_{\Rightarrow}$: $f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}$, t. j. existuje $I=I_D=I_H$. Nech $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{2}>0$ je ľubovoľné, potom:

$$I=\sup\left\{S_D(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\}, \text{ t. j. existuje } D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} \text{ také, že } I-S_D(f,D^*)<\varepsilon_0.$$
$$I=\inf\left\{S_H(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\right\} \text{ t. j. existuje } D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} \text{ také, že } S_H(f,D^{**})-I<\varepsilon_0.$$

Ak položíme $D=D^*\cup D^{**}$, potom (veta 1.2.2) platí:

$$S_D(f,D^*) \le S_D(f,D) \le I. \implies I-S_D(f,D)\le I-S_D(f,D^*) < \varepsilon_0.$$
$$I\le S_H(f,D)\le S_H(f,D^{**}). \implies S_H(f,D)-I\le S_H(f,D^{**})-I<\varepsilon_0.$$

$$\implies S_H(f,D)-S_D(f,D)=S_H(f,D)-I+I-S_D(f,D)<\varepsilon_0+\varepsilon_0=\varepsilon.$$

$PP_{\Leftarrow}$: Pre každé $\varepsilon>0$ existuje $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ také, že $S_H(f,D)-S_D(f,D)<\varepsilon$.
Pre integrály I_D, I_H a integrálne súčty $S_D(f,D)$, $S_H(f,D)$ potom platí:

$$S_D(f,D)\le I_D\le I_H\le S_H(f,D). \implies 0\le I_H-I_D\le S_H(f,D)-S_D(f,D)<\varepsilon.$$

To znamená, že pre každé $\varepsilon>0$ platí $0\le I_H-I_D<\varepsilon$. Z toho vyplýva, že platí

$$0\le I_H-I_D\le\inf\{\varepsilon,\varepsilon>0\}=0, \quad \text{t. j.} \quad I_H-I_D=0.$$

Potom existuje $I=I_D=I_H$ a platí $f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}$. ∎

Poznámka 1.2.4.
Podmienku na pravej strane v predchádzajúcej vete môžeme písať v tvare

$$S_H(f,D)-S_D(f,D)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)\Delta x_i<\varepsilon.$$

Dôsledok 1.2.3.a.
Funkcia $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená. Potom platí:

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \iff \text{Pre každé } \varepsilon>0 \text{ existuje } D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle} \text{ tak, že } \begin{cases} S_H(f,D)-I<\varepsilon, \\ I-S_D(f,D)<\varepsilon. \end{cases}$$

Veta 1.2.4.
Nech $f\in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí $\langle c;d\rangle\subset\langle a;b\rangle$. $\implies$ $f\in R_{\langle c;d\rangle}$.

Dôkaz.
$f\in R_{\langle a;b\rangle}$ a nech $\varepsilon>0$ je ľubovoľné. Potom (veta 1.2.3) existuje delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ také,

že platí $S_H(f,D) - S_D(f,D) < \varepsilon$. Uvažujme jeho zjemnenie $D^* = D \cup \{c,d\}$ a označme deliace body $D^* = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, $n \in N$. Potom existujú indexy $r, s \in \{0,1,\dots,n\}$, $r < s$ také, že $c = x_r$, $d = x_s$. Pre ε a integrálne súčty potom platí:

$$\begin{aligned}\varepsilon > S_H(f,D) - S_D(f,D) \geq S_H(f,D^*) - S_D(f,D^*) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{r}(M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{i=r+1}^{s}(M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{i=s+1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \\ &\geq \sum_{i=r+1}^{s}(M_i - m_i)\Delta x_i.\end{aligned}$$

Posledný súčet zodpovedá deleniu $D^{**} = \{x_i\}_{i=r}^{s} \in \mathfrak{D}_{\langle c;d\rangle}$. To znamená, že ku každému $\varepsilon > 0$ existuje delenie $D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle c;d\rangle}$ také, že $S_H(f,D^{**}) - S_D(f,D^{**}) < \varepsilon$. Tým je veta dokázaná (veta 1.2.3) a platí $f \in R_{\langle c;d\rangle}$. ■

Z nutnej a postačujúcej podmienky existencie určitého integrálu (veta 1.2.3) vyplýva, že sa pri vyšetrovaní riemannovskej integrovateľnosti funkcie f na intervale $\langle a;b\rangle$ nemusíme zaoberať všetkými deleniami $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$. Stačí sa obmedziť na „niektoré špeciálne“ množiny delení, napr. na normálne postupnosti delení. **Postupnosť delení** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ sa nazýva **normálna** práve vtedy, ak platí $\lim_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

Poznámka 1.2.5.
Postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, kde delenie D_k, $k \in N$ tvorí k rovnako dlhých intervalov (susedné deliace body sú rovnako vzdialené) je normálna. Pre deliace body delenia D_k platí $x_i = a + \frac{i(b-a)}{k}$, $i = 0,1,2,\dots,k$ a norma má tvar $\mu(D_k) = \frac{b-a}{k}$.

V normálnej postupnosti $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ jednotlivé delenia D_k nemusia mať k deliacich intervalov. Taktiež deliace body nemusia byť rovnako vzdialené (príklad 1.2.3). Jediná podmienka je, aby pre $k \to \infty$ platilo $\mu(D_k) \to 0$.

Veta 1.2.5.
Funkcia $y = f(x)$, $x \in \langle a;b\rangle$ je ohraničená, postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna.

$$\Longrightarrow \quad I_D = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_D(f,D_k), \qquad I_H = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_H(f,D_k).$$

Dôkaz.
Dokážeme prvú rovnosť $I_D = \lim_{k\to\infty} S_D(f,D_k)$, druhá rovnosť sa dokáže analogicky.
Ak je f konštantná, potom tvrdenie vety platí triviálne (príklad 1.2.2), pretože pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ platí $I_D = S_D(f,D)$, $I_H = S_H(f,D)$.
Ak nie je f konštantná, potom existujú reálne čísla $m, M \in R$, $m < M$ také, že pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$ platí $m \leq f(x) \leq M$.
Nech $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť delení. Musíme dokázať (ma1: veta 2.3.2), že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in N$ také, že pre všetky $k \in N$, $k \geq k_0$ platí nerovnosť

$$|I_D - S_D(f,D_k)| = I_D - S_D(f,D_k) < \varepsilon.$$

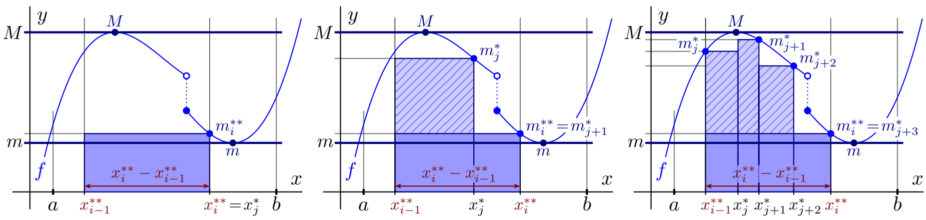
$I_D = \sup\{S_D(f,D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\}$, potom (dôsledok 1.2.3.a) pre každé $\varepsilon > 0$, t. j. aj pre každé $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje delenie $D^* = \{x_i^*\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$ také, že platí

$$I_D - S_D(f,D^*) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad \text{t. j.} \quad I_D - \tfrac{\varepsilon}{2} < S_D(f,D^*). \tag{1.2}$$

Označme $\delta = \frac{\varepsilon}{2n(M-m)}$, t. j. $(M-m)\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Zvoľme delenie $D^{**} = \{x_i^{**}\}_{i=0}^{p} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $p \in N$ tak, aby $\mu(D^{**}) < \delta$, Ukážeme, že potom platí

$$I_D - S_D(f, D^{**}) < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Označme $D = \{x_s\}_{s=0}^{r} = D^* \cup D^{**}$. Je zrejmé, že $r < p + n$ a delenie D obsahuje okrem bodov $a = x_0^* = x_0^{**}$, $b = x_n^* = x_p^{**}$ body x_1^{**}, x_2^{**}, …, x_{p-1}^{**}, aj body x_1^*, x_2^*, …, x_{n-1}^*.



Obr. 1.2.5: Delenie $D = D^* \cup D^{**}$
z dôkazu vety 1.2.5

Pre intervaly $\langle x_{i-1}^{**}; x_i^{**}\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, p$ delenia D^{**} a deliace body x_j^*, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ delenia D^* môžu nastať dve možnosti (obr. 1.2.5):

1. V intervale $(x_{i-1}^{**}; x_i^{**})$ neleží žiadny bod x_j^*, pričom na hraniciach x_{i-1}^{**}, x_i^{**} ležať môže. To znamená, že interval $\langle x_{i-1}^{**}; x_i^{**}\rangle$ prináleží obom deleniam D, D^{**} a prírastky súčtov $S_D(f, D)$, $S_D(f, D^{**})$ sú na tomto intervale identické, t. j. prírastok ich rozdielu $S_D(f, D) - S_D(f, D^{**})$ sa na tomto intervale $\langle x_{i-1}^{**}; x_i^{**}\rangle$ rovná 0.
2. V intervale $(x_{i-1}^{**}; x_i^{**})$ leží aspoň jeden bod x_j^*, t. j. konečný počet susedných bodov x_j^*, …, x_{j+l}^* delenia D^*. Týchto bodov je $l+1$, pričom $l \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ a rozdelia $\langle x_{i-1}^{**}; x_i^{**}\rangle$ na $l+2$ intervalov $\langle x_{i-1}^{**}; x_j^*\rangle$, $\langle x_j^*; x_{j+1}^*\rangle$, …, $\langle x_{j+l}^*; x_i^{**}\rangle$ patriacich k D^*.

   Označme $m_i^{**} = \inf\{f(x), x \in \langle x_{i-1}^{**}; x_i^{**}\rangle\}$ a postupne $m_j^* = \inf\{f(x), x \in \langle x_{i-1}^{**}; x_j^*\rangle\}$, $m_{j+1}^* = \inf\{f(x), x \in \langle x_j^*; x_{j+1}^*\rangle\}$, …, $m_{j+l+1}^* = \inf\{f(x), x \in \langle x_{j+l}^*; x_i^{**}\rangle\}$. Je zrejmé, že platí $m \leq m_i^{**}$, t. j. $-m_i^{**} \leq -m$ a $m_j^* \leq M$, $m_{j+1}^* \leq M$, …, $m_{j+l+1}^* \leq M$. Na intervale $\langle x_{i-1}^{**}; x_i^{**}\rangle$ sa prírastok súčtu $S_D(f, D^{**})$ rovná

   $$m_i^{**}(x_i^{**} - x_{i-1}^{**}) \geq m(x_i^{**} - x_{i-1}^{**})$$

   a prírastok súčtu $S_D(f, D)$ sa rovná

   $$\begin{aligned} &m_j^*(x_j^* - x_{i-1}^{**}) + m_{j+1}^*(x_{j+1}^* - x_j^*) + \cdots + m_{j+l+1}^*(x_i^{**} - x_{j+l}^*) \\ &\qquad \leq M(x_j^* - x_{i-1}^{**}) + M(x_{j+1}^* - x_j^*) + \cdots + M(x_i^{**} - x_{j+l}^*) = M(x_i^{**} - x_{i-1}^{**}). \end{aligned}$$

   Pre prírastok rozdielu $S_D(f, D) - S_D(f, D^{**})$ zodpovedajúci $\langle x_{i-1}^{**}; x_i^{**}\rangle$ potom platí

   $$\begin{aligned} &m_j^*(x_j^* - x_{i-1}^{**}) + m_{j+1}^*(x_{j+1}^* - x_j^*) + \cdots + m_{j+l+1}^*(x_i^{**} - x_{j+l}^*) - m_i^{**}(x_i^{**} - x_{i-1}^{**}) \\ &\qquad \leq M(x_i^{**} - x_{i-1}^{**}) - m(x_i^{**} - x_{i-1}^{**}) = (M-m)(x_i^{**} - x_{i-1}^{**}) < (M-m)\delta = \tfrac{\varepsilon}{2n}. \end{aligned}$$

Bodov x_j^* z 2. časti je najviac[34] $n-1<n$. Potom z častí 1. a 2. vyplýva

$$S_D(f,D)-S_D(f,D^{**})<0+n\tfrac{\varepsilon}{2n}=\tfrac{\varepsilon}{2}, \quad \text{t. j. } S_D(f,D)-\tfrac{\varepsilon}{2}<S_D(f,D^{**}).$$

Potom na základe vzťahu (1.2) a skutočnosti, že D je zjemnenie D^* vyplýva vzťah (1.3):

$$S_D(f,D^{**})>S_D(f,D)-\tfrac{\varepsilon}{2}>I_D-\tfrac{\varepsilon}{2}-\tfrac{\varepsilon}{2}=I_D-\varepsilon, \quad \text{t. j. } \varepsilon>I_D-S_D(f,D^{**}).$$

Ak to zhrnieme, potom pre každé $\varepsilon>0$ existuje delenie $D^*=\{x_i^*\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$ také, že $S_D(f,D^*)>I_D-\frac{\varepsilon}{2}$. Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna, takže (ma1: veta 2.3.2) pre každé $\delta>0$, t. j. aj pre $\delta=\frac{\varepsilon}{2n(M-m)}>0$ existuje $k_0\in N$ také, že $\mu(D_k)<\delta$ pre všetky $k\in N$, $k\geq k_0$. Zo vzťahu (1.3) vyplýva $I_D-S_D(f,D_k)<\varepsilon$, t. j. $I_D=\lim\limits_{k\to\infty} S_D(f,D_k)$. ■

Veta 1.2.6.
Funkcia $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená. Potom platí:

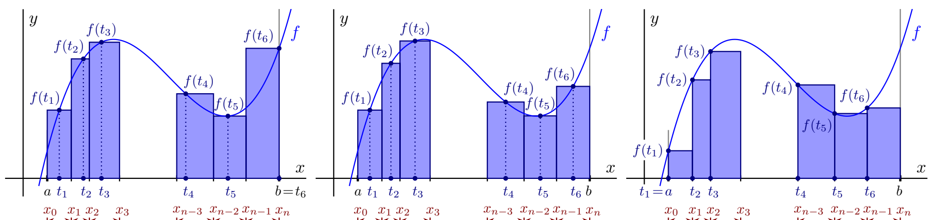
$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}$. $\iff$ Pre každú normálnu postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ platí

$$\lim_{k\to\infty}\big[S_H(f,D_k)-S_D(f,D_k)\big]=0, \text{ t. j. } \lim_{k\to\infty} S_D(f,D_k)=\lim_{k\to\infty} S_H(f,D_k).$$

Dôkaz.
Veta je priamym dôsledkom viet 1.2.3 a 1.2.5. ■

Nech $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D=\{x_i\}_{i=0}^n\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$. Zvoľme body $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$ a označme $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}=\{t_i, t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}_{i=1}^n$. **Riemannovým (integrálnym) súčtom** funkcie f pri delení D a voľbe bodov T nazývame číslo (obr. 1.2.6)

$$S_T(f,D)=\sum_{i=1}^n f(t_i)\cdot\Delta x_i.$$



Obr. 1.2.6: Integrálne súčty funkcie f pri delení D a rôznych voľbách bodov T

Funkcia f má pri danom delení D nekonečne veľa integrálnych súčtov. Ak označíme $m=\inf\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x), x\in\langle a;b\rangle\}$, potom pre každú voľbu bodov T platí

$$m(b-a)\leq S_D(f,D)\leq S_T(f,D)\leq S_H(f,D)\leq M(b-a).$$

Poznámka 1.2.6.
Ak je funkcia $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ spojitá a $D=\{x_i\}_{i=0}^n$, $n\in N$ je delenie $\langle a;b\rangle$, potom f nadobúda na každom intervale $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$ svoje extrémy (ma1: veta 3.3.10). To znamená, že $S_D(f,D)$ a $S_H(f,D)$ sú zároveň Riemannovými integrálnymi súčtami pre nejaké konkrétne voľby bodov T.

[34] Krajné body delenia $a=x_0^*$, $b=x_n^*$ tam nepatria.

Dôsledok 1.2.6.a.
Funkcia $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená. Potom platí:

$$f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}. \iff \text{Pre každú normálnu postupnosť delení } \{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$$
$$\text{a každú voľbu bodov } T \text{ platí } \lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Veta 1.2.7.
Funkcia $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je monotónna. $\implies$ $f\in R_{\langle a;b\rangle}$.

Dôkaz.
Funkcia f je ohraničená a nadobúda svoje extrémy (ma1: veta 3.3.10) na uzavretom $\langle a;b\rangle$. Nech $\varepsilon>0$ je ľubovoľné. Zvoľme delenie $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$ tak, aby boli deliace intervaly rovnako dlhé, t. j. aby $\Delta x=\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$, $i=1,2,\ldots,n$, a aby platilo

$$\tfrac{(M-m)\cdot(b-a)}{n}<\varepsilon,\quad \text{t. j.}\quad \tfrac{(M-m)\cdot(b-a)}{\varepsilon}<n,$$

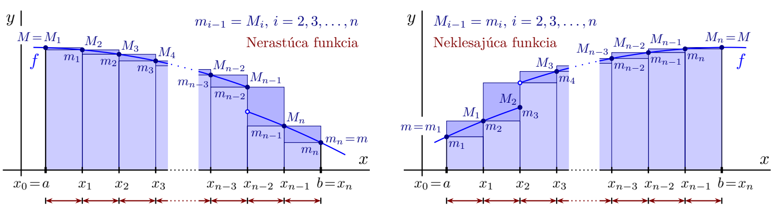
pričom $m=\min\{f(x),x\in\langle a;b\rangle\}$, $M=\max\{f(x),x\in\langle a;b\rangle\}$ sú extrémy funkcie f.
Na intervale $\langle a;b\rangle$ je funkcia f monotónna (nemusí byť spojitá). To znamená, že svoje extrémy nadobúda v hraničných bodoch a a b. Analogicky f nadobúda svoje extrémy $m_i=\min\{f(x),x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$, $M_i=\max\{f(x),x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}$ na intervaloch $\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$ v krajných bodoch x_{i-1} a x_i (obr. 1.2.7). Potom platí[35]

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)=\pm[f(x_0)-f(x_1)]\pm[f(x_1)-f(x_2)]\pm\cdots\pm[f(x_{n-1})-f(x_n)]$$
$$=\pm\big[f(x_0)-f(x_n)\big]=\pm\big[f(a)-f(b)\big]=M-m.$$

Pre rozdiel $S_{HD}=S_H(f,D)-S_D(f,D)$ potom platí:

$$S_{HD}=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x=\Delta x\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)=\Delta x(M-m)=\tfrac{(M-m)\cdot(b-a)}{n}<\varepsilon.$$

To znamená (veta 1.2.3), že $f\in R_{\langle a;b\rangle}$. ■



Obr. 1.2.7: Delenie intervalu $\langle a;b\rangle$ z dôkazu vety 1.2.7

Predtým ako dokážeme integrovateľnosť spojitých funkcií, sformulujeme a dokážeme jednu ich dôležitú vlastnosť (rovnomernú spojitosť) na uzavretých množinách (lema 1.2.8).

Najprv si zopakujeme (alternatívnu) definíciu spojitosti (ma1: veta 3.3.2). Funkcia f je **spojitá na množine** $A\subset D(f)$, ak je spojitá v každom jej bode $x^\star\in A$. To znamená

$$\forall x^\star\in A\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in A \text{ také, že } |x-x^\star|<\delta, \text{ potom platí } |f(x)-f(x^\star)|<\varepsilon.$$

[35] $M=f(a)=f(x_0)$, $M_i-m_i=f(x_{i-1})-f(x_i)=+[f(x_{i-1})-f(x_i)]$, $m=f(b)=f(x_n)$ pre f nerastúcu a $m=f(a)=f(x_0)$, $M_i-m_i=f(x_i)-f(x_{i-1})=-[f(x_{i-1})-f(x_i)]$, $M=f(b)=f(x_n)$ pre f neklesajúcu.

Funkcia f sa nazýva **rovnomerne spojitá na množine** $A \subset R$, ak

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x^\star \in A \text{ také, že } |x - x^\star| < \delta, \text{ potom platí } |f(x) - f(x^\star)| < \varepsilon. \qquad (1.4)$$

Z definícií je zrejmé, že ak je f rovnomerne spojitá na A, potom je tiež spojitá na A.

Poznámka 1.2.7.
Ak je funkcia f spojitá na množine A, potom $\delta > 0$ závisí od voľby $x^\star$ a aj od voľby $\varepsilon > 0$ (pre pevne dané ε môže byť δ rôzne pre rôzne hodnoty $x^\star \in A$).
Ak je funkcia f rovnomerne spojitá na množine A, potom $\delta > 0$ nezávisí od voľby bodov $x, x^\star$, ale iba od ε (pre pevne dané ε existuje δ rovnaké pre všetky $x^\star \in A$).

Lema 1.2.8 (Cantorova veta o rovnomernej spojitosti).
Funkcia $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá. $\implies$ f je rovnomerne spojitá na $\langle a; b\rangle$.

Dôkaz.
Dokážeme sporom.
Predpokladajme, že f je spojitá, ale nie rovnomerne na $\langle a; b\rangle$, t. j. že platí negácia (1.4):

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, x^\star \in \langle a; b\rangle \text{ také, že } |x - x^\star| < \delta \text{ a súčasne } |f(x) - f(x^\star)| \geq \varepsilon > 0.$$

Potom aj pre všetky $\delta_k = \frac{1}{k} > 0$, $k \in N$ existujú $x_k, x_k^\star \in \langle a; b\rangle$ také, že platí

$$|x_k - x_k^\star| < \tfrac{1}{k} \text{ a súčasne } |f(x_k) - f(x_k^\star)| \geq \varepsilon > 0. \qquad (1.5)$$

Postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x_k^\star\}_{k=1}^{\infty}$ konvergujú k rovnakému číslu $x^{\star\star} \in \langle a; b\rangle$, pretože platí

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} |x_k - x_k^\star| \leq \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{k} = 0, \text{ t. j. } \lim_{k\to\infty} |x_k - x_k^\star| = \lim_{k\to\infty} (x_k - x_k^\star) = 0.$$

To znamená $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} x_k^\star = x^{\star\star}$. Keďže je funkcia f spojitá v bode $x^{\star\star}$, platí

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} f(x_k^\star) = f(x^{\star\star}), \text{ t. j. } \lim_{k\to\infty} |f(x_k) - f(x_k^\star)| = 0.$$

Zo vzťahu (1.5) ale vyplýva $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_k) - f(x_k^\star)| \geq \varepsilon > 0$, čo je spor. ■

Veta 1.2.9.
Funkcia $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je spojitá. $\implies$ $f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Dôkaz.
Zo spojitosti vyplýva, že f je na $\langle a; b\rangle$ a všetkých jeho uzavretých podintervaloch ohraničená a nadobúda na nich extrémy (ma1: veta 3.3.10) a rovnomerne spojitá (lema 1.2.8).
Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Označme $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{b-a} > 0$, t. j. $\varepsilon = \varepsilon_0(b - a)$. Potom existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x, x^\star \in \langle a; b\rangle$, $|x - x^\star| < \delta$ platí $|f(x) - f(x^\star)| < \varepsilon_0$.
Zvoľme delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$ tak, aby $\mu(D) < \delta$, t. j. $\Delta x_i < \delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Potom (rovnomerná spojitosť) existujú body $x_i^\star, x_i^{\star\star} \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $|x_i^\star - x_i^{\star\star}| < \delta$ také, že $f(x_i^\star) = m_i$, $f(x_i^{\star\star}) = M_i$ a platí $M_i - m_i = f(x_i^{\star\star}) - f(x_i^\star) < \varepsilon_0$. Z toho vyplýva

$$S_H(f, D) - S_D(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_0 \Delta x_i = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon_0(b - a) = \varepsilon.$$

To znamená (veta 1.2.3), že $f \in R_{\langle a;b\rangle}$. ■

Vetu 1.2.9 môžeme rozšíriť na po častiach spojité funkcie.[36] Uvádzame bez dôkazu.

Veta 1.2.10.
Funkcia $y = f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je po častiach spojitá. $\Longrightarrow$ $f(x) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Príklad 1.2.3.
Vypočítajte $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ak $a, b, c, d \in R$, $a < b < c < d$, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pre } x \in (c; d), \\ 0 \text{ pre } x \in \langle a; b\rangle - (c; d). \end{cases}$

Riešenie.
Uvažujme postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pričom[37] (obr. 1.2.8 vľavo)

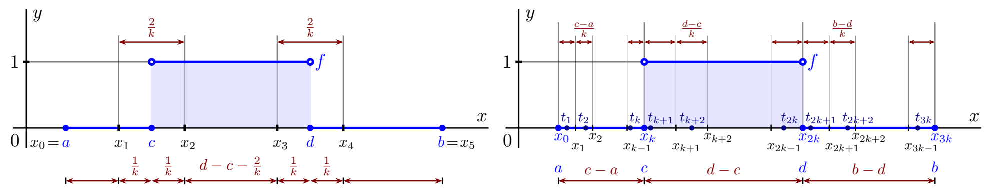
$$D_k = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \left\{a, c - \tfrac{1}{k}, c + \tfrac{1}{k}, d - \tfrac{1}{k}, d + \tfrac{1}{k}, b\right\} \text{ pre } k \in N.$$

Potom platí $\Delta x_1 = c - a - \frac{1}{k}$, $m_1 = M_1 = 0$, $\Delta x_2 = \frac{2}{k}$, $m_2 = 0$, $M_2 = 1$, $\Delta x_3 = d - c - \frac{2}{k}$, $m_3 = M_3 = 1$, $\Delta x_4 = \frac{2}{k}$, $m_4 =$, $M_4 = 1$, $\Delta x_5 = b - d - \frac{1}{k}$, $m_5 = M_5 = 0$.
Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Zvoľme $k \in N$ tak, aby $\frac{4}{\varepsilon} < k$, t. j. $\frac{4}{k} < \varepsilon$. Potom platí

$$\begin{aligned} S_H(f, D_k) &= 0\cdot(c - a - \tfrac{1}{k}) + 1\cdot\tfrac{2}{k} + 1\cdot(d - c - \tfrac{2}{k}) + 1\cdot\tfrac{2}{k} + 0\cdot(b - d - \tfrac{1}{k}) = d - c + \tfrac{2}{k}, \\ S_D(f, D_k) &= 0\cdot(c - a - \tfrac{1}{k}) + 0\cdot\tfrac{2}{k} + 1\cdot(d - c - \tfrac{2}{k}) + 0\cdot\tfrac{2}{k} + 0\cdot(b - d - \tfrac{1}{k}) = d - c - \tfrac{2}{k}. \end{aligned}$$

Potom $S_H(f, D_k) - S_D(f, D_k) = (d - c + \frac{2}{k}) - (d - c - \frac{2}{k}) = \frac{4}{k} < \varepsilon$, t. j. $f \in R_{\langle a;b\rangle}$. Navyše:

$$\left.\begin{aligned} I &= \inf\{S_H(f, D_k), k \in N\} = \inf\{d - c + \tfrac{2}{k}, k \in N\} = d - c. \\ I &= \sup\{S_D(f, D_k), k \in N\} = \sup\{d - c - \tfrac{2}{k}, k \in N\} = d - c. \end{aligned}\right\} \Longrightarrow I = d - c.$$



Obr. 1.2.8: Príklad 1.2.3

Iné riešenie.
Uvažujme $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pričom $D_k = \{x_i\}_{i=0}^{3k}$, $k \in N$ definujeme (obr. 1.2.8 vpravo):

$\langle a; c\rangle$ rozdelíme bodmi $a = x_0, x_1, \ldots, x_k = c$ na k intervalov dĺžky $\Delta x_1 = \frac{c-a}{k}$.
$\langle c; d\rangle$ rozdelíme bodmi $c = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{2k} = d$ na k intervalov dĺžky $\Delta x_2 = \frac{d-c}{k}$.
$\langle d; b\rangle$ rozdelíme bodmi $d = x_{2k}, x_{2k+1}, \ldots, x_{3k} = b$ na k intervalov dĺžky $\Delta x_3 = \frac{b-d}{k}$.

Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\mu(D_k) = \max\left\{\frac{c-a}{k}, \frac{d-c}{k}, \frac{b-d}{k}\right\} \to 0$ pre $k \to \infty$.
Pre D_k, $k \in N$ zvoľme ľubovoľne vnútorné body $t_i \in (x_{i-1}; x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 3k$. Potom

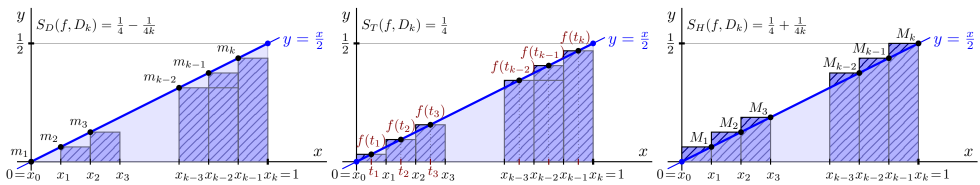
$$f(t_1) = \cdots = f(t_k) = 0, \quad f(t_{k+1}) = \cdots = f(t_{2k}) = 1, \quad f(t_{2k+1}) = \cdots = f(t_{3k}) = 0.$$

[36] Funkcie s konečným počtom bodov nespojitosti (odstrániteľných alebo neodstrániteľných 1. druhu).
[37] Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ nie je normálna!

Pre integrálny súčet pri tejto voľbe bodov $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_{3k}\}$ potom platí

$$\begin{aligned} S_T(f, D_k) &= \sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_1 + \sum_{i=k+1}^{2k} f(t_i)\cdot\Delta x_2 + \sum_{i=2k+1}^{3k} f(t_i)\cdot\Delta x_3 \\ &= \sum_{i=1}^{k} 0\cdot\tfrac{c-a}{k} + \sum_{i=k+1}^{2k} 1\cdot\tfrac{d-c}{k} + \sum_{i=2k+1}^{3k} 0\cdot\tfrac{b-d}{k} = \sum_{i=k+1}^{2k} \tfrac{d-c}{k} = k\cdot\tfrac{d-c}{k} = d-c. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva $I = \lim\limits_{k\to\infty} S_T(f, D_k) = \lim\limits_{k\to\infty} (d-c) = d-c.$ ■



Obr. 1.2.9: Príklad 1.2.4 a)

Príklad 1.2.4.
Vypočítajte integrály: a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{2}$, b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$.

Riešenie.
a) Funkcia $f(x) = \frac{x}{2}$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca a spojitá[38] (obr. 1.2.9), potom $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.
Uvažujme normálnu postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, pričom $D_k = \left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}$ pre $k\in N$.
Pre $i = 1, 2, \ldots, k$ platí $\Delta x_i = \frac{1}{k}$, $m_i = f(x_{i-1}) = \frac{i-1}{2k}$, $M_i = f(x_i) = \frac{i}{2k}$. Potom

$$S_D(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{2k}\cdot\frac{1}{k} = \frac{0+1+\cdots+(k-1)}{2k^2} = \frac{\frac{(0+k-1)k}{2}}{2k^2} = \frac{k-1}{4k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4k}.$$

$$S_H(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2k}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1+2+3+\cdots+k}{2k^2} = \frac{\frac{(1+k)k}{2}}{2k^2} = \frac{k+1}{4k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k}.$$

Z toho vyplýva $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{4}$.

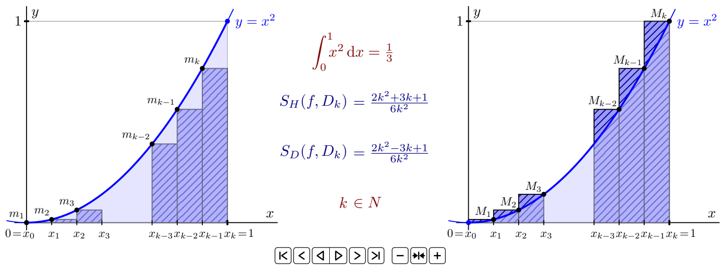
Ak pre každé z delení D_k, $k\in N$ zvolíme ako body $T = \{t_i\}_{i=1}^{k}$ stredy intervalov $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$, t. j. body $t_i = \frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{k} + \frac{i}{2}\right) = \frac{2i-1}{2k}$, potom $f(t_i) = \frac{2i-1}{4k}$ a platí

$$S_T(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} f(t_i)\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{4k}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1+3+\cdots+(2k-1)}{4k^2} = \frac{\frac{(1+2k-1)k}{2}}{4k^2} = \frac{1}{4}.$$

Z toho vyplýva $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{2} = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

b) Funkcia $f(x) = x^2$, $x\in\langle 0;1\rangle$ je rastúca a spojitá[38] (obr. 1.2.10), potom $f\in R_{\langle 0;1\rangle}$.

[38] Viď veta 1.2.7, resp. veta 1.2.9.



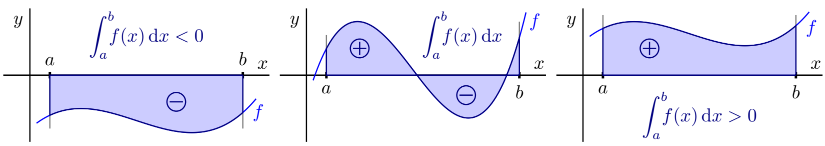
Obr. 1.2.10: Príklad 1.2.4 b)

Uvažujme normálnu postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle 0;1\rangle}$, pričom $D_k = \left\{\frac{i}{k}\right\}_{i=0}^{k}$ pre $k \in N$. Pre $i = 1, 2, \ldots, k$ platí $\Delta x_i = \frac{1}{k}$, $m_i = f(x_{i-1}) = \left(\frac{i-1}{k}\right)^2$, $M_i = f(x_i) = \left(\frac{i}{k}\right)^2$. Potom[39]

$$S_D(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{(i-1)^2}{k^2 \cdot k} = \frac{0+1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3} = \frac{1^2+\cdots+(k-1)^2}{k^3}$$
$$= \frac{(k-1)k[2(k-1)+1]}{6 \cdot k^3} = \frac{(k-1)k(2k-1)}{6k^3} = \frac{2k^2-3k+1}{6k^2}.$$
$$S_H(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{k^2 \cdot k} = \frac{1^2+2^2+\cdots+k^2}{k^3} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6k^3} = \frac{2k^2+3k+1}{6k^2}.$$

Potom platí $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{k\to\infty} \frac{2k^2 \pm 3k+1}{6k^2} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2}\right) = \frac{1}{3} \pm 0 + 0 = \frac{1}{3}$. ■

Geometricky predstavuje Riemannov určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a; b\rangle$. Pod osou x (t. j. ak je f záporná) je táto plocha záporná (obr. 1.2.11).



Obr. 1.2.11: Geometrická reprezentácia Riemannovho určitého integrálu

1.2.1 Základné vlastnosti Riemannovho integrálu

Hodnota Riemannovho integrálu závisí od integrovanej funkcie a aj od intervalu, na ktorom sa integruje. Najprv uvedieme vlastnosti, ktoré závisia od integrovanej funkcie.

Lema 1.2.11.
Funkcie $f\colon A \to R$, $g\colon A \to R$, množina $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, číslo $c > 0$. Potom platí:

a) $\inf\{f(x), x \in A\} = -\sup\{-f(x), x \in A\}$,

b) $\inf\{cf(x), x \in A\} = c \cdot \inf\{f(x), x \in A\}$,

[39]Pre $n \in N$ platí vzťah $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $\sup\{cf(x), x\in A\} = c\cdot\sup\{f(x), x\in A\}$,

d) $\inf\{f(x), x\in A\} + \inf\{g(x), x\in A\} \le \inf\{f(x)+g(x), x\in A\}$,

e) $\sup\{f(x)+g(x), x\in A\} \le \sup\{f(x), x\in A\} + \sup\{g(x), x\in A\}$.

Dôkaz.
Časti a), b), c) vyplývajú priamo z definície, časť e) sa dokáže analogicky ako d).

d) Pre všetky $x\in A$ platí

$$f(x)+g(x) \le \sup\{f(x), x\in A\} + \sup\{g(x), x\in A\}.$$

To znamená, že pravá strana $\sup\{f(x), x\in A\} + \sup\{g(x), x\in A\}$ je horným ohraničením množiny $\{f(x)+g(x), x\in A\}$ a musí byť väčšia alebo rovná ako jej suprémum, t. j.

$$\sup\{f(x)+g(x), x\in A\} \le \sup\{f(x), x\in A\} + \sup\{g(x), x\in A\}. \blacksquare$$

Poznámka 1.2.8.
Pre naše účely nám postačia ohraničené funkcie definované na ohraničených množinách. Množina A v leme 1.2.11 nemusí byť ohraničená a ani f, g nemusia byť ohraničené na A. V častiach d), e) platia vo všeobecnosti nerovnosti (môžu a nemusia nastať rovnosti).[40]

Veta 1.2.12.
Funkcia $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ je ohraničená. $\implies \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\overline{\int_a^b}[-f(x)]\,\mathrm{d}x.$

Dôkaz.
Nech $D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, pričom $D=\{x_i\}_{i=0}^n$, $n\in N$. Pre $i=1,2,\ldots,n$ označme

$$m_i = \inf\{f(x), x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}, \quad M_i^* = \sup\{-f(x), x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\}.$$

Z lemy 1.2.11 a) vyplýva $m_i=-M_i^*$, $i=1,2,\ldots,n$. Potom platí

$$S_D(f,D) = \sum_{i=1}^n m_i\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^n\big(-M_i^*\big)\cdot\Delta x_i = -\sum_{i=1}^n M_i^*\cdot\Delta x_i = -S_H(-f,D).$$

Potom, ak uvážime definície dolného a horného integrálu platí

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sup\big\{S_D(f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\big\}\\ &= \sup\big\{-S_H(-f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\big\}\\ &= -\inf\big\{S_H(-f,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\big\} = -\overline{\int_a^b}[-f(x)]\,\mathrm{d}x. \blacksquare\end{aligned}$$

[40] Pre funkcie $f(x)=\sin x$, $g(x)=-\sin x$, $x\in A=\langle 0;2\pi\rangle$ pre všetky $x\in A$ platí $f(x)+g(x)=0$, ale $\inf\{f(x), x\in A\}+\inf\{g(x), x\in A\} = -1-1=-2$, $\inf\{f(x)+g(x), x\in A\}=0$.

Veta 1.2.13.
Funkcie $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ sú ohraničené, $c \geq 0$. Potom platí:

a) $\overline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, b) $\overline{\int_a^b} \big[f(x) + g(x)\big]\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$,

c) $\underline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, d) $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} \big[f(x) + g(x)\big]\,\mathrm{d}x$.

Dôkaz.
Dokážeme časti a), b), dôkaz častí c), d) je analogický.

a) Pre $c = 0$ platí tvrdenie triviálne:

$$\overline{\int_a^b} 0 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} 0\,\mathrm{d}x = 0 = 0 \cdot \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nech $c > 0$ a nech delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$ je ľubovoľné. Označme

$$M_i = \sup\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\},\ \ M_i^* = \sup\{cf(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\} \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Kedže $M_i^* = cM_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (lema 1.2.11), potom platí

$$S_H(cf, H) = \sum_{i=1}^n M_i^* \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n cM_i \cdot \Delta x_i = c\sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i = c \cdot S_H(f, D).$$

Z definície horného integrálu potom vyplýva

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x &= \inf\big\{S_H(cf, D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\big\}\\ &= \inf\big\{c \cdot S_H(f, D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\big\}\\ &= c \cdot \inf\big\{S_H(f, D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\big\} = c\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

b) Nech delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$ je ľubovoľné. Pre $i = 1, 2, \ldots, n$ označme

$$M_i = \sup\{f(x), x \in d_i\},\ \ W_i = \sup\{g(x), x \in d_i\},\ \ M_i^* = \sup\{f(x) + g(x), x \in d_i\}.$$

Kedže $M_i^* \leq M_i + W_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (lema 1.2.11), potom platí

$$\begin{aligned}S_H(f + g, D) &= \sum_{i=1}^n M_i^* \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i + W_i)\Delta x_i\\ &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n W_i \Delta x_i = S_H(f, D) + S_H(g, D).\end{aligned}$$

Nech $\{D_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ je normálna postupnosť delení. Pre každé delenie D_k, $k \in N$ platí predchádzajúci vzťah $S_H(f + g, D_k) \leq S_H(f, D_k) + S_H(g, D_k)$. Potom platí

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} \big[f(x) + g(x)\big] &= \lim_{k\to\infty} S_H(f + g, D_k) \leq \lim_{k\to\infty} \big[S_H(f, D_k) + S_H(g, D_k)\big]\\ &= \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k) + \lim_{k\to\infty} S_H(g, D_k) = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x. \blacksquare\end{aligned}$$

Veta 1.2.14.
Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, $c \in R$. $\implies$ $cf \in R_{\langle a;b\rangle}$, $f+g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí:

$$\text{a) } \int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b) } \int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz.
Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, t. j. existujú ich Riemannove integrály a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Pre $c \geq 0$ (veta 1.2.13) platí

$$\underline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pre $c \leq 0$, t. j. $-c \geq 0$ (veta 1.2.12, veta 1.2.13) platí

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x &= -\overline{\int_a^b}\big[-cf(x)\big]\,\mathrm{d}x = -(-c)\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= c\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = -(-c)\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\underline{\int_a^b}\big[-cf(x)\big]\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

b) Z definície Riemannovho integrálu a zo vzťahov d) a b) vo vete 1.2.13 vyplýva

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x &= \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b}\big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x \\ &\leq \overline{\int_a^b}\big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

To znamená, že platí tvrdenie vety

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b}\big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b}\big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b\big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x. \blacksquare$$

Veta 1.2.15.
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, funkcia g je spojitá na intervale J, $f(\langle a;b\rangle) \subset J$. $\implies$ $g(f) \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Dôkaz.
Označme $m = \inf\{f(x), x \in \langle a;b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x), x \in \langle a;b\rangle\}$, potom $f(\langle a;b\rangle) = \langle m;M\rangle$. Funkcia g je na podintervale $\langle m;M\rangle$ spojitá, je rovnomerne spojitá (veta 1.2.8), je ohraničená (ma1: veta 3.3.10) a nadobúda na ňom svoje extrémy $w = \min\{g(t), t \in \langle m;M\rangle\}$, $W = \max\{g(t), t \in \langle m;M\rangle\}$.
Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Ak k nemu nájdeme delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$ také, aby bola splnená nerovnosť $S_H(g(f), D) - S_D(g(f), D) < \varepsilon$, veta bude dokázaná (veta 1.2.3).
Označme[41] $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{b-a+W-w}$, t. j. $\varepsilon = \varepsilon_0(b-a+W-w) = \varepsilon_0(b-a) + \varepsilon_0(W-w)$. Funkcia g je rovnomerne spojitá na $\langle m;M\rangle$, t. j.

$$\exists\delta \in (0;\varepsilon_0)\ \forall t, t^\star \in \langle m;M\rangle \text{ také, že } |t-t^\star| < \delta, \text{ potom platí } |g(t)-g(t^\star)| < \varepsilon_0. \qquad (1.6)$$

[41] Pretože je ε ľubovoľné, je aj ε_0 ľubovoľné.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $0 < \delta < \varepsilon_0$. V prípade $\delta \geq \varepsilon_0$ stačí zmenšiť δ, aby $\delta < \varepsilon_0$. Zmenší sa $|t - t^\star| < \delta$, ale $|g(t) - g(t^\star)| < \varepsilon_0$ ostane platiť.
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, t. j. (veta 1.2.3) ku každému $\delta_0 = \delta^2 > 0$ existuje $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$ také, že pre integrálne súčty platí

$$S_H(f, D) - S_D(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \delta^2, \tag{1.7}$$

pričom $m_i = \min\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $M_i = \max\{f(x), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Označme postupne $w_i = \min\{g(f(x)), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $W_i = \max\{g(f(x)), x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a rozdeľme indexy $i = 1, 2, \ldots, n$ na dve disjunktné množiny I_1, I_2:

1. $i \in I_1$, ak $M_i - m_i < \delta$. To znamená, že pre všetky $x, x^\star \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle$ platí tiež nerovnosť $|f(x) - f(x^\star)| \leq M_i - m_i < \delta$. Potom na základe (1.6) platí $|g(f(x)) - g(f(x^\star))| < \varepsilon_0$, t. j. aj pre extrémy platí $W_i - w_i < \varepsilon_0$. Z toho vyplýva
$$\sum_{i\in I_1} (W_i - w_i)\Delta x_i < \sum_{i\in I_1} \varepsilon_0 \Delta x_i = \varepsilon_0 \sum_{i\in I_1} \Delta x_i < \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon_0(b - a).$$
2. $i \in I_2$, ak $M_i - m_i \geq \delta$. Potom na základe vzťahu (1.7) platí
$$\delta \sum_{i\in I_2} \Delta x_i = \sum_{i\in I_2} \delta \Delta x_i \leq \sum_{i\in I_2} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \delta^2,$$
t. j. platí $\sum_{i\in I_2} \Delta x_i < \delta < \varepsilon_0$. Z toho vyplýva
$$\sum_{i\in I_2} (W_i - w_i)\Delta x_i \leq \sum_{i\in I_2} (W - w)\Delta x_i = (W - w) \sum_{i\in I_2} \Delta x_i < \varepsilon_0(W - w).$$

Ak zhrnieme obe časti, potom $S_H(g(f), D) - S_D(g(f), D) < \varepsilon$, pretože

$$\begin{aligned} S_H(g(f), D) - S_D(g(f), D) &= \sum_{i=1}^{n} (W_i - w_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i\in I_1} (W_i - w_i)\Delta x_i + \sum_{i\in I_2} (W_i - w_i)\Delta x_i < \varepsilon_0(b - a) + \varepsilon_0(W - w) = \varepsilon. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Veta 1.2.16.
Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$. $\Longrightarrow$ Funkcie $|f|, f^2, fg \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Dôkaz.
Funkcie $g_1(t) = |t|$, $g_2(t) = t^2$ sú spojité na celej reálnej osi R. To znamená, že sú splnené predpoklady vety 1.2.15 a platí $g_1(f) = |f| \in R_{\langle a;b\rangle}$, $g_2(f) = f^2 \in R_{\langle a;b\rangle}$. Tvrdenie $fg \in R_{\langle a;b\rangle}$ vyplýva z už dokázaného, viet 1.2.14 a 1.2.15 a rovnosti $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$. ■

Veta 1.2.17.
Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, pričom $\inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} > 0$, resp. $\sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\} < 0$.
$\Longrightarrow$ $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$.

Dôkaz.
Označme $w = \inf\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\}$, $W = \sup\{g(x), x \in \langle a; b\rangle\}$.
Potom pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ platí $g(x) \geq w > 0$ alebo $g(x) \leq W < 0$.
Funkcia $g_1(t) = \frac{1}{t}$, $t \in \langle w; W\rangle$ je spojitá a $0 \notin \langle w; W\rangle$, t. j. $t \neq 0$. Potom platí (veta 1.2.15) $g_1(g) = \frac{1}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$ a (veta 1.2.16) $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g} \in R_{\langle a;b\rangle}$. ■

Veta 1.2.18 (Nezápornosť integrálu).
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je taká, že pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$ platí $f(x) \geq 0$.

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq m(b-a) \geq 0, \text{ kde } m = \inf\{f(x), x \in \langle a;b\rangle\}.$$

Dôkaz.
Vyplýva priamo z definície, vzťahu (1.1) a skutočnosti $m \geq 0$ (obr. 1.2.12). ■

Veta 1.2.19 (Monotónnosť integrálu).
Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$ sú také, že pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$ platí $g(x) \geq f(x)$.

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

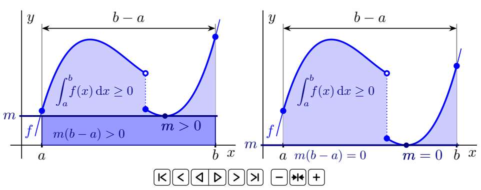
Dôkaz.
Keďže pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$ platí $g(x) - f(x) \geq 0$, potom (veta 1.2.18) platí (obr. 1.2.13)

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big[g(x) - f(x)\big]\,\mathrm{d}x \geq 0, \text{ t. j. } \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \ ■$$

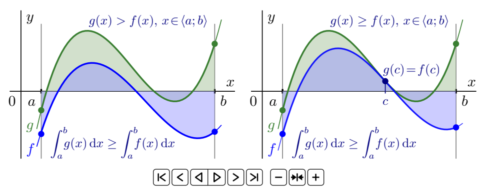
Dôsledok 1.2.19.a.
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$. $\Longrightarrow \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Dôkaz.
Pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$ platí $|f(x)| \geq f(x)$, $|f(x)| \geq -f(x)$, potom (veta 1.2.19)

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \\ \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|. \ ■$$



Obr. 1.2.12:
Nezápornosť integrálu



Obr. 1.2.13:
Monotónnosť integrálu

Ako ukážeme v nasledujúcom texte, ak zmeníme hodnoty integrovanej funkcie v **konečnom počte bodov** intervalu $\langle a;b\rangle$, hodnota Riemannovho integrálu sa nezmení.

Veta 1.2.20.
f, g sú ohraničené na $\langle a;b\rangle$, $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$ okrem konečného počtu.

$$\Longrightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz.
Tvrdenia stačí dokázať pre jeden bod, v ktorom sa funkcie líšia a rozšíriť na daný konečný počet bodov. Dokážeme iba prvé tvrdenie, druhé sa dokáže analogicky.
Nech $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle a; b\rangle - \{x^*\}$.
Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, kde $D_k = \{x_i\}_{i=1}^{k} = \{a + \frac{i(b-a)}{k}\}_{i=1}^{k}$, $k \in N$ je normálna, pretože pre $i = 1, 2, \ldots, k$ platí $\Delta x_i = \frac{b-a}{k}$, t. j. $\mu(D_k) = \frac{b-a}{k}$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.
Existuje jediný $\langle x_{j-1}; x_j\rangle$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ taký, že $x^* \in \langle x_{j-1}; x_j\rangle$. Dolné integrálne súčty funkcií f a g sa môžu líšiť iba na tomto intervale. Označme $m_f = \inf\{f(x), x \in \langle x_{j-1}; x_j\rangle\}$, $m_g = \inf\{g(x), x \in \langle x_{j-1}; x_j\rangle\}$, potom platí (obr. 1.2.14)

$$S_D(f, D_k) - S_D(g, D_k) = m_f \Delta x_j - m_g \Delta x_j = (m_f - m_g)\Delta x_j = \tfrac{(m_f - m_g)\cdot(b-a)}{k}.$$

Z toho vyplýva tvrdenie vety, pretože (veta 1.2.5)

$$\lim_{k\to\infty} \big[S_D(f, D_k) - S_D(g, D_k)\big] = \lim_{k\to\infty} \tfrac{(m_f - m_g)\cdot(b-a)}{k} = \tfrac{(m_f - m_g)\cdot(b-a)}{\infty} = 0,$$
$$\text{t. j.} \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} S_D(g, D_k) = \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x. \ \blacksquare$$

Veta 1.2.21.
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ a pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ okrem konečného počtu platí $f(x) = g(x)$.
$\implies$ Funkcia $g \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí rovnosť $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
Dôkaz.
Priamy dôsledok vety 1.2.20, pretože

$$\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x. \ \blacksquare$$

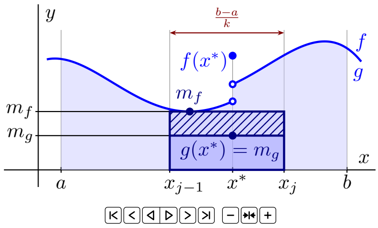
Z predchádzajúcich viet vyplýva, že konečný počet bodov nemá vplyv na hodnotu Riemannovho integrálu (vrátane dolného a horného). Integrovaná funkcia nemusí byť definovaná ani v krajných bodoch intervalu a Riemannov integrál môžeme uvažovať na ľubovoľnom z intervalov $\langle a; b\rangle$, $(a; b)$, $\langle a; b)$, $(a; b\rangle$, t. j. ohraničenom intervale I. Určitým integrálom na otvorených a polootvorených množinách sa venujeme v časti 1.2.5 o nevlastných integráloch. Podľa potreby môžeme použiť označenia

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_I f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\langle a;b\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\langle a;b)} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{(a;b\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{(a;b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

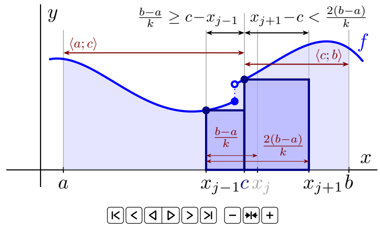
Poznámka 1.2.9.
Vety 1.2.20, 1.2.21 môžeme rozšíriť z konečného počtu bodov na spočítateľný počet bodov, resp. na množiny s tzv. Jordanovou mierou nula [36, 39].

Veta 1.2.22.
Funkcia f je ohraničená na $\langle a; b\rangle$, bod $c \in (a; b)$ je ľubovoľný.

$$\implies \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Obr. 1.2.14:
Veta 1.2.20



Obr. 1.2.15:
Veta 1.2.22

Dôkaz.
Dokážeme iba prvé tvrdenie, druhé tvrdenie sa dokáže analogicky.
Postupnosť $\{D'_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, kde $D'_k = \{x_i\}_{i=1}^{k} = \{a + \frac{i(b-a)}{k}\}_{i=1}^{k}$, $k \in N$ je normálna, pretože pre $i = 1, 2, \ldots, k$ platí $\Delta x_i = \frac{b-a}{k}$, t. j. $\mu(D'_k) = \frac{b-a}{k}$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D'_k) = 0$.
Existuje jediný interval $\langle x_{j-1}; x_j\rangle$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ taký, že $c \in (x_{j-1}; x_j\rangle$. Ak nahradíme deliaci bod x_j bodom c, dostaneme delenie

$$D_k = D'_k \cup \{c\} - \{x_j\} = \{a, x_1, \ldots, x_{j-1}, c, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, b\} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}.$$

Delenia D_k a D'_k majú rovnaké deliace intervaly, líšiť sa môžu (obr. 1.2.15) iba v delení intervalu $\langle x_{j-1}; x_{j+1}\rangle$. Platí $c - x_{j-1} \leq \frac{b-a}{k}$, $x_{j+1} - c < \frac{2(b-a)}{k}$, t. j. $\mu(D_k) < \frac{2(b-a)}{k}$. To znamená, že postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna a platí (veta 1.2.5)

$$\lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Rozdeľme D_k na delenia $D_k^a = \{a, x_1, \ldots, c\} \in \mathfrak{D}_{\langle a;c\rangle}$, $D_k^b = \{c, x_{j+1}, \ldots, b\} \in \mathfrak{D}_{\langle c;b\rangle}$. Keďže $\mu(D_k^a) \leq \mu(D_k)$, $\mu(D_k^b) \leq \mu(D_k)$, sú postupnosti $\{D_k^a\}_{k=1}^{\infty}$, $\{D_k^b\}_{k=1}^{\infty}$ normálne. Potom

$$\lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k^a) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k^b) = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zo vzťahu

$$S_D(f, D_k) = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{j} m_i \Delta x_i + \sum_{i=j+1}^{k} m_i \Delta x_i = S_D(f, D_k^a) + S_D(f, D_k^b)$$

potom vyplýva tvrdenie vety

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \left[S_D(f, D_k^a) + S_D(f, D_k^b)\right]$$
$$= \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k^a) + \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k^b) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \blacksquare$$

Veta 1.2.23 (Aditívnosť integrálu).
Funkcia f je ohraničená na $\langle a; b\rangle$, bod $c \in (a; b)$ je ľubovoľný. Potom platí:

$$\left.\begin{aligned} &NP_{\Rightarrow}: f \in R_{\langle a;b\rangle}. \implies f \in R_{\langle a;c\rangle},\ f \in R_{\langle c;b\rangle} \\ &PP_{\Leftarrow}: f \in R_{\langle a;c\rangle},\ f \in R_{\langle c;b\rangle}. \implies f \in R_{\langle a;b\rangle} \end{aligned}\right\} \text{ a platí } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$:Ak $f\in R_{\langle a;b\rangle}$, potom (veta 1.2.22, obr. 1.2.16 vľavo) platí

$$0=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x+\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\Big(\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x+\underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$$
$$=\underbrace{\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\geq 0,\ \text{t. j.}\ =0}+\underbrace{\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\geq 0,\ \text{t. j.}\ =0}\geq 0.$$

To znamená, že $f\in R_{\langle a;c\rangle}$, $f\in R_{\langle c;b\rangle}$ a platí daná rovnosť.

$PP_{\Leftarrow}$: Ak $f\in R_{\langle a;c\rangle}$, $f\in R_{\langle c;b\rangle}$, potom opačné tvrdenie $f\in R_{\langle a;b\rangle}$ a daná rovnosť vyplývajú z vety 1.2.22 a z rovnakých vzťahov

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x+\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\Big(\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x+\underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$$
$$=\underbrace{\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=0}+\underbrace{\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=0}=0.\ \blacksquare$$

Riemannov integrál sme definovali na intervale $\langle a;b\rangle$, t. j. pre $a<b$. Má zmysel, je užitočné a potrebné definovať **Riemannov integrál pre $a\geq b$**.

Pre každý bod $a\in R$ a pre ľubovoľnú funkciu definujeme

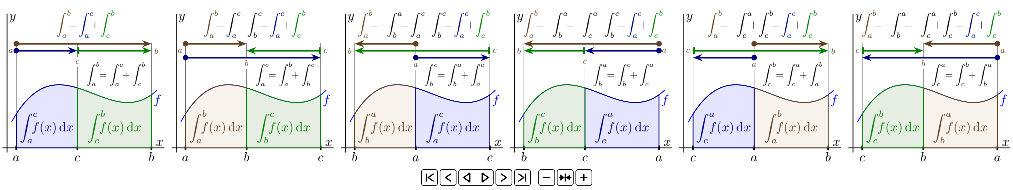
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^a} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^a} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Ak $a>b$, potom definujeme

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=-\underline{\int_b^a} f(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=-\overline{\int_b^a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ak $a>b$, $f\in R_{\langle b;a\rangle}$, potom definujeme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definícia je v súlade s vetou 1.2.22 a s definíciou Riemannovho integrálu. V jej zmysle zostane veta 1.2.23 o aditívnosti v platnosti pre ľubovoľné usporiadanie bodov a, b, c.



Obr. 1.2.16: Aditívnosť integrálu (veta 1.2.24)

Veta 1.2.24.
Funkcia $f \in R_I$, $I \subset R$ je ohraničený interval, body $a, b, c \in I$ sú ľubovoľné.

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz.
Je zrejmé, že funkcia f je riemannovsky integrovateľná na všetkých intervaloch, ktoré vytvoria dvojice bodov $a, b, c \in I$. Je trinásť možností pre ich vzájomné usporiadanie. Na základe definície a vety 1.2.23 platí[42] (obr. 1.2.16):

$$\boxed{a<c<b} \quad \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \quad \text{(veta 1.2.23)}.$$

$$\boxed{a<b<c} \quad \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c. \Longrightarrow \int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b.$$

$$\boxed{b<a<c} \quad \int_b^c = \int_b^a + \int_a^c. \Longrightarrow \int_a^b = -\int_b^a = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b.$$

$$\boxed{b<c<a} \quad \int_b^a = \int_b^c + \int_c^a. \Longrightarrow \int_a^b = -\int_b^a = -\int_b^c - \int_c^a = \int_c^b + \int_a^c = \int_a^c + \int_c^b.$$

$$\boxed{c<a<b} \quad \int_c^b = \int_c^a + \int_a^b. \Longrightarrow \int_a^b = \int_c^b - \int_c^a = \int_c^b + \int_a^c = \int_a^c + \int_c^b.$$

$$\boxed{c<b<a} \quad \int_c^a = \int_c^b + \int_b^a. \Longrightarrow \int_a^b = -\int_b^a = \int_c^b - \int_c^a = \int_c^b + \int_a^c = \int_a^c + \int_c^b.$$

V zostávajúcich možnostiach je daná rovnosť splnená triviálne.

$$\boxed{a=b=c} \quad \int_a^b = \int_a^a = 0 = 0 + 0 = \int_a^a + \int_a^a = \int_a^c + \int_c^b.$$

$$\boxed{a=b<c}\ \boxed{c<a=b} \quad \int_a^b = \int_a^a = 0 = \int_a^c - \int_a^c = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b.$$

$$\boxed{a=c<b}\ \boxed{b<a=c} \quad \int_a^b = 0 + \int_a^b = \int_a^a + \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b.$$

$$\boxed{a<b=c}\ \boxed{b=c<a} \quad \int_a^b = \int_a^b + 0 = \int_a^b + \int_b^b = \int_a^c + \int_c^b. \blacksquare$$

Poznámka 1.2.10.
Aditívnosť Riemannovho integrálu môžeme názorne ilustrovať na vektoroch na reálnej osi s koncovými bodmi zodpovedajúcimi hraniciam jednotlivých integrálov. Napríklad pre prípad $a < b < c$ (obr. 1.2.16) platí analógia

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x) = \int_a^c f(x) - \int_b^c f(x), \quad \textit{resp.} \quad \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} = \overrightarrow{ac} - \overrightarrow{bc}.$$

Doteraz sme sa zaoberali Riemannovým integrálom na ohraničenom intervale. V mnohých prípadoch je užitočné rozšíriť definíciu Riemannovho integrálu na zjednotenie konečného počtu disjunktných ohraničených intervalov.

[42] Kvôli prehľadnosti v integráloch nepíšeme „$f(x)\,\mathrm{d}x$“, píšeme iba hranice.

Poznámka 1.2.11.
Nech $A = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$, kde $I_i \subset R$, $i = 1, 2, \dots, k$, $k \in N$ sú nedegenerované ohraničené navzájom po dvoch disjunktné intervaly, t. j. $I_i \cap I_j = \emptyset$ pre $i \neq j$. Ak pre všetky $i = 1, 2, \dots, k$ platí $f \in R_{I_i}$, potom f nazývame ***riemannovsky integrovateľná na množine*** *A, označenie $f \in R_A$ a číslo*

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{I_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{I_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \dots + \int_{I_k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazývame ***Riemannov (určitý) integrál funkcie f na množine*** *A.*

1.2.2 Výpočet Riemannovho integrálu

Ak $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, potom pre každé číslo $c \in \langle a; b\rangle$ existuje jednoznačne určený Riemannov integrál funkcie f na intervale $\langle a; c\rangle$. To znamená, že môžeme definovať funkciu

$$G_h(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \ \ x \in \langle a; b\rangle,$$

ktorú nazývame **neurčitý Riemannov integrál** funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$, resp. **integrál ako funkcia hornej hranice** (**hornej medze**).[43] Geometricky predstavuje funkčná hodnota $G_h(x)$ plochu krivočiareho lichobežníka (obr. 1.2.17) určeného funkciou f a $\langle a; x\rangle$.

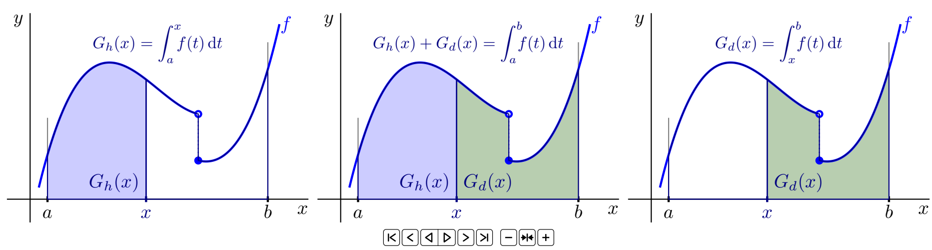
Ukážeme, že G_h je na intervale $\langle a; b\rangle$ spojitá a tiež primitívna funkcia k f. To znamená, že G_h je neurčitým integrálom v zmysle časti 1.1. Preto sa niekedy nazýva **neurčitý Riemannov integrál**.

Analogicky definujeme **integrál ako funkciu dolnej hranice** (**dolnej medze**)

$$G_d(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \langle a; b\rangle.$$

Z predchádzajúceho vyplýva, že pre všetky $x \in \langle a; b\rangle$ platí

$$G_h(a) = 0, \ G_h(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G_d(a), \ G_d(b) = 0, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Obr. 1.2.17: Integrál ako funkcia hornej hranice G_h a dolnej hranice G_d

Veta 1.2.25.
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, čísla $c, d \in \langle a; b\rangle$.

$$\Longrightarrow \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = G_h(d) - G_h(c), \quad \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = G_d(c) - G_d(d) = -\big[G_d(d) - G_d(c)\big].$$

[43] Keďže premenná x sa nachádza v hranici integrálu, integračná premenná musí byť označená inak.

Dôkaz.
Tvrdenie vyplýva z definície a z vety 1.2.24.

$$G_h(d) - G_h(c) = \int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$G_d(c) - G_d(d) = \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^d f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t. \blacksquare$$

Dôsledok 1.2.25.a.
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, pričom $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$.
$\Longrightarrow$ Funkcia G_h je neklesajúca na $\langle a;b\rangle$ a funkcia G_d je nerastúca na $\langle a;b\rangle$.

Dôkaz.
Ak $x_1, x_2 \in \langle a;b\rangle$, $x_1 < x_2$, potom (nezápornosť integrálu – veta 1.2.18) platí

$$G_h(x_2) - G_h(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0, \quad G_d(x_2) - G_d(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \leq 0. \blacksquare$$

Veta 1.2.26.
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$. $\Longrightarrow$ Funkcie G_h, G_d sú spojité na $\langle a;b\rangle$.

Dôkaz.
Dokážeme spojitosť funkcie G_h na $\langle a;b\rangle$. Dôkaz spojitosti G_d je analogický.
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, t. j. je ohraničená na $\langle a;b\rangle$. Potom existuje $M \in R$ také, že pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$ platí $0 \leq |f(x)| \leq M$.
Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Označme $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, t. j. $\varepsilon = \delta M$. Potom pre všetky $x, x^\star \in \langle a;b\rangle$, $x^\star \leq x$ také, že $|x - x^\star| < \delta$, t. j. $x - x^\star < \delta$ (dôsledok 1.2.19.a, veta 1.2.25) platí

$$|G_h(x) - G_h(x^\star)| = \left|\int_{x^\star}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{x^\star}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{x^\star}^{x} M\,\mathrm{d}t = M(x - x^\star) < M\delta = \varepsilon.$$

To znamená, že funkcia G_h je rovnomerne spojitá a teda aj spojitá na intervale $\langle a;b\rangle$. $\blacksquare$

Veta 1.2.27.
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, f je spojitá v bode $x^\star \in \langle a;b\rangle$.
$\Longrightarrow$ G_h, G_d sú diferencovateľné[44] v bode $x^\star$ a platí $G_h'(x^\star) = f(x^\star)$, $G_d'(x^\star) = -f(x^\star)$.

Dôkaz.
Nech $\varepsilon > 0$.
Funkcia f je spojitá v bode $x^\star$, t. j. existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$, $|x - x^\star| < \delta$ platí $|f(x) - f(x^\star)| < \varepsilon$. Predpokladajme, že $x \neq x^\star$, t. j. $0 < |x - x^\star| < \delta$, potom platí

$$\left|\tfrac{G_h(x) - G_h(x^\star)}{x - x^\star} - f(x^\star)\right| = \left|\tfrac{G_h(x) - G_h(x^\star)}{x - x^\star} - \tfrac{f(x^\star)}{x - x^\star}\cdot(x - x^\star)\right| = \left[\int_{x^\star}^{x}\mathrm{d}t = x - x^\star\right]$$
$$= \left|\tfrac{1}{x - x^\star}\int_{x^\star}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \tfrac{f(x^\star)}{x - x^\star}\int_{x^\star}^{x}\mathrm{d}t\right| = \tfrac{1}{|x - x^\star|}\cdot\left|\int_{x^\star}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x^\star}^{x} f(x^\star)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$= \tfrac{1}{|x - x^\star|}\cdot\left|\int_{x^\star}^{x}[f(t) - f(x^\star)]\,\mathrm{d}t\right| \leq \tfrac{1}{|x - x^\star|}\cdot\left|\int_{x^\star}^{x}|f(t) - f(x^\star)|\,\mathrm{d}t\right| = \circledast$$

[44] V krajných bodoch a, b sa myslia jednostranné derivácie.

Posledná nerovnosť vyplýva z dôsledku 1.2.19.a.[45] Body t ležia medzi bodmi x, $x^\star$, t. j. platí $|t-x^\star| \leq |x-x^\star| < \delta$ a teda aj $|f(t)-f(x^\star)| < \varepsilon$. Potom

$$\circledast < \tfrac{1}{|x-x^\star|} \cdot \left| \int_{x^\star}^{x} \varepsilon \, \mathrm{d}t \right| = \tfrac{1}{|x-x^\star|} \cdot |\varepsilon(x-x^\star)| = \varepsilon.$$

Z toho vyplýva (definícia derivácie, ma1: veta 3.2.1) prvé tvrdenie vety

$$f(x^\star) = \lim_{x\to x^\star} \tfrac{G_h(x)-G_h(x^\star)}{x-x^\star} = G_h'(x^\star).$$

Druhé tvrdenie vyplýva z vety 1.2.25

$$G_d'(x^\star) = \lim_{x\to x^\star} \tfrac{G_d(x)-G_d(x^\star)}{x-x^\star} = -\lim_{x\to x^\star} \tfrac{G_h(x)-G_h(x^\star)}{x-x^\star} = -f(x^\star). \blacksquare$$

Dôsledok 1.2.27.a.
Funkcia f je spojitá na intervale $x\in\langle a;b\rangle$.
$\Longrightarrow$ G_h, $-G_d$ sú primitívne funkcie k f na $\langle a;b\rangle$.

Dôsledok 1.2.27.b.
Funkcia f je po častiach spojitá na intervale $x\in\langle a;b\rangle$.
$\Longrightarrow$ G_h, $-G_d$ sú zovšeobecnené primitívne funkcie k f na $\langle a;b\rangle$.

Nasledujúca veta je veľmi dôležitá pre výpočet určitého integrálu. V literatúre sa často nazýva **základná veta integrálneho počtu**.

Veta 1.2.28 (Newton-Leibnizov vzorec).
Funkcia $f\in R_{\langle a;b\rangle}$, F je (zovšeobecnená) primitívna funkcia k f na $\langle a;b\rangle$.
$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$
Dôkaz.
Z predchádzajúcej vety a jej dôsledkov vyplýva, že G_h je zovšeobecnená primitívna funkcia k funkcii f na $\langle a;b\rangle$.[46] Z vety 1.1.2 a poznámky 1.1.13 vyplýva, že pre všetky $x\in\langle a;b\rangle$ platí $F(x)-G_h(x)=c$, t. j. $F(x)=G_h(x)+c$, kde $c\in R$ je konštanta. Potom (veta 1.2.25):

$$F(b)-F(a) = \big[G_h(b)+c\big] - \big[G_h(a)+c\big] = G_h(b)-G_h(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \blacksquare$$

Z vety vyplýva, že na výpočet určitého integrálu môžeme použiť ľubovoľnú (zovšeobecnenú) primitívnu funkciu. Newton-Leibnizov vzorec sa zvykne zapisovať[47]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Pred použitím Newton-Leibnizovho vzorca musíme overiť predpoklady, pričom v praxi sa overujú počas výpočtu. V príklade 1.2.5 d) síce k danej funkcii f existuje zovšeobecnená primitívna funkcia, ale funkcia f nie je ohraničená. Integrovaniu takýchto funkcií sa budeme venovať v nasledujúcej časti o nevlastných integráloch.

[45] Pre $x^\star \leq x$ platí nerovnosť $|\int_{x^\star}^{x}[f(t)-f(x^\star)]\,\mathrm{d}t| \leq \int_{x^\star}^{x}|f(t)-f(x^\star)|\,\mathrm{d}t$ a pre $x<x^\star$ platí nerovnosť $|\int_{x^\star}^{x}[f(t)-f(x^\star)]\,\mathrm{d}t| = |\int_{x}^{x^\star}[f(t)-f(x^\star)]\,\mathrm{d}t| \leq \int_{x}^{x^\star}|f(t)-f(x^\star)|\,\mathrm{d}t = -\int_{x^\star}^{x}|f(t)-f(x^\star)|\,\mathrm{d}t$.

[46] Primitívna funkcia na intervale je súčasne aj zovšeobecnená primitívna funkcia (poznámka 1.1.12).

[47] Konštanta c prislúchajúca k (zovšeobecnenej) primitívnej funkcii sa vynuluje a nepíše sa.

Poznámka 1.2.12.
Niekedy sa určitý integrál namiesto integrálnych súčtov definuje pomocou Newton-Leibnizovho vzorca. Ak má funkcia f na $\langle a; b\rangle$ (zovšeobecnenú) primitívnu funkciu F, potom číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

*nazývame **Newtonovým (určitým) integrálom funkcie f na intervale** $\langle a; b\rangle$.*
*Definície Newtonovho a Riemannovho integrálu **nie sú ekvivalentné**, ale pokiaľ obidva integrály existujú, potom sa rovnajú (základná veta integrálneho počtu 1.2.28).*

Poznámka 1.2.13.
Ak funkcia $f \in R_A$, pričom $A = \langle a_1; b_1\rangle \cup \langle a_2; b_2\rangle \cup \cdots \cup \langle a_k; b_k\rangle$, $k \in N$, potom musíme Newton-Leibnizov vzorec aplikovať na každý čiastkový interval $\langle a_i; b_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

$$\begin{aligned}\int_A f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_2}^{b_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[F(x)\Big]_{a_1}^{b_1} + \cdots + \Big[F(x)\Big]_{a_k}^{b_k} = \big[F(b_1) - F(a_1)\big] + \cdots + \big[F(b_k) - F(a_k)\big].\end{aligned}$$

Príklad 1.2.5.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2\cdot 2}\Big]_{-1}^{0} = \Big[\frac{x^2}{4}\Big]_{-1}^{0} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}$ (viď príklad 1.2.4, obr. 1.2.9).

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \Big[\ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)\Big]_{0}^{1} = \ln\big(1+\sqrt{2}\big) - \ln 1 = \ln\big(1+\sqrt{2}\big).$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln 1 = 0.$ (!?!)

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big(\sin\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x}\cos\tfrac{1}{x}\big)\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin\tfrac{1}{x}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi\sin\tfrac{1}{\pi} - (-\pi)\sin\tfrac{1}{-\pi} = 0.$ (!?!)

Integrály d), e) zatiaľ nevieme vypočítať (viď pr. 1.2.24), aj keď to podľa uvedevného postupu vyzerá, že áno. Nie sú splnené predpoklady vety 1.2.28.

d) Funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ a aj primitívna funkcia $F(x) = \ln x$ nie sú ohraničené na $\langle -1; 1\rangle$.

e) Funkcia $f(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ nie je ohraničená na intervale $\langle -\pi; \pi\rangle$. V bode 0 nie je definovaná. To by nevadilo, pokiaľ by bola na $\langle -\pi; \pi\rangle$ ohraničená.[48] ∎

Veta 1.2.29 (1. veta o strednej hodnote).
Funkcie $f, g \in R_{\langle a; b\rangle}$, pričom $g(x) \geq 0$ pre $x \in \langle a; b\rangle$.

$\Longrightarrow$ Existuje $\alpha \in \langle m_f; M_f\rangle$ také, že $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,

kde $m_f = \inf\{f(x), x \in \langle a; b\rangle\}$, $M_f = \sup\{f(x), x \in \langle a; b\rangle\}$.

[48] Funkcia $F(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $x \in \langle -\pi; \pi\rangle$, $F(0) = 0$ je zovšeobecnenou primitívnou funkciou k f na $\langle -\pi; \pi\rangle$.

Dôkaz.
Pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$ platí $0 \leq g(x)$, $m_f \leq f(x) \leq M_f$, t. j. $m_f g(x) \leq f(x)g(x) \leq M_f g(x)$.
Potom z nezápornosti a monotónosti integrálu (vety 1.2.18, 1.2.19) vyplýva

$$I_g = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq 0, \quad m_f I_g = \int_a^b m_f g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M_f g(x)\,\mathrm{d}x = M_f I_g.$$

Sú dve možnosti:

1. Ak $I_g = 0$, potom tvrdenie vety platí pre všetky $\alpha \in \langle m_f; M_f\rangle$, pretože

$$0 = m_f I_g \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M_f I_g = 0, \quad \text{t. j.} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. Ak $I_g > 0$, potom platí

$$m_f \leq \tfrac{1}{I_g}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M_f, \quad \text{t. j. } \alpha = \tfrac{1}{I_g}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \ \blacksquare$$

Dôsledok 1.2.29.a.
Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, pričom $g(x) \leq 0$ pre $x \in \langle a;b\rangle$.

$$\Longrightarrow \text{ Existuje } \alpha \in \langle m_f; M_f\rangle \text{ také, že } \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $m_f = \inf\{f(x), x \in \langle a;b\rangle\}$, $M_f = \sup\{f(x), x \in \langle a;b\rangle\}$.

Dôkaz.
Ak označíme $h(x) = -g(x) \geq 0$, $x \in \langle a;b\rangle$, potom existuje $\alpha \in \langle m_f; M_f\rangle$ také, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = -\alpha\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \ \blacksquare$$

Dôsledok 1.2.29.b.
Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, f je spojitá na $\langle a;b\rangle$, $g(x) \geq 0$, resp. $g(x) \leq 0$ pre $x \in \langle a;b\rangle$.

$$\Longrightarrow \text{ Existuje } c \in \langle a;b\rangle \text{ také, že platí } \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz.
Funkcia f je spojitá na $\langle a;b\rangle$, $m_f = \inf\{f(x), x \in \langle a;b\rangle\}$, $M_f = \sup\{f(x), x \in \langle a;b\rangle\}$.
Ak $\alpha \in \langle m_f; M_f\rangle$, potom (ma1: veta 3.3.12) existuje $c \in \langle a;b\rangle$ také, že $\alpha = f(c)$. $\blacksquare$

Dôsledok 1.2.29.c.
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, $m_f = \inf\{f(x), x \in \langle a;b\rangle\}$, $M_f = \sup\{f(x), x \in \langle a;b\rangle\}$.

$$\Longrightarrow \text{ Existuje } \alpha \in \langle m_f; M_f\rangle \text{ také, že } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha(b-a).$$

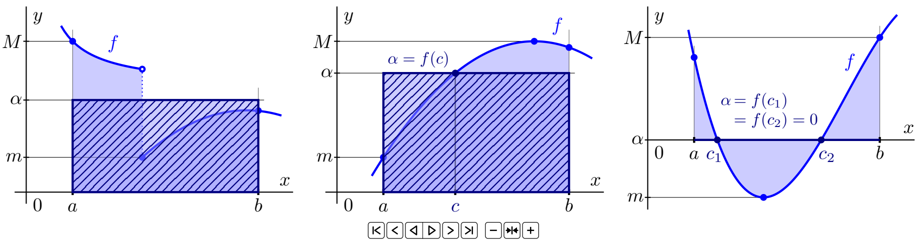
Dôkaz.
Ak položíme $g(x) = 1 > 0$, $x \in \langle a;b\rangle$, potom existuje $\alpha \in \langle m_f; M_f\rangle$ také, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big[f(x)\cdot 1\big]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b \mathrm{d}x = \alpha(b-a). \ \blacksquare$$

Ak $f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}$, potom číslo $\alpha\in R$ (z predchádzajúceho dôsledku) také, že platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha(b-a), \quad \text{t. j. } \alpha = \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazývame **integrálna stredná hodnota** funkcie f na intervale $\langle a;b\rangle$. Geometricky predstavuje α výšku obdĺžnika s rovnakým obsahom, ako je obsah krivočiareho lichobežníka (obr. 1.2.18) určeného funkciou f a rovnakou podstavou $\langle a;b\rangle$. Tým sa myslia orientované obsahy, t. j. plochy pod osou x sú záporné.



Obr. 1.2.18: Integrálna stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a;b\rangle$

Dôsledok 1.2.29.d.
Funkcia f je spojitá na $\langle a;b\rangle$. $\Longrightarrow$ Existuje $c\in\langle a;b\rangle$ také, že $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$.

Príklad 1.2.6.
Odhadnite hodnotu integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{121}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[17]{x^2+1}}$.

Riešenie.
Označme $f(x) = \frac{1}{\sqrt[17]{x^2+1}}$, $x\in\langle 0;1\rangle$, $g(x) = x^{121}$, $x\in\langle 0;1\rangle$.
Funkcia g je nezáporná, t. j. $g(x) = x^{121} \geq 0$, $x\in\langle 0;1\rangle$. Funkcia f je kladná a klesajúca,

$$m_f = \min\{f(x), x\in\langle 0;1\rangle\} = \tfrac{1}{\sqrt[17]{1+1}} > 0, \quad M_f = \max\{f(x), x\in\langle 0;1\rangle\} = \tfrac{1}{\sqrt[17]{0+1}} = 1.$$

Potom pre všetky $x\in\langle 0;1\rangle$ platí $0 < m_f\cdot g(x) < f(x)\cdot g(x) \leq M_f\cdot g(x) \leq g(x)$.
Z toho (monotónnosť a nezápornosť integrálu) vyplýva

$$0 < \int_0^1 \tfrac{x^{121}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[17]{x^2+1}} \leq \int_0^1 x^{121}\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{x^{122}}{122}\Big]_0^1 = \tfrac{1}{122}, \quad \text{t. j. } \int_0^1 \tfrac{x^{121}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[17]{x^2+1}} \approx \tfrac{1}{122} \approx 0{,}008\,197. \blacksquare$$

Príklad 1.2.7.
Určte integrálnu strednú hodnotu α_k funkcie $f(x) = x\sin x$ na intervale $\langle 0;k\pi\rangle$, $k\in N$.

Riešenie.
Pre α_k (obr. 1.2.19) platí

$$\alpha_k = \tfrac{1}{k\pi-0}\int_0^{k\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \big[\text{ Pr. 1.1.46 }\big] = \tfrac{1}{k\pi}\Big[\sin x - x\cos x\Big]_0^{k\pi}$$

$$= \tfrac{1}{k\pi}\big[\sin k\pi - k\pi\cdot\cos k\pi - \sin 0 - 0\cdot\cos 0\big] = -\cos k\pi = -(-1)^k = (-1)^{k-1}. \blacksquare$$

Pre odhady Riemannových integrálov je v mnohých prípadoch užitočná nasledujúca veta (2. veta o strednej hodnote), ktorú uvádzame bez dôkazu.

Veta 1.2.30 (2. veta o strednej hodnote).
Funkcie $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$, f je monotónna na $\langle a;b\rangle$.

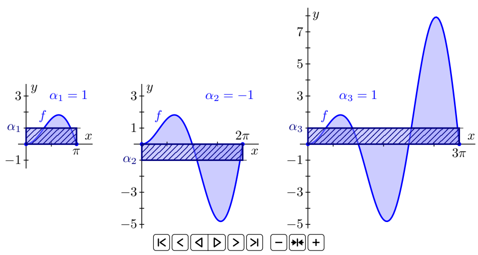
$\Longrightarrow$ Existuje $c \in \langle a;b\rangle$ také, že $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Dôsledok 1.2.30.a.
Funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$, f je monotónna na $\langle a;b\rangle$.

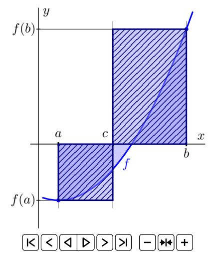
$\Longrightarrow$ Existuje $c \in \langle a;b\rangle$ také, že $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\cdot(c-a) + f(b)\cdot(b-c).$

Dôkaz.
Ak položíme $g(x) = 1$, $x \in \langle a;b\rangle$, potom (obr. 1.2.20) existuje $c \in \langle a;b\rangle$ také, že platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c \mathrm{d}x + f(b)\int_c^b \mathrm{d}x = f(a)(c-a) + f(b)(b-c). \blacksquare$$



Obr. 1.2.19: Integrálna stredná hodnota funkcie $f(x) = x\sin x$ na $\langle 0; k\pi\rangle$, $k = 1, 2, 3$ (pr. 1.2.7)



Obr. 1.2.20: Odhad integrálu pomocou dôsledku 1.2.30.a

Príklad 1.2.8.
Odhadnite hodnotu integrálu $\displaystyle\int_1^a \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$, kde $a \in R$, $a > 1$.

Riešenie.
Označme $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1;a\rangle$, $g(x) = \cos x$, $x \in \langle 1;a\rangle$.
Funkcia f je klesajúca, $g \in R_{\langle 1;a\rangle}$. Potom (veta 1.2.30) existuje $c \in \langle 1;a\rangle$ také, že

$$\int_1^a \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1}\int_1^c \cos x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{a}\int_c^a \cos x\,\mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_1^c + \frac{1}{a}\Big[\sin x\Big]_c^a$$
$$= \big[\sin c - \sin 1\big] + \big[\tfrac{1}{a}\sin a - \tfrac{1}{a}\sin c\big] = \sin c - \sin 1 + \tfrac{1}{a}\sin a - \tfrac{1}{a}\sin c.$$
$$\Longrightarrow\ 0 \le \left|\int_1^a \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le |\sin c| + |\sin 1| + \tfrac{1}{a}\,|\sin a| + \tfrac{1}{a}\,|\sin c| \le 2 + \tfrac{2}{a}. \blacksquare$$

Určité integrály vo všeobecnosti počítame pomocou Newton-Leibnizovho vzorca. Aby sme tento vzorec mohli použiť, musíme poznať primitívnu funkciu. Na určenie primitívnej funkcie môžeme použiť všetky poznatky a metódy z predchádzajúcej časti o neurčitom integráli. Metódu per partes a substitučné metódy môžeme upraviť a určitý integrál počítať pomocou nich priamo. Po substitúcii sa nemusíme vracať k pôvodným premenným.

Veta 1.2.31 (Metóda per partes).
Funkcie $u, v \in R_{\langle a;b\rangle}$, $u', v' \in R_{\langle a;b\rangle}$.

$$\Longrightarrow \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[u(x)\, v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

Dôkaz.
Z predpokladov vyplýva, že u, v sú spojité na $\langle a;b\rangle$ a že platí $uv', u'v, (uv)' \in R_{\langle a;b\rangle}$.
Zo vzťahu $\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ platného pre $x \in \langle a;b\rangle$ potom vyplýva

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\, \mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big]\, \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\, \mathrm{d}x. \blacksquare$$

Príklad 1.2.9.

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2 \cos x\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2x \cos x\, \mathrm{d}x$$
$$= \left[\begin{array}{l|l} u = 2x & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right] = \big[-4\pi^2 \cdot 1 + 0^2 \cdot 1\big] + \Big[2x \sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2 \sin x\, \mathrm{d}x$$
$$= -4\pi^2 + \big[4\pi \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0\big] - \Big[-2 \cos x\Big]_0^{2\pi} = -4\pi^2 - \big[-2 \cdot 1 + 2 \cdot 1\big] = -4\pi^2.$$

Iné riešenie.
Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do vzorca.

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x\, \mathrm{d}x = \big[\text{Pr. 1.1.46}\big] = \Big[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x\Big]_0^{2\pi}$$
$$= -4\pi^2 \cdot 1 + 4\pi \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -4\pi^2. \blacksquare$$

Veta 1.2.32 (Metóda substitúcie).
Funkcia $y = f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b. J je interval s hranicami α, β.
Funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to R$, pričom φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

$$\Longrightarrow f(\varphi)\varphi' \in R_J \text{ a platí } \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Dôkaz.
Funkcia f je spojitá na I, t. j. má na I primitívnu funkciu F a platí $F'(x) = f(x)$, $x \in I$.
Ak označíme $G(t) = F[\varphi(t)]$, $t \in J$, potom (ma1: veta 4.1.7) pre všetky $t \in J$ platí

$$G'(t) = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t), \quad \text{t. j. } G(t) \text{ je primitívna k } f[\varphi(t)]\varphi'(t) \text{ na } J.$$

Funkcie φ', φ sú spojité na J, potom $f(\varphi) \in R_J$, $f(\varphi)\varphi' \in R_J$ a platí

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, \mathrm{d}t = G(\beta) - G(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x. \blacksquare$$

Poznámka 1.2.14.
Vetu 1.2.32 môžeme použiť obomi smermi, pričom sa nevraciame k pôvodným premenným.

1. *Ak počítame* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *a sú splnené predpoklady vety, potom integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *transformujeme na integrál* $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, *ktorý vypočítame.*
2. *Ak počítame* $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ *a sú splnené predpoklady vety, potom existuje integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *ktorý vypočítame.*

Príklad 1.2.10.

a) $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|r|c} \text{Subst. } x=\sin t & x\in\langle -1;1\rangle & 1=\sin\frac{\pi}{2} & \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle & -1=\sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos t\geq 0 \text{ pre všetky } t\in\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right]$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1+\cos 2t]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[t+\frac{\sin 2t}{2}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sin(-\pi)}{2}\Big)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\frac{\pi}{2}+0-\big(-\frac{\pi}{2}+0\big)\Big] = \frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené:
Funkcie $x=\varphi(t)=\sin t$, $\varphi'(t)=\cos t$ sú spojité na $J=\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle$, $\varphi(J)=\langle -1;1\rangle = I$.
Funkcia $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na I, $\varphi(-\frac{\pi}{2})=-1$, $\varphi(\frac{\pi}{2})=1$.

b) $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in\langle -1;0) & x\in\langle 1;2\rangle & t=2 \mapsto x=5 \\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t & t\in\langle 0;2\rangle & x\in\langle 1;5\rangle & t=-1\mapsto x=2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\big[-\cos 5+\cos 2\big] = \frac{\cos 2-\cos 5}{2}.$$

Predpoklady metódy sú splnené:
Funkcie $x=\varphi(t)=t^2+1$, $\varphi'(t)=2t$ sú spojité na $J=\langle -1;2\rangle$, $\varphi(J)=\langle 2;5\rangle = I$.
Funkcia $f(x)=\sin x$ je spojitá na I, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

Iné riešenie.
Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do vzorca.

a) $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\text{ Pr. 1.1.33 }\Big] = \Big[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1\cdot\sqrt{1-1^2}}{2}+\frac{\arcsin 1}{2}-\frac{-1\cdot\sqrt{1-(-1)^2}}{2}-\frac{\arcsin(-1)}{2} = 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-0-\frac{1}{2}\cdot\frac{-\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

b) $$\int t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=t^2+1 & t\in(-\infty;0) & x\in(1;\infty) \\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t & t\in(0;\infty) & x\in(1;\infty) \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\cos x + c = -\frac{1}{2}\cos(t^2+1)+c,\ t\in R,\ c\in R.$$

$$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{2}\cos(t^2+1)\Big]_{-1}^{2} = -\frac{1}{2}\big(\cos 5-\cos 2\big) = \frac{\cos 2-\cos 5}{2}.\ \blacksquare$$

Príklad 1.2.11.

a) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } x=\sin t & t\in\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle & t=\frac{\pi}{2}\mapsto x=1 \\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & x\in\langle 0;1\rangle & t=0\mapsto x=0 \end{array}\right] = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{0}{4} = \frac{1}{4}.$$

b) $$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x} = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } t=\ln x & x\in\langle 1;\mathrm{e}\rangle & x=\mathrm{e}\mapsto t=1 \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x} & t\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto t=0 \end{array}\right] = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

c) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=1-x^2 & x\in\langle 0;1\rangle & x=1\mapsto u=0 \\ \mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x & u\in\langle 0;1\rangle & x=0\mapsto u=1 \end{array}\right] = \int_1^0 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{-2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$

$$= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^u\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\big[\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0\big] = \frac{\mathrm{e}-1}{2}. \ \blacksquare$$

Ak budeme predpokladať, že funkcia φ je rýdzo monotónna, potom môžeme predpoklady predchádzajúcej vety pre funkciu f zovšeobecniť. Platí nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu (viď napr. [36]).

Veta 1.2.33.
Funkcia $y=f(x)$ je ohraničená na intervale I s hranicami a, b. J je interval s hranicami α, β. Funkcia $x=\varphi(t)\colon J\to R$, pričom $\varphi'\neq 0$ pre všetky[49] $t\in J$, $\varphi(J)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Potom platí:

$f\in R_{\langle a;b\rangle}. \iff f(\varphi)\varphi'\in R_J$. Pre integrály potom platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

1.2.3 Integrovanie párnych, nepárnych a periodických funkcií

Uvažujme funkciu $y=f(x)\in R_{\langle a;b\rangle}$, $a<b$. Ak použijeme substitúciu $x=\varphi(t)=-t$, potom $t=-x\in\langle -b;-a\rangle$, $f(-x)\in R_{\langle -b;-a\rangle}$ a platí

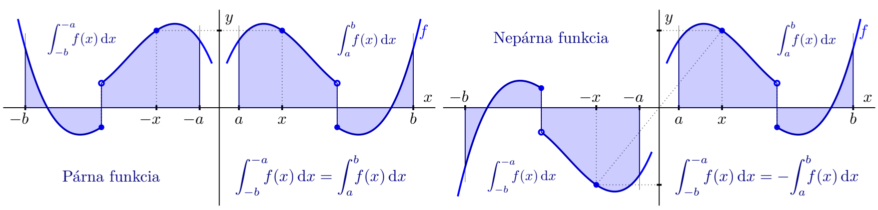
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } t=-x & x=b\mapsto t=-b \\ \mathrm{d}t=-\,\mathrm{d}x & x=a\mapsto t=-a \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Ak je funkcia $f\in R_{\langle a;b\rangle}$ párna, potom (obr. 1.2.21 vľavo) platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

Ak je funkcia $f\in R_{\langle a;b\rangle}$ nepárna, potom (obr. 1.2.21 vpravo) platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} \big[-f(x)\big]\,\mathrm{d}x = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.9}$$



Obr. 1.2.21: Integrovanie párnej a nepárnej funkcie

Príklad 1.2.12.
Funkcia $f\in R_{\langle -a;a\rangle}$, pričom $a>0$.

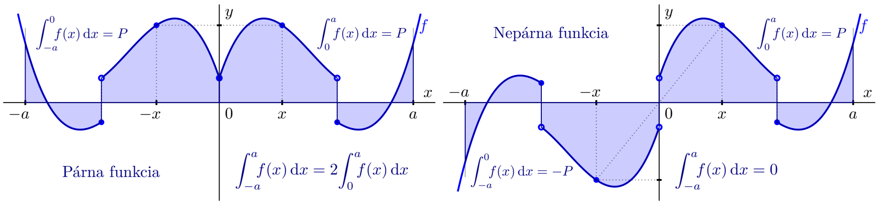
a) Ak je f párna (obr. 1.2.22 vľavo), potom na základe vzťahu (1.8) platí:

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{-(-a)} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[49] T. j. $\varphi'(t)>0$, resp. $\varphi'(t)<0$ pre všetky $t\in J$ a φ je rastúca, resp. klesajúca na J (lema 1.1.7).

b) Ak je f nepárna (obr. 1.2.22 vpravo), potom na základe vzťahu (1.9) platí:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \blacksquare$$



Obr. 1.2.22: Integrovanie párnej a nepárnej funkcie na $\langle -a; a\rangle$

Príklad 1.2.13.

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} f(x)=\sin x \text{ je spojitá, t. j. } f\in R_{\langle -\pi;\pi\rangle}. \\ f \text{ je nepárna na } \langle -\pi;\pi\rangle. \end{array}\right] = 0.$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} \text{Integrand je spojitá} \\ \quad\text{a nepárna funkcia na } \langle -1;1\rangle. \end{array}\right] = 0.$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} \sin|x| \text{ je spojitá} \\ \quad\text{a párna na } \langle -\pi;\pi\rangle. \end{array}\right] = 2\int_{0}^{\pi} \sin|x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$
$= -2\cdot(-1) + 2\cdot 1 = 4.$

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x^4 - \sin^3 4x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 4x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} \text{Funkcia } x^4 \text{ je párna na} \langle -\pi;\pi\rangle. \\ \text{Funkcia } \sin^3 4x \text{ je nepárna na} \langle -\pi;\pi\rangle. \end{array}\right]$
$\displaystyle= 2\int_{0}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x - 0 = 2\Big[\frac{x^5}{5}\Big]_0^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5}. \blacksquare$

Poznámka 1.2.15.

Nech f je párna alebo nepárna funkcia. Uvažujme množinu $A = \langle -a; a\rangle \cap D(f)$, kde $a > 0$. Predpokladajme, že $f \in R_A$. V zmysle poznámok 1.2.11 a 1.2.13 musíme pri integrovaní funkcie f uvážiť intervaly, na ktorých je definovaná (pr. 1.2.14).

Príklad 1.2.14.

a) Uvažujme funkciu f definovanú vzťahom $f(x) = \frac{2k+1}{2} = k + \frac{1}{2}$ pre $x\in\langle \alpha_k; \beta_k\rangle$, $k\in Z$, kde $\alpha_k = \min\{\frac{4k+1}{2}, \frac{4k+3}{2}\}$, $\beta_k = \max\{\frac{4k+1}{2}, \frac{4k+3}{2}\}$.
Ukážeme, že f je nepárna (obr. 1.2.23 vľavo). Definičný obor $D(f) = \bigcup\limits_{k\in Z} \langle \alpha_k; \beta_k\rangle$, t. j.

$$D(f) = \underbrace{\langle \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}\rangle \cup \langle -\tfrac{3}{2}; -\tfrac{1}{2}\rangle}_{k=0,\ k=-1} \cup \underbrace{\langle \tfrac{5}{2}; \tfrac{7}{2}\rangle \cup \langle -\tfrac{7}{2}; -\tfrac{5}{2}\rangle}_{k=1,\ k=-2} \cup \underbrace{\langle \tfrac{9}{2}; \tfrac{11}{2}\rangle \cup \langle -\tfrac{11}{2}; -\tfrac{9}{2}\rangle}_{k=2,\ k=-3} \cup \cdots .$$

Ak $x\in\langle \alpha_k; \beta_k\rangle \subset D(f)$, $k\in Z$, potom $-x\in\langle -\beta_k; -\alpha_k\rangle = \langle \alpha_{-k-1}; \beta_{-k-1}\rangle \subset D(f)$, pretože

$$-\frac{4k+1}{2} = \frac{-4k-1}{2} = \frac{-4k-4+3}{2} = \frac{4(-k-1)+3}{2}, \qquad -\frac{4k+3}{2} = \frac{-4k-3}{2} = \frac{-4k-4+1}{2} = \frac{4(-k-1)+1}{2}.$$

Pre všetky $x \in \langle \alpha_k; \beta_k \rangle$ a všetky $-x \in \langle \alpha_{-k-1}; \beta_{-k-1} \rangle$ platí

$$f(-x) = \tfrac{2(-k-1)+1}{2} = \tfrac{-2k-2+1}{2} = \tfrac{-2k-1}{2} = -\tfrac{2k+1}{2} = -f(x).$$

Určitý integrál tejto funkcie f na ľubovoľnej množine $A_a = D(f) \cap \langle -a; a \rangle$, kde $a > 0$, je nulový. Napríklad pre množinu $A_3 = D(f) \cap \langle -3; 3 \rangle$ platí

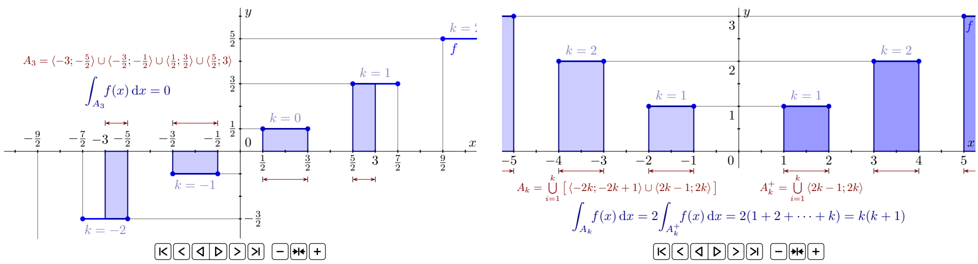
$$\int_{A_3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-\frac{5}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{5}{2}}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

b) Funkcia f definovaná vzťahom $f(x) = k$ pre $x \in \langle -2k; -2k+1 \rangle \cup \langle 2k-1; 2k \rangle$, $k \in N$ je párna (obr. 1.2.23 vpravo). Pre definičný obor platí

$$D(f) = \underbrace{\langle -2; -1 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle}_{k=1} \cup \underbrace{\langle -4; -3 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle}_{k=2} \cup \underbrace{\langle -6; -5 \rangle \cup \langle 5; 6 \rangle}_{k=3} \cup \cdots .$$

Označme $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} \big[\langle -2k; -2k+1 \rangle \cup \langle 2k-1; 2k \rangle \big]$, $A_k^+ = \bigcup_{i=1}^{k} \langle 2k-1; 2k \rangle$, $k \in N$. Potom

$$\int_{A_k} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{A_k^+} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\Big[\int_1^2 \mathrm{d}x + \int_3^4 2\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{2k-1}^{2k} k\,\mathrm{d}x \Big]$$
$$= 2(1 + 2 + \cdots + k) = k(k+1). \ \blacksquare$$



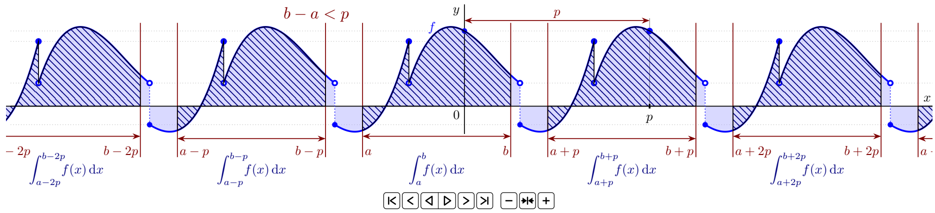
Obr. 1.2.23: Párna a nepárna funkcia z príkladu 1.2.14

Uvažujme funkciu $y = f(x) \in R_{\langle a;b \rangle}$, $a < b$, ktorá je periodická s periódou $p \neq 0$. Potom pre všetky $x \in \langle a; b \rangle$, $k \in Z$ platí $f(x) = f(x + kp)$. Ak položíme $x = \varphi(t) = t - kp$, potom $t = x + kp$, $t \in \langle a + kp; b + kp \rangle$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, $f(x + kp) \in R_{\langle a+kp; b+kp \rangle}$. Z nasledujúcej rovnosti vyplýva, že hodnota Riemannovho integrálu funkcie f je na každom intervale $\langle a + kp; b + kp \rangle$, $k \in Z$ rovnaká (obr. 1.2.24).

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} x = b & t = b + kp \\ x = a & t = a + kp \end{array} \right] = \int_{a+kp}^{b+kp} f(t + kp)\,\mathrm{d}t = \int_{a+kp}^{b+kp} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x. \quad (1.10)$$

Veta 1.2.34.
Funkcia $y = f(x)$, $x \in R$ je periodická s periódou $p > 0$, $a \in R$. Potom platí:

$$f(x) \in R_{\langle 0;p \rangle}. \iff f(x) \in R_{\langle a;a+p \rangle} \text{ a (pokiaľ existujú) platí } \int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Obr. 1.2.24: Integrovanie periodickej funkcie s periódou p

Dôkaz.
Nech $k\in Z$ (obr. 1.2.25) je také, že $kp-p<a\leq kp$, t. j. $kp<a+p\leq kp+p$.

$NP_{\Rightarrow}$: Z voľby $k\in Z$ vyplýva

$$kp-p<a\leq kp<a+p\leq kp+p, \quad \text{t. j. } \langle a; a+p\rangle \subset \langle kp-p; kp+p\rangle.$$

Ak uvážime vzťah (1.10) a aditívnosť integrálu, potom z predpokladu $f\in R_{\langle 0;p\rangle}$ vyplýva:[50]

$$f\in R_{\langle kp-p;kp\rangle},\, f\in R_{\langle kp;kp+p\rangle}. \implies f\in R_{\langle kp-p;kp+p\rangle}. \implies f\in R_{\langle a;a+p\rangle}.$$

$PP_{\Leftarrow}$: Z voľby $k\in Z$ vyplýva

$$a-p\leq kp-p<a\leq kp<a+p, \quad \text{t. j. } \langle kp-p; kp\rangle \subset \langle a-p; a+p\rangle.$$

Ak uvážime vzťah (1.10), potom z predpokladu $f\in R_{\langle a;a+p\rangle}$ vyplýva:[51]

$$f\in R_{\langle a-p;a\rangle}. \implies f\in R_{\langle a-p;a+p\rangle}. \implies f\in R_{\langle kp-p;kp\rangle}. \implies f\in R_{\langle 0;p\rangle}.$$

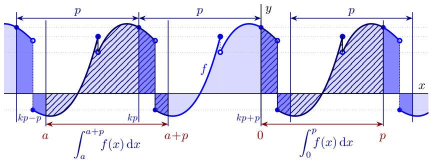
Z aditívnosti integrálu a zo vzťahu (1.10) vyplýva

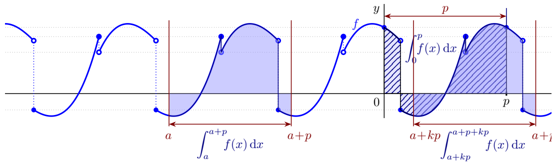
$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_a^{kp} f(x)\,dx + \int_{kp}^{a+p} f(x)\,dx$$
$$= \int_a^{kp} f(x)\,dx + \int_{kp-p}^{a} f(x)\,dx = \int_{kp-p}^{kp} f(x)\,dx = \int_0^{p} f(x)\,dx. \blacksquare$$

Príklad 1.2.15.
Nech $a\in R$, $m,n\in N$, $m\neq n$, potom na základe príkladu 1.1.45 a vety 1.2.34 platí:[52]

a) $$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \tfrac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx = \Big[\tfrac{x}{2} - \tfrac{\sin(2nx)}{2\cdot 2n}\Big]_0^{2\pi}$$
$$= \Big[\tfrac{2\pi-0}{2} - \tfrac{\sin(4n\pi)-\sin 0}{4n}\Big] = \Big[\tfrac{2\pi}{2} - \tfrac{0-0}{4n}\Big] = \pi.$$

[50] $\langle 0;p\rangle + kp = \langle kp; kp+p\rangle$, resp. $\langle 0;p\rangle + (k-1)p = \langle kp-p; kp\rangle$.
[51] $\langle a; a+p\rangle + (-1)\cdot p = \langle a-p; a\rangle$, resp. $\langle kp-p; kp\rangle + (1-k)p = \langle 0;p\rangle$.
[52] Všetky integrandy sú spojité na R a periodické s periódou 2π, t. j. platia prepoklady vety 1.2.34.





Obr. 1.2.25: Integrovanie periodickej funkcie (veta 1.2.34)

b) $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{2\cdot 2n}\Big]_0^{2\pi}$

$$= \Big[\frac{2\pi-0}{2} + \frac{\sin(4n\pi)-\sin 0}{4n}\Big] = \Big[\frac{2\pi}{2} + \frac{0-0}{4n}\Big] = \pi.$$

c) $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{\sin[(m-n)x]}{2(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)x]}{2(m+n)}\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \Big[\frac{\sin[2(m-n)\pi]-\sin 0}{2(m-n)} - \frac{\sin[2(m+n)\pi]-\sin 0}{2(m+n)}\Big] = \Big[\frac{0-0}{2(m-n)} - \frac{0-0}{2(m+n)}\Big] = 0.$$

d) $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{\sin[(m-n)x]}{2(m-n)} + \frac{\sin[(m+n)x]}{2(m+n)}\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \Big[\frac{\sin[2(m-n)\pi]-\sin 0}{2(m-n)} + \frac{\sin[2(m+n)\pi]-\sin 0}{2(m+n)}\Big] = \Big[\frac{0-0}{2(m-n)} + \frac{0-0}{2(m+n)}\Big] = 0.$$

e) $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0.$

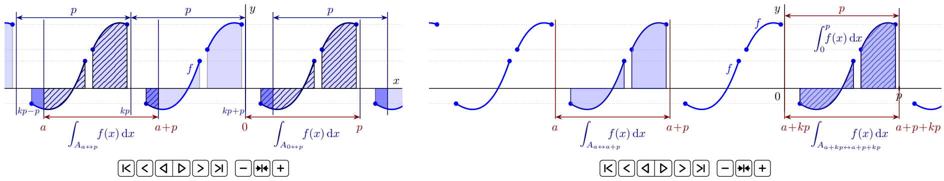
f) $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0.$

Funkcie $y = \sin(nx)\cos(nx)$, $y = \sin(mx)\cos(nx)$ sú nepárne. ■

Poznámka 1.2.16.
Predpokladajme, že f je periodická funkcia s periódou $p \neq 0$ a existuje nedegenerovaný interval I taký, že $I \cap D(f) = \emptyset$. Ak je funkcia f riemannovsky integrovateľná, potom predchádzajúce tvrdenia, t. j. vzťah (1.10) a veta 1.2.34, ostanú v platnosti (obr. 1.2.26).

1.2.4 Numerické integrovanie

Riemannov integrál dokážeme vypočítať pomocou Newton-Leibnizovho vzorca, samozrejme, pokiaľ vieme určiť primitívnu funkciu. Existujú prípady, keď primitívnu funkciu nevieme určiť, nedokážeme ju vyjadriť v jednoduchom tvare, alebo je jej vyjadrenie priveľmi prácne, resp. neúčelné. Často (najmä pri technických výpočtoch) nám postačí približná hodnota, ktorá sa od presnej hodnoty nelíši viac ako maximálna (dovolená) chyba.



Obr. 1.2.26: Integrovanie periodickej funkcie

V takýchto prípadoch používame na výpočet Riemannovho integrálu približné numerické metódy. Numerické integrovanie sa niekedy v literatúre nazýva **numerická kvadratúra**. Uvedieme tri jednoduché metódy (obdĺžnikovu, lichobežníkovu a Simpsonovu) na približný výpočet Riemannovho integrálu funkcie f na intervale $\langle a; b\rangle$.

Uvažujme funkciu $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ a postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, ktorej jednotlivé delenia D_n, $n \in N$ majú $n+1$ rovnako vzdialených deliacich bodov. To znamená, že pre každé delenie D_n, $n \in N$ platí

$$x_i = a + \tfrac{i(b-a)}{n},\ i = 0, 1, 2, \ldots, n, \qquad \Delta x = \Delta x_i = \tfrac{b-a}{n},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Aby sme situáciu zbytočne nekomplikovali, budeme predpokladať, že je funkcia f definovaná v deliacich bodoch x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ a pre jednoduchosť budeme označovať

$$y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n, \ \text{ t. j. } y_0 = f(a),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \ldots,\ y_n = f(b).$$

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna, pretože platí $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0$.

Obdĺžnikova metóda

Integrál aproximujeme integrálnymi súčtami, ktoré geometricky predstavujú obdĺžniky. Z vety 1.2.6 a jej dôsledkov vyplýva, že pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_T(f, D_n),$$
$$\text{kde } S_T(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(t_i) = \tfrac{b-a}{n}\Big[f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n)\Big].$$

Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí

$$R_n = \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \tfrac{b-a}{n}\Big[f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_{n-1}) + f(t_n)\Big] \right| < \varepsilon,$$

t. j. daný integrál dokážeme vypočítať s ľubovoľnou presnosťou (chybou) $R_n < \varepsilon$.

Ak zvolíme $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, t. j. ľavé hraničné body intervalov $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, potom $f(t_i) = f(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a pre odhad integrálu (obr. 1.2.27) platí

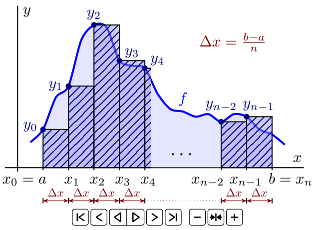
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) = \tfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = \tfrac{b-a}{n}\big[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1}\big]. \qquad (\mathrm{O}_l)$$

Ak zvolíme $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, t. j. pravé hraničné body intervalov $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, potom $f(t_i) = f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a pre odhad integrálu (obr. 1.2.27) platí

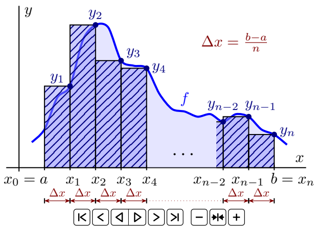
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) = \tfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \tfrac{b-a}{n}\big[y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n\big]. \qquad (\mathrm{O}_p)$$

Ak je funkcia f diferencovateľná a má ohraničenú deriváciu f' na $\langle a;b\rangle$, potom pre chybu aproximácie pomocou vzorcov (O_l) a (O_p) platí (viď napr. [36, 47])

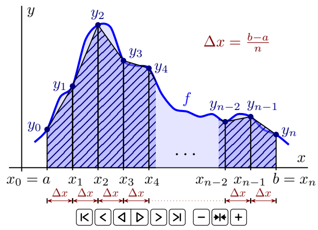
$$R_n^O \leq \delta_1 \tfrac{(b-a)^2}{n}, \quad \text{pričom } \delta_1 \in R \text{ je také, že } |f'(x)| \leq \delta_1 \text{ pre všetky } x \in \langle a;b\rangle.$$



Obr. 1.2.27: Metóda obdĺžnikova (O_l)



Obr. 1.2.28: Metóda obdĺžnikova (O_p)



Obr. 1.2.29: Metóda lichobežníkova (L)

Lichobežníkova metóda

Integrál aproximujeme obsahmi lichobežníkov, ktoré sú pre $i = 1, 2, \ldots, n$ určené intervalmi $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ a hodnotami y_{i-1}, y_i. Vrcholy lichobežníkov sú určené bodmi[53] x_{i-1}, y_{i-1}, y_i a x_i. Rozdiely $x_i - x_{i-1} = \Delta x$ predstavujú výšky lichobežníkov a spojnice bodov x_{i-1}, y_{i-1} a x_i, y_i ich základne. Obsahy jednotlivých lichobežníkov sú potom (obr. 1.2.29)

$$P_i = \Delta x \cdot \tfrac{y_{i-1}+y_i}{2} = \tfrac{b-a}{2n}(y_{i-1}+y_i), \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pre aproximáciu integrálu pomocou lichobežníkov potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1}+y_i) = \tfrac{b-a}{2n}\big[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\big]. \tag{L}$$

Zo vzťahov (O_l), (O_p), (L) vyplýva:

$$\begin{aligned}\tfrac{b-a}{n}\big[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1}\big] + \tfrac{b-a}{n}\big[y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n\big] \\ = \tfrac{b-a}{n}\big[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\big] = 2 \cdot \tfrac{b-a}{2n}\big[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\big].\end{aligned}$$

To znamená, že odhad určený lichobežníkovou metódou (L) sa rovná aritmetickému priemeru odhadov získaných obomi obdĺžnikovými metódami (O_l) a (O_p). Z toho vyplýva, že aj touto metódou dokážeme integrál aproximovať s ľubovoľnou presnosťou.

Ak je funkcia f diferencovateľná 2. rádu a má ohraničenú druhú deriváciu f'' na $\langle a;b\rangle$, potom pre chybu aproximácie pomocou vzorca (L) platí (viď napr. [36, 47])

$$R_n^L \leq \delta_2 \tfrac{(b-a)^3}{12n^2}, \quad \text{pričom } \delta_2 \in R \text{ je také, že } |f''(x)| \leq \delta_2 \text{ pre všetky } x \in \langle a;b\rangle.$$

[53] Analytické súradnice týchto bodov sú $(x_{i-1}; 0)$, $(x_{i-1}; y_{i-1})$, $(x_i; y_i)$ a $(x_i; 0)$.

Simpsonova metóda

Pri obdĺžnikovej metóde sme funkciu f na každom z intervalov $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$ nahradili konštantnou funkciou $y = y_{i-1}$, resp. $y = y_i$. Pri lichobežníkovej metóde sme f na $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ nahradili úsečkou (lineárnou funkciou) spájajúcou body[54] y_{i-1} a y_i.

Pri **Simpsonovej metóde**[55] nahrádzame funkciu f parabolou (kvadratickou funkciou) prechádzajúcou bodmi[56] y_{2i-2}, y_{2i-1}, y_{2i} a nahrádzame ju na dvojnásobných intervaloch $\langle x_{2i-2}; x_{2i}\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n/2$, t. j. číslo n musí byť párne (obr. 1.2.31).

Funkciu $y = f(x)$ nahradíme na intervaloch $\langle x_{2i-2}; x_{2i}\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n/2$ kvadratickou funkciou $g_i(x) = \alpha_i x^2 + \beta_i x + \gamma_i$, kde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in R$ sú zatiaľ neznáme parametre.

Výpočet neznámych koeficientov $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in R$ si zjednodušíme tak, že budeme požadovať, aby kvadratické funkcie $g_i(x)$, $x \in \langle x_{2i-2}; x_{2i}\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n/2$ boli periodické s periódami $p_i = x_{2i} - \Delta x = x_{2i-1}$ a budeme ich vyšetrovať (obr. 1.2.30)[57] na posunutých intervaloch $\langle x_{2i-2} - p_i; x_{2i} - p_i\rangle = \langle -\Delta x; \Delta x\rangle$. Potom platí

$$g_i(x_{2i-2}) = g(-\Delta x) = y_{2i-2},\ g_i(x_{2i-1}) = g(0) = y_{2i-1},\ g_i(x_{2i}) = g(\Delta x) = y_{2i}. \quad (1.11)$$

Zo vzťahu (1.10) a príkladu 1.2.12 (funkcie $\alpha_i x^2$, γ_i sú párne a $\beta_i x$ je nepárna) vyplýva

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} g_i(x)\,dx = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} g_i(x)\,dx = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \big(\alpha_i x^2 + \beta_i x + \gamma_i\big)\,dx = 2\int_0^{\Delta x} \big(\alpha_i x^2 + \gamma_i\big)\,dx$$
$$= 2\Big[\tfrac{\alpha_i x^3}{3} + \gamma_i x\Big]_0^{\Delta x} = \tfrac{2\alpha_i \Delta x^3}{3} + 2\gamma_i \Delta x = \tfrac{\Delta x}{3}\big[2\alpha_i \Delta x^2 + 6\gamma_i\big].$$

Zo vzťahu (1.11) potom vyplýva:

$$\left.\begin{aligned} y_{2i-2} &= g(-\Delta x) = \alpha_i \Delta x^2 - \beta_i \Delta x + \gamma_i. \\ y_{2i-1} &= g(0) \quad\;\; = \gamma_i. \\ y_{2i} &= g(\Delta x) \quad = \alpha_i \Delta x^2 + \beta_i \Delta x + \gamma_i. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &y_{2i-2} + y_{2i} &&= 2\alpha_i \Delta x^2 + 2\gamma_i. \\ &y_{2i-2} + y_{2i} + 4y_{2i-1} &&= 2\alpha_i \Delta x^2 + 6\gamma_i. \end{aligned}\right.$$

Pre odhad Riemannovho integrálu na intervale $\langle x_{2i-2}; x_{2i}\rangle$ potom platí

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} g_i(x)\,dx = \tfrac{\Delta x}{3}\big[2\alpha_i \Delta x^2 + 6\gamma_i\big] = \tfrac{b-a}{3n}\big[y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}\big].$$

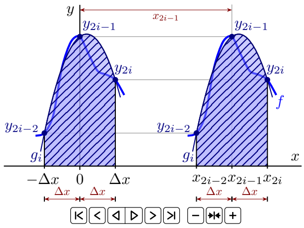
Pre odhad Riemannovho integrálu na celom intervale $\langle a; b\rangle$ potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} g_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \tfrac{b-a}{3n}\big[y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}\big]$$
$$= \tfrac{b-a}{3n}\big[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\big]. \quad \text{(S)}$$

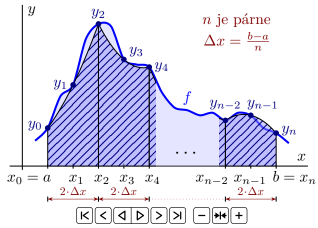
Ak je funkcia f diferencovateľná 4. rádu a má ohraničenú štvrtú deriváciu f'''' na $\langle a; b\rangle$, potom pre chybu aproximácie pomocou Simpsonovho vzorca (S) platí (viď napr. [36, 47])

$$R_n^S \le \delta_4 \tfrac{(b-a)^5}{180n^4}, \quad \text{pričom } \delta_4 \in R \text{ je také, že } |f''''(x)| \le \delta_4 \text{ pre všetky } x \in \langle a; b\rangle.$$

[54] Body $(x_{i-1}; y_{i-1})$ a $(x_i; y_i)$.
[55] *Thomas Simpson* [1710 – 1761] — anglický matematik a vynálezca.
[56] Sú to krivočiare lichobežníky určené bodmi $(x_{2i-2}; 0)$, $(x_{2i-2}; y_{2i-2})$, $(x_{2i}; y_{2i})$, $(x_{2i}; 0)$.
[57] Prakticky to znamená, že graf funkcie $g_i(x)$ posunieme doľava alebo doprava tak, aby sa stred intervalu $x \in \langle x_{2i-2}; x_{2i}\rangle$, t. j. bod x_i posunul do bodu 0.



Obr. 1.2.30: Simpsonov vzorec



Obr. 1.2.31: Simpsonova metóda (S)

Poznámka 1.2.17.
Z geometrie je známy tzv. ***univerzálny Simpsonov vzorec*** *na vypočet objemu V ľubovoľného kvádra, valca, kužeľa, ihlana, resp. gule a ich častí (kolmých, kosých, zrezaných aj nezrezaných). Simpsonov vzorec má tvar*

$$V = \frac{(P_1+4P+P_2)v}{6},$$

pričom v je výška telesa, P_1 a P_2 sú plošné obsahy dolnej a hornej podstavy ($P_2 = 0$ pre nezrezané teleso), P je plošný obsah stredného rezu (prierez v polovici výšky v).

Tabuľka 1.2.13: Numerické integrovanie obdĺžnikovými (O_l), (O_p), lichobežníkovou (L) a Simpsonovou (S) metódami

	(O_l)	(O_p)	(L)	(S)
$x_0 = 1{,}0$	$y_0 = 1{,}000\,000$	—	$y_0 = 1{,}000\,000$	$y_0 = 1{,}000\,000$
$x_1 = 1{,}1$	$y_1 = 0{,}909\,091$	$y_1 = 0{,}909\,091$	$2y_1 = 1{,}818\,182$	$4y_1 = 3{,}636\,364$
$x_2 = 1{,}2$	$y_2 = 0{,}833\,333$	$y_2 = 0{,}833\,333$	$2y_2 = 1{,}666\,667$	$2y_2 = 1{,}666\,667$
$x_3 = 1{,}3$	$y_3 = 0{,}769\,231$	$y_3 = 0{,}769\,231$	$2y_3 = 1{,}538\,462$	$4y_3 = 3{,}076\,923$
$x_4 = 1{,}4$	$y_4 = 0{,}714\,286$	$y_4 = 0{,}714\,286$	$2y_4 = 1{,}428\,571$	$2y_4 = 1{,}428\,571$
$x_5 = 1{,}5$	$y_5 = 0{,}666\,667$	$y_5 = 0{,}666\,667$	$2y_5 = 1{,}333\,333$	$4y_5 = 2{,}666\,667$
$x_6 = 1{,}6$	$y_6 = 0{,}625\,000$	$y_6 = 0{,}625\,000$	$2y_6 = 1{,}250\,000$	$2y_6 = 1{,}250\,000$
$x_7 = 1{,}7$	$y_7 = 0{,}588\,235$	$y_7 = 0{,}588\,235$	$2y_7 = 1{,}176\,471$	$4y_7 = 2{,}352\,941$
$x_8 = 1{,}8$	$y_8 = 0{,}555\,556$	$y_8 = 0{,}555\,556$	$2y_8 = 1{,}111\,111$	$2y_8 = 1{,}111\,111$
$x_9 = 1{,}9$	$y_9 = 0{,}526\,316$	$y_9 = 0{,}526\,316$	$2y_9 = 1{,}052\,632$	$4y_9 = 2{,}105\,263$
$x_{10} = 2{,}0$	—	$y_{10} = 0{,}500\,000$	$y_{10} = 0{,}500\,000$	$y_{10} = 0{,}500\,000$
$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \approx 0,693\,147\,181$	$\sum = 7{,}187\,715$ $\frac{1}{10}\sum = \mathbf{0{,}718\,772}$	$\sum = 6{,}687\,715$ $\frac{1}{10}\sum = \mathbf{0{,}668\,772}$	$\sum = 13{,}875\,429$ $\frac{1}{20}\sum = \mathbf{0{,}693\,771}$	$\sum = 20{,}794\,507$ $\frac{1}{30}\sum = \mathbf{0{,}693\,150}$
Teoretická chyba	$R_{10}^{O} \leq 0{,}100\,000$	$R_{10}^{O} \leq 0{,}100\,000$	$R_{10}^{L} \leq 0{,}001\,667$	$R_{10}^{S} \leq 0{,}000\,013$
Skutočná chyba	$R_{10}^{Os} = 0{,}025\,625$	$R_{10}^{Os} = 0{,}024\,375$	$R_{10}^{Ls} = 0{,}000\,624$	$R_{10}^{Ss} = 0{,}000\,003$

Príklad 1.2.16.
$\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0,693\,147\,180\ldots.$
Postup a výsledky numerického integrovania sú uvedené v tabuľke 1.2.13.

Pri výpočte použijeme delenie s desiatimi rovnako dlhými deliacimi intervalmi, t. j. delenie $D = \{1;\ 1,1;\ 1,2;\ \ldots;\ 1,9;\ 2\} = \big\{1 + \frac{i}{10}\big\}_{i=0}^{10} \in \mathfrak{D}_{\langle 1;2\rangle}$. Pre $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$ platí

$$x_i = 1 + \tfrac{i}{10} = \tfrac{10+i}{10}, \quad y_i = f(x_i) = \tfrac{1}{x_i} = \tfrac{10}{10+i}.$$

Funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1; 2\rangle$ je spojitá, ohraničená a monotónna.
Derivácie $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$, $f''''(x) = \frac{24}{x^5}$, $x \in \langle 1; 2\rangle$ sú tiež spojité, ohraničené a monotónne. Ich absolútne hodnoty sú klesajúce. Pre všetky $x \in \langle 1; 2\rangle$ platí

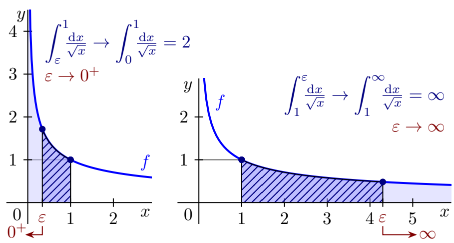
$$|f'(x)| = \tfrac{1}{x^2} \leq 1 = \delta_1, \quad |f''(x)| = \tfrac{2}{x^3} \leq 2 = \delta_2, \quad |f''''(x)| = \tfrac{24}{x^5} \leq 24 = \delta_4.$$

Keďže $b - a = 2 - 1 = 1$, $n = 10$, potom pre teoretické chyby vzorcov platí

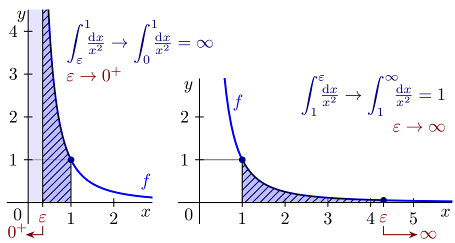
$$R_{10}^{O} \leq \tfrac{1 \cdot 1^2}{10} = 0,1, \quad R_{10}^{L} \leq \tfrac{2 \cdot 1^3}{12 \cdot 10^2} = \tfrac{1}{600} \approx 0,002, \quad R_{10}^{S} \leq \tfrac{24 \cdot 1^5}{180 \cdot 10^4} = \tfrac{1}{75\,000} \approx 0,000\,013. \ \blacksquare$$

1.2.5 Nevlastný integrál

Riemannov integrál sme definovali pre ohraničenú funkciu na ohraničenom intervale, preto ho tiež niekedy nazývame **vlastný Riemannov integrál**. V mnohých praktických aplikáciach (matematických, fyzikálnych, technických, ekonomických atď.) sa vyžaduje integrovanie na neohraničenom intervale a mnohokrát aj integrovanie funkcie, ktorá je neohraničená a to nielen na ohraničenej, ale aj na neohraničenej množine. Pojem Riemannovho integrálu rozšírime aj na tieto prípady (neohraničená množina integrovania alebo neohraničená integrovaná funkcia) a budeme ho nazývať **nevlastný integrál**.



Obr. 1.2.32:
Príklad 1.2.17



Obr. 1.2.33:
Príklad 1.2.18

Príklad 1.2.17.
Pre neurčitý integrál funkcie $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0; \infty)$ platí

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c, \ \ x \in (0; \infty), c \in R.$$

Na intervale $(0; 1\rangle$ je síce primitívna funkcia $F(x) = 2\sqrt{x}$ ohraničená, ale integrovaná funkcia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ohraničená nie je (obr. 1.2.32).

Pre ľubovoľné $\varepsilon\in(0;1)$ je $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in\langle\varepsilon;1\rangle$ ohraničená, $f\in R_{\langle\varepsilon;1\rangle}$ a platí

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\Big[2\sqrt{x}\Big]_{\varepsilon}^{1}=2-2\sqrt{\varepsilon}.\implies\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[2-2\sqrt{\varepsilon}\Big]=2.$$

Na intervale $x\in\langle1;\infty)$ je integrovaná funkcia $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ohraničená, ale primitívna funkcia $F(x)=2\sqrt{x}$ ohraničená nie je. Navyše ani interval $x\in\langle1;\infty)$ nie je neohraničený.
Pre ľubovoľné $\varepsilon\in(1;\infty)$ je $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in\langle1;\varepsilon\rangle$ ohraničená, $f\in R_{\langle1;\varepsilon\rangle}$ a platí

$$\int_{1}^{\varepsilon}\tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\Big[2\sqrt{x}\Big]_{1}^{\varepsilon}=2\sqrt{\varepsilon}-2.\implies\int_{1}^{\infty}\tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{1}^{\varepsilon}\tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\Big[2\sqrt{\varepsilon}-2\Big]=\infty.\ \blacksquare$$

Príklad 1.2.18.
Pre neurčitý integrál funkcie $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\in(0;\infty)$ platí

$$\int\tfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int x^{-2}\,\mathrm{d}x=\tfrac{x^{-1}}{-1}+c=-\tfrac{1}{x}+c,\ \ x\in(0;\infty),c\in R.$$

Analogicky ako v príklade 1.2.17 (obr. 1.2.33) platí $f(x)\in R_{\langle\varepsilon;1\rangle}$ pre ľubovoľné $\varepsilon\in(0;1)$ a $f(x)\in R_{\langle1;\varepsilon\rangle}$ pre ľubovoľné $\varepsilon\in(1;\infty)$. Potom platí:

$$\int_{0}^{1}\tfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\tfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[-\tfrac{1}{x}\Big]_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\big[-1+\tfrac{1}{\varepsilon}\big]=-1+\tfrac{1}{0^+}=-1+\infty=\infty.$$

$$\int_{1}^{\infty}\tfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{1}^{\varepsilon}\tfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\Big[-\tfrac{1}{x}\Big]_{1}^{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\big[-\tfrac{1}{\varepsilon}+1\big]=-\tfrac{1}{\infty}+1=-0+1=1.\ \blacksquare$$

Predpokladajme, že funkcia f je definovaná na intervale[58] $I\subset R$. Bod $c\in I$ (konečný alebo nekonečný) sa nazýva **singulárny bod funkcie $f(x)$, $x\in I$ vplyvom funkcie**, ak je funkcia f neohraničená v nejakom okolí $O(c)$. Ak je interval I neohraničený, potom body $-\infty$, resp. ∞, pokiaľ patria do intervalu I, sa nazývajú **singulárne body funkcie f vplyvom hranice**. Ak má funkcia f aspoň jeden singulárny bod na intervale I, potom

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazývame[59] **nevlastný integrál vplyvom funkcie**, resp. **vplyvom hranice**.

Aby sme situáciu zbytočne nekomplikovali, budeme predpokladať, že funkcia f má na intervale I najviac konečný počet singulárnych bodov. Najprv vyšetríme prípad, keď má funkcia f práve jeden singulárny bod na hranici intervalu integrovania.

Predpokladajme, že $a,b\in R^*$, $a\neq b$, potom sú štyri možnosti:

- **Nevlastné integrály vplyvom hranice**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_a^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_a^{\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to-\infty}\int_{\varepsilon}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x.\end{cases}$$

[58] Interval I môže byť ohraničený i neohraničený.
[59] Podľa toho, či má funkcia f na intervale I singulárne body vplyvom funkcie alebo hranice.

- **Nevlastné integrály vplyvom funkcie**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to b^-} \displaystyle\int_a^{\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{ak je } f \text{ neohraničená v } O(b),\\ \lim\limits_{\varepsilon\to a^+} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{ak je } f \text{ neohraničená v } O(a).\end{cases}$$

Uvedené **nevlastné integrály existujú**, ak existujú príslušné limity na pravej strane. V opačnom prípade hovoríme, že **neexistujú**, resp. **oscilujú**.

Ak sa príslušná limita na pravej strane rovná konečnému číslu $\alpha\in R$, potom hovoríme, že sa nevlastný integrál **rovná číslu** α, resp. **konverguje k číslu** α a označujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha, \quad \text{resp.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \alpha.$$

Ak je limita nevlastná, potom hovoríme, že nevlastný integrál **diverguje do** $\pm\infty$ a píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty, \quad \text{resp.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \pm\infty.$$

Ak nevlastný integrál konverguje k číslu $\alpha\in R$, potom stručne hovoríme, že **konverguje** (**je konvergentný**), v opačnom prípade integrál **diverguje** (**je divergentný**) a píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto, \quad \text{resp.} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \not\longmapsto .$$

Názvoslovie je analogické ako pri číselných radoch (viď ma1: časť 2.4 Číselné rady, str. 53).

Poznámka 1.2.18.
V takto definovanom nevlastnom integráli (s jedným singulárnym bodom) je zachovaná aditívnosť, t. j. jedna zo základných vlastností Riemannovho integrálu.
Pre ľubovoľnú voľbu bodu $d\in(a;b)$ pre $a<b$, resp. $d\in(b;a)$ pre $b<a$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pričom jeden z integrálov na pravej strane je nevlastný a druhý vlastný.

Poznámka 1.2.19.
*Pojem konvergencie nevlastného integrálu môžeme prirodzene rozšíriť na vlastný integrál. Ak $f\in R_{\langle a;b\rangle}$, t. j. Riemannov vlastný integrál funkcie f na $\langle a;b\rangle$ sa rovná nejakému $\alpha\in R$, potom môžeme povedať, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje k číslu** α.*

Z predchádzajúcej definície vyplýva, že na výpočet nevlastných integrálov môžeme použiť Newton-Leibnizov vzorec. Ak je F primitívna funkcia k f na $(a;b)$, potom platí:

$$\begin{aligned}\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_a^{\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty} \Big[F(x)\Big]_a^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \big[F(\varepsilon)-F(a)\big]\\ &= \lim_{\varepsilon\to\infty} F(\varepsilon) - F(a) = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^{\infty}.\\ \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to-\infty} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to-\infty} \Big[F(x)\Big]_{\varepsilon}^{b} = \lim_{\varepsilon\to-\infty} \big[F(a)-F(\varepsilon)\big]\\ &= F(a) - \lim_{\varepsilon\to-\infty} F(\varepsilon) = F(a) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{b}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to b^-}\int_a^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to b^-}\Big[F(x)\Big]_a^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to b^-}\big[F(\varepsilon)-F(a)\big]\\ &= \lim_{\varepsilon\to b^-} F(\varepsilon)-F(a) = \lim_{x\to b^-} F(x)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to a^+}\Big[F(x)\Big]_\varepsilon^b = \lim_{\varepsilon\to a^+}\big[F(b)-F(\varepsilon)\big]\\ &= F(b)-\lim_{\varepsilon\to a^+} F(\varepsilon) = F(b)-\lim_{x\to a^+} F(x) = \Big[F(x)\Big]_a^b.\end{aligned}$$

Poznámka 1.2.20.
Pre nevlastné integrály budeme používať označenie použité v predchádzajúcich vzťahoch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a),$$

pričom zápisy $F(a)$, resp. $F(b)$ v singulárnych bodoch predstavujú príslušné limity. Napríklad nasledujúce zápisy sú ekvivalentné a predstavujú rozdiel nevlastných limít

$$\Big[\ln x\Big]_0^\infty = \ln\infty-\ln 0^+ = \lim_{x\to\infty}\ln x-\lim_{x\to 0^+}\ln x = \infty-(-\infty)=\infty.$$

Nech $\langle a;b\rangle$, kde $a,b\in R$, $a<b$, je ohraničený interval. Predpokladajme, že funkcia f je definovaná a ohraničená na $\langle a;b\rangle$ okrem jediného vnútorného bodu $c\in(a;b)$, ktorý je singulárnym vplyvom funkcie. Uvažujme nevlastný integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.12)$$

Nevlastný integrál funkcie f na $\langle a;b\rangle$ vľavo konverguje práve vtedy, ak konvergujú oba integrály f na $\langle a;c)$ a na $(c;b\rangle$ vpravo, pričom jeden z nich môže byť vlastný.

Ak aspoň jeden z integrálov vpravo diverguje, potom integrál vľavo tiež diverguje. Ak aspoň jeden z nich neexistuje, potom aj integrál na ľavej strane neexistuje.

Ak integrály na pravej strane existujú, ale nekonvergujú, potom ich súčet nemusí mať zmysel a integrál na ľavej strane nemusí existovať (príklad 1.2.19). V tomto prípade má zmysel spojiť nevlastné integrály na pravej strane do jednej limity a definovať tzv. Cauchyho hlavnú hodnotu nevlastného integrálu, v ktorej sa môžu neohraničené časti integrálov na pravej strane eliminovať.

Ak má funkcia f na ohraničenom uzavretom intervale $\langle a;b\rangle$, $a,b\in R$, $a<b$ práve jeden singulárny bod $c\in(a;b)$ vplyvom funkcie, potom hodnotu

$$v.p.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right] \qquad (1.13)$$

nazývame (**Cauchyho**) **hlavnou hodnotou** nevlastného integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ak je F primitívna funkcia k funkcii f na $(a;b)-\{c\}$, potom zo vzťahov (1.12) a (1.13) v zmysle poznámky 1.2.20 vyplýva

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[F(x)\Big]_a^c + \Big[F(x)\Big]_c^b = F(c^-)-F(a)+F(b)-F(c^+)\\ &= F(b)-F(a)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}F(c-\varepsilon)-\lim_{\varepsilon\to 0^+}F(c+\varepsilon)\\ &= F(b)-F(a)+\lim_{x\to c^-}F(x)-\lim_{x\to c^+}F(x).\end{aligned}$$

$$v.p.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[F(x)\Big]_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\big[F(c-\varepsilon)-F(a)+F(b)-F(c+\varepsilon)\big]$$
$$= F(b)-F(a)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\big[F(c-\varepsilon)-F(c+\varepsilon)\big].$$

Situácia je analogická, ak má funkcia f na ohraničenom otvorenom intervale $(a;b)$, $a,b\in R$, $a<b$ práve dva singulárne body vplyvom funkcie v krajných bodoch intervalu a,b, resp. ak má f na intervale $(-\infty;\infty)$ práve dva singulárne body $\pm\infty$.

Nech $(a;b)$, kde $a,b\in R$, $a<b$, je ohraničený interval. Predpokladajme, že funkcia f je definovaná na $(a;b)$ a má práve dva singulárne body a,b (t. j. krajné body intervalu) vplyvom funkcie. Potom pre ľubovoľné[60] $d\in(a;b)$ platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^d f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_d^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.14)$$

Integrály na pravej strane majú jediné singulárne body a, b na hraniciach intervalov. Integrál na ľavej strane konverguje práve vtedy, ak konvergujú integrály vpravo. Ak aspoň jeden z nich diverguje, potom aj integrál na ľavej strane diverguje. Hodnotu

$$v.p.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{a+\varepsilon}^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.15)$$

nazývame (**Cauchyho**) **hlavnou hodnotou** daného nevlastného integrálu.

Ak je F primitívna funkcia k funkcii f na $(a;b)$, bod $d\in(a;b)$ je ľubovoľný, potom zo vzťahov (1.14) a (1.15) v zmysle poznámky 1.2.20 vyplýva

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^d + \Big[F(x)\Big]_d^b = F(d)-F(a)+F(b)-F(d) = F(b)-F(a)$$
$$= \Big[F(x)\Big]_a^b = \lim_{\varepsilon\to 0^+}F(b-\varepsilon) - \lim_{\varepsilon\to 0^+}F(a+\varepsilon) = \lim_{x\to b^-}F(x) - \lim_{x\to a^-}F(x).$$
$$v.p.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[F(x)\Big]_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\big[F(b-\varepsilon)-F(a+\varepsilon)\big].$$

Ak má funkcia $f(x)$, $x\in(-\infty;\infty)$ práve dva singulárne body $\pm\infty$ vplyvom hranice, potom pre ľubovoľné[60] $d\in R$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\varepsilon}^d f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_d^{\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (1.16)$$

Integrály na pravej strane majú jediné singulárne body $\pm\infty$. Integrál na ľavej strane konverguje práve vtedy, ak konvergujú integrály vpravo. Ak aspoň jeden z nich diverguje, potom aj integrál na ľavej strane diverguje. Hodnotu

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\int_{-\varepsilon}^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^{\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.17)$$

nazývame (**Cauchyho**) **hlavnou hodnotou** daného nevlastného integrálu.

Ak je F primitívna funkcia k funkcii f na $(-\infty;\infty)$, bod $d\in R$ je ľubovoľný, potom zo vzťahov (1.16) a (1.17) v zmysle poznámky 1.2.20 vyplýva

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^d + \Big[F(x)\Big]_d^{\infty} = F(d)-F(-\infty)+F(\infty)-F(d)$$
$$= F(\infty)-F(-\infty) = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}F(x) - \lim_{x\to\infty}F(-x).$$

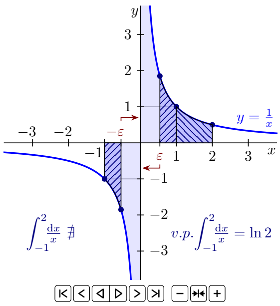
[60] Vzhľadom na aditívnosť, voľba bodu $d\in(a;b)$ nemá vplyv na hodnotu integrálu (poznámka 1.2.18).

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty}\Big[F(x)\Big]_{\varepsilon}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to\infty}\big[F(\varepsilon)-F(-\varepsilon)\big] = \lim_{x\to\infty}\big[F(x)-F(-x)\big].$$

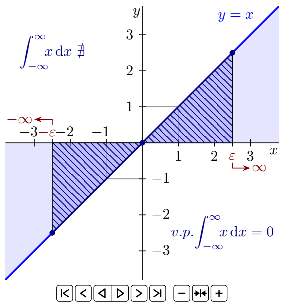
Cauchyho hlavná hodnota integrálu môže existovať aj v prípade, keď daný nevlastný integrál neexistuje (príklad 1.2.19). Priamo z definície a z vlastností limít (ma1: veta 3.2.9) vyplýva, že ak existuje niektorý z nevlastných integrálov (1.12), (1.14), resp. (1.16), potom existujú aj ich hlavné hodnoty (1.13), (1.15), resp. (1.17) a rovnajú sa pôvodným nevlastným integrálom. Takže platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.2.35.
Existuje nevlastný integrál[61] (1.12), (1.14), resp. (1.16) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\Longrightarrow$ Existuje jeho hlavná hodnota (1.13), (1.15), resp. (1.17) a platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = v.p.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Obr. 1.2.34:
Príklad 1.2.19



Obr. 1.2.35:
Príklad 1.2.20

Príklad 1.2.19.
Pre nasledujúci integrál a jeho hlavnú hodnotu platí:

$$\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\ln x\Big]_{\varepsilon}^{2}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\big[\ln|-\varepsilon| - \ln|-1|\big] + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\big[\ln 2 - \ln\varepsilon\big] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 2 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\varepsilon$$
$$= -\infty - 0 + \ln 2 - (-\infty) = -\infty + \infty, \text{ t. j. integrál neexistuje.}$$

Stručne to môžeme zapísať

$$\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{0} + \Big[\ln x\Big]_{0}^{2} = \ln|0| - \ln 1 + \ln 2 - \ln 0^+$$
$$= -\infty - 0 + \ln 2 - (-\infty) = -\infty + \infty.$$

Bod 0 je singulárny vplyvom funkcie. Graficky predstavuje *v.p.* integrálu plochy dvoch krivočiarych lichobežníkov ohraničených intervalmi $\langle -1;\varepsilon)$ a $\langle \varepsilon; 2)$, ktorých súčet je konštantný a rovný $\ln 2$. Neohraničené časti na $\langle -\varepsilon; 0)$ a $(0;\varepsilon\rangle$ sa vynulujú (obr. 1.2.34).

$$v.p.\int_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{-\varepsilon} + \Big[\ln x\Big]_{\varepsilon}^{2}\right]$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\big[\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 2 - \ln\varepsilon\big] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\big[\ln 2 - \ln 1\big] = \ln 2. \ \blacksquare$$

[61] Pri integráloch (1.12), (1.14) platí $a, b \in R$ a pri integrále (1.16) platí $a=-\infty$, $b=\infty$.

Príklad 1.2.20.
V nasledujúcom integráli sú body $\pm\infty$ singulárne vplyvom hranice. Graficky predstavuje *v.p.* integrálu plochu krivočiareho lichobežníka s nulovou veľkosťou na $\langle -\varepsilon; \varepsilon\rangle$. Rovnako veľké, ale opačne orientované plochy na $\langle -\varepsilon; 0\rangle$ a $\langle 0; \varepsilon\rangle$ sa eliminujú (obr. 1.2.35).

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{x^2}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} = \tfrac{\infty^2}{2} - \tfrac{(-\infty)^2}{2} = \infty - \infty, \quad \text{t. j. neexistuje.}$$

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\tfrac{\varepsilon^2}{2} - \tfrac{\varepsilon^2}{2}\right] = 0. \blacksquare$$

Príklad 1.2.21.
Pre integrály funkcií $\sin x$ a $\cos x$ na celej reálnej množine R platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}(-\cos x) - \lim_{x\to-\infty}(-\cos x), \quad \text{t. j. neexistuje.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x\,\mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\sin x - \lim_{x\to-\infty}\sin x, \quad \text{t. j. neexistuje.}$$

Keďže neexistujú limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-\cos x)$, resp. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x$, neexistujú ani ich rozdiely.
Pre hlavné hodnoty predchádzajúcich integrálov (obr. 1.2.36) platí:

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sin x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c}\sin x,\, x\in(-\varepsilon;\varepsilon) \text{ je nepárna}\\ \varepsilon>0,\ \text{viď pr. 1.2.12}\end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to\infty} 0 = 0.$$

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c}\cos x,\, x\in(-\varepsilon;\varepsilon) \text{ je párna}\\ \varepsilon>0,\ \text{viď pr. 1.2.12}\end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to\infty} 2\int_{0}^{\varepsilon} \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\Big[\sin x\Big]_{0}^{\infty} = 2\lim_{x\to\infty}\sin x - \sin 0 = 2\lim_{x\to\infty}\sin x, \quad \text{t. j. neexistuje.} \blacksquare$$

Príklad 1.2.22.
Pre $a\in R$ ľubovoľné $\displaystyle\int_a^{a+\pi} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ neexistuje, ale $v.p.\displaystyle\int_a^{a+\pi} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = 0$.
Riešenie.
Funkcia $y = \operatorname{tg} x$ je nepárna a periodická s periódou π. V bodoch $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in Z$ nie je definovaná, sú v nich singulárne body vplyvom funkcie. Pri výpočte využijeme vlastnosti nepárnych funkcií (pr. 1.2.12), periodických funkcií (veta 1.2.34) a vzťahy (1.12) až (1.15). Keďže vzdialenosť susedných sinulárnych bodov je π, na intervale $(a; a+\pi)$ môžu ležať dva singulárne body na hraniciach intervalu alebo jeden singulárny bod vo vnútri intervalu.

1. Dva singulárne body $a = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $a+\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in Z$ (obr. 1.2.37 vľavo).

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln|\cos x|\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\begin{array}{c}|\cos(\pm\frac{\pi}{2})| = 0^+\\ \ln 0^+ \to -\infty\end{array}\right]$$

$$= -\infty + \infty, \quad \text{t. j. neexistuje.}$$

$$v.p.\int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+k\pi-\varepsilon} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 0 = 0.$$

2. Jeden singulárny bod $c\in(a;a+\pi)$, $c=-\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ (obr. 1.2.37 vpravo).

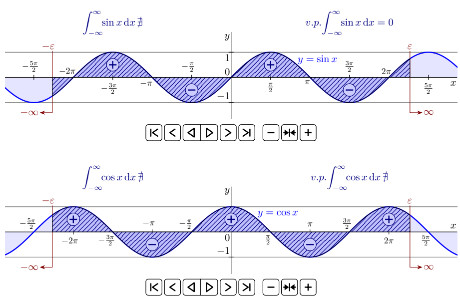
$$\int_a^{a+\pi}\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x=\int_a^{k\pi-\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x+\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{a+\pi}\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x=\Big[\ln|\cos x|\Big]_a^{k\pi-\frac{\pi}{2}}+\Big[\ln|\cos x|\Big]_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{a+\pi}$$

$$=\left[\begin{array}{c}|\cos(k\pi-\frac{\pi}{2})|=0^+\\ \ln 0^+\to-\infty\end{array}\right]=-\infty-\ln|\cos a|+\ln|\cos(a+\pi)|+\infty,\ \text{t. j. neexistuje.}$$

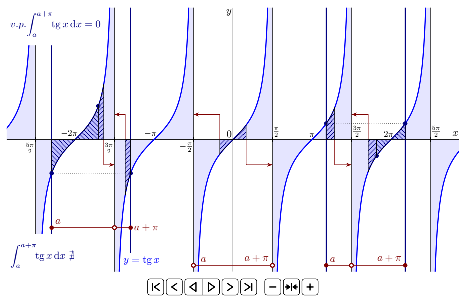
$$v.p.\int_a^{a+\pi}\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_a^{k\pi-\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x+\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{a+\pi}\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{a+\pi}^{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x+\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{a+\pi}\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x=0.\ \blacksquare$$



Obr. 1.2.36:
Príklad 1.2.21



Obr. 1.2.37:
Príklad 1.2.22

Ak má funkcia f na intervale $(a;b)$, $a,b\in R^*$ konečný počet $k\in N$ singulárnych bodov $c_1,c_2,\ldots,c_k$, $a\le c_1<c_2<\cdots<c_k\le b$, potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{c_1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c_1}^{c_2}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c_2}^{c_3}f(x)\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{c_{k-1}}^{c_k}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c_k}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrály na pravej strane sú nevlastné a majú jeden alebo dva singulárne body na hraniciach ich integrovania. Ak $a=c_1$, resp. $b=c_k$ sú singulárne body, potom

$$\int_a^{c_1}f(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad\text{resp.}\quad\int_{c_k}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje** práve vtedy, ak konvergujú všetky integrály na pravej strane. Ak aspoň jeden z integrálov na pravej strane diverguje, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **diverguje**.

Poznámka 1.2.21.
V budúcnosti nebudeme rozlišovať medzi vlastnými a nevlastnými integrálmi. V praxi to znamená, že pri vyšetrovaní integrálu najprv nájdeme všetky singulárne body integrovanej funkcie v obore integrovania, potom integrál rozdelíme na príslušné nevlastné integrály s jedným alebo dvomi singulárnymi bodmi na hraniciach integrovania, ktoré vypočítame.

Nevlastné integrály majú podobné vlastnosti ako vlastné Riemannove integrály. Uvedieme najdôležitejšie z nich (viď vety 1.2.14, 1.2.16 a 1.2.23 pre vlastné integrály).

Veta 1.2.36.
Hranice $a, b \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$, číslo $c \in R$, $c \neq 0$. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto. \iff \int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto$$
a (pokiaľ existujú) platí $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Veta 1.2.37.
Hranice $a, b \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$, integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto$. Potom platí:

a) $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto. \implies \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x \longmapsto$
a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \not\longmapsto. \implies \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x \not\longmapsto.$

Poznámka 1.2.22.
Podobné tvrdenie (viď veta 1.2.16) pre súčin funkcií fg (príklad 1.2.23) a absolútnu hodnotu $|f|$ (príklad 1.2.34) neplatí.

Príklad 1.2.23.
Ak označíme $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0; 1\rangle$, potom $(fg)(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; 1\rangle$, ale platí:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{c}\text{pr. 1.2.17}\\ \text{obr. 1.2.32}\end{array}\right] = \Big[2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2, \quad \text{t. j.} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \longmapsto .$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln x\Big]_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+ = 0 - (-\infty) = \infty, \quad \text{t. j.} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} \not\longmapsto .$$

Pre nevlastný integrál funkcie $y = \frac{1}{x}$ na $\langle -1; 1\rangle$ platí (má jediný singulárny bod 0):

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^0 + \Big[\ln|x|\Big]_0^1 = \big[\ln 0^+ - \ln 1\big] + \big[\ln 1 - \ln 0^+\big]$$
$$= \big[-\infty - 0\big] + \big[0 - (-\infty)\big] = -\infty + \infty, \quad \text{t. j. neexistuje.} \blacksquare$$

Príklad 1.2.24.
a) Integrand má dva singulárne body ± 1 na hraniciach intervalu integrovania $(-1; 1)$. Primitívna funkcia je v týchto bodoch definovaná. Platí:

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\arcsin x\Big]_{-1}^1 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \tfrac{\pi}{2} - (-\tfrac{\pi}{2}) = \pi.$$

b) Funkcia $f(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ má na $\langle -\pi; \pi\rangle$ jeden singulárny bod 0. Platí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\text{pr. 1.2.5 e)}\Big] = \Big[x\sin\tfrac{1}{x}\Big]_{-\pi}^0 + \Big[x\sin\tfrac{1}{x}\Big]_0^{\pi}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} x\sin\tfrac{1}{x} - (-\pi)\sin(-\tfrac{1}{\pi}) + \pi\sin\tfrac{1}{\pi} - \lim_{x\to 0^+} x\sin\tfrac{1}{x}$$
$$= \Big[\, x \neq 0,\ -1 \leq \sin\tfrac{1}{x} \leq 1,\ -|x| \leq x\sin\tfrac{1}{x} \leq |x|.\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0} x\sin\tfrac{1}{x} = 0.\,\Big]$$
$$= 0 - \pi\sin\tfrac{1}{\pi} + \pi\sin\tfrac{1}{\pi} - 0 = 0. \blacksquare$$

Z predchádzajúcich úvah a z poznámky 1.2.18 vyplýva nasledujúca veta.

Veta 1.2.38 (Aditívnosť nevlastného integrálu).
Hranice $a, b \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$, číslo $c \in (a; b)$. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto. \iff \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto, \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto$$

a (pokiaľ existujú) platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Metóda per partes (veta 1.2.31) a substitučná metóda (veta 1.2.32, resp. veta 1.2.33) sa môžu účinne využiť aj pri výpočte nevlastných integrálov. Pri ich použití sa môže niekedy nevlastný integrál previesť na vlastný. Formulujeme ich pre nevlastné integrály, v ktorých má integrovaná funkcia singulárne body na hraniciach intervalu integrovania. V zmysle poznámky 1.2.21 ich môžeme bez problémov rozšíriť na všetky nevlastné integrály. Nesmieme zabúdať, že výrazy (poznámka 1.2.20) predstavujú v singulárnych bodoch limity.

Veta 1.2.39 (Metóda per partes pre nevlastné integrály).
Funkcie u, v, u', v' sú spojité na $(a; b)$, singulárne body sú iba v bode $a \in R^*$, resp. $b \in R^*$.

$\Longrightarrow$ Pokiaľ integrály existujú, platí $\displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$

Veta 1.2.40 (Metóda substitúcie pre nevlastné integrály).
Funkcia $y = f(x)$ je spojitá na intervale I s hranicami a, b. J je interval s hranicami α, β.
Funkcia $x = \varphi(t)\colon J \to R$, pričom φ' je spojitá na J, $\varphi(J) \subset I$, $\varphi'(t) \neq 0$ pre[62] $t \in J$.
Ďalej platí[63] $\lim\limits_{t\to\alpha^+} \varphi(t) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta^-} \varphi(t) = b$ pre $\alpha < \beta$, t. j. pre $\varphi'(t) > 0$ (φ rastúcu),
resp. $\lim\limits_{t\to\beta^+} \varphi(t) = b$, $\lim\limits_{t\to\alpha^-} \varphi(t) = a$ pre $\beta < \alpha$, t. j. pre $\varphi'(t) < 0$ (φ klesajúcu).

$\Longrightarrow$ Pokiaľ integrály existujú, platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

Príklad 1.2.25.
Dokážte, že pre všetky $n \in N \cup \{0\}$ platí $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = n!.$
Riešenie.
Pre $n = 0$ platí:

$$I_0 = \int_0^\infty x^0\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^\infty = -\mathrm{e}^{-\infty} + \mathrm{e}^0 = 1 - \tfrac{1}{\mathrm{e}^\infty} = 1 + 0 = 1 = 0!.$$

Pre $n \in N$ platí:

$$I_n = \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^{-x} & v = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right] = \Big[-x^n\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \text{ma1: veta 3.2.12} \\ \lim\limits_{x\to\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0 \end{array}\right]$$

$$= -0 + 0^n \cdot \mathrm{e}^0 + nI_{n-1} = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n!\,I_0 = n!. \ \blacksquare$$

[62]Funkcia φ je rýdzo monotónna na intervale J, t. j. rastúca alebo klesajúca (lema 1.1.7).
[63]Pokiaľ je φ definovaná v bode α alebo β, platí $\varphi(\alpha) = a$, resp. $\varphi(\alpha) = b$ alebo $\varphi(\beta) = b$, resp. $\varphi(\beta) = a$.

Príklad 1.2.26.

a) $$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln x & u'=\frac{1}{x} \\ v'=1 & v=x \end{array}\right] = \Big[x\ln x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x = 1\cdot\ln 1 - \lim_{x\to 0^+} x\ln x - \Big[x\Big]_0^1$$

$$= \Big[\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \Big[\text{L'H}\,\tfrac{\infty}{\infty}\Big] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0\Big] = 1\cdot 0 - 0 - (1-0) = -1.$$

b) $$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \left[\begin{array}{l|r|l|l|l|l} \text{Ugs: } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x=0 & x\to\frac{\pi}{2} & x\to\pi & x\in\langle 0;\frac{\pi}{2}),\ t\in\langle 0;1) \\ & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} & t=0 & t\to 1 & t\to\infty & x\in(\frac{\pi}{2};\pi),\ t\in(1;\infty) \end{array}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} + \int_1^{\infty} \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} = -\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} - \int_1^{\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = -\Big[\frac{2}{2}\ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big|\Big]_0^1 - \Big[\frac{2}{2}\ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big|\Big]_1^{\infty}$$

$$= -\Big[\lim_{t\to 1^-} \ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big| - \ln\frac{1-0}{1+0}\Big] - \Big[\lim_{t\to\infty} \ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big| - \lim_{t\to 1^+} \ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big|\Big]$$

$$= -\ln 0^+ + \ln 1 - \ln 1 + \ln 0^+ = \infty - 0 + 0 - \infty, \text{ t. j. neexistuje.}$$

c) $$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \left[\begin{array}{r|l|l|l|l} \text{Subst. } x=\operatorname{tg} t & x=\operatorname{tg} t \text{ je spojitá a rastúca,} \quad (\operatorname{tg} t)' = \frac{1}{\cos^2 t} > 0 & x=0 & x\to\infty & x\in(0;\infty) \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} & 1+x^2 = 1+\operatorname{tg}^2 t = 1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} & t=0 & t\to\frac{\pi}{2}^- & t\in(0;\frac{\pi}{2}) \end{array}\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^4 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin 0}{4} - \frac{0}{2} - \frac{0}{4} = \frac{\pi}{4}. \ \blacksquare$$

Výpočet nevlastných integrálov býva častokrát problematický, pretože okrem samotného integrálu musíme vypočítať aj limitu. Nevlastné integrály vyskytujúce sa v praxi (hlavne v technickej) bývajú zložité a málokedy sa dajú vypočítať presne. Vtedy ich obyčajne nahrádzame vlastnými integrálmi, ktorých hranice integrovania sa „veľmi nelíšia" od pôvodných. To znamená, že ich vzájomná vzdialenosť je dostatočne malá, aby chyba výpočtu bola prijateľná. Ak nedokážeme tieto vlastné integrály vypočítať presne, potom použijeme niektorú z numerických metód.

Aby sme nepočítali zbytočne hodnotu integrálu, je dobré vedieť, či daný nevlastný integrál konverguje alebo diverguje. Mnohokrát nepotrebujeme poznať súčet nevlastného integrálu, ale nám postačí iba informácia o jeho konvergencii.

Uvedieme niekoľko kritérií, pomocou ktorých vyšetríme konvergenciu nevlastných integrálov. Obmedzíme sa na prípady, keď sú singulárne body na hraniciach integrovania. Ak je singulárnych bodov viac, musíme kritéria aplikovať postupne na každý čiastkový integrál samostatne.

Veta 1.2.41 (Porovnávacie kritérium).
Pre všetky $x\in(a;b)$, $a,b\in R^*$ platí $0\le f(x)\le g(x)$. Funkcie f a g majú singulárne body iba a alebo iba b. Potom, pokiaľ integrály existujú, platí:

$$\text{a) } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \infty. \implies \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty. \qquad \text{b) } \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto. \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto.$$

Dôkaz.
Tvrdenie dokážeme iba pre singulárny bod a, pre singulárny bod b je dôkaz analogický. Nech a je singulárny bod funkcií f a g vplyvom hranice alebo funkcie.
a) Z monotónnosti integrálu (veta 1.2.19) a z vlastností limít vyplýva

$$\infty = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to a^+} \int_{\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \lim_{\varepsilon\to a^+} \int_{\varepsilon}^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{t. j. } \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

b) Ak integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ existujú, potom konvergujú alebo divergujú do ∞. Tvrdenie dokážeme sporom. Nech $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto$ a súčasne $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$. Potom platí

$$\infty = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to a^+} \int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \lim_{\varepsilon\to a^+} \int_\varepsilon^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{t. j.} \ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

To je spor, ktorý dokazuje platnosť tvrdenia b). ■

Poznámka 1.2.23.
Je zrejmé, že ak existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$, *potom existuje aj* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.
Ak existuje $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto$, *potom integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *nemusí existovať (príklad 1.2.27).*

Existenciu nevlastného integrálu funkcie $f(x) \geq 0$, $x \in (a;b)$ na intervale $(a;b)$ nám zaručí napríklad jej spojitosť alebo monotónnosť. Nech $f(x) \geq 0$ pre $x \in (a;b)$, $a,b \in R^*$ a nech $\varepsilon \in (a;b)$, potom platí:

1. Ak je singulárny bod b, $f \in R_{(a;\varepsilon\rangle}$, funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ je spojitá, nezáporná, neklesajúca (dôsledok 1.2.25.a) pre $x \in (a;\varepsilon\rangle$.
Pre rastúce $\varepsilon \to b^-$ sa $G_h(\varepsilon) \geq 0$ zväčšuje a existuje $\lim\limits_{\varepsilon\to b^-} G_h(\varepsilon) = \int_a^\varepsilon f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.[64]

2. Ak je singulárny bod a, $f \in R_{\langle\varepsilon;b)}$, funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ je spojitá, nezáporná, nerastúca (dôsledok 1.2.25.a) pre $x \in \langle\varepsilon;b)$.
Pre klesajúce $\varepsilon \to a^+$ sa $G_d(\varepsilon) \geq 0$ zväčšuje a existuje $\lim\limits_{\varepsilon\to a^+} G_d(\varepsilon) = \int_\varepsilon^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.[64]

Dôsledok 1.2.41.a.
Pre všetky $x \in (a;b)$, $a,b \in R^*$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Funkcie f, g a h majú singulárne body iba a alebo iba b. Potom platí:

$$\text{Existujú } \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto,\ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto. \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \text{ (pokiaľ existuje).}$$

Dôkaz.
Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $x \in (a;b)$ platí $0 \leq f(x) - h(x) \leq g(x) - h(x)$.
Keďže existujú a konvergujú integrály funkcií g a h, existujú aj integrály ich súčtu a rozdielu (veta 1.2.37, veta 1.2.41) a platí:

$$\int_a^b \big[g(x) - h(x)\big]\,\mathrm{d}x \longmapsto . \implies \int_a^b \big[f(x) - h(x)\big]\,\mathrm{d}x \longmapsto \ \text{(pokiaľ existuje).}$$
$$\implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big[f(x) - h(x) + h(x)\big]\,\mathrm{d}x \longmapsto \ \text{(pokiaľ existuje).} \ ■$$

Príklad 1.2.27.
Nech $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0;1)$ a $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in (0;1) \cap Q, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{pre } x \in (0;1) \cap I. \end{cases}$

$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2$ (pr. 1.2.17) a pre všetky $x \in (0;1)$ platí $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

[64] Limita je vlastná nezáporná alebo nevlastná $+\infty$.

Integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje, pretože pre každé $\varepsilon\in(0;1)$ nexistuje[65] ani $\int_\varepsilon^1 f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\underline{\int_\varepsilon^1} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_\varepsilon^1} 0\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \overline{\int_\varepsilon^1} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_\varepsilon^1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1 = 2-2\sqrt{\varepsilon} \neq 0. \blacksquare$$

Príklad 1.2.28.

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \longmapsto.$ b) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \longmapsto.$ c) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x = \infty.$

Riešenie.

Vo všetkých troch častiach sú splnené predpoklady vety 1.2.41.

a) Funkcia $y = \frac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}$, $x\in(0;\infty)$ je spojitá, má jeden singulárny bod ∞.

Pre všetky $x\in(0;\infty)$ platí $0 \leq \frac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x} \leq \frac{1}{\mathrm{e}^x}$. Potom I_1 existuje a pre jeho odhad platí:

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x} = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^\infty = -\mathrm{e}^{-\infty}+\mathrm{e}^0 = -0+1 = 1.$$

b) Funkcia $y = \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}$, $x\in(0;1)$ je spojitá, má jeden singulárny bod 0.

Pre všetky $x\in(0;1)$ platí $0 \leq \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Potom I_2 existuje a platí (pr. 1.2.17):

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2.$$

c) Funkcia $y = \cos x$, $x\in(0;1)$ je spojitá, klesajúca, pre $x\in(0;1)$ platí[66] $\cos x \geq \cos 1 > \frac{1}{2}$. Funkcia $y = \operatorname{cotg} x$, $x\in(0;1)$ je spojitá a má jeden singulárny bod 0. Pre $x\in(0;1)$ platí $\sin x < x$ (ma1: pr. 4.3.5), t. j. aj $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} > \frac{1}{2\sin x} > \frac{1}{2x} > 0$. Potom platí:

$$\int_0^1 \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x} = \Big[\frac{\ln x}{2}\Big]_0^1 = \frac{\ln 1}{2} - \frac{\ln 0^+}{2} = \frac{0}{2} - \frac{-\infty}{2} = 0+\infty = \infty, \quad \text{t. j. } I_3 = \infty. \blacksquare$$

Absolútnu a relatívnu konvergenciu pre nevlastné integrály definujeme podobne ako pri číselných radoch.

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje absolútne**, označenie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathrm{a}}{\longmapsto}$,

ak $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \longmapsto$ (konverguje).

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje relatívne** (**neabsolútne**), označenie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathrm{r}}{\longmapsto}$,

ak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto$ a súčasne $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \not\longmapsto$ (diverguje), t. j. $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \infty$.

Poznámka 1.2.24.

Nevlastný integrál môže konvergovať absolútne a pritom nemusí existovať (príklad 1.2.29). Na druhej strane, ak konverguje absolútne a existuje, potom konverguje (veta 1.2.42).

[65] V každom reálnom intervale leží aspoň jedno racionálne a jedno iracionáne číslo. Pre každé $D\in\mathfrak{D}_{\langle\varepsilon;1\rangle}$ má f na každom deliacom intervale d_i infimum $m_i = 0$ a suprémum M_i zhodné so suprémom g.

[66] $\cos 1 \approx 0{,}540\,302$, t. j. $\cos 1 > 0{,}5 = \frac{1}{2} > 0$.

Veta 1.2.42.
Nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathrm{a}}{\longmapsto}$.

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \text{ (konverguje) a platí nerovnosť } \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz.
Tvrdenie vety vyplýva z nerovnosti $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ a z dôsledku 1.2.41.a. ■

Príklad 1.2.29.
Uvažujme funkciu $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ pre } x\in(0;1)\cap Q, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ pre } x\in(0;1)\cap I. \end{cases}$

$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2$ (pr. 1.2.17), pre všetky $x\in(0;1)$ platí $|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x}}$, t. j. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathrm{a}}{\longmapsto}$.

Nevlastný integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje, pretože platí:[67]

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\underline{\int_0^1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = -2, \quad \overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_0^1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2. \ ■$$

Veta 1.2.43 (Limitné porovnávacie kritérium).
Funkcie $f, g\colon (a;b) \to R$, $a, b\in R^*$ a pre všetky $x\in(a;b)$ platí $g(x) > 0$, resp. $g(x) < 0$.
Funkcie f a g majú jediný[68] singulárny bod a, resp. b a platí práve jedna z podmienok:

a) Pre singulárny bod a existuje nenulová vlastná $L_a = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, t. j. $0 \neq L_a \neq \pm\infty$.

b) Pre singulárny bod b existuje nenulová vlastná $L_b = \lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, t. j. $0 \neq L_b \neq \pm\infty$.

Potom (pokiaľ integrály existujú) platí:[69] $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto. \iff \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto.$

Dôkaz.
Vetu dokážeme pre prípad, že platí podmienka a), dôkaz pre podmienku b) je analogický.
Nech a je jediný singulárny bod funkcií f a g. Označme $L_a = q$, $q\in R$, $q\neq 0$, potom existuje vlastná nenulová limita s rovnakým znamienkom $L^a = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{q}$, $\frac{1}{q}\in R$, $\frac{1}{q}\neq 0$.
Potom existuje[70] $c\in(a;b)$ také, že na intervale $(a;c\rangle$ sú funkcie $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ ohraničené a záporné (pre $q < 0$), resp. kladné (pre $q > 0$).[71] Keďže $L_a = q \neq 0$, musí pre všetky $x\in(a;c\rangle$ platiť $f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$. Navyše existuje[72] $p > 0$ tak, že pre všetky $x\in(a;c\rangle$ platí

$$-p \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq p, \quad -p \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq p.$$

$NP_{\Rightarrow}$: Z predchádzajúceho vyplýva, že pre všetky $x\in(a;c\rangle$ platí $-p \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq p$, t. j. platí

$$-pf(x) \leq g(x) \leq pf(x) \text{ pre } f(x) > 0, \quad \text{resp. } pf(x) \leq g(x) \leq -pf(x) \text{ pre } f(x) < 0.$$

---

[67] V každom intervale leží aspoň jedno racionálne a jedno iracionáne číslo. Pre každé $D\in\mathfrak{D}_{\langle\varepsilon;1\rangle}$ má f na každom deliacom intervale infimum zhodné s infimom $-1/\sqrt{x}$ a suprémum zhodné so suprémom $1/\sqrt{x}$.
[68] To znamená, že v druhom hraničnom bode b, resp. a sú funkcie f a g definované.
[69] Ekvivalencia znamená, že oba integrály súčasne konvergujú alebo súčasne divergujú do $\pm\infty$.
[70] Pre f/g existuje $c_1\in(a;b)$ a pre g/f existuje $c_2\in(a;b)$. Stačí položiť $c = \min\{c_1, c_2\}$.
[71] Ohraničenosť vyplýva z ma1: vety 3.2.2 a kladnosť, resp. zápornosť z ma1: dôsledku 3.2.7.a).
[72] Pre f/g existuje $p_1 > 0$ a pre g/f existuje $p_2 > 0$. Stačí položiť $p = \min\{p_1, p_2\}$.

Potom (pokiaľ integrály existujú) na základe viet 1.2.36, 1.2.38, 1.2.41 platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto . \implies \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto . \implies \pm\int_a^c pf(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto . \implies \int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto .$$

Keďže integrál $\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x$ je vlastný, platí $\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto.$

PP$_{\Leftarrow}$: Z predchádzajúceho vyplýva, že pre všetky $x\in(a;c\rangle$ platí $-p \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq p$, t. j. platí $-pg(x) \leq f(x) \leq pg(x)$ pre $g(x) > 0$, resp. $pg(x) \leq f(x) \leq -pg(x)$ pre $g(x) < 0$.
Potom analogicky ako v predchádzajúcej časti (pokiaľ integrály existujú) platí

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto . \implies \int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto . \implies \pm\int_a^c pg(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto . \implies \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto .$$

Keďže integrál $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je vlastný, platí $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto.$ ∎

Príklad 1.2.30.

a) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{cotg}(\sqrt{x^2+1}-1)\,\mathrm{d}x = \infty.$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$

Riešenie.
V oboch častiach sú splnené predpoklady vety 1.2.43.
a) Označme $f(x) = \operatorname{cotg}(\sqrt{x^2+1}-1)$, $x\in(0;1\rangle$, $g(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, $x\in(0;1\rangle$.
Funkcie f, g majú jediný singulárny bod 0, sú spojité na $(0;1\rangle$, t. j. integrály existujú.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{cotg}(\sqrt{x^2+1}-1)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2\cos(\sqrt{x^2+1}-1)}{\sin(\sqrt{x^2+1}-1)} = \lim_{x\to0^+}\frac{[(x^2+1)-1]\cos(\sqrt{x^2+1}-1)}{\sin(\sqrt{x^2+1}-1)}$$

$$= \left[\begin{array}{l|l}\text{Subst.}\quad t=\sqrt{x^2+1}-1,\quad t+2=\sqrt{x^2+1}+1 & x\to0^+\\ (x^2+1)-1=(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)=t(t+2) & t\to0^+\end{array}\right] = \lim_{t\to0^+}\frac{t}{\sin t}(t+2)\cos t = 1\cdot2\cdot1 = 2.$$

Keďže $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{0^+}^1 = -1+\frac{1}{0^+} = -1+\infty = \infty$, potom $\displaystyle\int_0^1 f(x) = \infty.$

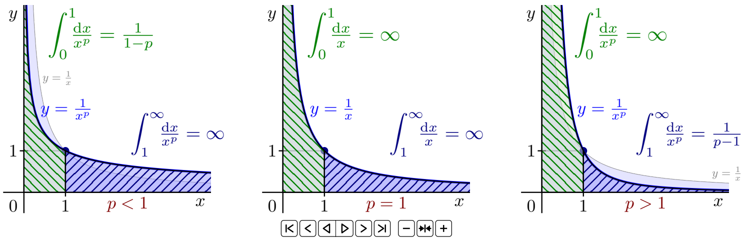
b) Označme $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, $x\in\langle1;\infty)$, $g(x) = \frac{1}{x} > 0$, $x\in\langle1;\infty)$.
Funkcie f, g majú jediný singulárny bod ∞, sú spojité na $\langle1;\infty)$, t. j. integrály existujú.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.\\ \displaystyle\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^\infty = \ln\infty-\ln1 = \infty.\end{array}\right\} \implies \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \infty. \ \blacksquare$$

Príklad 1.2.31.
Pre $p > 0$ vypočítajte integrály $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$.
Riešenie.
Pre $p < 1$, t. j. $1-p > 0$ (obr. 1.2.38 vľavo) platí:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \int x^{-p}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1-p}}{1-p}+c,\ \ x\in(0;\infty), c\in R.$$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_0^1 = \frac{1}{1-p}-0 = \frac{1}{1-p},\quad \int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^\infty = \infty-\frac{1}{1-p} = \infty.$$



Obr. 1.2.38:
Príklad 1.2.31

Pre $p = 1$ (obr. 1.2.38 v strede) platí:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+ = \infty, \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^\infty = \ln\infty - \ln 1 = \infty.$$

Pre $p > 1$, t. j. $p - 1 > 0$ (obr. 1.2.38 vpravo) platí:

$$\int \frac{dx}{x^p} = \int x^{-p}\,dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} + c = \frac{-1}{(p-1)x^{p-1}} + c, \ \ x\in(0;\infty), c\in R.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \Big[\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}}\Big]_0^1 = \frac{-1}{p-1} - \frac{-1}{0^+} = \frac{-1}{p-1} - (-\infty) = \infty,$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \Big[\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}}\Big]_1^\infty = \frac{-1}{\infty} - \frac{-1}{p-1} = 0 + \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p-1}. \ \blacksquare$$

1.2.6 Vzťah medzi nevlastnými integrálmi a číselnými radmi

Nech $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je reálna číselná postupnosť s členmi $a_n\in R$, $n\in N$. Uvažujme po častiach konštantnú funkciu $f(x)$, $x\in\langle 1;\infty)$ definovanú predpisom

$$f(x) = a_n \text{ pre } x\in\langle n; n+1),\ \ n\in N.$$

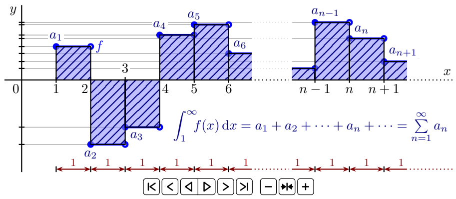
Určitý integrál funkcie f na intervale $\langle 1;\infty)$ predstavuje plochu (obr. 1.2.39), ktorá sa rovná súčtu obsahov obdĺžnikov so základňami $(n+1) - n = 1$ a výškami a_n, t. j. platí:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = a_1(2-1) + a_2(3-2) + \cdots + a_n(n+1-1) + \cdots = \sum_{n=1}^\infty a_n.$$

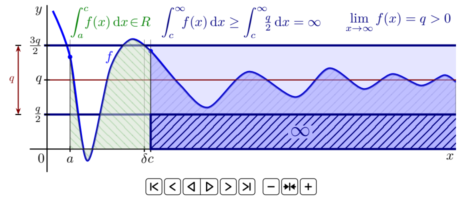
Z nutnej podmienky konvergencie pre číselné rady (ma1: veta 2.4.1) vyplýva

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \longmapsto . \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Pre nevlastné integrály vplyvom hranice platí analogická nutná podmienka konvergencie. V niektorých prípadoch dokážeme vyšetriť konvergenciu číselného radu pomocou vhodne zvoleného nevlastného integrálu alebo naopak vyšetríme konvergenciu radu pomocou nevlastného integrálu (integrálne kritérium 1.2.45).



Obr. 1.2.39: Vzťah medzi číselnými radmi a nevlastnými integrálmi



Obr. 1.2.40: Neplatí nutná podmienka konvergencie (poznámka 1.2.25)

Veta 1.2.44 (Nutná podmienka konvergencie nevlastného integrálu).

a) Hranica $a \in R$, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx \longmapsto. \implies \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (pokiaľ existuje).

b) Hranica $b \in R$, $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \longmapsto. \implies \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (pokiaľ existuje).

Dôkaz.
Dokážeme časť a), časť b) sa dokáže analogicky. Dokážeme sporom.
Bez straty na všeobecnosti môžeme predpokladať, že ∞ je jediný singulárny bod. Keby existovali iné singulárne body $c_1, c_2, \ldots, c_k$, $k \in N$, zvolíme $s \in R$, $s > \max\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$.
Keďže nevlastný integrál od a po ∞ konverguje, na základe aditívnosti dostávame

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^s f(x)\,dx + \int_s^\infty f(x)\,dx \longmapsto, \quad \text{t. j.} \int_s^\infty f(x)\,dx \longmapsto .$$

Nech $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx \longmapsto$ a nech existuje $\lim_{x\to\infty} f(x) = q \neq 0$, $q \in R$ (negácia tvrdenia vety).
Potom (ma1: veta 3.2.1 alternatívna definícia limity pomocou okolí)[73] ku $\varepsilon = \left|\frac{q}{2}\right|$ existuje δ také, že pre všetky $x \in (\delta; \infty)$ platí $|f(x) - q| < \varepsilon$. Stačí zvoliť $c > \max\{a, \delta\}$ a pre všetky $x \in \langle c; \infty)$ bude platiť $|f(x) - q| < \varepsilon = \left|\frac{q}{2}\right|$. Sú dve možnosti:

1. Ak $q > 0$, potom $|f(x) - q| < \frac{q}{2}$ a platí (obr. 1.2.40)

$$-\tfrac{q}{2} < f(x) - q < \tfrac{q}{2}. \implies 0 < \tfrac{q}{2} = q - \tfrac{q}{2} < f(x) < q + \tfrac{q}{2} = \tfrac{3q}{2}.$$

Keďže integrál $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx \in R$ je vlastný, dostaneme na základe vety 1.2.41 spor:

$$\int_c^\infty f(x)\,dx \geq \int_c^\infty \tfrac{q}{2}\,dx = \left[\tfrac{qx}{2}\right]_c^\infty = \tfrac{q\infty}{2} - \tfrac{qc}{2} = \infty, \quad \text{t. j.} \int_c^\infty f(x)\,dx = \infty.$$

$$\implies \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx = \infty.$$

2. Ak $q < 0$, potom $|f(x) - q| < -\frac{q}{2}$, t. j. $\frac{q}{2} < f(x) - q < -\frac{q}{2}$.
Potom $\frac{3q}{2} = q + \frac{q}{2} < f(x) < q - \frac{q}{2} = \frac{q}{2} < 0$ a podobne ako v 1. časti dostaneme spor:

$$\int_c^\infty f(x)\,dx \leq \int_c^\infty \tfrac{q}{2}\,dx = \left[\tfrac{qx}{2}\right]_c^\infty = \tfrac{q\infty}{2} - \tfrac{qc}{2} = -\infty. \implies \int_a^\infty f(x)\,dx = -\infty. \blacksquare$$

[73] Pre každé okolie $O_\varepsilon(q)$ existuje okolie $O_\delta(\infty)$ také, že pre všetky $x \in O_\delta(\infty)$ platí $f(x) \in O_\varepsilon(q)$.

Poznámka 1.2.25.
Ak existuje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ *(nenulová), potom* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje (pr. 1.2.32, obr. 1.2.40).*
Nevlastný integrál $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *môže konvergovať a* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *nemusí existovať (pr. 1.2.33).*

Príklad 1.2.32.
Vypočítajte integrál $\displaystyle\int_6^\infty \tfrac{2x^4-3x^2-x}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
Riešenie.
Funkcia $f(x) = \frac{2x^4-3x^2-x}{x^4+x^2+1}$ je spojitá na R, má jediný singulárny bod ∞ a platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \tfrac{2x^4-3x^2-x}{x^4+x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \tfrac{x^4(2-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^4(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4})} = \lim_{x\to\infty} \tfrac{2-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = \tfrac{2-0-0}{1+0+0} = 2.$$

Neplatí nutná podmienka konvergencie (poznámka 1.2.25), t. j. $\displaystyle\int_6^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \mapsto\!\!\!\!\!/\ .$
Navyše (ma1: veta 3.2.1 alternatívna definícia limity pomocou okolí)[74] ku $\varepsilon = 1$ existuje δ také, že pre všetky $x\in(\delta;\infty)$ platí $|f(x)-2| < 1$. Stačí zvoliť $c > \max\{\delta, 6\}$ a pre všetky $x\in\langle c;\infty)$ bude platiť $|f(x)-2| < 1$, t. j. $1 < f(x) < 3$. Potom (veta 1.2.41) platí

$$\int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_c^\infty \mathrm{d}x = \infty - c = \infty, \quad \text{t. j. } \int_6^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_6^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \infty. \ \blacksquare$$

Príklad 1.2.33.
Vypočítajte integrál $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, ak $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x\in N, \\ \frac{1}{x^2} & \text{pre } x\in(1;\infty)-N. \end{cases}$
Riešenie.
Funkcia f má jediný singulárny bod ∞. Zvoľme ľubovoľne $\varepsilon\in(1;\infty)$.
Funkcia f je na $\langle 1;\varepsilon\rangle$ po častiach spojitá Pre všetky $x\in\langle 1;\varepsilon\rangle$ okrem konečného počtu[75] platí $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Potom (veta 1.2.10) $f\in R_{\langle 1;\varepsilon\rangle}$ a integrál konverguje, pretože platí

$$\int_1^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\varepsilon \tfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big[-\tfrac{1}{x}\Big]_1^\varepsilon = -\tfrac{1}{\varepsilon}+1. \implies \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty}\big[1-\tfrac{1}{\varepsilon}\big] = 1.$$

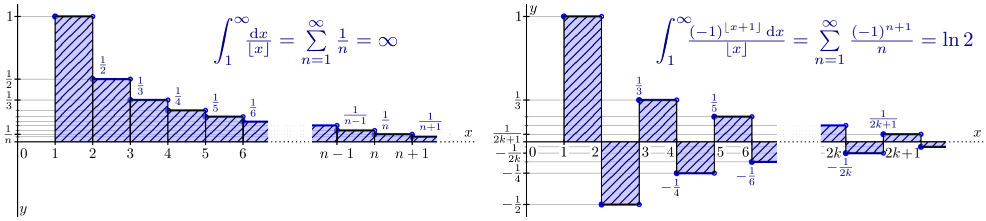
Limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje, pretože (definícia limity) pre $n\in N$ platí:[76]

$$\{n\}_{n=1}^\infty \to \infty,\ n\in N. \implies \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$
$$\{\tfrac{n}{2}\}_{n=1}^\infty \to \infty,\ \tfrac{n}{2}\notin N. \implies \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(\tfrac{n}{2}) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{\frac{n^2}{4}} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{4}{n^2} = 0. \ \blacksquare$$

Príklad 1.2.34.
Vypočítajte integrály: a) $\displaystyle\int_1^\infty \tfrac{\mathrm{d}x}{\lfloor x\rfloor}$, b) $\displaystyle\int_1^\infty \tfrac{(-1)^{\lfloor x+1\rfloor}\,\mathrm{d}x}{\lfloor x\rfloor}$.
Riešenie.
Pri výpočte použijeme harmonický $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$ a anharmonický rad[77] $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

---

[74] Pre každé okolie $O_\varepsilon(2)$ existuje okolie $O_\delta(\infty)$ také, že pre všetky $x\in O_\delta(\infty)$ platí $f(x)\in O_\varepsilon(2)$.
[75] Rovnosť neplatí v bodoch $x\in N\cap\langle 1;\varepsilon\rangle$, ktorých je na každom intervale $\langle 1;\varepsilon\rangle$ konečný počet. V týchto bodoch má f odstrániteľnú nespojitosť.
[76] Pre dve rôzne postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty \longrightarrow \infty$ majú limity postupností $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ rôzne limity.
[77] Viď ma1: príklad 2.4.5 (harmonický rad), resp. ma1: príklad 2.4.21 (anharmonický rad).



Obr. 1.2.41: Integrály z príkladu 1.2.34

a) Funkcia $f(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$, $x \in \langle 1; \infty)$ je po častiach spojitá (obr. 1.2.41 vľavo). Platí

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\lfloor x \rfloor} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1} + \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{2} + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot x \right]_n^{n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tfrac{1}{n} \cdot (n+1-n) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

b) Funkcia $f(x) = \frac{(-1)^{\lfloor x+1 \rfloor}}{\lfloor x \rfloor}$, $x \in \langle 1; \infty)$ je po častiach spojitá (obr. 1.2.41 vpravo). Platí

$$\int_1^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor x+1 \rfloor}\,\mathrm{d}x}{\lfloor x \rfloor} = \int_1^2 \frac{(-1)^2\,\mathrm{d}x}{1} + \int_2^3 \frac{(-1)^3\,\mathrm{d}x}{2} + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{(-1)^{n+1}\,\mathrm{d}x}{n} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{(-1)^{n+1}\,\mathrm{d}x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x \right]_n^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2. \ \blacksquare$$

Veta 1.2.45 (Integrálne kritérium konvergencie číselných radov).
Funkcia $f(x)$, $x \in \langle 1; \infty)$ je nerastúca, nezáporná, označme $a_n = f(n)$, $n \in N$.

Potom platí:[78] $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto. \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto.$

Dôkaz.
NP$_{\Rightarrow}$: Uvažujme funkciu definovanú $g(1) = a_1$, $g(x) = a_{n+1}$ pre $x \in (n; n+1\rangle$, $n \in N$.
Funkcia g: $\langle 1; \infty) \to R$ je po častiach spojitá (obr. 1.2.42 vľavo) a platí:

$$\int_1^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

Pre všetky $x \in \langle 1; \infty)$ platí $0 \le g(x) \le f(x)$. Potom (porovnávacie kritérium 1.2.41) platí:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto . \implies \int_1^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \longmapsto . \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \longmapsto .$$

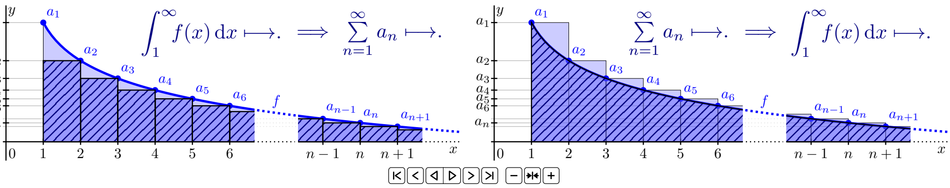
PP$_{\Leftarrow}$: Uvažujme funkciu definovanú $h(x) = a_n$ pre $x \in \langle n; n+1)$, $n \in N$.
Funkcia h: $\langle 1; \infty) \to R$ je po častiach spojitá (obr. 1.2.42 vpravo) a platí:

$$\int_1^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Pre všetky $x \in \langle 1; \infty)$ platí $0 \le f(x) \le h(x)$. Potom (porovnávacie kritérium 1.2.41) platí:

$$\int_1^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longmapsto . \implies \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto . \ \blacksquare$$

[78] Ekvivalencia znamená, že integrál a číselný rad súčasne konvergujú alebo súčasne divergujú do $\pm\infty$.

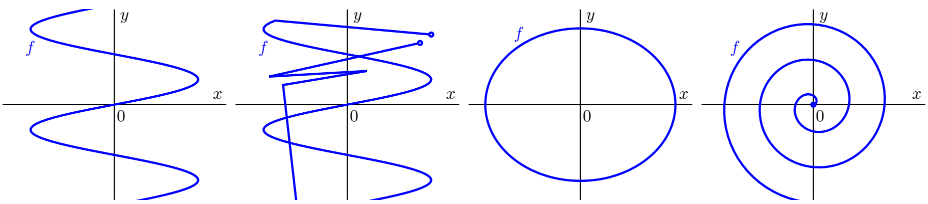


Obr. 1.2.42: Integrálne kritérium konvergencie číselných radov (veta 1.2.45)

1.2.7 Aplikácie Riemannovho integrálu v geometrii

Z geometrického hľadiska predstavuje Riemannov určitý integrál (vlastný i nevlastný) plochu krivočiareho lichobežníka. To znamená, že určitý integrál môžeme použiť na výpočet obsahov rovinných útvarov. Pomocou Riemannovho integrálu môžeme vypočítať nielen obsahy týchto útvarov, ale aj ich obvody, statické momenty, prípadne ťažiská. Tiež môžeme vypočítať objemy a povrchy telies, ktoré vzniknú ich rotáciou v priestore.

Obmedzíme sa na odvodenie vzorcov pre ohraničené rovinné plochy a ohraničené priestorové telesá. Tieto vzorce ostanú v platnosti aj pre neohraničené objekty, ale budú mať tvar nevlastných integrálov.



Obr. 1.2.43: Príklady kriviek, ktoré nie sú funkciami

Vo všeobecnosti môžeme plochy v rovine ohraničiť grafmi reálnych funkcií alebo krivkami. Názorne si môžeme krivku predstaviť ako (obvykle spojitú) čiaru v rovine alebo v priestore s určitými vlastnosťami, napr. ako dráhu nejakého pohybu hmotného bodu.

Matematicky môžeme krivky v rovine definovať viacerými spôsobmi. Krivky sa definujú analogicky ako funkcie (ma1: str. 73) explicitne, implicitne alebo parametricky. Krivka je istým rozšírením pojmu funkcia, lenže pri krivke môže byť jednému vzoru priradených viacero (aj nekonečný počet) obrazov. Formálne predstavuje krivka zjednotenie konečného alebo nekonečného počtu funkcií. Je zrejmé, že funkcia je krivkou, ale krivka funkciou byť nemusí (obr. 1.2.43).

Explicitne krivku f vyjadrujeme ako zjednotenie konečného alebo nekonečného počtu (najčastejšie spojitých) funkcií jednej reálnej premennej v tvare

$$y = f(x), x \in I, \quad \text{resp. } x = f(y), y \in J,$$

t. j. množín bodov $\{(x; f(x)), x \in I\}$, resp. $\{(f(y); y), y \in J\}$, kde $I, J \subset R$ sú intervaly.

Implicitne krivku f môžeme vyjadriť ako zjednotenie konečného alebo nekonečného počtu množín bodov

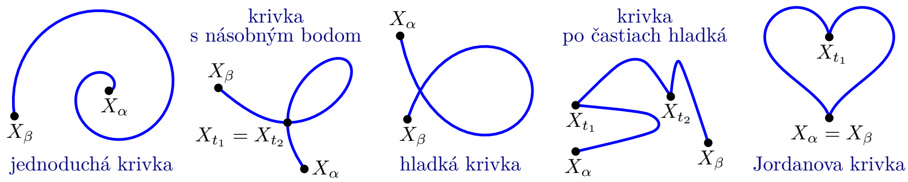
$$\{(x;y)\in R^2, F(x,y)=0, \text{podmienky pre } x,\ \text{resp. } y\},$$

kde $F\colon R^2 \to R$ je funkcia dvoch premenných reprezentujúca vzťah medzi x a $y = f(x)$.

Najčastejšie sa krivky reprezentujú v parametrickom tvare. **Parametricky krivku f** vyjadrujeme ako zjednotenie konečného alebo nekonečného počtu množín bodov v tvare

$$\{(x;y)\in R^2, x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in J\},$$

kde J je interval, $\varphi, \psi\colon J \to R$ sú spojité (pomocné) funkcie.



Obr. 1.2.44: Príklady kriviek v rovine definovaných na intervale $J = \langle\alpha;\beta\rangle$

Aby sme situáciu zbytočne nekomplikovali, budeme predpokladať, že krivka f je určená parametricky na (jednom) intervale J spojitými funkciami

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in J.$$

Body ležiace na krivke f budeme označovať $X_t = (\varphi(t);\psi(t))$, $t\in J$. Hovoríme, že **krivka f sa pretína v bode $X_{t_1} = X_{t_2}$**, ak existujú $t_1, t_2 \in J$, $t_1 \neq t_2$ také, že $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $\psi(t_1) = \psi(t_2)$. Bod $X_{t_1} = X_{t_2}$ nazývame **násobným bodom**.

Ak sa krivka f nikde nepretína (nemá násobné body), potom sa nazýva **jednoduchá krivka**. To znamená, že pre všetky $t_1, t_2 \in J$, $t_1 \neq t_2$ platí $X_{t_1} \neq X_{t_2}$.

Ak je krivka f definovaná na uzavretom intervale $J = \langle\alpha;\beta\rangle$, potom $X_\alpha = (\varphi(\alpha);\psi(\alpha))$ sa nazýva **počiatočný bod** a $X_\beta = (\varphi(\beta);\psi(\beta))$ sa nazýva **koncový bod krivky f**.

Krivka f nazýva **uzavretá**, ak platí $X_\alpha = X_\beta$. Uzavretá a jednoduchá krivka na intervale $\langle\alpha;\beta\rangle$ sa nazýva **jednoduchá uzavretá** alebo **Jordanova krivka**.

Krivka f sa nazýva **hladká** na intervale J, ak derivácie φ', ψ' sú spojité na intervale J a pre všetky $t\in J$ platí[79] $|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0$. Hladká krivka má v každom bode dotyčnicu, pričom v krajných bodoch má jednostranné dotyčnice.

Krivka f sa nazýva **po častiach hladká** na intervale J, ak sú funkcie φ', ψ' po častiach spojité na J. To znamená, ak existuje delenie $\{t_i\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle\alpha;\beta\rangle}$, $n\in N$ také, že krivka f je hladká na každom z podintervalov $\langle t_{i-1}; t_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$.

Po častiach hladká krivka má dotyčnicu v každom bode intervalu J okrem konečného počtu bodov X_{t_i}, $i = 0, 1, \ldots, n$, v ktorých má jednostranné dotyčnice.

[79] Aspoň jedna z derivácii $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ je nenulová. V krajných bodoch J myslíme jednostranné derivácie.

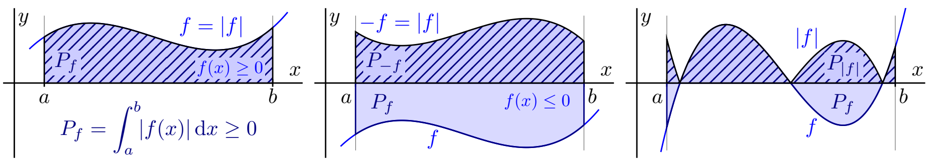
Výpočet obsahu (kvadratúra) rovinnej plochy

Obsah rovinnej plochy ohraničenej funkciou, resp. krivkou je vždy kladný. Pre obsah plochy P_f ohraničenej funkciou $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ a osou x na intervale $\langle a;b\rangle$ platí:

$$f(x) \geq 0, x \in \langle a;b\rangle. \implies P_f = \{(x;y), x \in \langle a;b\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$f(x) \geq 0, x \in \langle a;b\rangle. \implies P_f = P_{-f} = \int_a^b \big[-f(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Vo všeobecnosti pre $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ pre obsah P_f (obr. 1.2.45) platí $P_f = P_{|f|} = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.



Obr. 1.2.45: Obsah rovinnej plochy ohraničenej funkciou f a osou x na $\langle a;b\rangle$

Nech $f, g \in R_{\langle a;b\rangle}$. Označme obsah plochy ohraničenej funkciami f, g symbolom

$$P_{f-g} = \big\{(x;y), x \in \langle a;b\rangle, \min\{f(x), g(x)\} \leq y \leq \max\{f(x), g(x)\}\big\}.$$

Ak pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$ platí $0 \leq g(x) \leq f(x)$, potom (obr. 1.2.46 vľavo)

$$P_{f-g} = P_f - P_g = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x.$$

Ak pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$ platí $g(x) \leq f(x)$, ale nie $0 \leq g(x)$, potom existuje $c > 0$ také, že pre všetky $x \in \langle a;b\rangle$ bude platiť $0 \leq g(x) + c \leq f(x) + c$. Potom (obr. 1.2.46 v strede)[80]

$$P_{f-g} = P_{(f+c)-(g+c)} = \int_a^b \big[(f(x) + c) - (g(x) + c)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x.$$

Vo všeobecnosti, ak nie je splnená ani podmienka $g(x) \leq f(x)$ (obr. 1.2.46 vpravo), platí

$$P_{f-g} = P_{|f-g|} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Predpokladajme, že je funkcia $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ parametrizovaná spojitými funkciami

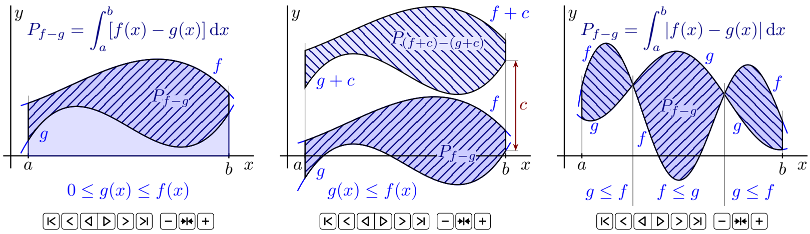
$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \ t \in J, \tag{1.18}$$

kde J je interval s hranicami α, β, funkcia φ je rýdzo monotónna na J, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Potom φ je prostá na J (ma1: veta 3.1.5) a existuje inverzná funkcia $t = \varphi^{-1}(x)$: $\langle a;b\rangle \to J$.

Pre funkciu f platí $y = f(x) = \psi(t) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$, $x \in \langle a;b\rangle$. Ak použijeme substitúciu $x = \varphi(t)$, potom pre obsah plochy P_f ohraničenej funkciou f a osou x platí

$$P_f = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = \varphi(t) & a = \varphi(\alpha) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t & b = \varphi(\beta) \end{array}\right] = \int_\alpha^\beta |\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

[80] Veľkosť plochy sa nezmení, iba sa posunie o hodnotu c v kladnom smere osi y.



Obr. 1.2.46: Obsah rovinnej plochy ohraničenej funkciami f a g na $\langle a; b\rangle$

Poznámka 1.2.26.

Ak je funkcia φ rastúca, potom $J = \langle \alpha; \beta\rangle$, $\varphi'(t) > 0$ pre $t \in J$, $|\varphi'(t)| = \varphi'(t)$ a platí

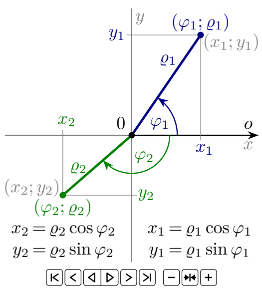
$$P_f = \int_\alpha^\beta |\psi(t)|\, \varphi'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta |\psi(t)\varphi'(t)|\, dt.$$

Ak je funkcia φ klesajúca, potom $J = \langle \beta; \alpha\rangle$, $\varphi'(t) < 0$ pre $t \in J$, $|\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$ a platí

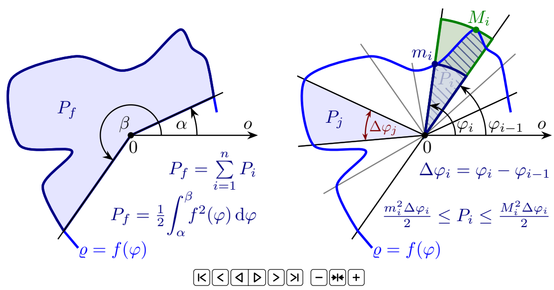
$$P_f = \int_\alpha^\beta |\psi(t)|\, \varphi'(t)\, dt = -\int_\beta^\alpha |\psi(t)|\, \varphi'(t)\, dt = \int_\beta^\alpha |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)|\, dt = \int_\beta^\alpha |\psi(t)\varphi'(t)|\, dt.$$

Vo všeobecnosti, ak je $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta\rangle$, $\alpha < \beta$ jednoduchá, po častiach hladká a uzavretá krivka, potom pre plochu P_f ohraničenú touto krivkou platí

$$P_f = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta |\psi(t) \cdot \varphi'(t)|\, dt.$$



Obr. 1.2.47: Polárny súradnicový systém



Obr. 1.2.48: Krivočiary výsek P a jeho delenie na podvýseky P_i

Niekedy je výhodnejšie, keď je funkcia, resp. krivka f zadaná **v polárnych súradniciach**. V tomto prípade budeme predpokladať, že f je explicitne vyjadrená ako zjednotenie konečného alebo nekonečného počtu množín bodov v tvare

$$\{(\varphi; \rho) \in R^2, \rho = f(\varphi)\}, \quad \text{resp. } \{(\varphi; \rho) \in R^2, \varphi = f(\rho)\}.$$

Medzi karteziánskymi a polárnymi súradnicami (ma1: str. 74, pr. 2.1.3) platia vzťahy

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0,\ x, y \in R,\ \rho \in \langle 0; \infty),\ \varphi \in R.$$

Ak je krivka f v polárnych súradniciach definovaná na intervale J vzťahom $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in J$, potom ju môžeme vyjadriť v karteziánskych súradniciach **v parametrickom tvare** rovnicami $x = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$, $y = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$, $\varphi \in J$ (obr. 1.2.47).

Nech $\rho = f(\varphi) \geq 0$, $\varphi \in \langle\alpha;\beta\rangle$, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ je po častiach spojitá funkcia. Plochu ohraničenú polpriamkami $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ a funkciou f (obr. 1.2.48 vľavo), t. j. množinu

$$P_f = \big\{(x;y) \in R^2, x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, \varphi \in \langle\alpha;\beta\rangle, 0 \leq \rho \leq f(\varphi)\big\}$$

nazývame **krivočiary výsek** určený funkciou f a polpriamkami $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

Označme $D = \{\varphi_i\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle\alpha;\beta\rangle}$, $n \in N$ delenie intervalu $\langle\alpha;\beta\rangle$. Delenie D rozdelí krivočiary výsek P_f na n krivočiarych čiastkových výsekov P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ohraničených polpriamkami $\varphi = \varphi_{i-1}$, $\varphi = \varphi_i$. Ak označíme

$$m_i = \min\{f(\varphi), \varphi \in \langle\varphi_{i-1};\varphi_i\rangle\}, \; M_i = \max\{f(\varphi), \varphi \in \langle\varphi_{i-1};\varphi_i\rangle\}, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

potom každú z plôch P_i môžeme odhadnúť zdola a zhora kruhovými výsekmi s polomermi m_i, M_i a stredovým uhlom $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ (obr. 1.2.48 vpravo). Platí

$$\tfrac{m_i^2\Delta\varphi_i}{2} = \tfrac{\Delta\varphi_i}{2\pi} \cdot \pi m_i^2 \leq P_i \leq \tfrac{\Delta\varphi_i}{2\pi} \cdot \pi M_i^2 = \tfrac{M_i^2\Delta\varphi_i}{2}.$$

Kruh s polomerom $r > 0$ má obsah πr^2 a zodpovedá stredovému uhlu 2π. Obsah kruhového výseku rovnakého polomeru r so stredovým uhlom $\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$ tvorí $\frac{\varphi}{2\pi}$ časti obsahu kruhu, t. j. má hodnotu $\frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi\rho^2 = \frac{\rho^2\varphi}{2}$. Pre plochu P_f potom platí odhad

$$\tfrac{1}{2}S_D(f^2, D) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2\Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^{n}\tfrac{m_i^2\Delta\varphi_i}{2}$$
$$\leq P_f \leq \sum_{i=1}^{n}\tfrac{M_i^2\Delta\varphi_i}{2} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2\Delta\varphi_i = \tfrac{1}{2}S_H(f^2, D),$$

Odhad tvoria dolné a horné integrálne súčty funkcie f^2. Funkcia f je po častiach spojitá na $\langle\alpha;\beta\rangle$, t. j. $f \in R_{\langle\alpha;\beta\rangle}$. Potom aj $f^2 \in R_{\langle\alpha;\beta\rangle}$ a platí

$$P_f = \tfrac{1}{2}\sup\big\{S_D(f^2, D), D \in \mathfrak{D}_{\langle\alpha;\beta\rangle}\big\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\inf\big\{S_H(f^2, D), D \in \mathfrak{D}_{\langle\alpha;\beta\rangle}\big\} = \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi. \tag{1.19}$$

Príklad 1.2.35.

a) Pre obsah plochy P_s ohraničenej funkciou $y = \sin x$, $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$ a osou x platí:

$$P_s = \int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0.$$

Výsledok je na prvý pohľad nesprávny, pretože plocha určite nie je nulová. To znamená, že aj postup je nesprávny (obr. 1.2.49 vľavo).

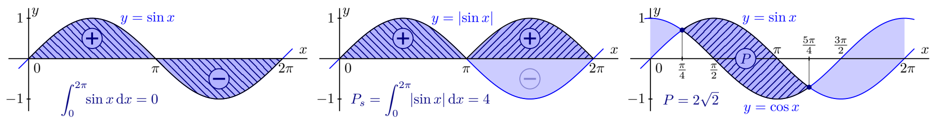
Musíme integrovať $y = |\sin x|$ (obr. 1.2.49 v strede), pretože pre $x \in (\pi; 2\pi)$ platí $\sin x < 0$.

$$P_s = \int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}$$
$$= \big[-\cos\pi + \cos 0\big] + \big[\cos 2\pi - \cos\pi\big] = \big[-(-1) + 1\big] + \big[1 - (-1)\big] = 4.$$

b) Pre obsah uzavretej plochy P ohraničenej funkciami $y = \sin x$ a $y = \cos x$ na intervale $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$ platí (obr. 1.2.49 vpravo):

$$P = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\big[\cos x - \sin x\big]\,\mathrm{d}x = \Big[\sin x + \cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \big[2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot (-\tfrac{\sqrt{2}}{2})\big] = 2\sqrt{2}.$$

Na intervale $\langle 0; 2\pi\rangle$ sa funkcie pretínajú v bodoch $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{5\pi}{4}$, pričom $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Mimo $\big\langle\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\big\rangle$ nie je plocha ohraničná týmito funkciami uzavretá. ■



Obr. 1.2.49: Plochy z príkladu 1.2.35

Príklad 1.2.36.
Odvoďte vzorec pre obsah P kruhu s polomerom $r > 0$.

Riešenie.
Explicite je kruh s polomerom r ohraničený funkciami $f_{\pm}(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r; r \rangle$.
Pre obsah P platí (obr. 1.2.50 vľavo):

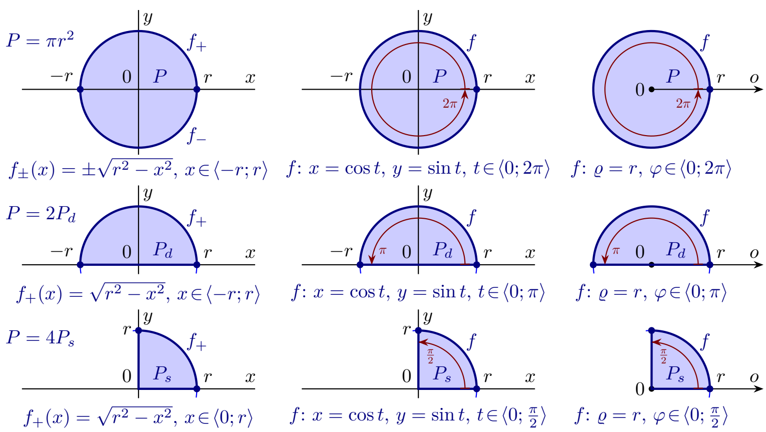
$$P = \int_{-r}^{r} \left[\sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right)\right] \mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = \left[\text{Pr. 1.1.33, str. 29} \right]$$
$$= 2 \cdot \left[\tfrac{r^2}{2} \arcsin \tfrac{x}{r} + \tfrac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2}\right]_{-r}^{r} = 2 \cdot \left[\tfrac{r^2}{2} \cdot \tfrac{\pi}{2} + 0 - \tfrac{r^2}{2} \cdot \tfrac{-\pi}{2} - 0\right] = \pi r^2.$$

Parametricky je kruh s polomerom r ohraničený jednoduchou uzavretou krivkou určenou rovnicami $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Pre obsah kruhu platí (obr. 1.2.50 v strede):

$$P = \int_0^{2\pi} \left| r\cos t \cdot (r\sin t)' \right| \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left| r^2 \cos^2 t \right| \mathrm{d}t = r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \mathrm{d}t$$
$$= \left[\text{Pr. 1.1.45, str. 36} \right] = r^2 \left[\tfrac{t}{2} + \tfrac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = r^2 \left[\tfrac{2\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right] = \pi r^2.$$

V polárnych súradniciach je kruh s polomerom r ohraničený konštantnou funkciou $f\colon \rho = r$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$ a pre jeho obsah na základe vzťahu (1.19) platí (obr. 1.2.50 vpravo):

$$P = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \, \mathrm{d}\varphi = \tfrac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \tfrac{r^2}{2} \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \tfrac{r^2}{2} \cdot 2\pi = \pi r^2. \ \blacksquare$$



Obr. 1.2.50: Odvodenie vzorca $P = \pi r^2$ pre obsah kruhu ($P = 2P_d = 4P_s$)

Poznámka 1.2.27.
Obsah kruhu P môžeme vypočítať aj ako dvojnásobok polkruhu (obr. 1.2.50 druhý riadok), resp. ako štvornásobok štvrťkruhu (obr. 1.2.50 spodný riadok). Platí

$$P = 2P_d = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} r^2 \cos^2 t \,\mathrm{d}t = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 \,\mathrm{d}\varphi,$$
$$\text{resp. } P = 4P_s = 4\int_0^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t \,\mathrm{d}t = 4 \cdot \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \,\mathrm{d}\varphi.$$

Výpočet objemu (kubatúra) rotačného telesa — rotácia okolo osi x

Nech $f(x)$, $x \in \langle a; b\rangle$ je po častiach spojitá funkcia, t. j. $f \in R_{\langle a;b\rangle}$. Krivočiary lichobežník určený funkciou f a intervalom $\langle a; b\rangle$ leží v rovine xy. Ak ho necháme rotovať okolo osi x, vznikne rotačné teleso v priestore xyz. Je zrejmé, že nezáleží na tom, či je funkcia f kladná alebo záporná (obr. 1.2.51). Pri rotácii funkcií f, $-f$ a $|f|$ vznikne rovnaké teleso. Funkcia f sa nazýva **tvoriaca krivka telesa**. Označme symbolom V_x objem tohto telesa.

Uvažujme $D = \{x_i\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n \in N$ delenie intervalu $\langle a; b\rangle$. Označme

$$m_i = \min\{|f(x)|, x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\},\ \ M_i = \max\{|f(x)|, x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle\},\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ďalej označme V_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ objemy telies, ktoré vzniknú rotáciou časti funkcie f na $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ okolo osi x. Potom pre všetky $x \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle$ platí $m_i \leq |f(x)| \leq M_i$.

Každý z objemov V_i je zdola ohraničený objemom rotačného valca s výškou Δx_i a polomerom podstavy m_i a zhora ohraničený objemom rotačného valca s rovnakou výškou Δx_i, ale polomerom podstavy M_i, t. j. platí $\pi m_i^2 \Delta x_i \leq V_i \leq \pi M_i^2 \Delta x_i$ (obr. 1.2.51 vpravo)

Pre objem telesa V_x potom platí

$$\pi S_D(f^2, D) = \pi \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2 \Delta x_i$$
$$\leq V_x \leq \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2 \Delta x_i = \pi \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta x_i = \pi S_H(f^2, D).$$

Odhad tvoria dolné a horné integrálne súčty funkcie $|f|^2 = f^2$. Funkcia f je po častiach spojitá na $\langle a; b\rangle$, t. j. $f \in R_{\langle a;b\rangle}$. Potom aj $f^2 \in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

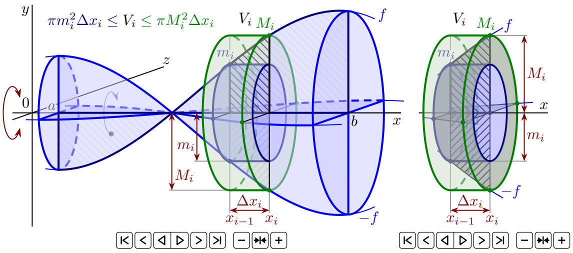
$$V_x = \pi \cdot \sup\big\{S_D(f^2, D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\big\}$$
$$= \pi \cdot \inf\big\{S_H(f^2, D), D \in \mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\big\} = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.20}$$

Nech $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je parametrizovaná spojitými funkciami[81] $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, kde interval J má hranice α, β, funkcia φ je rýdzo monotónna na J, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Potom φ je prostá na J (ma1: veta 3.1.5) a existuje inverzná funkcia $t = \varphi^{-1}(x)$: $\langle a; b\rangle \to J$.

Pre funkciu f platí $y = f(x) = \psi(t) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$, $x \in \langle a; b\rangle$. Ak použijeme substitúciu $x = \varphi(t)$, potom pre objem rotačného telesa V_x platí

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = \varphi(t) & a = \varphi(\alpha) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t & b = \varphi(\beta) \end{array}\right] = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

[81] Ako vo vzťahu (1.18).



Obr. 1.2.51: Objem rotačného telesa vzniknutého rotáciou funkcie f okolo osi x

Poznámka 1.2.28.
Ak je funkcia φ rastúca, potom $J = \langle\alpha;\beta\rangle$, $\varphi'(t) > 0$ pre $t\in J$, $|\varphi'(t)| = \varphi'(t)$ a platí

$$V_x = \pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \pi\int_\alpha^\beta \big|\psi^2(t)\varphi'(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Ak je funkcia φ klesajúca, potom $J = \langle\beta;\alpha\rangle$, $\varphi'(t) < 0$ pre $t\in J$, $|\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$ a platí

$$V_x = \pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\pi\int_\beta^\alpha \psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \pi\int_\beta^\alpha \psi^2(t)\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \pi\int_\beta^\alpha \big|\psi^2(t)\varphi'(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Vo všeobecnosti, ak je funkcia f parametricky definovaná vzťahmi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t\in\langle\alpha;\beta\rangle$, $\alpha < \beta$, potom pre objem rotačného telesa V_x (okolo osi x) platí

$$V_x = \pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \pi\int_\alpha^\beta \big|\psi^2(t)\varphi'(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Nech $0 \le \alpha < \beta \le \pi$. V polárnych súradniciach definovanú funkciu $\rho = f(\varphi)$, $\varphi\in\langle\alpha;\beta\rangle$ môžeme do karteziánskych súradníc parametrizovať rovnicami $x = \rho\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi$, $\varphi\in\langle\alpha;\beta\rangle$. Ak v karteziánskom systéme uvedené rovnice vyjadrujú funkciu, potom v zmysle predchádzajúcich úvah pre objem rotačného telesa V_x rotujúceho okolo osi x, t. j. okolo polárnej osi o platí[82]

$$V_x = \pi\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\sin^2\varphi\,\big|\big(f(\varphi)\cos\varphi\big)'\big|\,\mathrm{d}\varphi, \tag{1.21}$$

pričom pre deriváciu platí $\big(f(\varphi)\cos\varphi\big)' = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi$.

Existuje jednoduchší vzorec pre objem rotačného telesa v polárnych súradniciach (viď napr. [14]). Objem rotačného telesa (obr. 1.2.52), ktoré rotáciou okolo polárnej poloosi (osi) o vytvorí krivočiary výsek $P_f = \{(\varphi;\rho)\in\langle\alpha;\beta\rangle\times\langle 0;\infty),\, 0 \le \rho \le f(\varphi)\}$ určený funkciou f: $\rho = f(\varphi) \ge 0$, $\varphi\in\langle\alpha;\beta\rangle$, $0 \le \alpha \le \beta \le \pi$ a polpriamkami $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ je

$$V_x = \tfrac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta f^3(\varphi)\cdot\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \tag{1.22}$$

Príklad 1.2.37.
Odvoďte vzorec pre objem V gule G s polomerom $r > 0$ (obr. 1.2.53).

[82] Ak funkciu nevyjadrujú, musíme krivku rozložiť na jednotlivé funkcie a objemy jednotlivých rotačných telies vhodne pripočítavať alebo odpočítavať podľa tvaru krivky, resp. vzniknuvšieho rotačného telesa.

Riešenie.
Guľa G vznikne rotáciou polkružnice (obr. 1.2.50 prostredný riadok).
Explicitne vznikne G rotáciou polkružnice $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\langle -r;r\rangle$ okolo osi x. Platí

$$V=\pi\int_{-r}^{r} f^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\Big[r^2x-\tfrac{x^3}{3}\Big]_{-r}^{r}=\pi\big[r^3-\tfrac{r^3}{3}+r^3-\tfrac{r^3}{3}\big]=\tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Najprv vypočítame pomocný integrál, ktorý budeme potrebovať pri ďaľších výpočtoch. Pre všetky $x\in R$ platí $\sin^3 x=(1-\cos^2 x)\sin x=\sin x-\cos^2 x\sin x$. Potom

$$\int_0^{\pi}\sin^3 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}(-\cos^2 x\cdot\sin x)\,\mathrm{d}x=\circledast+\circledast\circledast=2-\tfrac{2}{3}=\tfrac{4}{3},$$

$$\text{kde}\quad\circledast=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=\big[-\cos\pi+\cos 0\big]=\big[-(-1)+1\big]=2,$$

$$\circledast\circledast=\left[\begin{array}{c|c}\text{Subst. } v=\cos x & \cos 0=1\\ \mathrm{d}v=-\sin x\,\mathrm{d}x & \cos\pi=-1\end{array}\right]=\int_1^{-1}v^2\,\mathrm{d}v=\Big[\tfrac{v^3}{3}\Big]_1^{-1}=\big[\tfrac{-1}{3}-\tfrac{1}{3}\big]=-\tfrac{2}{3}.$$

V parametrickom tvare vznikne G rotáciou polkružnice f: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in\langle 0;\pi\rangle$. Pre $t=0$ dostaneme $x=r$, $y=0$ a pre $t=\pi$ dostaneme $x=-r$, $y=0$. To znamená, že

$$V=\pi\int_{\pi}^{0}(r\sin\varphi)^2\cdot(r\cos\varphi)'\,\mathrm{d}\varphi=\pi\int_{\pi}^{0}r^2\sin^2\varphi\cdot(-r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$
$$=-\pi r^3\int_{\pi}^{0}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\pi r^3\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Ak uvážime poznámku 1.2.28 a že pre $t\in\langle 0;\pi\rangle$ platí $r\sin t\geq 0$, potom

$$V=\pi\int_0^{\pi}(r\sin t)^2\cdot|(r\cos t)'|\,\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}r^2\sin^2 t\cdot|-r\sin t|\,\mathrm{d}t=\pi r^3\int_0^{\pi}\sin^3 t\,\mathrm{d}t=\tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

V polárnom systéme vznikne guľa G rotáciou polkružnice f: $\rho=f(\varphi)=r$, $\varphi\in\langle 0;\pi\rangle$, t. j. konštantnej funkcie. V tomto prípade môžeme použiť oba vzorce na výpočet objemu.[83] Keďže $\sin\varphi\geq 0$ pre $\varphi\in\langle 0;\pi\rangle$, potom podľa prvého vzorca (1.21) platí[84]

$$V=\pi\int_0^{\pi}r^2\sin^2\varphi\big|(r\cos\varphi)'\big|\,\mathrm{d}\varphi=\pi\int_0^{\pi}r^2\sin^2\varphi\big|-r\sin\varphi\big|\,\mathrm{d}\varphi=\pi r^3\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Podľa druhého vzorca (1.22) pre objem gule platí

$$V=\tfrac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}r^3\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\tfrac{2\pi}{3}r^3\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\tfrac{2\pi}{3}r^3\cdot\circledast=\tfrac{2\pi}{3}r^3\cdot 2=\tfrac{4}{3}\pi r^3.\ \blacksquare$$

Príklad 1.2.38.
Určte objem rotačného kužeľa s polomerom podstavy $r>0$ a výškou $h>0$.

Riešenie.
Daný kužeľ vznikne rotáciou trojuholníka s vrcholmi $(0;0)$, $(h;0)$, $(0;r)$, t. j. úsečky spájajúcej body $(h;0)$, $(0;r)$ okolo osi x. Úsečka má rovnicu $f_1(x)=r-\frac{r}{h}x=\frac{r}{h}(h-x)$, $x\in\langle 0;h\rangle$ a pre objem kužeľa platí (obr. 1.2.54 vľavo)

$$V=\pi\int_0^{h}\big[\tfrac{r}{h}(h-x)\big]^2\,\mathrm{d}x=\tfrac{\pi r^2}{h^2}\int_0^{h}(x-h)^2\,\mathrm{d}x=\tfrac{\pi r^2}{h^2}\Big[\tfrac{(x-h)^3}{3}\Big]_0^{h}=\tfrac{\pi r^2}{h^2}\big[0-\tfrac{-h^3}{3}\big]=\tfrac{1}{3}\pi r^2h.$$

[83] Krivočiary lichobežník z karteziánskeho systému pre vzorec (1.21) je identický s krivočiarym výsekom z polárneho systému pre vzorec (1.22).
[84] Dostali sme identický integrál ako pri parametrickom tvare polkružnice.

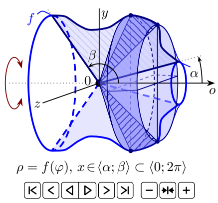
Iné riešenie.
Daný kužeľ vznikne taktiež rotáciou trojuholníka s vrcholmi $(0;0)$, $(h;0)$, $(h;r)$, t. j. úsečky $f_2(x) = \frac{r}{h}x$, $x \in \langle 0;h\rangle$ spájajúcej body $(0;0)$, $(h;r)$ okolo osi x. Potom (obr. 1.2.54 vpravo)

$$V = \pi \int_0^h \left[\tfrac{r}{h}x\right]^2 \mathrm{d}x = \tfrac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 \,\mathrm{d}x = \tfrac{\pi r^2}{h^2}\left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^h = \tfrac{\pi r^2}{h^2}\left[\tfrac{h^3}{3} - 0\right] = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h. \ \blacksquare$$

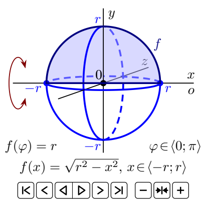
Poznámka 1.2.29.
Analytickú rovnicu priamky p, ktorá prechádza rôznymi bodmi $A = (a_x; a_y)$, $B = (b_x; b_y)$, určíme jednoducho. Pre $a_x = b_x$ priamka p nie je funkcia a má rovnicu $x = a_x$.
Pre $a_x \neq b_x$ je priamka p grafom lineárnej funkcie s rovnicou $y = \alpha x + \beta$. Koeficienty α, β musíme vypočítať. Keďže body A, B ležia na p, platí

$$\left.\begin{aligned} b_y &= \alpha b_x + \beta, \\ a_y &= \alpha a_x + \beta. \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} &b_y - a_y = \alpha b_x - \alpha a_x = \alpha(b_x - a_x). \implies \alpha = \tfrac{b_y - a_y}{b_x - a_x}. \\ &\implies \beta = b_y - \tfrac{b_y - a_y}{b_x - a_x} b_x = \tfrac{b_y(b_x - a_x) - (b_y - a_y)b_x}{b_x - a_x} = \tfrac{a_y b_x - a_x b_y}{b_x - a_x}. \end{aligned}$$

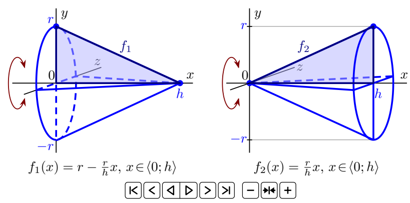
Pre $a_x \neq b_x$ je priamka potom určená rovnicou p: $y = \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x}x + \frac{a_y b_x - a_x b_y}{b_x - a_x}$, $x \in R$.



Obr. 1.2.52: Rotujúci výsek



Obr. 1.2.53: Objem gule

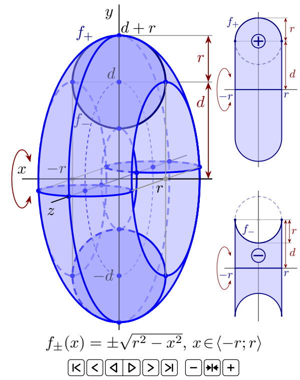


Obr. 1.2.54: Objem rotačného kužeľa

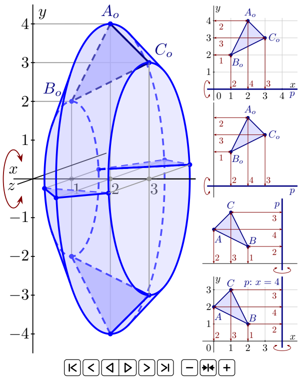
Príklad 1.2.39.
Vypočítajte objem V anuloidu[85] s polomermi $d \pm r$, $d \geq r > 0$ (obr. 1.2.55).

Riešenie.
Anuloid vznikne rotáciou kruhu s polomerom $r > 0$ okolo priamky vzdialenej od jej stredu o hodnotu $d \geq r$. Jeho objem vypočítame ako rozdiel objemov telies, ktoré vzniknú rotáciami polkružníc $f_\pm(x) = d \pm \sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$, $x \in \langle -r; r\rangle$ okolo osi x. Platí

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^{r} f_+^2(x)\,\mathrm{d}x - \pi \int_{-r}^{r} f_-^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} \left[f_+^2(x) - f_-^2(x)\right] \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-r}^{r} \left[\left(d^2 + 2d\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2\right) - \left(d^2 - 2d\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2\right)\right] \mathrm{d}x \\ &= 4\pi d \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\text{ Pr. 1.1.33, str. 29 }\right] = 4\pi d\left[\tfrac{r^2}{2}\arcsin\tfrac{x}{r} + \tfrac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2}\right]_{-r}^{r} \\ &= 4\pi d\left[\tfrac{r^2}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2} + 0 - \tfrac{r^2}{2}\cdot\tfrac{-\pi}{2} - 0\right] = 4\pi d \cdot \tfrac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 d r^2. \ \blacksquare \end{aligned}$$



Obr. 1.2.55: Anuloid (príklady 1.2.39, 1.2.48)



Obr. 1.2.56: Rotujúci trojuholník (príklad 1.2.40)

Príklad 1.2.40.
Vypočítajte objem V rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou plochy trojuholníka s vrcholmi $A = (0; 2)$, $B = (2; 1)$, $C = (1; 3)$ okolo priamky p: $x = 4$.

Riešenie.
Uvedené rotačné teleso je identické s telesom, ktoré vznikne rotáciou otočeného trojuholníka (o uhol $\pi/2$) s vrcholmi $A_o = (2; 4)$, $B_o = (1; 2)$, $C_o = (3; 3)$ okolo osi x (obr. 1.2.56). Úsečka spájajúca priamo vrcholy B_oC_o je funkcia, označme ju f. Krivka spájajúca vrcholy $B_oA_oC_o$ sa skladá z dvoch úsečiek a je funkcia, označme ju g. Platí

$$f\colon y = \tfrac{x+3}{2}, x \in \langle 1; 3\rangle, \quad g\colon y = \begin{cases} g_1(x) = 2x & \text{pre } x \in \langle 1; 2\rangle \text{ (úsečka } B_oA_o), \\ g_2(x) = 6 - x & \text{pre } x \in \langle 2; 3\rangle \text{ (úsečka } A_oC_o). \end{cases}$$

Keďže $g_2^2(x) = (6-x)^2 = (x-6)^2$, potom pre objem hľadaného rotačného telesa platí:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 g^2(x)\,dx - \pi \int_1^3 f^2(x)\,dx = \pi \int_1^2 g_1^2(x)\,dx + \pi \int_2^3 g_2^2(x)\,dx - \pi \int_1^3 f^2(x)\,dx \\ &= \pi \int_1^2 4x^2\,dx + \pi \int_2^3 (x-6)^2\,dx - \pi \int_1^3 \tfrac{(x+3)^2}{4}\,dx \\ &= \pi \Big[\tfrac{4x^3}{3}\Big]_1^2 + \pi \Big[\tfrac{(x-6)^3}{3}\Big]_2^3 - \pi \Big[\tfrac{(x+3)^3}{3\cdot 4}\Big]_1^3 = \pi \big[\tfrac{32-4}{3} + \tfrac{-27+64}{3} - \tfrac{216-64}{12}\big] = 9\pi. \end{aligned}$$

Iné riešenie.
Objem hľadaného rotačného telesa vypočítame pomocou parametrických tvarov funkcií. Pre g_1: $B_o + (A_o - B_o)t$, g_2: $A_o + (C_o - A_o)t$, f: $B_o + (C_o - B_o)t$, $t \in \langle 0; 1\rangle$ platí:

$$\begin{aligned} g_1 &\colon x_1(t) = 1 + t, \quad y_1(t) = 2 + 2t. \implies x_1'(t) = 1,\ y_1^2(t) = 4(t+1)^2. \\ g_2 &\colon x_2(t) = 2 + t, \quad y_2(t) = 4 - t. \implies x_2'(t) = 1,\ y_2^2(t) = (t-4)^2. \\ f &\colon x_f(t) = 1 + 2t,\ y_f(t) = 2 + t. \implies x_f'(t) = 2,\ y_f^2(t) = (t+2)^2. \end{aligned}$$

[85] Anuloid je teleso, ktoré má tvar plávacieho kolesa pre deti, resp. duše na bicykel.

Pre objem hľadaného rotačného telesa platí:

$$V = \pi\int_0^1 y_1^2(t)x_1'(t)\,\mathrm{d}t + \pi\int_0^1 y_2^2(t)x_2'(t)\,\mathrm{d}t - \pi\int_0^1 y_f^2(t)x_f'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \begin{bmatrix}\text{Integrandy môžeme dať}\\ \text{pod spoločný integrál.}\end{bmatrix} = \pi\int_0^1 \big[4(t+1)^2 + (t-4)^2 + 2(t+2)^2\big]\,\mathrm{d}t$$
$$= \pi\Big[\tfrac{4(t+1)^3}{3} + \tfrac{(t-4)^3}{3} - \tfrac{2(t+2)^3}{3}\Big]_0^1 = \pi\big[\tfrac{4(8-1)}{3} + \tfrac{-27+64}{3} - \tfrac{2(27-8)}{3}\big] = 9\pi. \blacksquare$$

Poznámka 1.2.30.
Úsečka p spájajúca dva rôzne body $A=(a_x;a_y)$, $B=(b_x;b_y)$, má parametrické vyjadrenie

$$A+(B-A)t,\ t\in\langle 0;1\rangle, \quad \text{t. j. } x=a_x+(b_x-a_x)t,\ y=a_y+(b_y-a_y)t,\ t\in\langle 0;1\rangle.$$

Pre $t\in R$ dostaneme priamku spájajúcu body A a B.

Výpočet objemu rotačného telesa — rotácia okolo osi y

Nech $f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$, $0\le a<b$ je po častiach spojitá funkcia, t. j. $f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Krivočiary lichobežník určený funkciou f a intervalom $\langle a;b\rangle$ leží v rovine xy (v polrovine $x\ge 0$). Ak ho necháme rotovať okolo osi y, vznikne v priestore xyz rotačné teleso (obr. 1.2.57). Označme symbolom V_y objem tohto telesa.

Uvažujme $D=\{x_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$, $n\in N$ delenie intervalu $\langle a;b\rangle$. Označme

$$m_i=\min\{|f(x)|, x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\},\ M_i=\max\{|f(x)|, x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle\},\ i=1,2,\ldots,n.$$

Ďalej označme V_i, $i=1,2,\ldots,n$ objemy telies, ktoré vzniknú rotáciou f, $\langle x_{i-1};x_i\rangle$ okolo osi y. Potom pre všetky $x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ platí $m_i\le|f(x)|\le M_i$. Teleso s identickým objemom V_i vznikne taktiež rotáciou funkcie $-f$, resp. $|f|$, $x\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$ okolo osi y.

Každý z objemov V_i môžeme ohraničiť zdola a zhora objemami medzivalcí[86] s výškami m_i a M_i so zhodnými polomermi podstáv x_{i-1} a x_i, t. j. platí

$$\pi(x_i^2-x_{i-1}^2)m_i=\pi x_i^2m_i-\pi x_{i-1}^2m_i\le V_i\le\pi x_i^2M_i-\pi x_{i-1}^2M_i=\pi(x_i^2-x_{i-1}^2)M_i.$$

Kedže pre všetky $i=1,2,\ldots,n$ platí

$$0\le x_{i-1}<x_i,\quad x_i^2-x_{i-1}^2=(x_i+x_{i-1})(x_i-x_{i-1})=(x_i+x_{i-1})\Delta x_i,$$

pre objemy V_i, $i=1,2,\ldots,n$ platí odhad

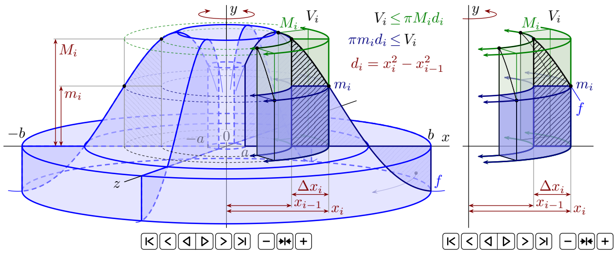
$$2\pi x_{i-1}\Delta x_im_i\le\pi(x_i+x_{i-1})\Delta x_im_i\le V_i\le\pi(x_i+x_{i-1})\Delta x_iM_i\le 2\pi x_i\Delta x_iM_i.$$

Pre objem telesa V_y potom platí

$$2\pi S_D(x\,|f|,D)=\pi\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}m_i\Delta x_i\le V_x\le 2\pi\sum_{i=1}^{n}x_iM_i\Delta x_i=2\pi S_H(x\,|f|,D).$$

Odhad tvoria dolné a horné integrálne súčty funkcie $x\,|f|$. Identita $y=x$ je spojitá a f je po častiach spojitá na $\langle a;b\rangle$, t. j. $x,f\in R_{\langle a;b\rangle}$. Potom aj $|f|, x\,|f|\in R_{\langle a;b\rangle}$ a platí

$$V_y=2\pi\cdot\sup\big\{S_D(x\,|f|,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\big\}$$
$$=2\pi\cdot\inf\big\{S_H(x\,|f|,D), D\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}\big\}=2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x. \quad (1.23)$$



Obr. 1.2.57: Objem rotačného telesa vzniknutého rotáciou funkcie f okolo osi y

Nech $f \in R_{\langle a;b\rangle}$ je parametrizovaná spojitými funkciami[87] $x = \varphi(t) \geq 0$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, kde interval J má hranice α, β, funkcia φ je rýdzo monotónna na J, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Potom φ je prostá na J (ma1: veta 3.1.5) a existuje inverzná funkcia $t = \varphi^{-1}(x)\colon \langle a;b\rangle \to J$.

Pre funkciu f platí $y = f(x) = \psi(t) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$, $x \in \langle a;b\rangle$. Ak použijeme substitúciu $x = \varphi(t)$ a dosadíme do vzťahu (1.23), potom pre objem rotačného telesa V_y platí

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l} \text{Subst. } x = \varphi(t) & a = \varphi(\alpha) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t & b = \varphi(\beta) \end{array}\right] = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,|\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 1.2.31.

Ak je funkcia φ rastúca, potom $J = \langle \alpha;\beta\rangle$, $\varphi'(t) > 0$ pre $t \in J$, $|\varphi'(t)| = \varphi'(t)$ a platí

$$V_y = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,|\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,|\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_\alpha^\beta |\varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Ak je funkcia φ klesajúca, potom $J = \langle \beta;\alpha\rangle$, $\varphi'(t) < 0$ pre $t \in J$, $|\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$ a platí

$$V_y = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,|\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -2\pi \int_\beta^\alpha \varphi(t)\,|\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_\beta^\alpha |\varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Všeobecne, ak je funkcia f v parametrickm tvare definovaná vzťahmi $x = \varphi(t) \geq 0$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha;\beta\rangle$, $\alpha < \beta$, potom pre objem rotačného telesa V_y (okolo osi y) platí

$$V_y = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,|\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,|\psi(t)\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_\alpha^\beta |\varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Príklad 1.2.41.

Odvoďte vzorec pre objem V gule G s polomerom $r > 0$ (viď príklad 1.2.37).

Riešenie.

Objem gule s polomerom $r > 0$ môžeme vypočítať ako dvojnásobok objemu polgule, ktorá vznikne rotáciou štrťkružnice $f_s(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle 0;r\rangle$ okolo osi y (obr. 1.2.58 vľavo). Pre objem V gule platí

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_0^r x\,|f_s(x)|\,\mathrm{d}x = 4\pi \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{r|l|l|l} \text{Subst. } t = r^2 - x^2 & x \in \langle 0;r\rangle & x = 0 & x = r \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x & t \in \langle 0;r^2\rangle & t = r^2 & t = 0 \end{array}\right]$$

$$= -2\pi \int_{r^2}^0 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^{r^2} t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = 2\pi \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{r^2} = \tfrac{4}{3}\pi\big[(r^2)^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\big] = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

---

[86] Medzivalcie je útvar v priestore, ktorý vznikne medzi dvomi valcami s rovnakými výškami, ktorých podstavy tvoria sústredné kruhy.

[87] Analogicky ako vo vzťahu (1.18).

Štvrťkružnica f_s má parametrický tvar $x = r\cos t \geq 0$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$.
Pre $t = 0$ dostaneme $x = r$, $y = 0$ a pre $t = \frac{\pi}{2}$ dostaneme $x = 0$, $y = r$. To znamená, že

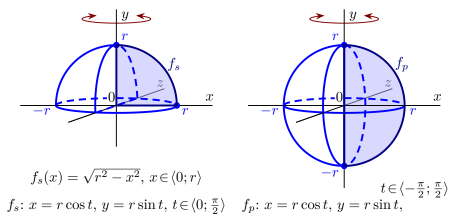
$$\begin{aligned} V &= 2\cdot 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r\cos t \cdot r\sin t \cdot (r\cos t)'\,\mathrm{d}t = 4\pi r^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos t\cdot \sin t \cdot(-r\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= -4\pi r^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos t\,\sin^2 t\,\mathrm{d}t = 4\pi r^3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{r|l|l} \text{Subst. } u=\sin t & t\in\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle & t=0, u=0 \\ \mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t & u\in\langle 0;1\rangle & t=\frac{\pi}{2}, u=1 \end{array}\right] \\ &= 4\pi r^3 \int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u = 4\pi r^3 \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 4\pi r^3\left[\tfrac{1}{3} - 0\right] = \tfrac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Ak uvážime poznámku 1.2.31 a že pre všetky $t \in \langle 0; \pi\rangle$ platí $x = r\cos t \geq 0$, $r\sin t \geq 0$ a pre deriváciu platí $|(r\cos t)'| = |-r\sin t| = r\sin t$, potom

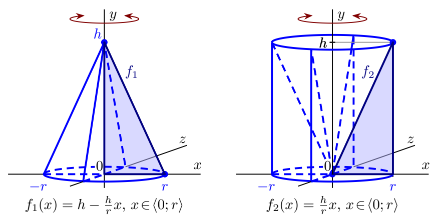
$$V = 2\cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos t \cdot \left|r\sin t\cdot (r\cos t)'\right|\mathrm{d}t = 4\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Pri rotácii polkružnice f_p: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$ vznikne guľa G (obr. 1.2.58 vpravo). Aj keď f_p nie je funkcia, môžeme použiť predchádzajúci vzorec. Platí

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos t\cdot \left|r\sin t \cdot (r\cos t)'\right|\mathrm{d}t = 2\pi r^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c} \cos t\cdot \sin^2 t \\ \text{je párna funkcia.}\end{array}\right] \\ &= 2\cdot 2\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 4\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{4}{3}\pi r^3. \ \blacksquare \end{aligned}$$



Obr. 1.2.58:
Objem gule



Obr. 1.2.59:
Objem kužeľa

Príklad 1.2.42.
Rotačný kužeľ s polomerom podstavy $r > 0$ a výškou $h > 0$ vznikne rotáciou trojuholníka s vrcholmi $(0;0)$, $(r;0)$, $(0;h)$, t. j. úsečky $f_1(x) = h - \frac{h}{r}x = \frac{h}{r}(r - x)$, $x \in \langle 0; r\rangle$ okolo osi y (obr. 1.2.59 vľavo).[88] Pre jeho objem platí

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\pi \int_0^r x\left|\tfrac{h}{r}(r-x)\right|\mathrm{d}x = \frac{2\pi h}{r}\int_0^r x(r-x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi h}{r}\int_0^r (xr - x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\pi h}{r}\left[\frac{x^2 r}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{2\pi h}{r}\left[\frac{3x^2 r - 2x^3}{6}\right]_0^r = \frac{2\pi h}{r}\left[\frac{3r^3 - 2r^3}{6} - 0\right] = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h. \end{aligned}$$

[88] Kužeľ vznikne rotáciou iného trojuholníka $(0;0)$, $(h;0)$, $(0;r)$ okolo osi x (viď príklad 1.2.38).

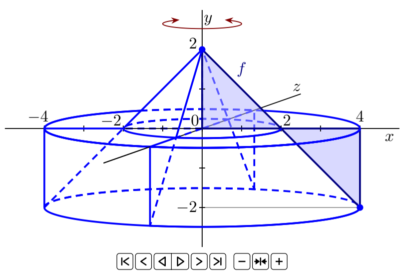
Ak necháme rotovať okolo osi y zhodný trojuholník s vrcholmi $(0;0)$, $(r;0)$, $(r;h)$, t. j. úsečku $f_2(x) = \frac{h}{r}x$, $x \in \langle 0;r\rangle$, nedostaneme kužeľ, ale valec z vyrezaným kužeľom v jeho vnútri (obr. 1.2.59 vpravo). Pre jeho objem platí

$$V_2 = 2\pi \int_0^h x\left|\tfrac{h}{r}x\right| \mathrm{d}x = \tfrac{2\pi h}{r} \int_0^r x^2 \,\mathrm{d}x = \tfrac{2\pi h}{r}\left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^r = \tfrac{2\pi h}{r}\left[\tfrac{r^3}{3} - 0\right] = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h.$$

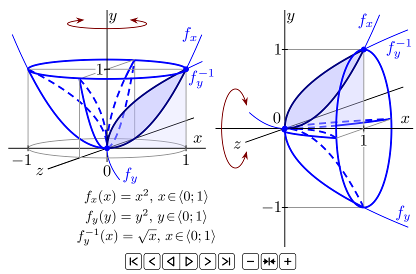
Telesá z prvej a z druhej časti príkladu sú doplnkové do rotačného valca s rovnakým polomerom podstavy r a rovnakou výškou h, ktorého objem je $V = \pi r^2 h = V_1 + V_2$. ■

Príklad 1.2.43.
Pre objem telesa V, ktoré vznikne rotáciou krivočiareho lichobežníka určeného úsečkou $f\colon y = 2 - x$, $x \in \langle 0;4\rangle$ okolo osi y (obr. 1.2.60) platí

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 x\,|2-x|\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 x(2-x)\,\mathrm{d}x + 2\pi \int_2^4 x(x-2)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x + 2\pi \int_2^4 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[x^2 - \tfrac{x^3}{3}\right]_0^2 + 2\pi\left[\tfrac{x^3}{3} - x^2\right]_2^4 \\ &= 2\pi\left[4 - \tfrac{8}{3} - 0\right] + 2\pi\left[\tfrac{64}{3} - 16 - \tfrac{8}{3} + 4\right] = 2\pi\left[\tfrac{12-8}{3} + \tfrac{56-36}{3}\right] = 2\pi \cdot \tfrac{24}{3} = 16\pi. \ ■ \end{aligned}$$



Obr. 1.2.60:
Príklad 1.2.43



Obr. 1.2.61:
Príklad 1.2.44

Poznámka 1.2.32.
Objem telesa z príkladu 1.2.43 (obr. 1.2.60) môžeme vypočítať priamo pomocou geometrických vzorcov. Teleso sa skladá z kužeľa K_1 v hornej časti a v dolnej časti z valca C s chýbajúcou časťou vo vnútri v tvare zrezaného kužeľa.
Kužeľ K_1 má polomer podstavy $r_1 = 2$ a výšku $h_1 = 2$, jeho objem je $V_h = \frac{2^2\cdot 2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$.
Pre objem V_d dolného telesa C platí $V_d = V_v - V_k = 32\pi - \frac{56\pi}{3} = \frac{96\pi}{3} - \frac{56\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$.
Valec z telesa C má polomer podstavy $r_v = 4$, výšku $h_v = 2$ a objem $V_v = 4^2 \cdot 2\pi = 32\pi$.
Základom zrezaného kužeľa je kužeľ K_2 s polomerom podstavy $r_2 = 4$, výškou $h_2 = 4$ a objemom $V_2 = \frac{4^2\cdot 4\pi}{3} = \frac{64\pi}{3}$. Odrezaný z neho jeho kužeľ K_1 s objemom V_h.
Objem zrezaného kužeľa sa potom rovná $V_k = V_2 - V_h = \frac{64\pi}{3} - \frac{8\pi}{3} = \frac{56\pi}{3}$.
Objem daného rotačného telesa je $V = V_h + V_d = \frac{8\pi}{3} + \frac{40\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi$.

Príklad 1.2.44.
Určte objem telesa V, ktoré vznikne rotáciou plochy ohraničenej krivkami f_x a f_y okolo osi y, pričom f_x: $y = x^2$, $x \in R$ a f_y: $x = y^2$, $y \in R$.

Riešenie.
Krivky f_x a f_y sa pretínajú (obr. 1.2.61) v bodoch $(0; 0)$, $(1; 1)$.
Krivka $f_x(x) = x^2$, $x \in \langle 0; 1\rangle$ je prostá funkcia. Krivka $f_y(y) = y^2$, $y \in \langle 0; 1\rangle$ je tiež prostá funkcia a môžeme ju vyjadriť v tvare inverznej funkcie $f_y^{-1}(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$.
Keďže $f_y^{-1}(x) \geq f_x(x) \geq 0$ pre $x \in \langle 0; 1\rangle$, potom pre objem V (obr. 1.2.61 vľavo) platí:

$$V = 2\pi \int_0^1 x \left|f_y^{-1}(x)\right| \mathrm{d}x - 2\pi \int_0^1 x \left|f_x(x)\right| \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x - 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 \,\mathrm{d}x$$
$$= 2\pi \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^3\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi \left[\tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{4} - 0\right] = 2\pi \cdot \tfrac{8-5}{20} = \tfrac{3}{10}\pi.$$

Iné riešenie.
Ak bude daná plocha rotovať okolo osi x (obr. 1.2.61 vpravo), vznikne identické teleso, ale ináč orientované v priestore. Pre jeho objem platí

$$V = \pi \int_0^1 (f_y^{-1})^2(x) \,\mathrm{d}x - \pi \int_0^1 f_x^2(x) \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}})^2 \,\mathrm{d}x - \pi \int_0^1 (x^2)^2 \,\mathrm{d}x$$
$$= \pi \int_0^1 \left(x - x^4\right) \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} - 0\right] = \pi \cdot \tfrac{5-2}{10} = \tfrac{3}{10}\pi. \blacksquare$$

Výpočet dĺžky krivky (rektifikácia krivky)

Uvažujme parametricky vyjadrenú krivku f: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta\rangle$ v rovine. Nech $D = \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle \alpha;\beta\rangle}$, $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, $n \in N$ je ľubovoľné delenie intervalu $\langle \alpha; \beta\rangle$. Označme $X_i = (\varphi(t_i); \psi(t_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ príslušné body ležiace na krivke f, označme $d_i = \left|X_{t_{i-1}} X_{t_i}\right|$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dĺžky úsečiek spájajúcich body $X_{t_{i-1}}$ a X_{t_i} a označme symbolom f_D lineárnu lomenú krivku zloženú z úsečiek postupne spájajúcich body X_{t_0}, X_{t_1}, ..., X_{t_n} (obr. 1.2.62). **Dĺžkou krivky** f nazývame hodnotu

$$d(f) = \sup\left\{d(f_D), D \in \mathfrak{D}_{\langle \alpha;\beta\rangle}\right\}, \quad \text{kde } d(f_D) = \sum_{i=1}^n \left|X_{t_{i-1}} X_{t_i}\right| = \sum_{i=1}^n d_i.$$

Dĺžka krivky f je nezávislá na jej vyjadrení a so zvolenou presnosťou ju môžeme aproximovať hodnotou $d(f_D)$, kde $D \in \mathfrak{D}_{\langle \alpha;\beta\rangle}$.

Predtým ako budeme pokračovať, dokážeme nasledujúce pomocné tvrdenie.

Lema 1.2.46.
Pre všetky $a, b, c \in R$ platí $\left|\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2}\right| \leq |c - b|$.

Dôkaz.
1. Nech $a = 0$. Potom platí $\sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{c^2} = |c|$, $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{b^2} = |b|$.
Dokazovaná nerovnosť sa redukuje na trojuholníkovú nerovnosť $|u| + |v| \geq |u + v|$. Ak postupne zvolíme $|u| = |c - b| = |b - c|$ a $|v| = |b|$, resp. $|v| = |c|$, potom platí[89]

$$|c - b| \geq \big||c| - |b|\big| = \left|\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2}\right|.$$

[89] $|c-b| + |b| \geq |c - b + b| = |c|$, resp. $|b-c| + |c| \geq |b - c + c| = |b|$, t. j. platí $|c-b| \geq |c| - |b|$ a súčasne platí $|c-b| \geq |b| - |c| = -(|c| - |b|)$. To znamená, že platí $|c - b| \geq \big||b| - |c|\big|$.

2. Nech $a \neq 0$. Bez straty na všeobecnosti môžeme predpokladať $b \leq c$.

a) Ak $b = c$, potom nerovnosť platí triviálne, t. j. $0 = \left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+b^2}\right| \leq |b-b| = 0$.

b) Pre $b < c$ uvažujme spojitú funkciu $f_a(x) = \sqrt{a^2+x^2}$, $x \in \langle b; c\rangle$.
Pre všetky $x \in (b; c)$ platí $f_a(x) > f_0(x) = |x| \geq 0$ a existuje konečná derivácia[90]

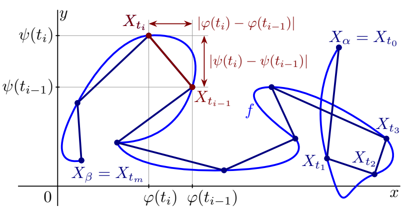
$$f_a'(x) = \left[(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \tfrac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \tfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Takže sú splnené predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (ma1: veta 4.3.3) a existuje $s \in (b; c)$ také, že platí

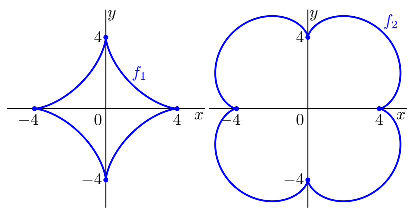
$$f_a'(s) = \tfrac{f_a(c)-f_a(b)}{c-b} = \tfrac{\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}}{c-b}, \quad \text{kde } 0 \leq |f_a'(s)| = \left|\tfrac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}\right| = \tfrac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{a^2+s^2}} < 1.$$

Z toho vyplýva tvrdenie lemy

$$\tfrac{\left|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right|}{|c-b|} = |f_a'(s)| < 1, \quad \text{t. j. } \left|\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2}\right| < |c-b|. \ \blacksquare$$



Obr. 1.2.62:
Dĺžka krivky f



Obr. 1.2.63:
Príklad 1.2.45

Nech $f\colon x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha; \beta\rangle$ je po častiach hladká krivka. Označme hraničné body intervalov, na ktorých je f hladká $t_0^* = \alpha < t_1^* < t_2^* < \cdots < t_{n-1}^* < t_n^* = \beta$, kde $n \in N$. Je zrejmé, že $D^* = \{t_0^*, t_1^*, \ldots, t_n^*\}$ je delenie $\langle \alpha; \beta\rangle$, t. j. $D^* \in \mathfrak{D}_{\langle \alpha; \beta\rangle}$. Označme

$$D_k^* = \left\{\alpha + \tfrac{\beta-\alpha}{k}\right\}_{i=0}^{k} = \left\{\alpha, \alpha + \tfrac{\beta-\alpha}{k}, \alpha + 2\tfrac{\beta-\alpha}{k}, \ldots, \alpha + k\tfrac{\beta-\alpha}{k} = \beta\right\} \in \mathfrak{D}_{\langle \alpha; \beta\rangle}$$

delenie, ktoré pre ľubovoľné $k \in N$ rozdelí $\langle \alpha; \beta\rangle$ na k intervalov s rovnakou dĺžkou $\frac{\beta-\alpha}{k}$, t. j. $\frac{\beta-\alpha}{k} = \mu(D_k^*)$. Ďalej označme spoločné zjemnenie D^* a D_k^* symbolom[91]

$$D^* \cup D_k^* = D_k = \{t_i\}_{i=0}^{m} = \{\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m = \beta\}, \quad \text{kde } m \geq k, m \geq n. \quad (1.24)$$

Je zrejmé, že pre zjemnené delenie platí $\mu(D_k) \leq \mu(D_k^*) = \frac{\beta-\alpha}{k}$. Potom

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \mu(D_k) \leq \lim_{k\to\infty} \tfrac{\beta-\alpha}{k} = 0, \quad \text{t. j. } \lim_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0.$$

To znamená, že postupnosť delení $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna a pre dĺžku krivky f platí

$$d(f) = \lim_{k\to\infty} d(f_{D_k}).$$

[90] Jediný problematický prípad by bol $a = 0$, $x = 0$, t. j. $f_0(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ a neexistujúca $f_0'(0)$.

[91] Delenia D^*, D_k^* majú spoločné hraničné body α, β, ale môžu mať spoločné aj iné deliace body.

Pre dĺžku lineárnej lomenej krivky f_{D_k}, $k \in N$ (obr. 1.2.62) platí:[92]

$$d(f_{D_k}) = \sum_{i=1}^{m} \left| X_{t_{i-1}} X_{t_i} \right| = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}. \qquad (1.25)$$

Na každom intervale $\langle t_{i-1}; t_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, m$ spĺňajú funkcie φ, ψ predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (ma1: veta 4.3.3). Ak označíme $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, potom $0 < \Delta t_i \leq \frac{\beta-\alpha}{k}$ a existujú $r_i, s_i \in (t_{i-1}; t_i)$ také, že platí

$$\varphi'(r_i) = \frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}} = \frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{\Delta t_i}, \quad \psi'(s_i) = \frac{\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}} = \frac{\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})}{\Delta t_i},$$

$$\text{t. j. } \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \Delta t_i \cdot \varphi'(r_i), \quad \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \Delta t_i \cdot \psi'(s_i).$$

Potom zo vzťahu (1.25) vyplýva

$$d(f_{D_k}) = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{[\Delta t_i \cdot \varphi'(r_i)]^2 + [\Delta t_i \cdot \psi'(s_i)]^2} = \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(r_i)]^2 + [\psi'(s_i)]^2}. \qquad (1.26)$$

Ak použijeme lemu 1.2.46 a pre $i = 1, 2, \dots, m$ položíme postupne $a = \varphi'(r_i)$, $b = \psi'(r_i)$, $c = \psi'(s_i)$, potom pre všetky $i = 1, 2, \dots, m$ platí

$$\left| \sqrt{[\varphi'(r_i)]^2 + [\psi'(r_i)]^2} - \sqrt{[\varphi'(r_i)]^2 + [\psi'(s_i)]^2} \right| \leq \left| \psi'(r_i) - \psi'(s_i) \right|. \qquad (1.27)$$

Krivka f je po častiach hladká na $\langle \alpha; \beta \rangle$, t. j. funkcia ψ' je po častiach spojitá na $\langle \alpha; \beta \rangle$. To znamená, že ψ' je spojitá a teda aj rovnomerne spojitá na každom z intervalov $\langle t^*_{j-1}; t^*_j \rangle$, $j = 1, 2, \dots, n$ delenia D^*. Z konštrukcie bodov $t_0, t_1, \dots, t_m$ delenia D_k vyplýva, že každý z intervalov $\langle t_{i-1}; t_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, m$ je podmnožinou nejakého $\langle t^*_{j-1}; t^*_j \rangle$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Potom ku každému $\varepsilon > 0$, t. j. aj ku $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} > 0$ existuje $\delta > 0$ a následne aj $k \in N$ tak, že pre všetky $t, t^\star \in \langle t_{i-1}; t_i \rangle$, $|t - t^\star| < \frac{\beta-\alpha}{k} \leq \delta$ a pre všetky $i = 1, 2, \dots, m$ platí[93]

$$|\psi'(t) - \psi'(t^\star)| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} = \varepsilon_0.$$

Pre body $r_i, s_i \in (t_{i-1}; t_i)$ platí $|r_i - s_i| < t_i - t_{i-1} \leq \frac{\beta-\alpha}{k} \leq \delta$. Potom platí

$$|\psi'(r_i) - \psi'(s_i)| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} = \varepsilon_0. \qquad (1.28)$$

Kvôli prehľadnosti pre $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ označme

$$\omega(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \qquad (1.29)$$

Odhadneme $d(f_{D_k})$ dĺžku lineárnej lomenej krivky f_{D_k}, $k \in N$ zo vzťahu (1.26). Platí:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \omega(r_i) - \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(r_i)]^2 + [\psi'(s_i)]^2} = \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \Big(\omega(r_i) - \sqrt{[\varphi'(r_i)]^2 + [\psi'(s_i)]^2} \Big).$$

Z uvedeného, vzťahov (1.27), (1.28) a z rovnosti $\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_m = \beta - \alpha$ vyplýva

$$0 \leq \left| \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \omega(r_i) - d(f_{D_k}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \Big(\omega(r_i) - \sqrt{[\varphi'(r_i)]^2 + [\psi'(s_i)]^2} \Big) \right|$$

[92]Trojuholník je pravouhlý a platí Pytagorova veta.

[93]Funkcia ψ' je rovnomerne spojitá na každom intervale $\langle t^*_{j-1}; t^*_j \rangle$, $j = 1, 2, \dots, n$ a pre každý z intervalov existujú δ_j a k_j. Takže stačí zvoliť najmenšiu z hodnôt δ_j a najväčšiu z hodnôt k_j.

$$= \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \Big|\omega(r_i) - \sqrt{[\varphi'(r_i)]^2 + [\psi'(s_i)]^2}\Big|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \big|\psi'(r_i) - \psi'(s_i)\big| < \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \tfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha} = (\beta-\alpha)\tfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha} = \varepsilon.$$

To znamená, že platí:

$$\lim_{k\to\infty} d(f_{D_k}) = \lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \omega(r_i)\right] = \lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{m} \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(r_i)]^2 + [\psi'(r_i)]^2}\right]. \qquad (1.30)$$

Dostali sme integrálne súčty funkcie $\omega(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ na intervale $\langle\alpha;\beta\rangle$. Pre dĺžku krivky f potom platí:

$$d(f) = \lim_{k\to\infty} d(f_{D_k}) = \int_\alpha^\beta \omega(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Explicitne zadanú krivku $y = f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ môžeme parametrizovať funkciami

$$f\colon x = t,\ y = f(t),\ t\in\langle a;b\rangle.$$

Ak je f' spojitá na $\langle a;b\rangle$, potom pre dĺžku grafu funkcie f platí

$$d(f) = \int_a^b \sqrt{[t']^2 + [f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

V polárnych súradniciach definovaná funkcia $\rho = f(\varphi)$, $\varphi\in\langle\alpha;\beta\rangle$ nemusí byť funkciou v karteziánskych súradniciach.[94] Vo všeobecnosti je krivkou a môžeme ju parametrizovať

$$f\colon x = f(\varphi)\cos\varphi,\ y = f(\varphi)\sin\varphi,\ \varphi\in\langle\alpha;\beta\rangle.$$

Ak je f' spojitá, potom pre dĺžku krivky f platí

$$d(f) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[(f(\varphi)\cos\varphi)']^2 + [(f(\varphi)\sin\varphi)']^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\varphi)]^2 + f^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi, \qquad (1.31)$$

pretože pre derivácie $c = [(f(\varphi)\cos\varphi)']^2$, $s = [(f(\varphi)\sin\varphi)']^2$ pod odmocninou platí

$$c = [f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi]^2 = [f'(\varphi)]^2\cos^2\varphi - 2f'(\varphi)f(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + f^2(\varphi)\sin^2\varphi,$$
$$s = [f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi]^2 = [f'(\varphi)]^2\sin^2\varphi + 2f'(\varphi)f(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + f^2(\varphi)\cos^2\varphi,$$
$$c + s = [f'(\varphi)]^2\cdot(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + f^2(\varphi)\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = [f'(\varphi)]^2 + f^2(\varphi).$$

Príklad 1.2.45.

Určte dĺžky asteroidy[95] f_1 a štvorlístka[96] f_2:

a) f_1: $x = 3\cos t + \cos 3t$, $t\in\langle 0;2\pi\rangle$.
$y = 3\sin t - \sin 3t$,

b) f_2: $x = 5\cos t - \cos 5t$, $t\in\langle 0;2\pi\rangle$.
$y = 5\sin t - \sin 5t$,

Riešenie.

a) Pre dĺžku asteroidy f_1 (obr. 1.2.63 vľavo) platí (poznámka 1.2.33):

$$d(f_1) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(3\cos t + \cos 3t)']^2 + [(3\sin t - \sin 3t)']^2}\,\mathrm{d}t = 6\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\,\mathrm{d}t = 6\cdot 4 = 24.$$

[94] Napr. kružnica s polomerom 1 má v polárnych súradniciach tvar $\rho = 1$, $\varphi\in\langle 0;2\pi)$ a predstavuje konštantnú funkciu, ale v karteziánskych súradniciach to funkcia nie je.

[95] Asteroida (hviezdica) je špeciálny prípad krivky nazývanej hypocykloida.

[96] Štvorlístok je špeciálny prípad krivky nazývanej epicykloida.

$$\left[\begin{array}{l} [(3\cos t+\cos 3t)']^2+[(3\sin t-\sin 3t)']^2=[-3\sin t-3\sin 3t]^2+[3\cos t-3\cos 3t]^2 \\ \quad =[9\sin^2 t+18\sin t\sin 3t+9\sin^2 3t]+[9\cos^2 t-18\cos t\cos 3t+9\cos^2 3t] \\ \quad =9[\sin^2 t+\cos^2 t]-18[\cos 3t\cos t-\sin 3t\sin t]+9[\sin^2 3t+\cos^2 3t] \\ \quad =9-18\cos(3t+t)+9=18\cdot[1-\cos 4t]=36\cdot\frac{1-\cos 4t}{2}=36\sin^2 2t=6^2\,|\sin 2t|^2 \end{array}\right]$$

b) Pre dĺžku štvorlístka f_2 (obr. 1.2.63 vpravo) platí (poznámka 1.2.33):

$$d(f_2)=\int_0^{2\pi}\sqrt{[(5\cos t-\cos 5t)']^2+[(5\sin t-\sin 5t)']^2}\,\mathrm{d}t=10\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,\mathrm{d}t=10\cdot 4=40.$$

$$\left[\begin{array}{l} [(5\cos t-\cos 5t)']^2+[(5\sin t-\sin 5t)']^2=[-5\sin t+5\sin 5t]^2+[5\cos t-5\cos 5t]^2 \\ \quad =[25\sin^2 t-50\sin t\sin 5t+25\sin^2 5t]+[25\cos^2 t-50\cos t\cos 5t+25\cos^2 5t] \\ \quad =25[\sin^2 t+\cos^2 t]-50[\cos 5t\cos t+\sin 5t\sin t]+25[\sin^2 5t+\cos^2 5t] \\ \quad =25-50\cos(5t-t)+25=50\cdot[1-\cos 4t]=100\cdot\frac{1-\cos 4t}{2}=100\sin^2 2t=10^2\,|\sin 2t|^2 \end{array}\right] \blacksquare$$

Poznámka 1.2.33.
Pre integrál funkcie $|\sin 2t|$, $t\in\langle 0;2\pi\rangle$ platí

$$\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin 2t)\,\mathrm{d}t+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin 2t\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}(-\sin 2t)\,\mathrm{d}t$$
$$=\Big[-\frac{\cos 2t}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[\frac{\cos 2t}{2}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\Big[-\frac{\cos 2t}{2}\Big]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}+\Big[\frac{\cos 2t}{2}\Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$
$$=\big[-(-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}\big]+\big[\tfrac{1}{2}-(-\tfrac{1}{2})\big]+\big[-(-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}\big]+\big[\tfrac{1}{2}-(-\tfrac{1}{2})\big]=4\cdot 1=4.$$

Funkcia $|\sin t|$ je periodická s periódou π, funkcia $|\sin 2t|$ je periodická s periódou $\frac{\pi}{2}$. Hodnota Riemannovho integrálu periodickej funkcie (veta 1.2.34) je rovnaká na každom intervale s dĺžkou rovnajúcou sa perióde. V našom prípade $2\pi=4\cdot\frac{\pi}{2}$ Potom platí

$$\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2t|\,\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,\mathrm{d}t=4\Big[-\frac{\cos 2t}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4\cdot 1=4.$$

Príklad 1.2.46.
Odvoďte vzorec pre obvod o kružnice k s polomerom $r>0$ (obr. 1.2.50).

Riešenie.
Explicitne môžeme k vyjadriť ako dve polkružnice $f_\pm(x)=\pm\sqrt{r^2-x^2}=\pm(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $x\in\langle -r;r\rangle$, s rovnakou dĺžkou. Platí

$$o=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+[f_-'(x)]^2}\,\mathrm{d}x+\int_{-r}^{r}\sqrt{1+[f_+'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l} f_\pm'(x)=\pm(-2x)\cdot\frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\mp x}{\sqrt{r^2-x^2}} \\ \quad 1+[f_+'(x)]^2=1+\frac{x^2}{r^2-x^2}=\frac{r^2}{r^2-x^2} \end{array}\right]$$
$$=2\int_{-r}^{r}\frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}=2r\Big[\arcsin\frac{x}{r}\Big]_{-r}^{r}=2r\big[\arcsin 1-\arcsin(-1)\big]=2r\big[\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{-\pi}{2}\big]=2\pi r.$$

Parametricky je k definovaná v tvare $f\colon x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ t\in\langle 0;2\pi\rangle$. Platí

$$o=\int_0^{2\pi}\sqrt{[(r\cos t)']^2+[(r\sin t)']^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=\left[\begin{array}{l} [(r\cos t)']^2+[(r\sin t)']^2=[-r\sin t]^2+[r\cos t]^2 \\ \quad =r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t=r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)=r^2 \end{array}\right]=\int_0^{2\pi}r\,\mathrm{d}t=r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi r.$$

V polárnych súradniciach je k definovaná konštantnou funkciou $f\colon \rho=r,\ \varphi\in\langle 0;2\pi\rangle$. Platí

$$o=\int_0^{2\pi}\sqrt{[r']^2+r^2}\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\sqrt{0^2+r^2}\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}r\,\mathrm{d}\varphi=r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=2\pi r.\ \blacksquare$$

Poznámka 1.2.34.
Pre dĺžku ***priestorovej krivky*** f *definovanej v priestore* R^3 *parametricky funkciami* $f\colon x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t),\ t\in\langle\alpha;\beta\rangle$, *pričom* φ', ψ', χ' *sú spojité na* $\langle\alpha;\beta\rangle$, *platí*

$$d(f)=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

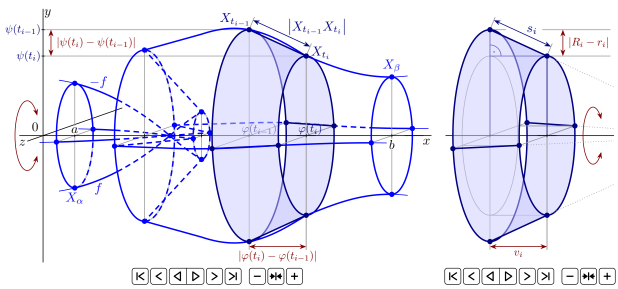
Výpočet povrchu (komplanácia) rotačného telesa — rotácia okolo osi x

Uvažujme v rovine xy po častiach hladkú parametricky vyjadrenú krivku $f\colon x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in\langle\alpha;\beta\rangle$ v rovine. Krivka f môže byť uzavretá, môže sa pretínať a funkcia ψ môže nadobúdať záporné hodnoty. Ak necháme krivku f rotovať okolo osi x, vytvorí v priestore xyz rotačnú plochu (obr. 1.2.64). Určíme obsah P_x tejto plochy, t. j. povrch plášťa (bez podstáv) takto vzniknutého rotačného telesa.

Nech $D_k=\{t_i\}_{i=0}^m$, $k\in N$ je delenie intervalu $\langle\alpha;\beta\rangle$, ktoré sme definovali pri výpočte dĺžky krivky f vo vzťahu (1.24) na strane 124.

Označme pre $i=1,2,\ldots,m$ plochu P_i, ktorá vznikne rotáciou časti krivky f na intervale $\langle t_{i-1};t_i\rangle$ okolo osi x. Každú z plôch P_i aproximujeme povrchom plášťa Q_i kolmého zrezaného kužeľa k_i (obr. 1.2.64 vpravo) s polomermi podstáv $R_i=|\psi(t_{i-1})|$, $r_i=|\psi(t_i)|$ a výškou $v_i=|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|$, ktorý vypočítame (viď napr. [1]) podľa vzorca

$$Q_i=\pi(r_i+R_i)s_i,\quad \text{kde } s_i=\sqrt{v_i^2+(R_i-r_i)^2}.$$



Obr. 1.2.64: Povrch rotačného telesa vzniknutého rotáciou krivky f okolo osi x

Pre zrezané kužele k_i, $i=1,2,\ldots,m$ na základe vzťahu (1.26) platí

$$s_i=\left|X_{t_{i-1}}X_{t_i}\right|=\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}=\Delta t_i\sqrt{[\varphi'(r_i)]^2+[\psi'(s_i)]^2},$$

kde $r_i, s_i\in(t_{i-1};t_i)$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. Pre povrchy ich plášťov potom platí

$$Q_i=\pi\big[|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big]\Delta t_i\sqrt{[\varphi'(r_i)]^2+[\psi'(s_i)]^2}.$$

Plocha $P(D_k)$, ktorou pri delení D_k, $k\in N$ aproximujeme plochu P_x má tvar

$$P(D_k)=\sum_{i=1}^m Q_i=\sum_{i=1}^m \pi\big[|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big]\Delta t_i\sqrt{[\varphi'(r_i)]^2+[\psi'(s_i)]^2}.$$

Funkcia ψ je spojitá na uzavretom intervale $\langle\alpha;\beta\rangle$, t. j. je ohraničená (ma1: Weierstrasseho veta 3.3.10) a existuje $M_\psi \in R$ také, že pre všetky $t\in\langle\alpha;\beta\rangle$ platí $|\psi(t)| \leq M_\psi$.

Ďalej postupujeme podobne ako pri odvodzovaní vzťahu (1.30). Funkcia ψ' je spojitá a teda aj rovnomerne spojitá na každom z intervalov $\langle t^*_{j-1};t^*_j\rangle$, $j=1,2,\ldots,n$ delenia D^*. Z konštrukcie bodov $t_0,t_1,\ldots,t_m$ delenia D_k vyplýva, že každý z intervalov $\langle t_{i-1};t_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,m$ je podmnožinou nejakého $\langle t^*_{j-1};t^*_j\rangle$, $j=1,2,\ldots,n$.

Potom ku každému $\varepsilon>0$, t. j. aj ku $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{2M_\psi(\beta-\alpha)}>0$ existujú $\delta>0$ a $k\in N$ tak, že pre všetky $t,t^\star\in\langle t_{i-1};t_i\rangle$, $|t-t^\star|<\frac{\beta-\alpha}{k}\leq\delta$ a pre všetky $i=1,2,\ldots,m$ platí[97]

$$|\psi'(t)-\psi'(t^\star)|<\tfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}=\varepsilon_0,\quad \text{t. j. aj } |\psi'(r_i)-\psi'(s_i)|<\tfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}=\varepsilon_0,.$$

pretože pre body $r_i,s_i\in(t_{i-1};t_i)$ platí $|r_i-s_i|<t_i-t_{i-1}\leq\frac{\beta-\alpha}{k}\leq\delta$.

Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ je normálna, takže pre plochu P_x platí

$$P_x=\lim_{k\to\infty}P(D_k)=\pi\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=1}^m\big[|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big]\Delta t_i\sqrt{[\varphi'(r_i)]^2+[\psi'(s_i)]^2}\right].\quad(1.32)$$

Najprv si upravíme predchádzajúcu limitu. Z platnosti $\Delta t_1+\Delta t_2+\cdots+\Delta t_m=\beta-\alpha$, $|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\leq M_\psi+M_\psi=2M_\psi$, vzťahu (1.27) a definície (1.29) vyplýva

$$\begin{aligned}0&\leq\left|\sum_{i=1}^m\big[|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big]\Delta t_i\omega(r_i)-\sum_{i=1}^m\big[|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big]\Delta t_i\sqrt{[\varphi'(r_i)]^2+[\psi'(s_i)]^2}\right|\\
&=\left|\sum_{i=1}^m\big[|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big]\Delta t_i\Big[\omega(r_i)-\sqrt{[\varphi'(r_i)]^2+[\psi'(s_i)]^2}\Big]\right|\\
&\leq\sum_{i=1}^m\big[|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big]\Delta t_i\Big|\omega(r_i)-\sqrt{[\varphi'(r_i)]^2+[\psi'(s_i)]^2}\Big|\\
&\leq\sum_{i=1}^m 2M_\psi\Delta t_i\,|\psi'(r_i)-\psi'(s_i)|<\sum_{i=1}^m 2M_\psi\Delta t_i\tfrac{\varepsilon}{2M_\psi(\beta-\alpha)}=\tfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^m\Delta t_i=\varepsilon.\end{aligned}$$

Keďže $\varepsilon>0$ je ľubovoľné, prakticky sme dostali rovnosť dvoch limít.

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=1}^m\big[|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big]\Delta t_i\omega(r_i)\right]=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=1}^m\big[|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big]\Delta t_i\sqrt{[\varphi'(r_i)]^2+[\psi'(s_i)]^2}\right].$$

Pre plochu P_x potom na základe vzťahu (1.32) platí

$$P_x=\lim_{k\to\infty}P(D_k)=\pi\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=1}^m\big[|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big]\Delta t_i\omega r_i\right].\quad(1.33)$$

Funkcie φ', ψ' sú po častiach spojité na $\langle\alpha;\beta\rangle$. Na každom podintervale, na ktorom sú spojité funkcie φ', ψ', je tiež spojitá (ma1: veta 3.3.4) a aj ohraničená funkcia ω, t. j. existuje $M_{\varphi\psi}\in R$ také, že pre všetky $t\in\langle\alpha;\beta\rangle$ platí $0\leq\omega(t)\leq M_{\varphi\psi}$. Zo spojitosti ψ na $\langle\alpha;\beta\rangle$ vyplýva spojitosť a aj rovnomerná spojitosť funkcie $|\psi|$ na $\langle\alpha;\beta\rangle$.

Potom ku každému $\varepsilon>0$, t. j. aj $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{2M_{\varphi\psi}(\beta-\alpha)}>0$ existujú $\delta>0$ a $k\in N$ také, že pre všetky $t,t^\star\in\langle t_{i-1};t_i\rangle$, $|t-t^\star|<\frac{\beta-\alpha}{k}\leq\delta$ a pre všetky $i=1,2,\ldots,m$ platí[98]

$$\big||\psi(t)|-|\psi(t^\star)|\big|<\tfrac{\varepsilon}{2M_{\varphi\psi}(\beta-\alpha)}=\varepsilon_0.$$

[97]Funkcia ψ' je rovnomerne spojitá na každom intervale $\langle t^*_{j-1};t^*_j\rangle$, $j=1,2,\ldots,n$ a pre každý z intervalov existujú δ_j a k_j. Takže stačí zvoliť najmenšiu z hodnôt δ_j a najväčšiu z hodnôt k_j.

[98]Funkcia $|\psi|$ je rovnomerne spojitá na každom intervale $\langle t^*_{j-1};t^*_j\rangle$, $j=1,2,\ldots,n$ a pre každý z intervalov existujú δ_j a k_j. Takže stačí zvoliť najmenšiu z hodnôt δ_j a najväčšiu z hodnôt k_j.

Pre $r_i \in (t_{i-1}; t_i)$ platí $|t_{i-1} - r_i| < t_i - t_{i-1} < \frac{\beta-\alpha}{k} \leq \delta$, $|t_i - r_i| < t_i - t_{i-1} < \frac{\beta-\alpha}{k} \leq \delta$, t. j.

$$\big||\psi(t_{i-1})| - |\psi(r_i))|\big| < \tfrac{\varepsilon}{2M_{\varphi\psi}(\beta-\alpha)} = \varepsilon_0, \quad \big||\psi(t_i)| - |\psi(r_i)|\big| < \tfrac{\varepsilon}{2M_{\varphi\psi}(\beta-\alpha)} = \varepsilon_0.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \sum_{i=1}^{m} \big[|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|\big] \Delta t_i \omega(r_i) - \sum_{i=1}^{m} 2\, |\psi(r_i)|\, \Delta t_i \omega(r_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{m} \big[|\psi(t_{i-1})| - |\psi(r_i)| + |\psi(t_i)| - |\psi(r_i)|\big] \Delta t_i \omega(r_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \big||\psi(t_{i-1})| - |\psi(r_i)| + |\psi(t_i)| - |\psi(r_i)|\big| \Delta t_i \omega(r_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \Big[\big||\psi(t_{i-1})| - |\psi(r_i)|\big| + \big||\psi(t_i)| - |\psi(r_i)|\big|\Big] \Delta t_i \omega(r_i) \\ &< \sum_{i=1}^{m} (\varepsilon_0 + \varepsilon_0) M_{\varphi\psi} \Delta t_i = 2\varepsilon_0 M_{\varphi\psi} \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i = \tfrac{2\varepsilon M_{\varphi\psi}}{2M_{\varphi\psi}(\beta-\alpha)} (\beta - \alpha) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Keďže $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, dostali smerovnosť dvoch limít.

$$\lim_{k\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} \big[|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|\big] \Delta t_i \omega(r_i) \right] = \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} 2\, |\psi(r_i)|\, \Delta t_i \omega(r_i) \right].$$

Pre plochu P_x potom na základe vzťahu (1.33) platí

$$P_x = 2\pi \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} |\psi(r_i)|\, \Delta t_i \omega(r_i) \right] = 2\pi \lim_{k\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} |\psi(r_i)|\, \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(r_i)]^2 + [\psi'(r_i)]^2} \right]$$

Dostali sme integrálne súčty funkcie $|\psi(t)|\, \omega(t) = |\psi(t)|\, \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ na $\langle \alpha; \beta \rangle$. Pre povrch P_x rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou krivky f okolo osi x, potom platí

$$P_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)|\, \omega(t)\, \mathrm{d}t = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)|\, \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t.$$

Explicitne zadanú krivku $y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$ môžeme parametrizovať funkciami

$$f\colon x = t,\ y = f(t),\ t \in \langle a; b \rangle.$$

Ak je f' spojitá na $\langle a; b \rangle$, potom pre povrch rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie f okolo osi x, platí

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi \int_{a}^{b} |f(t)|\, \sqrt{[t']^2 + [f'(t)]^2}\, \mathrm{d}t \\ &= 2\pi \int_{a}^{b} |f(t)|\, \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, \mathrm{d}t = 2\pi \int_{a}^{b} |f(x)|\, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

V polárnych súradniciach definovaná funkcia $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha; \beta \rangle$ nemusí byť funkciou v karteziánskych súradniciach.[99] Vo všeobecnosti je krivkou a môžeme ju parametrizovať

$$f\colon x = f(\varphi) \cos\varphi,\ y = f(\varphi) \sin\varphi,\ \varphi \in \langle \alpha; \beta \rangle.$$

Ak je funkcia f' spojitá, potom pre povrch telesa P_x vzniknutého rotáciou okolo osi x, t. j. okolo polárnej osi o, na základe vzťahu (1.31) platí

$$\begin{aligned} P_x = 2\pi &= \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi) \sin\varphi|\, \sqrt{[(f(\varphi) \cos\varphi)']^2 + [(f(\varphi) \sin\varphi)']^2}\, \mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi) \sin\varphi|\, \sqrt{[f'(\varphi)]^2 + f^2(\varphi)}\, \mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

[99] Napr. kružnica s polomerom 1 má v polárnych súradniciach tvar $\rho = 1$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$ a predstavuje konštantnú funkciu, ale v karteziánskych súradniciach to funkcia nie je.

Príklad 1.2.47.
Odvoďte vzorec pre povrch S gule G s polomerom $r>0$ (viď obr. 1.2.50).

Riešenie.
Explicitne vznikne G rotáciou polkružnice $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\langle -r;r\rangle$ okolo osi x. Platí

$$S=2\pi\int_{-r}^{r}|f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c} f'(x)=-2x\cdot\frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} \\ 1+[f'(x)]^2=1+\frac{x^2}{r^2-x^2}=\frac{r^2}{r^2-x^2}\end{array}\right]$$

$$=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}=2\pi r\int_{-r}^{r}\mathrm{d}x=2\pi r\Big[x\Big]_{-r}^{r}=2\pi r\big[r-(-r)\big]=4\pi r^2.$$

Parametricky je polkružnica f definovaná rovnicami $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in\langle 0;\pi\rangle$. Platí

$$S=2\pi\int_{0}^{\pi}|r\sin t|\sqrt{[(r\cos t)']^2+[(r\sin t)']^2}\,\mathrm{d}t=\left[\begin{array}{c}[(r\cos t)']^2+[(r\sin t)']^2=[-r\sin t]^2+[r\cos t]^2\\ =r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t=r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)=r^2\end{array}\right]$$

$$=2\pi\int_{0}^{\pi}r\sin t\cdot r\,\mathrm{d}t=2\pi r^2\int_{0}^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=2\pi r^2\Big[-\cos t\Big]_{0}^{\pi}=2\pi r^2\big[-(-1)+1\big]=4\pi r^2.$$

V polárnych súradniciach je f definovaná konštantnou funkciou f: $\rho=r$, $\varphi\in\langle 0;\pi\rangle$. Platí

$$S=2\pi\int_{0}^{\pi}|r\sin\varphi|\sqrt{[r']^2+r^2}\,\mathrm{d}\varphi=2\pi\int_{0}^{\pi}r\sin\varphi\cdot\sqrt{0^2+r^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi r^2\int_{0}^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=2\pi r^2\Big[-\cos\varphi\Big]_{0}^{\pi}=2\pi r^2\big[-(-1)+1\big]=4\pi r^2.\ \blacksquare$$

Príklad 1.2.48.
Vypočítajte povrch P anuloidu s polomermi $d\pm r$, $d\geq r>0$ (pr. 1.2.39, obr. 1.2.55).

Riešenie.
Anuloid vznikne rotáciou kruhu s polomerom $r>0$ okolo priamky vzdialenej od jej stredu o hodnotu $d\geq r$. Jeho povrch vypočítame ako súčet povrchov telies, ktoré vzniknú rotáciami polkružníc $f_{\pm}(x)=d\pm\sqrt{r^2-x^2}\geq 0$, $x\in\langle -r;r\rangle$ okolo osi x. Platí

$$P=2\pi\int_{-r}^{r}|f_-(x)|\sqrt{1+[f_-'(x)]^2}\,\mathrm{d}x+2\pi\int_{-r}^{r}|f_+(x)|\sqrt{1+[f_+'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\begin{array}{c}f_{\pm}'(x)=\pm(-2x)\cdot\frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\mp x}{\sqrt{r^2-x^2}}\\ 1+[f_{\pm}'(x)]^2=1+\frac{x^2}{r^2-x^2}=\frac{r^2}{r^2-x^2}\end{array}\right]=2\pi\int_{-r}^{r}f_-(x)\frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}+2\pi\int_{-r}^{r}f_+(x)\frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$=2\pi\int_{-r}^{r}[f_-(x)+f_+(x)]\frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}=\left[\,f_-(x)+f_+(x)=d-\sqrt{r^2-x^2}+d+\sqrt{r^2-x^2}=2d\,\right]$$

$$=4\pi dr\int_{-r}^{r}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}=4\pi dr\Big[\arcsin\frac{x}{r}\Big]_{-r}^{r}=4\pi dr\big[\arcsin 1-\arcsin(-1)\big]$$

$$=4\pi dr\big[\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{-\pi}{2}\big]=4\pi^2 dr.\ \blacksquare$$

Výpočet objemu telesa so známym prierezom

Nech $a,b\in R$, $a<b$. Uvažujme teleso H v trojrozmernom priestore R^3 so súradnicovými osami x, y, z, ktoré je ohraničené protiľahlými rovnobežnými rovinami[100] $x=a$, $x=b$.

Nech $y=S(x)\geq 0$, $x\in\langle a;b\rangle$ je spojitá funkcia, ktorá vyjadruje plošný obsah prierezu telesa H rovinou prechádzajúcou bodom x a kolmou na súradnicovú os x (obr. 1.2.65). To znamená, že $S(t)$, $t\in\langle a;b\rangle$ vyjadruje obsah rezu telesa H rovinou $x=t$.

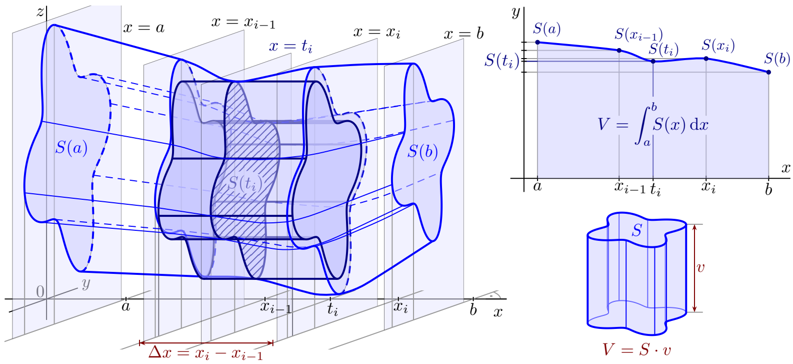
[100] Roviny sú rovnobežné s rovinou yz, sú kolmé na os x a prechádzajú bodmi $(a;0;0)$, $(b;0;0)$.

Keďže S je spojitá na intervale $\langle a;b\rangle$, platí $S\in R_{\langle a;b\rangle}$. Pre každé $n\in N$ označme

$$D_n = \left\{a+\tfrac{b-a}{n}\right\}_{n=0}^{n} = \left\{a, a+\tfrac{b-a}{n}, a+2\tfrac{b-a}{n}, \ldots, a+n\tfrac{b-a}{n}=b\right\}\in\mathfrak{D}_{\langle a;b\rangle}$$

delenie, ktoré rozdelí $\langle a;b\rangle$ na n intervalov s rovnakou dĺžkou $\frac{b-a}{n}$, t. j. $\mu(D_n)=\frac{b-a}{n}$. Postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna, pretože $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(D_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}=0$.

Označme V_i, $i=1,2,\ldots,n$ objemy telies, ktoré vzniknú prienikom telesa H s priestorom ohraničeným rovinami $x=x_{i-1}$ a $x=x_i$. Zvoľme body $T=\{t_i\}_{i=1}^{n}$ ľubovoľne tak, aby $t_i\in\langle x_{i-1};x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$.



Obr. 1.2.65: Objem telesa so známym prierezom kolmým na os x v bode $x\in\langle a;b\rangle$

Každý z objemov V_i aproximujeme hodnotou $S(t_i)\Delta x$, t. j. objemom kolmého telesa s obsahom podstavy $S(t_i)$ a výškou Δx. Objem telesa V aproximujeme súčtom

$$S(t_1)\Delta x + S(t_2)\Delta x + \cdots + S(t_n)\Delta x = S_T(S,D_n),$$

t. j. Riemannovým integrálnym súčtom funkcie S pri delení D_n a voľbe bodov $T=\{t_i\}_{i=1}^{n}$. Pre objem telesa V potom platí (dôsledok 1.2.6.a)

$$V=\lim_{n\to\infty} S_T(S,D_n)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} S(t_i)\Delta x\right]=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$$

Nech $S\in R_{\langle a;b\rangle}$ je parametrizovaná spojitými funkciami $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in J$, kde interval J má hranice α, β, funkcia φ je rýdzo monotónna na J, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Potom φ je prostá na J (ma1: veta 3.1.5) a existuje inverzná funkcia $t=\varphi^{-1}(x)\colon \langle a;b\rangle\to J$.

Pre funkciu S platí $y=S(x)=\psi(t)=\psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$, $x\in\langle a;b\rangle$. Ak použijeme substitúciu $x=\varphi(t)$, potom pre objem V platí

$$V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{r|l}\text{Subst. } x=\varphi(t) & a=\varphi(\alpha)\\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t & b=\varphi(\beta)\end{array}\right]=\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Príklad 1.2.49.

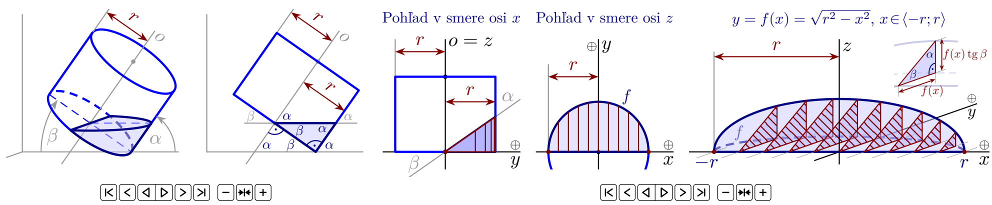
V nádobe tvaru kolmého valca s kruhovou podstavou s polomerom $r>0$ je kvapalina. Nádoba je naklonená tak, že jej os o zviera s vodorovnou rovinou uhol $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ a polovica dna je pokrytá kvapalinou (obr. 1.2.66). Vypočítajte objem V kvapaliny v nádobe.

Riešenie.
Dno pokryté kvapalinou má tvar polkruhu, kvapalina vytvorí valcový odsek.
Polkruh umiestnime do roviny xy tak, aby jeho stred bol v počiatku a jeho základňa (úsečka dĺžky $2r$) ležala na osi x. Polkružnica f (na obrázku v strede, kladná poloos y smeruje dozadu) má rovnicu $f\colon y=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\langle -r;r\rangle$.
Rez kvapaliny v bode $(x;0)$, $x\in(-r;r)$ rovinou kolmou na súradnicovú os x má tvar pravouhlého trojuholníka so základňou $f(x)$ a výškou $v(x)=f(x)\cdot\operatorname{tg}\beta$, pričom pre uhly trojuholníka platí $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\alpha,\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Obsah rezu kvapaliny je potom určený funkciou

$$S(x)=\tfrac{1}{2}f(x)\cdot v(x)=\tfrac{1}{2}f^2(x)\cdot\operatorname{tg}\beta=\tfrac{1}{2}(r^2-x^2)\operatorname{cotg}\alpha,\ \ x\in\langle -r;r\rangle.$$

Pre objem kvapaliny V potom platí

$$\begin{aligned}V&=\int_{-r}^{r}S(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-r}^{r}\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\alpha(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\alpha\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x\\&=\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\alpha\Big[r^2x-\tfrac{x^3}{3}\Big]_{-r}^{r}=\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\alpha\Big[r^3-\tfrac{r^3}{3}-(-r^3)+\tfrac{-r^3}{3}\Big]=\tfrac{2}{3}r^3\operatorname{cotg}\alpha.\ \blacksquare\end{aligned}$$



Obr. 1.2.66:
Príklad 1.2.49

Poznámka 1.2.35.
Ak po častiach spojitá funkcia $f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ rotuje okolo osi x (obr. 1.2.51), potom prierez takto vzniknutého telesa rovinou kolmou na os x prechádzajúcou bodom $(x;0)$, $x\in(a;b)$ má tvar kruhu s polomerom $f(x)$ a obsahom $S(x)=\pi f^2(x)$. Pre objem V_x rotačného telesa potom platí

$$V_x=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cvičenia

1.2.1. Nájdite aspoň 3 rôzne normálne postupnosti delení intervalu $\langle 0;1\rangle$. ♣

1.2.2. Nájdite integrálne súčty $S_D(f,D)$, $S_H(f,D)$, $S_T(f,D)$ pre funkciu f na $\langle a;b\rangle$, ak $D=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}\in D_{\langle a;b\rangle}$, deliace intervaly sú rovnako veľké, $T=\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$ sú stredy deliacich intervalov a $n=10$, $n=20$, $n=100$, resp. $n\in N$ (ľubovoľné): ♣

a) $f(x)=1-x,\ x\in\langle -1;1\rangle$, b) $f(x)=1-x^2,\ x\in\langle -1;1\rangle$,
c) $f(x)=1-x,\ x\in\langle -1;0\rangle$, d) $f(x)=1-x^2,\ x\in\langle -1;0\rangle$,
e) $f(x)=1-x,\ x\in\langle 0;1\rangle$, f) $f(x)=1-x^2,\ x\in\langle 0;1\rangle$.

1.2.3. Pomocou integrálnych súčtov $S_T(f,D)$ funkcie $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in\langle 1;2\rangle$ približne vypočítajte $\ln 2$. Delenie $D\in D_{\langle 1;2\rangle}$ zvoľte tak, aby malo $n=10$, resp. $n=20$ rovnako vzdialených deliacich bodov. Ako voľbu $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ uvažujte ľavé hranice, stredy, resp. pravé hranice deliacich intervalov. Porovnajte s hodnotou $\ln 2 = 0,693\,147$. ♣

1.2.4. Bez výpočtu rozhodnite, ktorý z daných integrálov je väčší: ♣

a) $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x,\ \int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x$, b) $\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x,\ \int_1^2 x^5\,\mathrm{d}x$, c) $\int_{-1}^1 x^3\,\mathrm{d}x,\ \int_{-1}^1 x^5\,\mathrm{d}x$,
d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$, e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{d}x,\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$, f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,\mathrm{d}x,\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$,
g) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$, h) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$, i) $\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int_1^2 x\,\mathrm{d}x$.

1.2.5. Pomocou určitých integrálov nájdite limity súčtov: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$, d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^a+2^a+3^a+\cdots+n^a}{n^{a+1}}$ pre $a>0$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}}{n}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}}{n}$.

1.2.6. Nájdite derivácie funkcie F: ♣

a) $F(x)=\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t,\ x>0$, b) $F(x)=\int_x^2 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t,\ x>0$, c) $F(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t,\ x>0$.

1.2.7. Zistite prečo substitúcia uvedená za integrálom nevedie k správnemu výsledku a určte správny výsledok. ♣

a) $\int_{-4}^2 x\,\mathrm{d}x,\ t=\sqrt[3]{x^2}$, b) $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x},\ t=\operatorname{tg} x$, c) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2},\ t=\frac{1}{x}$.

1.2.8. Vypočítajte: ♣

a) $\int_{-2}^4 |x|\,\mathrm{d}x$, b) $\int_0^2 \max\{1,x\}\,\mathrm{d}x$, c) $\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x$, d) $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$,
e) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, f) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}$, g) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}$, h) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$,
i) $\int_2^4 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$, j) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, k) $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$, l) $\int_1^{-1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$,
m) $\int_0^9 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x}$, n) $\int_0^9 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$, o) $\int_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x}{3+\sqrt[3]{x^2}}$, p) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$,
q) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$, r) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$, s) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$, t) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$,

u) $\displaystyle\int_0^1 (2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}x$, v) $\displaystyle\int_0^1 \lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x$, w) $\displaystyle\int_{-10}^{10} \lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x$, x) $\displaystyle\int_0^n \lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x,\ n\in N$.

1.2.9. Vypočítajte: ♣

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \tfrac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \tfrac{1-\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tfrac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$,

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$, j) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$,

m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$, n) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$, o) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$, p) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$,

q) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$, r) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$, s) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$, t) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

u) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x\,\mathrm{d}x$, v) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x\,\mathrm{d}x$, w) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 2x\,\mathrm{d}x$, x) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 2x\,\mathrm{d}x$.

1.2.10. Nech $m,n\in N$. Vypočítajte integrály: ♣

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin nx\cos mx\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin nx\sin mx\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos nx\cos mx\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos mx\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\sin mx\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos mx\,\mathrm{d}x$.

1.2.11. Nech $n\in N$. Vypočítajte integrály (rekurentný vzorec): ♣

a) $\displaystyle I_n=\int_0^{\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x,\ J_n=\int_0^{2\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle I_n=\int_0^{\pi} \cos^n x\,\mathrm{d}x,\ J_n=\int_0^{2\pi} \cos^n x\,\mathrm{d}x$.

1.2.12. Nájdite integrálnu strednú hodnotu funkcie f na danom intervale: ♣

a) $f(x)=x(1-x),\ x\in\langle 0;1\rangle$, b) $f(x)=2^x+x,\ x\in\langle 0;1\rangle$, c) $f(x)=\sin x,\ x\in\langle 0;\pi\rangle$,
d) $f(x)=\sin x,\ x\in\langle 0;2\pi\rangle$, e) $f(x)=\sin^2 x,\ x\in\langle 0;\pi\rangle$, f) $f(x)=\cos x,\ x\in\langle 0;\pi\rangle$.

1.2.13. Vypočítajte: ♣

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \tfrac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x}$, f) $\displaystyle\int_0^{1} x\ln x\,\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int_1^{2} x\ln x\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int_0^{2} x\ln x\,\mathrm{d}x$,

i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$, j) $\displaystyle\int_1^{-1} \tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, k) $\displaystyle\int_0^{1} \tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, l) $\displaystyle\int_0^{1} \tfrac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$,

m) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, n) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, o) $\displaystyle\int_1^{\infty} \tfrac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$, p) $\displaystyle\int_1^{\infty} \tfrac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$,

q) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$, r) $\displaystyle\int_0^{\infty} \tfrac{x^3+1}{x^4}\,\mathrm{d}x$, s) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \tfrac{x^3+1}{x^4}\,\mathrm{d}x$, t) $\displaystyle\int_1^{\infty} \tfrac{x^3+1}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

1.2.14. Dokážte, že ak je funkcia $y=f(x)$ spojitá na intervale $\langle 0;1\rangle$, potom platí:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \tfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

1.2.15. Nech $n \in N$. Vypočítajte $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} x^n\,e^{-x}\,dx$. ♣

1.2.16. Vypočítajte: ♣

a) $v.p.\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$, b) $v.p.\displaystyle\int_{1}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, c) $v.p.\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$, d) $v.p.\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$,
e) $v.p.\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$, f) $v.p.\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-1}$, g) $v.p.\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$, h) $v.p.\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos x\,dx$.

1.2.17. Zistite, či existujú integrály: ♣

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}$, c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, d) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\ln x}$,
e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}$, f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$, g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}$, h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$,
i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x\,dx}{x}$, j) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos x\,dx}{x}$, k) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin x\,dx}{x}$, l) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\cos x\,dx}{x}$,
m) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2 x\,dx}{x}$, n) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$, o) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{x}\,dx$, p) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+4}\,dx$.

1.2.18. Nech $p \in (0;1)$, $q \in (1;2)$. Vyšetrite konvergenciu integrálov: ♣

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x}$, b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x}$, c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^2}$, d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^p}$,
e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^q}$, f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}$, h) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^3-1}{x^4+1}\,dx$.

1.2.19. Odvoďte vzorec pre obsah: ♣

a) kruhu s polomerom $r > 0$, b) elipsy s poloosami $a > 0$, $b > 0$.

1.2.20. Pomocou integrálneho počtu odvoďte vzorec pre obsah trojuholníka so základňou $a > 0$ a výškou $v > 0$. ♣

1.2.21. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkami: ♣

a) $y = x - x^2$, $y = 0$, b) $y = \frac{4}{x}$, $y = 6 - x$,
c) $y = x^2$, $x = y^2$, d) $y = x^3$, $x = y^3$,
e) $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + 3x + 10$, f) $y^2 + 8x - 16 = 0$, $y^2 - 24x - 48 = 0$,
g) $y = x^2 + 5x + 2$, $y = 12 - 2x$, h) $y = x^2 - 5x + 2$, $y = 12 - 2x$,
i) $y = x^2 + 5x + 2$, $y = 12 - 2x$, $y = -6$, j) $y = x^2 - 5x + 2$, $y = 12 - 2x$, $x = 0$.

1.2.22. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkami: ♣

a) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$, b) $y = \ln x$, $y = \ln^3 x$, c) $y = \ln^2 x$, $y = \ln^3 x$.

1.2.23. Nech $m, n \in N$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkami: ♣
a) $y = x^n$, $y = x^m$, b) $y = \sqrt[n]{x}$, $y = \sqrt[m]{x}$, c) $y = x^n$, $y = \sqrt[m]{x}$,
d) $y = x^n$, $x = y^m$, e) $y = \sqrt[n]{x}$, $x = \sqrt[m]{y}$, f) $x = y^n$, $x = \sqrt[m]{y}$.

1.2.24. Určte obsah roviny ohraničenej parabolou p a jej dotyčnicami v daných bodoch: ♣
a) $p : y = x^2 - 5x + 6$, $x = 1$ a $x = 2$, b) $p : y = x^2 - 6x + 8$, $x = 1$ a $x = 4$.

1.2.25. Krivky $y = |x| - 4$, $x = 3|y| - 8$ rozdelia rovinu na tri uzavreté ohraničené časti. Vypočítajte ich obsahy. ♣

1.2.26. Krivka $y = |x| + 2$ rozdelí kružnicu $x^2 + y^2 = 9$ na dve časti. Vypočítajte obsahy oboch častí. ♣

1.2.27. V rovine sú dané dve kružnice s polomermi 2 cm a 3 cm. Ich stredy sú vzdialené 2 cm. Vypočítajte obsah ich spoločnej časti. ♣

1.2.28. Nech $n = 1, 3, 5, 7, 9$. Vypočítajte obsah roviny ohraničenej krivkou, ktorá je zadaná parametricky v tvare $x = a\cos^n t$, $y = a\sin^n t$, $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$. ♣

1.2.29. Nech $n = 2, 4, 6, 8$. Vypočítajte obsah roviny ohraničenej krivkou zadanou v parametrickom tvare $x = a\cos^n t$, $y = a\sin^n t$, $t \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ a osami x a y. ♣

1.2.30. Nech $a > 0$. Vypočítajte obsah roviny ohraničenej krivkou zadanou v parametrickom tvare $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$ a osou x. ♣

1.2.31. Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkou zadanou parametricky: ♣
a) $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$, b) $x = nt - t^2$, $y = nt^2 - t^3$ pre $n \in N$.

1.2.32. Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej súradnicovou osou $\varphi = 0$ a krivkou zadanou v polárnom súradnicovom systéme v tvare: ♣
a) $\rho(\varphi) = 3\varphi$, $\varphi \in \langle 0; \pi\rangle$, b) $\rho(\varphi) = 3\cos(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$,
c) $\rho(\varphi) = 3 + \cos(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0; \pi\rangle$, d) $\rho(\varphi) = 3 + \sin(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0; \pi\rangle$.

1.2.33. Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkou zadanou v polárnom súradnicovom systéme v tvare: ♣
a) $\rho(\varphi) = 3\varphi$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$, b) $\rho(\varphi) = 3\cos(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0; \pi\rangle$,
c) $\rho(\varphi) = 3 + \cos(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$, d) $\rho(\varphi) = 3\sin^2(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0; \pi\rangle$,
e) $\rho(\varphi) = 3\sin^2(\varphi)$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$, f) $\rho(\varphi) = 1 + \cos\varphi$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$

1.2.34. Nájdite obsah roviny ohraničenej Bernoulliho lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$, kde $a > 0$ (použite polárne súradnice). ♣

1.2.35. Odvoďte vzorec pre objem: ♣
a) gule s polomerom $r > 0$,
b) rotačného elipsoidu s poloosami $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$,

c) rotačného kužeľa s polomerom základne $r > 0$ a výškou $v > 0$,

d) zrezaného rotačného kužeľa s polomermi základni $R > r > 0$ a výškou $v > 0$.

1.2.36. Vypočítajte objemy rotačných telies, ktoré vzniknú rotáciou okolo osi x a okolo osi y časti roviny ohraničenej krivkami: ♣

a) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 2$, b) $y = x^2$, $x = y^2$, c) $y = x^2$, $y = x$,

d) $y = 3 - x^2$, $y = x^2 + 2$, e) $y = x^2 + 2$, $y = x + 2$, f) $y = x^3$, $x = y^3$,

g) $y = \ln x$, $x = 10$, $y = 0$, h) $y = \sin x$, $y = \frac{2x}{\pi}$, $x \geq 0$, i) $y = \sin x$, $y = \frac{2x}{\pi}$.

1.2.37. Nech $p > 0$. Uvažujme v rovine krivku f skladajúcu sa z grafu funkcie $y = x^{-p}$, $x \in (0; 1\rangle$ a z úsečky $x = 1$, $y \in \langle 0; 1\rangle$. Rotáciou krivky f okolo súradnicovej osi y vznikne v priestore nekonečne vysoký „továrenský komín“. Vypočítajte jeho objem V_p. ♣

1.2.38. Nech $p > 0$. Krivka f: $y = x^{-p}$, $x \in \langle 1; \infty)$ rotuje okolo súradnicovej osi x. Vypočítajte objem V_p takto vzniknutého nekonečne dlhého rotačného telesa. ♣

1.2.39. Vypočítajte objemy rotačných telies, ktoré vzniknú rotáciou okolo osi x a okolo osi y časti roviny ohraničenej osou x a krivkou zadanou parametricky: ♣

a) $x = t^2$, $y = t - t^3$, $t \in \langle 0; 1\rangle$, b) $x = t - \sin t$, $x = 1 - \cos t$, $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$,

c) $x = t^2 - \sin t$, $x = 1 - \cos t$, $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$, d) $x = t^3 - \sin t$, $x = 1 - \cos t$, $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$.

1.2.40. Nech $a > 0$. Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou danej množiny M okolo polárnej osi: ♣

a) Pascalovej závitnice $M = \big\{(\varphi; \rho) \in R^2,\ 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 2a(2 + \cos\varphi)\big\}$,

b) Archimedovej špirály $M = \big\{(\varphi; \rho) \in R^2,\ 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 2\varphi\big\}$,

c) kardioidy $M = \big\{(\varphi; \rho) \in R^2,\ 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq a(1 + \cos\varphi)\big\}$.

1.2.41. Odvoďte vzorec pre obvod: ♣

a) kružnice s polomerom $r > 0$, b) polkružnice s polomerom $r > 0$.

1.2.42. Vypočítajte dĺžku krivky: ♣

a) $y = x^2$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, b) $y = x^2$, $x \in \langle 0; 10\rangle$, c) $y = x^2$, $x \in \langle 0; a\rangle$, $a > 0$,

d) $y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, e) $y = \ln x$, $x \in \langle 1; \mathrm{e}\rangle$, f) $y = \sqrt{x^3}$, $x \in \langle 0; 1\rangle$.

1.2.43. Vypočítajte dĺžku krivky zadanej parametricky: ♣

a) $x = 2 - t$, $y = t^2 + 1$, $t \in \langle 0; 1\rangle$, b) $x = 2t^2$, $y = 2t - t^2$, $t \in \langle -1; 1\rangle$,

c) $x = t^2$, $y = t^3 + 1$, $t \in \langle 0; 2\rangle$, d) $x = 1 - t$, $y = \sqrt{t^3} + 1$, $t \in \langle 0; 2\rangle$,

f) $x = t - \sin t^2$, $y = 1 - \cos t^2$, $t \in \langle 0; \sqrt{\pi}\rangle$, e) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in \langle 0; \pi\rangle$.

1.2.44. Nech $a > 0$. Vypočítajte dĺžku asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0; 2\pi\rangle$. ♣

1.2.45. Nech $a > 0$. Vypočítajte dĺžku krivky zadanej v polárnom systéme: ♣

a) $\rho(\varphi) = a\varphi$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$ (prvý závit Archimedovej špirály),

b) $\rho(\varphi) = \frac{a}{\varphi}$, $\varphi \in \langle 2; 8\rangle$ (oblúk hyperbolickej špirály),

c) $\rho(\varphi) = a\,\mathrm{e}^{\varphi}$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$ (prvý závit logaritmickej špirály),

d) $\rho(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$ (kardioida).

1.2.46. Odvoďte vzorec pre povrch: ♣

a) gule s polomerom $r > 0$,

b) polgule s polomerom $r > 0$,

c) rotačného kužeľa s polomerom základne $r > 0$ a výškou $v > 0$,

d) zrezaného rotačného kužeľa s polomermi základni $R > r > 0$ a výškou $v > 0$.

1.2.47. Vypočítajte povrchy rotačných telies, ktoré vzniknú rotáciou nasledujúcich kriviek okolo osi x: ♣

a) $y = x^2$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, b) $y = x^3$, $x \in \langle 0; 1\rangle$, c) $y = \sin x$, $x \in \langle 0; \pi\rangle$.

1.2.48. Vypočítajte povrchy rotačných telies, ktoré vzniknú rotáciou okolo osi x a okolo osi y časti roviny ohraničenej osou x a krivkou zadanou parametricky: ♣

a) $x = 4 - \frac{t}{2}$, $y = t^3$, $t \in \langle 0; 1\rangle$, b) $x = \mathrm{e}^t \sin t$, $y = \mathrm{e}^t \cos t$, $t \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$,

c) $x = t - \sin t$, $y = \cos t$, $t \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$, d) $x = \mathrm{e}^t \cos t$, $y = \mathrm{e}^t \sin t$, $t \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$.

1.2.49. Nech $a > 0$. Vypočítajte povrch plochy, ktorá vznikne rotáciou časti asteroidy $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ okolo osi x. ♣

1.2.50. Vypočítajte povrch rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou danej krivky v polárnom súradnicovom systéme okolo polárnej osi: ♣

a) $\rho(\varphi) = \cos\varphi$, $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$, b) $\rho(\varphi) = 1 + \cos\varphi$, $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$,

c) $\rho(\varphi) = \sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$, d) $\rho(\varphi) = 1 + \sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$,

e) $\rho(\varphi) = \cos\varphi + \sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$, f) $\rho(\varphi) = \cos\varphi - \sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$.

Kapitola 2

Funkcie n reálnych premenných

2.1 Reálne a vektorové funkcie

S pojmom vektor sme sa stretli už na základnej škole, keď sme v rovine alebo v priestore spájali dva body. Vo všeobecnosti vektormi môžu byť rôzne objekty (usporiadané n-tice, matice, funkcie alebo aj reálne čísla). Spolu so svojimi vlastnosťami tvoria vektorový priestor [11, 20, 34]. **Vektorový priestor** sa tiež niekedy nazýva **lineárny priestor**, jeho prvky sa nazývajú **vektory**. Prvky poľa, t. j. komutatívneho telesa, nad ktorým je definovaný, sa nazývajú **skaláre**. Vo všeobecnosti môžeme vektorový priestor definovať nad ľubovoľným poľom. My sa obmedzíme na pole $(R, +, \cdot)$, t. j. množinu všetkých reálnych čísel R s operáciami sčítania $+$ a násobenia $\cdot$. Vektory, ktorými sa budeme zaoberať, budú usporiadané n-tice reálnych čísel, t. j. prvky Euklidoveho priestoru R^n, kde $n \in N$.

Najprv si zopakujeme základné vlastnosti. Uvažujme neprázdnu množinu V prvkov (vektorov), na ktorej je definovaná binárna operácia sčítanie[1] $\oplus$: $V \times V \to V$ taká, že dvojica $(V, \oplus)$ tvorí komutatívnu grupu. To znamená:

- Pre všetky $\alpha, \beta, \gamma \in V$ platí $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$ (asociatívny zákon).
- Existuje $\mathbf{0} \in V$ (neutrálny prvok) taký, že pre všetky $\alpha \in V$ platí $\alpha \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus \alpha = \alpha$.
- Ku každému $\alpha \in V$ existuje jediné β (symetrizačný prvok) tak, že $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha = \mathbf{0}$. Symetrizačný prvok sa tiež nazýva inverzný, resp. opačný a označuje sa $\beta = \ominus\alpha$.
- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$ (komutatívny zákon).

Nech vonkajšia operácia[2] $\odot$: $R \times V \to V$ je taká, že pre všetky $c, d \in R$, $\alpha, \beta \in V$ platí:

- $c \odot (d \odot \alpha) = (c \cdot d) \odot \alpha$.
- $c \odot (\alpha \oplus \beta) = (c \odot \alpha) \oplus (c \odot \beta)$.
- $(c + d) \odot \alpha = (c \odot \alpha) \oplus (d \odot \alpha)$.
- $1 \odot \alpha = \alpha$.

Potom $(V, \oplus, \odot)$, t. j. množinu V s binárnou operáciou $\oplus$ a vonkajšou operáciou $\odot$, nazývame **vektorovým** (**lineárnym**) **priestorom** nad telesom R.

Funkcia $(\cdot, \cdot)$: $V \times V \to R$ sa nazýva **skalárny súčin** lineárneho priestoru V a lineárny priestor sa nazýva **so skalárnym súčinom**, ak:

- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ (symetrickosť).
- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$, $c \in R$ platí $(c \odot \alpha, \beta) = c \cdot (\alpha, \beta)$ (homogénnosť).

[1] Ak sčítame dva vektory, dostaneme opäť vektor.
[2] Ak vynásobíme číslo (skalár) a vektor, dostaneme vektor.

- Pre všetky $\alpha, \beta, \gamma \in V$ platí $(\alpha \oplus \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ (aditívnosť).
- Pre všetky $\alpha \neq \mathbf{0}$ platí $(\alpha, \alpha) > 0$ (kladná definitnosť).

Funkcia $\|\cdot\|$: $V \to R$ sa nazýva **norma** lineárneho priestoru V a lineárny priestor sa nazýva **normovaný**, ak:

- Pre všetky $\alpha \in V$ platí $\|\alpha\| \geq 0$, pričom $\|\alpha\| = 0$ platí práve vtedy, ak $\alpha = \mathbf{0}$.
- Pre všetky $\alpha \in V$, $c \in R$ platí $\|c \odot \alpha\| = |c| \cdot \|\alpha\|$.
- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí trojuholníkova nerovnosť $\|\alpha \oplus \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$.

Funkcia ϱ: $V \times V \to R$ sa nazýva **metrika** lineárneho priestoru V a lineárny priestor sa nazýva **metrický**, ak:

- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí $\varrho(\alpha, \beta) \geq 0$, pričom $\varrho(\alpha, \beta) = 0$ platí iba pre $\alpha = \beta$.
- Pre všetky $\alpha, \beta \in V$ platí $\varrho(\alpha, \beta) = \varrho(\beta, \alpha)$ (symetrickosť).
- Pre všetky $\alpha, \beta, \gamma \in V$ platí trojuholníkova nerovnosť $\varrho(\alpha, \beta) \leq \varrho(\alpha, \gamma) + \varrho(\gamma, \beta)$.

Ak $(\cdot, \cdot)$: $V \times V \to R$ je skalárnym súčinom lineárneho priestoru V, potom funkcia $\|\cdot\|$: $V \to R$ definovaná vzťahom $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$ je normou tohto lineárneho priestoru. Hovoríme, že **skalárny súčin indukuje normu** priestoru.

Funkcia ϱ: $V \times V \to R$ definovaná vzťahom $\varrho(\alpha, \beta) = \|\alpha \ominus \beta\|$ je metrikou tohto lineárneho priestoru. Hovoríme, že **norma indukuje metriku** priestoru.

V danom lineárnom priestore V môže byť definovaných viacero skalárnych súčtov, noriem, či metrík (viď poznámka 2.1.2). Ak hovoríme o metrickom priestore, normovanom priestore, resp. o priestore so skalárnym súčinom, musíme uvažovať priestor V s konkrétnou metrikou, normou, resp. skalárnym súčinom.

Pomocou skalárneho súčinu môžeme vybudovať v priestore R^n, $n \in N$ geometriu s použitím vzdialeností a uhlov, ako sme zvyknutí v rovine, resp. v priestore. Skalárny súčin dvoch vektorov reprezentuje uhol (jeho kosínus), t. j. odchýlku prvkov (vektorov). Metrika vyjadruje vzdialenosť prvkov a norma vyjadruje veľkosť (dĺžku) prvku.

2.1.1 Euklidov priestor R^n

Množina $R^n = R \times R \times \cdots \times R = \{\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n), x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$, $n \in N$ sa skladá z usporiadaných n-tíc reálnych čísel. Pre všetky skaláre $c \in R$ a pre všetky vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$ sú definované (binárna) operácia súčet $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ usporiadaných n-tíc (vektorov) a (vonkajšia) operácia $c \cdot \boldsymbol{x}$ súčin reálneho čísla (skalára) a usporiadanej n-tice (vektora) po zložkách predpismi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1; x_2; \ldots; x_n) + (y_1; y_2; \ldots; y_n) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \ldots; x_n + y_n), \\ c\boldsymbol{x} = c \cdot \boldsymbol{x} &= c \cdot (x_1; x_2; \ldots; x_n) = (cx_1; cx_2; \ldots; cx_n). \end{aligned}$$

Pre ľubovoľné $n \in N$ je priestor $(R^n, +, \cdot)$ lineárny (vektorový) s neutrálnym (nulovým) prvkom $\mathbf{0}_n = (0; 0; \ldots; 0)$. Pre svoje metrické vlastnosti sa nazýva **Euklidov**, resp. **euklidovský** (**n-rozmerný**) **priestor**. Namiesto $(R^n, +, \cdot)$ budeme stručne písať R^n.

Jeho **kanonickú** (základnú, prirodzenú) **bázu** tvoria vektory

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1; 0; \ldots; 0), \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0; 1; \ldots; 0), \ \ldots, \ \boldsymbol{\varepsilon}_n = (0; 0; \ldots; 1),$$

t. j. vektory $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0; \ldots; 0; 1; 0; \ldots; 0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (na i-tom mieste je jednotka).

Pre $n = 1$ dostaneme tiež lineárny priestor. Je ním množina všetkých reálnych čísel R. Vektor $\boldsymbol{x} = (x) \in R$ budeme zapisovať stručne bez zátvoriek, t. j. x.

Nech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$, $n \in N$, $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$. **Skalárny súčin** prvkov (vektorov) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ definujeme vzťahom ($\boldsymbol{y}^T$ je transponovaný vektor k $\boldsymbol{y}$)

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Veľkosť (**dĺžku**) prvku (vektora) $\boldsymbol{x}$ definujeme pomocou normy indukovanej týmto skalárnym súčinom, ktorú nazývame **euklidovská norma**, vzťahom

$$\|\boldsymbol{x}\|_n = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Vzdialenosť prvkov (vektorov) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ definujeme pomocou metriky indukovanej euklidovskou normou, ktorú nazývame **euklidovská metrika**, vzťahom

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_n = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Keďže platí $\|\boldsymbol{x}\|_n = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{0}_n\|_n$, potom veľkosť (dĺžka) vektora $\boldsymbol{x}$ v priestore R^n znamená súčasne vzdialenosť vektorov $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{0}_n$.

Poznámka 2.1.1.

Euklidovská metrika a norma reprezentujú vzdialenosť a veľkosť, ako ju poznáme z analytickej geometrie v priestoroch R, R^2, R^3 a zovšeobecňujú pre R^n, $n \in N$.
Pre $n = 1$, t. j. pre čísla $\boldsymbol{x} = x$, $\boldsymbol{y} = y$ na priamke R platí

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1 = |x - y|.$$

Pre $n = 2$, t. j. pre vektory $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1; y_2)$ v rovine R^2 platí

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Pre $n = 3$, t. j. pre vektory $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1; y_2; y_3)$ v priestore R^3 platí

$$\|\boldsymbol{x}\|_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_3 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Skalárny súčin $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|_n \cdot \|\boldsymbol{y}\|_n \cdot \cos\varphi$ vyjadruje uhol φ, ktorý zvierajú $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Špeciálne

$$\cos\varphi = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \quad \text{pre } n = 2, \qquad \cos\varphi = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \quad \text{pre } n = 3.$$

Poznámka 2.1.2.

*Euklidovská norma v priestore R^n, $n \in N$ je špeciálnym prípadom p-**normy** pre $p = 2$.*
Uvedená p-norma, $p > 1$ je pre $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R^n$ definovaná predpisom

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \sqrt{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}.$$

*V priestore R^n sa ešte používajú **maximová (kubická)** norma $\|\cdot\|_m$ a **súčtová (oktaedrická)** norma $\|\cdot\|_s$ (všetky uvedené normy sú ekvivalentné)*

$$\|\boldsymbol{x}\|_m = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right\}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_s = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

V priestore R^n sú všetky uvedené normy $\|\cdot\|_n$, $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_m$, $\|\cdot\|_s$ navzájom ekvivalentné.

Nasledujúce definície v n-rozmernom priestore R^n, $n \in N$ sú identické ako na množine reálnych čísel R (ma1: 2.2 Topologické a metrické vlastnosti reálnych čísel).

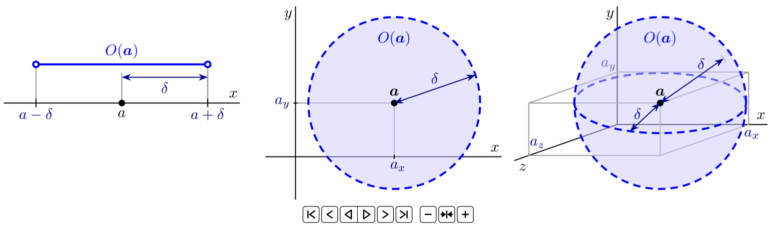
Nech $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in R^n$, $n \in N$. **Okolím** (**δ-okolím**) $O_\delta(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a}$ s polomerom $\delta > 0$ nazývame množinu (obr. 2.1.1)

$$O_\delta(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in R^n, \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_n < \delta\}.$$

Ak z okolia vylúčime bod $\boldsymbol{a}$, dostaneme **prstencové okolie** bodu $\boldsymbol{a}$ s polomerom $\delta > 0$

$$P_\delta(\boldsymbol{a}) = O_\delta(\boldsymbol{a}) - \{\boldsymbol{a}\} = \{\boldsymbol{x} \in R^n, 0 < \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_n < \delta\}.$$

V prípade, že nie je veľkost polomeru $\delta > 0$ podstatná, hovoríme o okolí, resp. o prstencovom okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a označujeme stručne $O(\boldsymbol{a})$, resp. $P(\boldsymbol{a})$.



Obr. 2.1.1: δ-okolie $O_\delta(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a} = a \in R$,
bodu $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y) \in R^2$ a bodu $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z) \in R^3$

Uvažujme množinu $A \subset R^n$ a bod $\boldsymbol{a} \in R^n$, kde $n \in N$.

$\boldsymbol{a} \in A$ sa nazýva **vnútorný bod** množiny A, ak existuje okolie $O(\boldsymbol{a}) \subset A$. Množinu všetkých vnútorných bodov A nazývame **vnútro množiny** A a označujeme $\operatorname{int} A$.

$\boldsymbol{a} \in R^n$ sa nazýva **vonkajší bod** množiny A, ak je vnútorným bodom jej doplnku $A' = R^n - A$. Množinu všetkých vonkajších bodov A nazývame **vonkajšok množiny** A a označujeme $\operatorname{ext} A$.

$\boldsymbol{a} \in R^n$ sa nazýva **hraničný bod** množiny A, ak nie je ani vnútorným a ani vonkajším bodom množiny A. To znamená, že v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod patriaci do A a aspoň jeden bod patriaci do $R^n - A$. Množinu všetkých hraničných bodov A nazývame **hranica množiny** A a označujeme ∂A.

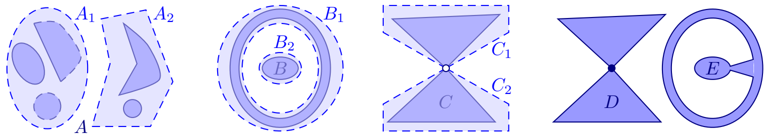
$\boldsymbol{a} \in R^n$ sa nazýva **hromadný bod** množiny A, ak v každom jeho okolí $O(\boldsymbol{a})$ leží aspoň jeden bod z množiny A rôzny od $\boldsymbol{a}$, t. j. $(O(\boldsymbol{a}) - \{\boldsymbol{a}\}) \cap A \neq \emptyset$. Zjednotenie A s množinou všetkých jej hromadných bodov nazývame **uzáver množiny** A a označujeme $\overline{A}$.

$\boldsymbol{a} \in A$, ktorý nie je hromadným bodom A sa nazýva **izolovaný bod** množiny A.

Poznámka 2.1.3.
Ak $A \subset R^n$, $n \in N$, potom sú množiny $\operatorname{int} A$, ∂A a $\operatorname{ext} A$ po dvoch disjunktné a ich zjednotenie tvorí celý priestor R^n, t. j. $\operatorname{int} A \cup \partial A \cup \operatorname{ext} A = R^n$.
Pre doplnok $A' = R^n - A$ platí $\partial A = \partial A'$, $\operatorname{int} A = \operatorname{ext} A'$, $\operatorname{ext} A = \operatorname{int} A'$.

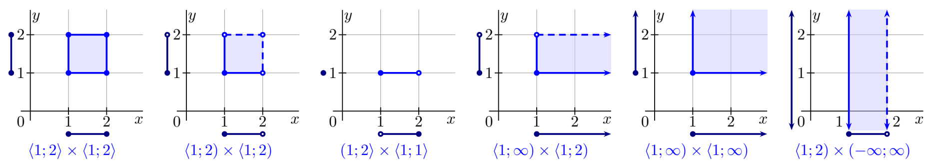
Množina $A \subset R^n$, kde $n \in N$, sa nazýva:

- **uzavretá**, ak $A = \overline{A}$ (obsahuje všetky svoje hromadné body).
- **otvorená**, ak $A = \operatorname{int} A$ (každý jej bod je vnútorný).



Obr. 2.1.2: Príklady nesúvislých množín A, B, C a súvislých množín D, E v R^2

- **ohraničená**, ak existuje $\alpha > 0$ tak, že $\|\boldsymbol{x}\|_n < \alpha$ pre všetky $\boldsymbol{x} \in A$.
- **nesúvislá** (obr. 2.1.2), ak existujú otvorené množiny $A_1, A_2 \subset R^n$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ také, že platí $A \subset A_1 \cup A_2$, $A \cap A_1 \neq \emptyset$, $A \cap A_2 \neq \emptyset$.
- **súvislá**, ak nie je nesúvislá množina.
- **oblasť**, ak je otvorená a súvislá množina.



Obr. 2.1.3: Príklady intervalov v priestore R^2

Okrem okolí, dôležitými množinami pre analýzu viacpremenných funkcií su intervaly. **Intervalom** (**n-rozmerným intervalom**) I v priestore R^n, $n \in N$ nazývame množinu

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R^n,\ x_i \in I_i \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, n\},$$

kde I_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú jednorozmerné reálne intervaly,[3] $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \in R^*$ sú také, že $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, ..., $a_n \leq b_n$. Príklady intervalov v R^2 sú na obr. 2.1.3.

I je **otvorený interval**, ak sú všetky čiastkové intervaly I_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ otvorené.

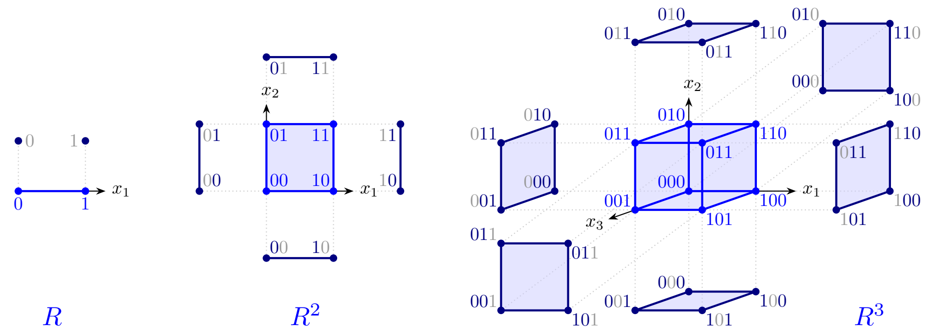
I je **uzavretý interval**, ak sú všetky čiastkové intervaly I_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ uzavreté.

I sa nazýva **nedegenerovaný interval**, ak pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $a_i < b_i$. Ak pre aspoň jedno $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $a_i = b_i$, potom sa I nazýva **degenerovaný**.

I sa nazýva **ohraničený interval**, ak sú všetky intervaly I_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ohraničené. Ak je aspoň jeden z I_i neohraničený, potom sa I nazýva **neohraničený**.

Príklad 2.1.1.
Z geometrického hľadiska je zaujimavým objektom n-rozmerná kocka (hyperkocka) s rozmerom $n = 1, 2, 3, \ldots$. V tomto ponímaní môžeme úsečku považovať za jednorozmernú kocku, štvorec za dvojrozmernú kocku a bod za kocku s rozmerom nula.
Vo všeobecnosti má n-rozmerná kocka 2^n vrcholov $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n)$, pričom $u_i \in \{0, a\}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$ a $a > 0$ je dĺžka jej hrany. Hyperkocka má $2n$ stien a každú stenu tvorí

[3] $I_i = (a_i; b_i)$, $I_i = (a_i; b_i\rangle$, $I_i = \langle a_i; b_i)$, resp. $I_i = \langle a_i; b_i\rangle$.



Obr. 2.1.4: Hyperkocky s hranou $a = 1$ pre $n = 1, 2, 3$ a ich rozklad na jednotlivé steny (príklad 2.1.1)

$(n-1)$-rozmerná kocka, t. j. kocka rozmeru o jednotku nižšieho (obr. 2.1.4). Tieto steny tvoria n protiľahlých párov, ktoré sa líšia iba v jednej, a to i-súradnici ($i = 1, 2, \ldots, n$). Body prvej steny z páru majú túto súradnicu $u_i = 0$ a body protiľahlej steny majú túto súradnicu $u_i = a$. To znamená, že tieto steny sú od seba vzdialené o hodnotu a.
Najvzdialenejšie vrcholy sú protiľahlé vrcholy, ktoré majú súradnice $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; \ldots; v_n) = (a - u_1; a - u_2; \ldots; a - u_n)$, kde $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \{0, a\}$. Spojnice vrcholov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ tvoria najdlhšie uhlopriečky v kocke a platí $u_i = a$, $v_i = 0$, resp. $u_i = 0$, $v_i = a$ a tiež $u_i + v_i = a$, $u_i - v_i = |a|$. Takýchto uhlopriečok[4] je 2^{n-1} a ich dĺžka je

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_n = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2} = \sqrt{a^2 + \cdots + a^2} = \sqrt{na^2} = \sqrt{n}a.$$

Na obrázkoch 2.1.4 a 2.1.5 sú znázornené n-rozmerné kocky pre $n = 1, 2, 3, 4$. Kvôli názornosti položíme $a = 1$ a súradnice vrcholov budeme písať bez zátvoriek a bez oddeľovacích znakov. Symbol ␣ postupne nahrádzame hodnotami 0 a 1.

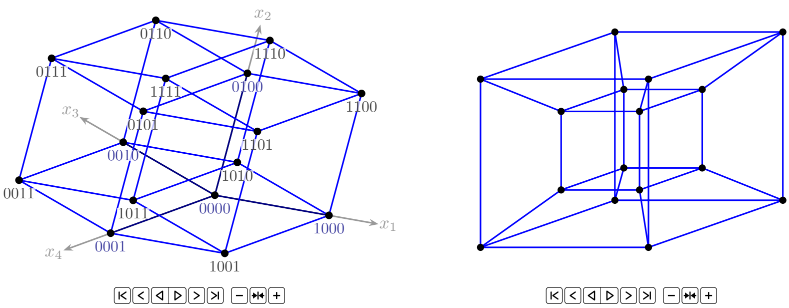
• V priestore $R^1 = R$ (priamka) tvorí jednorozmernú kocku úsečka s vrcholmi 0 a 1, ktoré sú zároveň aj stenami. Uhlopriečky neexistujú.

• V priestore R^2 (rovina) tvorí dvojrozmernú kocku štvorec s vrcholmi 00, 10, 01 a 11. Kocka má štyri steny (úsečky) 0␣-1␣, ␣0-␣1 a dve uhlopriečky 00–11, 10–01.

• V priestore R^3 má kocka osem vrcholov 000, 100, 110, 010, 001, 101, 111 a 011, šesť stien (štvorce) 00␣-10␣-11␣-01␣, 0␣0-1␣0-1␣1-0␣1, ␣00-␣10-␣11-␣01 a štyri telesové uhlopriečky 000–111, 001–110, 010–101, 100–011.

• V priestore R^4 má teserakt (štvorrozmerná kocka) šestnásť vrcholov 0000, 1000, ..., 1111, osem stien (trojrozmerné kocky) 000␣-100␣-⋯-011␣, 00␣0-10␣0-⋯-01␣1, 0␣00-1␣00-⋯-0␣11, ␣000-␣100-⋯-␣011 a taktiež osem telesových uhlopriečok 0000–1111, 1000–0111, 0100–1011, 0010–1101, 0001–1110, 1100–0011, 1010–0101, 1001–0110. ■

[4]Každá zložka u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ vrcholu $\boldsymbol{u}$ môže nadobúdať iba dve hodnoty 0 alebo a. Vrcholov $\boldsymbol{u}$ a taktiež dvojíc $\boldsymbol{uv}$ je potom 2^n. Keďže uhlopriečky $\boldsymbol{uv}$ a $\boldsymbol{vu}$ sú identické, ich počet je polovičný 2^{n-1}.



Obr. 2.1.5: 4-rozmerná hyperkocka (teserakt)

2.1.2 Funkcie v priestore R^n

V tejto časti sa budeme venovať funkciám, kde definičný obor a aj obor hodnôt sú viacrozmerné Euklidove priestory. Pojem funkcia, t. j. zobrazenie dvoch množín,[5] rozširuje pojem relácie a jeho definícia je identická pre ľubovoľné množiny (viď napr. [6, 49]).

Zobrazenie (**funkciu**) z množiny $A \neq \emptyset$ (definičný obor, množina vzorov) do množiny $B \neq \emptyset$ (obor hodnôt, množina obrazov, množina funkčných hodnôt) nazývame každú reláciu $f \subset A \times B$ takú, že pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $(x; y) \in f$ a označujeme $f\colon A \to B$, resp. $y = f(x)$.

Ak definičný obor $A \subset R^n$, $n \in N$ a obor hodnôt $B \subset R^m$, $m \in N$, potom $f\colon A \to B$ nazývame **n-rozmerná funkcia**, resp. **funkcia n premenných**, označenie $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$.

Vzor $\boldsymbol{x} \in A$ predstavuje vektor $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ s n prvkami a obraz $\boldsymbol{y} \in B$ predstavuje vektor $\boldsymbol{y} = (y_1; y_2; \ldots; y_m)$ s m prvkami. To znamená, že predpis $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ reprezentuje rovnosť dvoch m-rozmerných vektorov

$$\boldsymbol{y} = (y_1; y_2; \ldots; y_m) \ \text{ a } \ f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}); \ldots; f_m(\boldsymbol{x})),$$

t. j. pre všetky $j = 1, 2, \ldots, m$ musí platiť $y_j = f_j(\boldsymbol{x}) = f_j(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Funkciu f môžeme zapísať ako rovnosť stĺpcových vektorov

$$\boldsymbol{y}^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \cdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1; x_2; \ldots; x_n) \\ f_2(x_1; x_2; \ldots; x_n) \\ \cdots \\ f_m(x_1; x_2; \ldots; x_n) \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x})^T.$$

Pre $m = 1$ sa f nazýva **reálna funkcia n premenných**, resp. **n-rozmerná reálna funkcia** a obrazom je jednorozmerný vektor $\boldsymbol{y} = (y) = y \in R$. Funkciu zapisujeme

$$y = f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}); \ldots; f_m(\boldsymbol{x})).$$

Špeciálne pre $m = n = 1$ sa funkcia f nazýva **reálna funkcia (jednej) reálnej premennej** a venovali sme sa jej v predchádzajúcej časti Matematická analýza 1.

[5]Pojmy funkcia a zobrazenie znamenajú to isté, iba pre číselné množiny sa preferuje názov funkcia.

Pre $m > 1$ sa f nazýva (**m-zložková**) **vektorová funkcia n premenných**, resp. **m-zložková n-rozmerná vektorová funkcia**.

Pre funkcie $f, g\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ a reálne čísla $c \in R$ definujeme súčet dvoch funkcií $f \pm g \in R^m$ a súčin skalára a vektora $cf \in R^m$ po zložkách nasledovne

$$\begin{aligned} (f \pm g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x}) &= (f_1(\boldsymbol{x}) \pm g_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}) \pm g_2(\boldsymbol{x}); \ldots; f_m(\boldsymbol{x}) \pm g_m(\boldsymbol{x})), \\ (cf)(\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x}) \qquad &= (cf_1(\boldsymbol{x}); cf_2(\boldsymbol{x}); \ldots; cf_m(\boldsymbol{x})). \end{aligned}$$

Príklad 2.1.2.
Reálne funkcie sú napríklad[6]

$$\begin{aligned} &y = f_1(\boldsymbol{x}) = f_1(x_1; x_2; x_3) = x_1 + x_2 \colon R^3 \to R, && y = f_2(x; y) = xy \colon R^2 \to R, \\ &y = f_3(\boldsymbol{x}) = f_3(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \colon R^2 \to R, && y = f_4(x; y) = x \colon R^2 \to R. \end{aligned}$$

Vektorové funkcie sú napríklad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= (y_1; y_2) = f_5(\boldsymbol{x}) = f_5(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; x_1 - x_2) \colon R^2 \to R^2, \\ \boldsymbol{y} &= (y_1; y_2; y_3) = f_6(x) = (x; x^2; x^3) \colon R \to R^3. \blacksquare \end{aligned}$$

Body $\boldsymbol{x} = (x; y)$ Euklidovej roviny R^2 najčastejšie vyjadrujeme v karteziánskom systéme súradníc (obr. 2.1.6 vľavo), kde sú súradnice totožné so zložkami, t. j. $\boldsymbol{x} = (x; y)$.

V polárnom súradnicovom systéme má bod $\boldsymbol{x} = (x; y)$ súradnice $\boldsymbol{x} = (\rho; \varphi)$, kde $\rho \geq 0$ vyjadruje jeho vzdialenosť od počiatku (pólu) 0 a $\varphi \in R$ je orientovaný uhol, ktorý zviera polárna poloos s polpriamkou $0\boldsymbol{x}$ spájajúcou počiatok s bodom $\boldsymbol{x}$ (obr. 2.1.6 v strede).

Súradnice bodu v polárnych súradniciach (na rozdiel od karteziánskych súradníc) nie sú určené jednoznačne. Ak má bod $\boldsymbol{x}$ polárne súradnice $\boldsymbol{x} = (\rho; \varphi)$, potom má tiež polárne súradnice $\boldsymbol{x} = (\varphi + 2k\pi; \rho)$ pre každé $k \in Z$.

Niekedy sa požaduje, aby orientovaný uhol φ patril do nejakého konkrétneho intervalu s dĺžkou 2π, napr. $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$ alebo $\varphi \in \langle -\pi; \pi)$ pre výhodu symetrie okolo polárnej osi. V týchto prípadoch majú všetky body Euklidovej roviny R^2 okrem počiatku 0 jednoznačne určené polárne súradnice.

Príklad 2.1.3.
Ak $(\rho; \varphi)$ sú polárne súradnice bodu $\boldsymbol{x} \in R^2$, potom $\boldsymbol{x} = (x; y) = (\rho \cos\varphi; \rho \sin\varphi)$ sú jeho karteziánske súradnice. Takže prevod súradníc z polárneho do karteziánskeho systému určuje vektorová funkcia

$$(x; y) = \Psi(\rho; \varphi) = (\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi) \colon \langle 0; \infty) \times R \to R^2.$$

Ak $(x; y)$ sú karteziánske súradnice bodu $\boldsymbol{x} \in R^2$, potom s prevodom do polárnych súradníc je to trochu zložitejšie. Funkcia Ψ nie je prostá a neexistuje k nej inverzná funkcia.
Pre vektorovú funkciu $(\rho; \varphi) = \Phi(x; y) \colon R^2 - \{\boldsymbol{0}\} \to (0; \infty) \times \langle 0; 2\pi)$ pre prevod z karteziánskych do polárnych súradníc platí

$$\sin\varphi = \tfrac{y}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

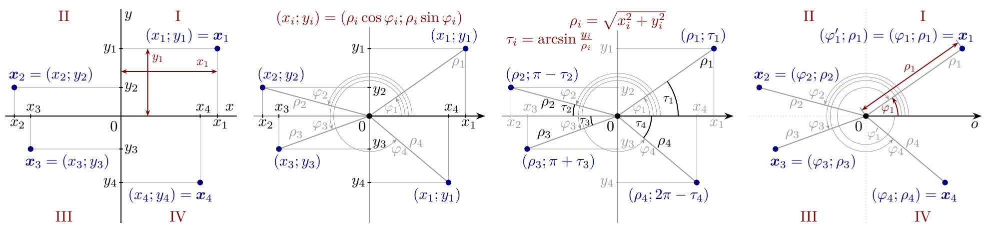
[6] V rovine R^2, resp. v priestore R^3 obvykle označujeme premenné a súradnicové osi x, y, resp. x, y, z.

Z úvah vylúčime bod $\mathbf{0} = (0;0)$, pretože nevieme jednoznačne určiť jeho polárne súradnice. Ďalej budeme požadovať $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$. Funkciu Φ vyjadríme v každom kvadrante roviny R^2 zvlášť. Ak označíme uhol $\tau = \arcsin \frac{y}{\rho}$, potom $\tau \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$ a platí (obr. 2.1.6 vpravo):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}\colon x \geq 0, y \geq 0, \varphi = \tau, && (\rho;\varphi) = \Phi(x;y) = \Big(\sqrt{x^2+y^2}; \arcsin \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big),\\
&\mathrm{II}\colon x \leq 0, y \geq 0, \varphi = \pi - \tau, && (\rho;\varphi) = \Phi(x;y) = \Big(\sqrt{x^2+y^2}; \pi - \arcsin \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big),\\
&\mathrm{III}\colon x \leq 0, y \leq 0, \varphi = \pi + \tau, && (\rho;\varphi) = \Phi(x;y) = \Big(\sqrt{x^2+y^2}; \pi + \arcsin \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big),\\
&\mathrm{IV}\colon x \geq 0, y \leq 0, \varphi = 2\pi - \tau, && (\rho;\varphi) = \Phi(x;y) = \Big(\sqrt{x^2+y^2}; 2\pi - \arcsin \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big).
\end{aligned}$$

Ak budeme požadovať $\varphi \in (-\pi; \pi\rangle$, potom pre φ platí:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{II}\colon \varphi = \pi - \arcsin \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, && \mathrm{I}\colon \varphi = \arcsin \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\\
&\mathrm{III}\colon \varphi = -\pi + \arcsin \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, && \mathrm{IV}\colon \varphi = -\arcsin \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$



Obr. 2.1.6: Karteziánsky a polárny súradnicový systém v Euklidovej rovine R^2

Nech $f\colon A \to R$, kde $A \neq \emptyset$, $A \subset R^n$, $n \in N$ je reálna funkcia. Množinu

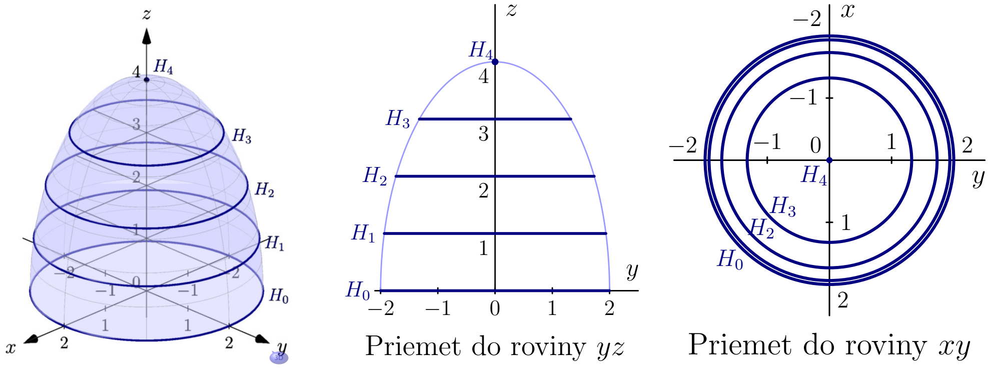
$$\{(\boldsymbol{x}; f(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{x} \in A\} = \{(\boldsymbol{x}; y), \boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in A, y = f(\boldsymbol{x})\} \subset R^{n+1}$$

nazývame **graf funkcie f**, resp. **nadplocha funkcie f v R^{n+1}**. Množinu

$$H_c = \{\boldsymbol{x} \in A, f(\boldsymbol{x}) = c\}, \quad \text{kde } c \in R$$

nazývame **hladina funkcie f prislúchajúca číslu c**. V Euklidovej rovine R^2 sa hladina nazýva **vrstevnica** prislúchajúca číslu c. Vrstevnice na geografických mapách označujú miesta s rovnakou nadmorskou výškou.

Príklad 2.1.4.
Uvažujme funkciu $f\colon R^2 \to R$ danú predpisom $z = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (obr. 2.1.7).
Definičný obor $D(f) = \{(x;y) \in R^2, 4 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x;y) \in R^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$ je kruh so stredom v bode $(0;0)$ a polomerom 2. Obor hodnôt $H(f) = \langle 0; 4\rangle$.



Obr. 2.1.7: Graf a vrstevnice funkcie
$z = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$: $R^2 \to R$ (príklad 2.1.4)

Grafom funkcie f je (povrch polovice rotačného elipsoidu pre $z \geq 0$) množina

$$\left\{(x;y;z),\ x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}\right\}.$$

Pre $c \notin H(f) = \langle 0;4\rangle$ vrstevnice H_c neexistujú, t. j. platí $H_c = \emptyset$. Pre $c \in \langle 0;4\rangle$ platí

$$c = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}. \iff \tfrac{c^2}{4} = 4 - x^2 - y^2. \iff x^2 + y^2 = 4 - \tfrac{c^2}{4} = \tfrac{16 - c^2}{4}.$$

Potom $H_c = \left\{(x;y;c), x^2 + y^2 = \frac{16-c^2}{4}\right\}$, $c \in \langle 0;4)$ je kružnica rovnobežná s rovinou xy s polomerom $\frac{\sqrt{16-c^2}}{2}$ a stredom $(0;0;c)$. Špeciálne $H_4 = \{(0;0;4)\}$ je bod. ∎

Nech $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$: $R^n \to R^m$, $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x})$: $R^m \to R^l$, $n, m, l \in N$ sú také, že $H(f) \subset D(g)$. Funkcia $\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x})$: $R^n \to R^l$ definovaná pre všetky $\boldsymbol{x} \in D(f)$ vzťahom $F(\boldsymbol{x}) = g[f(\boldsymbol{x})]$ sa nazýva **zložená funkcia f a g**. Funkcia f sa nazýva **vnútorná** (**zložka**) a funkcia g sa nazýva **vonkajšia** (**zložka**).

Príklad 2.1.5.
Pre funkcie $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1;x_2) = x_1 + 2x_2$: $R^2 \to R$, $g(x) = (x^2;x^3)$: $R \to R^2$ platí

$$g(f)\colon R^2 \to R^2, \quad g[f(\boldsymbol{x})] = g(x_1 + 2x_2) = \left((x_1 + 2x_2)^2; (x_1 + 2x_2)^3\right).$$
$$f(g)\colon R \to R, \qquad f[g(x)] = f(x^2;x^3) = x^2 + 2x^3. \ \blacksquare$$

Príklad 2.1.6.
Uvažujme funkciu $f(x;y)$: $R^2 \to R^m$, $m \in N$ s dvomi premennými x, y v karteziánskych súradniciach. Prevod funkcie f do polárnych súradníc pomocou funkcie (príklad 2.1.3)

$$(x;y) = \Psi(\rho;\varphi) = (\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\colon \langle 0;\infty) \times R \to R^2$$

predstavuje zloženú funkciu $F(\rho;\varphi) = f[\Psi(\rho;\varphi)] = f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)$: $R^2 \to R^m$. ∎

Funkcia $f\colon A \to R^m$, kde $A \neq \emptyset$, $A \subset R^n$, $n, m \in N$, sa nazýva **lineárna**,[7] ak pre všetky $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; \dots; v_n)$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^n$, $c \in R$ platí

$$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}), \quad f(c\boldsymbol{u}) = cf(\boldsymbol{v}). \tag{2.1}$$

Poznámka 2.1.4.
Lineárna funkcia $f\colon y = kx+q$, $x \in R$, kde $k, q \in R$, nie je v zmysle predchádzajúcej definície pre $q \neq 0$ lineárna (aj keď sa tak nazýva). Lineárna je iba pre $q = 0$, t. j. $f\colon y = kx$. Neplatí ani jedna z podmienok (2.1). Pre $u, v \in R$, $c \in R$, $c \neq 1$ totiž platí:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= k(u+v)+q &&= ku+kv+q, & f(cu) &= k(cu)+q = cku+q, \\ f(u)+f(v) &= ku+q+kv+q &&= ku+kv+2q, & cf(u) &= c(ku+q) = cku+cq. \end{aligned}$$

Príklad 2.1.7.
Funkcia $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2; x_1 - x_2 - x_3)\colon R^3 \to R^2$ je lineárna.
Pre všetky $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3), \boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3) \in R^3$, $c \in R$ platí

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= f(u_1+v_1; u_2+v_2; u_3+v_3) \\ &= \big((u_1+v_1)+(u_2+v_2); (u_1+v_1)-(u_2+v_2)-(u_3+v_3)\big) \\ &= (u_1+u_2; u_1-u_2-u_3) + (v_1+v_2; v_1-v_2-v_3) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}), \\ f(c\boldsymbol{u}) &= f(cu_1; cu_2; cu_3) = (cu_1+cu_2; cu_1-cu_2-cu_3) \\ &= \big(c(u_1+u_2); c(u_1-u_2-u_3)\big) = c(u_1+u_2; u_1-u_2-u_3) = cf(\boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

Priestor R^3 je lineárny a má kanonickú bázu $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1; 0; 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0; 1; 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0; 0; 1)$. Obrazy $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)$, $f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)$, $f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)$ vytvoria maticu typu 2×3, ktorú označíme $\boldsymbol{F}$:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\varepsilon}_1) &= f(1;0;0) = (1;\ \ 1), \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_2) &= f(0;1;0) = (1;-1), \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_3) &= f(0;0;1) = (0;-1), \end{aligned} \quad \text{t. j. } \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_2) \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pre funkciu f potom platí

$$\boldsymbol{xF} = (x_1; x_2; x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x_1+x_2; x_1-x_2-x_3) = f(\boldsymbol{x}).$$

Výhodnejšie je považovať $\boldsymbol{x}$, $f(\boldsymbol{x})$ za stĺpcové vektory a označiť $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{F}^T$. Potom platí

$$\boldsymbol{Dx}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x})^T.$$

To znamená, že sme lineárnu funkciu f vyjadrili pomocou matíc $\boldsymbol{D}$ alebo $\boldsymbol{F}$. ■

Nech $\boldsymbol{D} = (d_{ij})_{m\times n}$ je matica reálnych čísel $d_{ij} \in R$ typu $m \times n$, kde $m, n \in N$. Potom funkcia $f\colon R^n \to R^m$ daná predpisom

$$f(\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{Dx}^T = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2n}x_n \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ d_{m1}x_1 + d_{m2}x_2 + \cdots + d_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

[7] Ak $f\colon A \to A$, kde $A \subset R^n$ je lineárny priestor, potom sa f často nazýva **lineárna transformácia**.

$$\text{t. j. } f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{D}^T = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \cdots & d_{m1} \\ d_{12} & d_{22} & \cdots & d_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= (d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n; \ldots; d_{m1}x_1 + d_{m2}x_2 + \cdots + d_{mn}x_n)$$

je lineárna (stačí jednoduché dosadenie, viď napr. [11, 35]).

Príklad 2.1.7 môžeme zovšeobecniť na ľubovoľnú lineárnu funkciu $f\colon R^n \to R^m$, kde $m, n \in N$. Ak predchádzajúce úvahy zhrnieme, potom platí:

- Každá reálna matica $\boldsymbol{D}$ typu $m \times n$ reprezentuje lineárnu funkciu $f\colon R^n \to R^m$.

- Ku každej lineárnej funkcii $f\colon R^n \to R^m$ existuje reálna matica $\boldsymbol{D}$ typu $m \times n$ taká, že platí $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{D}^T$, t. j. $f(\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^T$. Maticu $\boldsymbol{D}$ nazývame **matica lineárnej funkcie f**.

Funkcia $f\colon R \to R$ sa nazýva **elementárna** (ma1: 3.1.2 Elementárne funkcie), ak ju dokážeme vytvoriť z funkcií $y = \text{konšt.}$, $y = x$, $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = \sin x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ pomocou sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania funkcií.

Viacrozmerné reálne elementárne funkcie $f\colon R^n \to R$, $n \in N$ dostaneme analogicky pomocou uvedených operácií a funkcií pre jednotlivé premenné $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Viacrozmerná vektorová funkcia $f\colon R^n \to R^m$, $m, n \in N$ je **elementárna**, ak je elementárnou funkciou každá jej zložka $f_j\colon R^n \to R$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Príklad 2.1.8.
Nasledujúce funkcie sú elementárne v R^n:

$$f_1(x_1, x_2) = (\sin x_1, \sin x_2)\colon R^2 \to R^2, \qquad f_2(x, y, z) = x + y - e^{x-z} + 1\colon R^3 \to R,$$
$$f_3(x, y, z) = x + 1\colon R^3 \to R, \qquad f_4(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2^4 x_1 - x_3\colon R^3 \to R,$$
$$f_5(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \sin x_2\colon R^2 \to R, \qquad f_6(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2\colon R^3 \to R,$$
$$f_7(x) = (x, x^2, x^3)\colon R \to R^3, \qquad f_8(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2 - 2x_3^2\colon R^3 \to R. \blacksquare$$

Jednočlenom v R^n, $n \in N$ nazývame funkciu $f\colon R^n \to R$ definovanú vzťahom

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = c x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n},$$

kde koeficient $c \in R$ a exponenty $k_1, k_2, \ldots, k_n \in N \cup \{0\}$. Súčet $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ nazývame **stupeň jednočlena**.

Ak sčítame viacero jednočlenov, dostaneme **mnohočlen** (**polynóm**) v R^n, pričom jeho stupeň je rovný najväčšiemu zo stupňov jednotlivých jednočlenov. V príklade 2.1.8 sú polynómami funkcie f_3, f_4, f_6 a f_8, pričom f_3 má stupeň 1, polynóm f_4 má stupeň 5 a polynómy f_6 a f_8 majú stupeň 2.

Polynóm $f\colon R^n \to R$ sa nazýva **homogénny stupňa k**, resp. (častejší názov) **forma k-teho stupňa** (**stupňa k**), ak všetky jeho jednočleny majú rovnaký stupeň $k \in N \cup \{0\}$.

Je zrejmé, že pre každú formu $f\colon R^n \to R$ každého stupňa $k \in N$ platí

$$f(\boldsymbol{0_n}) = f(0; 0; \ldots; 0) = 0.$$

Špeciálne formu prvého stupňa $f\colon R^n \to R$ definovanú vzťahom

$$f(\boldsymbol{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^T,$$

kde[8] $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$, $\boldsymbol{c} = (c_1; c_2; \ldots; c_n) \in R^n$, nazývame **lineárna forma v** R^n.

Formu druhého stupňa (napr. funkcia f_6 v príklade 2.1.8) $f\colon R^n \to R$ definovanú

$$f(\boldsymbol{x}) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \cdots + c_{1n}x_1x_n + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2 + \cdots + c_{2n}x_2x_n$$
$$\cdots + c_{n1}x_nx_1 + c_{n2}x_nx_2 + \cdots + c_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j,$$

kde $c_{ij} \in R$ pre $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nazývame **kvadratická forma v** R^n. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že pre všetky $i \neq j$ platí $c_{ij} = c_{ji}$, pretože[9]

$$c_{ij}x_ix_j + c_{ji}x_jx_i = (c_{ij} + c_{ji})x_ix_j = \tfrac{c_{ij}+c_{ji}}{2}x_ix_j + \tfrac{c_{ij}+c_{ji}}{2}x_jx_i.$$

Tieto koeficienty môžeme usporiadať do symetrickej matice

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

ktorú nazývame **matica kvadratickej formy** $f(\boldsymbol{x})$. Číslo $\det \boldsymbol{C}$ nazývame **determinat kvadratickej formy** $f(\boldsymbol{x})$.

V maticovom tvare môžeme kvadratickú formu $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in R^n$ zapísať v tvare

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j. \tag{2.2}$$

Ak je matica $\boldsymbol{C}$ diagonálna, t. j. ak pre všetky $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ platí $c_{ij} = c_{ji} = 0$, potom hovoríme, že kvadratická forma má **diagonálny** (**kanonický**) **tvar**. Potom platí

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^T = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}x_i^2 = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + \cdots + c_{nn}x_n^2.$$

Poznámka 2.1.5.

Kvadratická forma v R^n je špeciálnym prípadom bilineárnej formy v R^n.

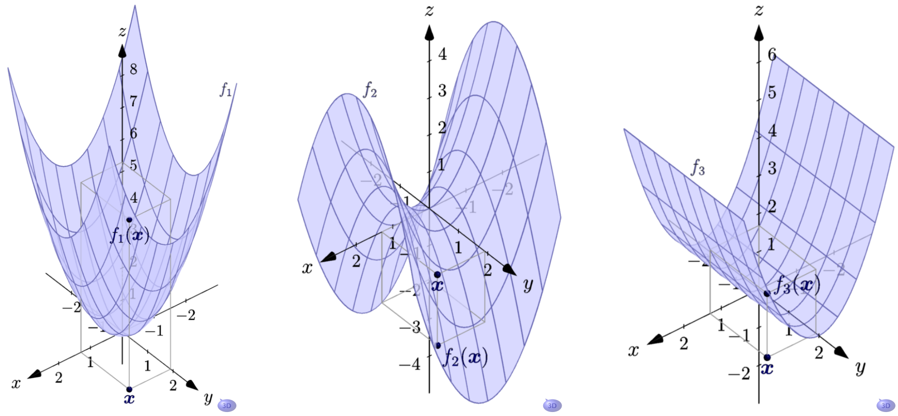
*Reálna funkcia $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\colon R^n \times R^n \to R$ dvoch vektorových premenných $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ sa nazýva **bilineárna forma** v priestore R^n, ak pre pevné $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ a pre pevné $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}$ sú funkcie $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ lineárnymi formami v R^n. Bilineárnu formu môžeme reprezentovať reálnou štvorcovou maticou $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n}$ a písať v tvare*

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^T = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_iy_j.$$

[8] $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})$ predstavuje skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{x}$.

[9] Prírastok funkcie $c_{ij}x_ix_j + c_{ji}x_jx_i$ sa nezmení, iba sa symetricky (rovnomerne) rozloží.

Ak je matica $\boldsymbol{C}$ symetrická, potom funkcia $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T$ tvorí kvadratickú formu v R^n.



Obr. 2.1.8: Kvadratické formy v R^2: $f_1(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (eliptická), $f_2(x_1; x_2) = x_1^2 - x_2^2$ (hyperbolická), $f_3(x_1; x_2) = x_1^2$ (parabolická)

Kvadratická forma $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T \colon R^n \to R$, $n \in N$ zo vzťahu (2.2), kde $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n \times n}$ je symetrická reálna matica, sa nazýva:

- **kladne definitná**, ak pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_n$ platí $f(\boldsymbol{x}) > 0$.
- **záporne definitná**, ak pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_n$ platí $f(\boldsymbol{x}) < 0$.
- **kladne semidefinitná**, ak pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_n$ platí $f(\boldsymbol{x}) \geq 0$.
- **záporne semidefinitná**, ak pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_n$ platí $f(\boldsymbol{x}) \leq 0$.
- **indefinitná**, ak existujú $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ také, že platí $f(\boldsymbol{x}) > 0 > f(\boldsymbol{y})$.

Každú kvadratickú formu $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T \colon R^n \to R$, $n \in N$, kde $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n \times n}$ je symetrická reálna matica, môžeme vhodnou lineárnou transformáciou

$$\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{B}^T \colon R^n \to R^n, \quad \text{t. j. } \boldsymbol{x}^T = \varphi(\boldsymbol{t})^T = \boldsymbol{B}\boldsymbol{t}^T,$$

kde $\boldsymbol{B}$ je regulárna matica[10] (t. j. $\det \boldsymbol{B} \neq 0$), upraviť na diagonálny tvar $\boldsymbol{t}\boldsymbol{D}\boldsymbol{t}^T$.

To znamená, že existuje reálna diagonálna matica $\boldsymbol{D}$ typu $n \times n$ taká, že platí

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T = f(\boldsymbol{x}) = f(\varphi(\boldsymbol{t})) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{D}\boldsymbol{t}^T = d_{11}t_1^2 + d_{22}t_2^2 + \cdots + d_{nn}t_n^2.$$

Ak to zhrnieme, potom $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$, pretože platí

$$f(\varphi(\boldsymbol{t})) = \varphi(\boldsymbol{t})\boldsymbol{C}\varphi(\boldsymbol{t})^T = \boldsymbol{t}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}^T = \boldsymbol{t}\boldsymbol{D}\boldsymbol{t}^T = d_{11}t_1^2 + d_{22}t_2^2 + \cdots + d_{nn}t_n^2. \qquad (2.3)$$

Transformácia φ nemusí byť určená jednoznačne, ale zachováva základné vlastnosti kvadratickej formy, čiže aj definitnosť (vety 2.1.2 a 2.1.3). Tieto aj nasledujúce úvahy patria do sféry lineárnej algebry, preto ich nebudeme dokazovať (viď napr. [3, 13, 20, 35, 45]).

[10] Matica $\boldsymbol{B}$ nemusí byť určená jednoznačne.

Veta 2.1.1.
Diagonálna kvadratická forma $f(\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} t_i^2 \colon R^n \to R$, $n \in N$, $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn} \in R$.

a) f je kladne definitná. $\iff$ $d_{ii} > 0$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$.

b) f je záporne definitná. $\iff$ $d_{ii} < 0$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$.

c) f je kladne semidefinitná. $\iff$ $d_{ii} \geq 0$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ a existuje $d_{ii} = 0$.

d) f je záporne semidefinitná. $\iff$ $d_{ii} \leq 0$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ a existuje $d_{ii} = 0$.

e) f je indefinitná. $\iff$ Existuje $d_{ii} > 0$ a existuje $d_{jj} < 0$.

Príklad 2.1.9.
Kvadratická forma

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3^2 \colon \ R^3 \to R$$

je indefinitná, pretože $f(1;0;0) = 1 > 0$, $f(0;0;1) = -2 < 0$. Matica formy f má tvar

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{t. j. } f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^T.$$

Upravíme f na diagonálny tvar a ukážeme, že aj v tomto tvare je indefinitná.

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2) - (2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_2x_3 - 2x_3^2 \\ = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3 - x_2^2 - 3x_3^2 = \circledast \end{aligned}$$

Vybrali sme všetky jednočleny obsahujúce premennú x_1 a výraz sme doplnili na úplný štvorec (prvá zátvorka). Členy, ktoré sme doplnili, sme následne odpočítali, aby sa hodnota $f(\boldsymbol{x})$ nezmenila (druhá zátvorka). Uvedený postup aplikujeme postupne na všetky premenné x_2, x_3, atď.

$$\begin{aligned} \circledast = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 - 3x_3^2 \\ = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2 = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2. \end{aligned}$$

Dostali sme tvar $f(\boldsymbol{t}) = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2$, pričom $t_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $t_2 = x_2 + 2x_3$, $t_3 = x_3$. Forma je indefinitná podľa vety 2.1.1, resp. stačí uvážiť, že $f(1;0;0) = 1$, $f(0;1;0) = -1$. Pre lineárnu transformáciu $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t}) \colon R^n \to R^n$ prechodu na diagonálny tvar platí

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ t_2 &= \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3, \\ t_3 &= \phantom{x_1 + x_2 + {}} x_3. \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} x_1 &= t_1 - t_2 + t_3, \\ x_2 &= \phantom{t_1 - {}} t_2 - 2t_3, \\ x_3 &= \phantom{t_1 - t_2 + {}} t_3. \end{aligned}\right\} \implies \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{t}^T.$$

Pre diagonálny tvar $f(\varphi(\boldsymbol{t})) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}^T$ zo vzťahu (2.3) platí

$$f(\varphi(\boldsymbol{t})) = \boldsymbol{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{t}^T = \boldsymbol{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{t}^T. \ \blacksquare$$

Existuje oveľa viac spôsobov ako upraviť kvadratickú formu na diagonálny tvar (viď napr. [13, 45]). Jeden z častých spôsobov využíva vlastné čísla a vlastné vektory matice kvadratickej formy. My budeme vlastnosti kvadratických foriem využívať pri určovaní extrémov funkcií viacerých premenných (?? Extrémy funkcií) a bude nás zaujímať iba ich definitnosť. Nebudeme k tomu potrebovať maticu transformácie na diagonálny tvar. Postačia nám iba vlastné čísla vyšetrovanej kvadratickej formy, ktoré sú vždy reálne.[11] Nebudeme teda potrebovať ani vlastné vektory k nim prisluchajúce. Pre prevod kvadratickej formy na jej diagonálny tvar platia nasledujúce tvrdenia.

Veta 2.1.2.
$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T\colon R^n \to R$, $n \in N$ je kvadratická forma, pričom $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n}$ je symetrická reálna matica a $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in R$ sú jej vlastné čísla (vrátane násobnosti).

$\Longrightarrow$ Existuje lineárna transformácia $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{B}^T\colon R^n \to R^n$,
kde $\boldsymbol{B}$ je reálna matica $n \times n$, pre ktorú $f(\varphi(\boldsymbol{t})) = \delta_1 t_1^2 + \delta_2 t_2^2 + \cdots + \delta_n t_n^2$.

Z predchádzajúcej vety a z vety 2.1.1 vyplýva, že definitnosť kvadratickej formy vieme jednoducho určiť pomocou vlastných čísel jej matice.

Problém väčšinou nastane pri výpočte vlastných čísel (sú to korene reálneho polynómu stupňa n). Matica transformácie $\boldsymbol{B}$ je vytvorená pomocou vlastných vektorov matice $\boldsymbol{C}$. Pripomeňme, že ak má niektoré vlastné číslo geometrickú násobnosť (počet lineárne nezávislých vektorov k nemu patriacich) menšiu ako algebraickú násobnosť (násobnosť ako koreňa charakteristického polynómu), musíme zostávajúce vlastné vektory konštruovať pomocou reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov.

Veta 2.1.3 (Sylvestrova veta o zotrvačnosti kvadratických foriem).
$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T\colon R^n \to R$, $n \in N$ je kvadratická forma, $\boldsymbol{C}_{n\times n}$ je symetrická reálna matica.

$\Longrightarrow$ Existuje lineárna transformácia $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{B}^T\colon R^n \to R^n$,
kde $\boldsymbol{B}_{n\times n}$ je reálna matica, pre ktorú platí
$f(\varphi(\boldsymbol{t})) = d_{11}t_1^2 + d_{22}t_2^2 + \cdots + d_{nn}t_n^2$, kde $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn} \in \{-1, 0, 1\}$.

Diagonálny tvar kvadratickej formy vo vete 2.1.3 sa nazýva **normálový**. Lineárne transformácie v predchádzajúcich vetách nie sú určené jednoznačne, ale zachovávajú základné vlastnosti kvadratickej formy.

Nasledujúce charakteristiky kvadratickej formy sú jednoznačné:

- **Hodnosť** h, t. j. hodnosť matíc $\boldsymbol{C}$, $\operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ a $\operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$.
- **Kladný index zotrvačnosti** k, t. j. počet kladných členov v diagonálnom tvare.
- **Záporný index zotrvačnosti** l, t. j. počet záporných členov v diagonálnom tvare.
- **Počet nulových členov** o v diagonálnom tvare.
- **Signatúra** σ, t. j. dvojica $(k; l)$.

Je zrejmé, že platí $h = k + l$, $n = k + l + o$, $o = n - k - l$. Z predchádzajúcich úvah a z vety 2.1.1 vyplýva nasledujúce tvrdenie.

[11] Reálne symetrické matice majú iba reálne vlastné čísla a reálne vlastné vektory.

Veta 2.1.4.
$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T\colon R^n \to R,\ n \in N$ je kvadratická forma, $\boldsymbol{C}_{n\times n}$ je symetrická reálna matica.

a) f je kladne definitná. $\iff$ $k = n,\ l = o = 0.$

b) f je záporne definitná. $\iff$ $l = n,\ k = o = 0.$

c) f je kladne semidefinitná. $\iff$ $0 < k < n,\ l = 0,\ o \neq 0.$

d) f je záporne semidefinitná. $\iff$ $0 < l < n,\ k = 0,\ o \neq 0.$

e) f je indefinitná. $\iff$ $k > 0,\ l > 0.$

Definitnosť kvadratickej formy $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T\colon R^n \to R,\ n \in N$, kde $\boldsymbol{C}$ je symetrická reálna matica typu $n\times n$, môžeme zistiť aj bez toho, aby sme počítali vlastné čísla matice $\boldsymbol{C}$, resp. upravovali kvadratickú formu f na diagonálny tvar.

Označme pre $k = 1, 2, \dots, n$ subdeterminanty

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{vmatrix}, \quad \text{t. j. } \Delta_1 = |c_{11}|,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},\ \dots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Veta 2.1.5 (Sylvestrovo kritérium).
$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T\colon R^n \to R,\ n \in N$ je kvadratická forma, $\boldsymbol{C}_{n\times n}$ je symetrická reálna matica. Potom platí:

a) f je kladne definitná. $\iff$ $\Delta_k > 0$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, n.$

b) f je záporne definitná. $\iff$ $(-1)^k \Delta_k > 0$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, n.$

c) f je indefinitná. $\iff$ $\Delta_n \neq 0$ a f nie je kladne a f nie je záporne definitná.

V iných prípadoch nemôžeme Sylvestrovo kritérium použiť, pretože nevieme rozhodnúť, či je kvadratická forma kladne semidefinitná, záporne semidefinitná alebo indefinitná.

Poznámka 2.1.6.
Z praktických dôvodov pri zisťovaní kladnej definitnosti alebo zápornej definitnosti kvadratickej formy $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T\colon R^n \to R,\ n \in N$ je výhodné najprv zisťovať hodnoty párnych subdeterminantov $\Delta_2,\ \Delta_4,\ \dots,$ ktoré by mali byť kladné.

Poznámka 2.1.7.
Ak v kvadratickej forme $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T\colon R^n \to R,\ n \in N$ (v ľubovoľnom vyjadrení) existuje aspoň jedno $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ také, že $c_{ii} = 0$, potom $f(\boldsymbol{x})$ nemôže byť definitná. Môže byť iba semidefinitná alebo indefinitná. Je zrejmé, že $f(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = 0$ pre nenulový vektor $\boldsymbol{\varepsilon}_i$.
Toto tvrdenie vyplýva taktiež zo Sylvestrovho kritéria. Keďže vo forme f nezáleží na poradí premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$, môžeme si ich usporiadať tak aby premenná x_i bola prvá. Lenže v tomto prípade bude $\Delta_1 = |c_{ii}| = 0$ a podľa Sylvestrovho kritéria (veta 2.1.5) nemôžeme dostať definitnosť ani kladnú a ani zápornú.

Príklad 2.1.10.
Uvažujme indefinitnú kvadratickú formu

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3^2\colon\ R^3 \to R$$

z príkladu 2.1.9. Indefinitnosť dokážeme pomocou Sylvestrovho kritéria.

Riešenie.
Matica kvadratickej formy f má tvar

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{t. j. } f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^T.$$

Forma je indefinitná, pretože platí

$$\Delta_1 = |1| = +1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \text{ (nie je kladne ani záporne definitná)},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}_{+1\times r01} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1+2) = -1 < 0. \blacksquare$$

Príklad 2.1.11.
Určte definitnosť kvadratickej formy $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_2^2 - x_3^2$: $R^3 \to R$.

Riešenie.
Sylvestrovo kritérium nemôžeme použiť, pretože platí

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^T, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} +1\times r02 \\ \\ +1\times r02 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Kvadratická forma f je indefinitná, stačí položiť $f(1;0;0) = 1 > 0$ a $f(0;0;1) = -1 < 0$.
Ak upravíme kvadratickú formu f na diagonálny tvar, dostaneme

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 2x_3^2,$$
$$\text{t. j. } f(\boldsymbol{t}) = t_1^2 - 2t_3^2, \quad \text{kde } t_1 = x_1 - x_2 + x_3, \ t_2 = 0, \ t_3 = x_3.$$

V tomto prípade stačí položiť napríklad $f(1;1;0) = 1 > 0$, $f(0;1;1) = -2 < 0$. $\blacksquare$

Príklad 2.1.12.
Vyšetrite definitnosť formy $f(x;y) = c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2$: $R^2 \to R$, kde $c_{11}, c_{12}, c_{22} \in R$.

Riešenie.
Kvadratickú formu f môžeme vyjadriť v tvare $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^T$, kde $\boldsymbol{x} = (x;y) \in R^2$.
Subdeterminanty sú $\Delta_1 = |c_{11}| = c_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$. Sú dve možnosti:

1. $\Delta_1 = c_{11} \neq 0$, potom $f(\boldsymbol{x}) = c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2$, $\Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$.
   - $\Delta_2 < 0$. $\implies$ f je **indefinitná**. $[c_{11} \neq 0,\ \Delta_2 < 0]$
   - $\Delta_2 > 0$.
     - ◇ $\Delta_1 > 0$. $\implies$ f je **kladne definitná**. $[c_{11} > 0,\ \Delta_2 > 0]$

◇ $\Delta_1 < 0. \implies f$ je **záporne definitná**. $[c_{11} < 0,\ \Delta_2 > 0]$

- $\Delta_2 = 0$, potom $c_{11}c_{22} = c_{12}^2$ a sú dve možnosti.

◇ $c_{12} = 0$, $c_{22} = 0$, potom $f(\boldsymbol{x}) = c_{11}x^2$.

$\implies f$ je **kladne semidefinitná** pre $c_{11} > 0$. $[c_{11} > 0,\ c_{12} = 0,\ c_{22} = 0]$

$\implies f$ je **záporne semidefinitná** pre $c_{11} < 0$. $[c_{11} < 0,\ c_{12} = 0,\ c_{22} = 0]$

◇ $c_{12} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, potom sú vektory $(c_{11}; c_{12})$, $(c_{12}; c_{22})$ lineárne závislé.
Potom $(c_{11}; c_{12}) = q(c_{12}; c_{22})$, t. j. $c_{12} = qc_{22}$, $c_{11} = qc_{12} = q^2c_{22}$, kde $q \neq 0$.
Potom $f(\boldsymbol{x}) = q^2c_{22}x^2 + 2qc_{22}xy + c_{22}y^2 = c_{22}(q^2x^2 + 2qxy + y^2) = c_{22}(qx + y)^2$.

$\implies f$ je **kladne semidefinitná** pre $c_{22} > 0$. $[c_{11} > 0,\ c_{12} = 0,\ c_{22} > 0]$

$\implies f$ je **záporne semidefinitná** pre $c_{22} < 0$. $[c_{11} < 0,\ c_{12} = 0,\ c_{22} < 0]$

2. $\Delta_1 = c_{11} = 0$, potom $f(\boldsymbol{x}) = 2c_{12}xy + c_{22}y^2$, $\Delta_2 = -c_{12}^2 \leq 0$.

- $\Delta_2 < 0$, t. j. $c_{12} \neq 0$. $\implies f$ je **indefinitná**. $[c_{11} = 0,\ c_{12} \neq 0,\ c_{22} \in R]$
- $\Delta_2 = 0$, t. j. $c_{12} = 0$, potom $f(\boldsymbol{x}) = c_{22}y^2$ a sú tri možnosti.

◇ $c_{22} > 0. \implies f$ je **kladne semidefinitná**. $[c_{11} = 0,\ c_{12} = 0,\ c_{22} > 0]$

◇ $c_{22} < 0. \implies f$ je **záporne semidefinitná**. $[c_{11} = 0,\ c_{12} = 0,\ c_{22} < 0]$

◇ $c_{22} = 0. \implies f(\boldsymbol{x}) = 0$ pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^2$. ■

2.1.3 Limita funkcie n premenných

Limita a spojitosť funkcií v priestore R^n, $n \in N$ sa definujú analogicky ako v R a majú podobné vlastnosti (viď [6, 7, 8, 49]). Keďže R je špeciálny prípad priestoru R^n pre $n = 1$, vlastnosti platné v R^n musia platiť aj v R. Najprv si zopakujeme definíciu hromadného bodu, bez ktorého nemôžeme definovať limitu.

Bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$, $n \in N$ sa nazýva **hromadným bodom** množiny $A \subset R^n$, $A \neq \emptyset$, ak v každom jeho okolí $O(\boldsymbol{a})$ existuje aspoň jeden bod $\boldsymbol{b}$ z množiny A taký, že $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$.

Množina $A \subset R^n$ sa nazýva **uzavretá**, ak obsahuje všetky svoje hromadné body.

Uvažujme funkciu $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$: $R^n \to R^m$, kde $n, m \in N$ a body $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$, $\boldsymbol{b} \in (R^*)^m$, t. j. $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^*$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_m)$, $b_1, b_2, \ldots, b_m \in R^*$.

Funkcia f má v bode $\boldsymbol{a}$ limitu rovnú $\boldsymbol{b}$ (**limita funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ sa rovná $\boldsymbol{b}$**), označenie $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, ak platí:

- Bod $\boldsymbol{a}$ je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre všetky $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$ také, že $\lim\limits_{k \to \infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$, platí $\lim\limits_{k \to \infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{b}$.

$\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$ je postupnosť[12] vektorov $\boldsymbol{x}_k \in R^n$, $k \in N$, kde $\boldsymbol{x}_k \in D(f)$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}$. Po zložkách ich budeme označovať $\boldsymbol{x}_k = (x_1; x_2; \ldots; x_n)_k$, resp. $\boldsymbol{x}_k = (x_{k1}; x_{k2}; \ldots; x_{kn})$.

Poznámka 2.1.8.
*Druhá podmienka predstavuje implikáciu „Ak $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow \boldsymbol{a}$, potom $\{f(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow \boldsymbol{b}$.“ a **musí platiť pre každú postupnosť** bodov $\boldsymbol{x}_k \in D(f)$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}$. To znamená, že uvedená **implikácia musí platiť** „pre každý možný spôsob priblíženia k bodu $\boldsymbol{a}$“.*

[12] Keďže n reprezentuje dimenziu priestoru R^n, museli sme pre členy postupnosti zvoliť inú premennú k.

• *V prípade limity reálnej funkcie jednej reálnej premennej (ma1: 3.2 Limita funkcie) to sú smery zľava a sprava, prípadne ich ľubovoľné striedanie.*
• *Pre limitu funkcie dvoch a viacerých premenných to nie je také jednoduché. Spôsobov priblíženia k bodu $\boldsymbol{a}$ existuje nepreberné a nekonečné množstvo. Môžeme sa približovať po ľubovoľnej krivke (nekonečne veľa možností), napr. po polpriamke (nekonečne veľa smerov), po parabole (nekonečne veľa možností), po špirále (nekonečne veľa možností), po hyperbole (nekonečne veľa možností) atď. Toto priblíženie nemusí byť po krivke, môže to byť ľubovoľný spôsob, aký vymyslíme. Dôležité je, aby priblíženie skončilo v bode $\boldsymbol{a}$.*

Z jednoznačnosti limity postupnosti vyplýva **jednoznačnosť limity** funkcie f v danom bode $\boldsymbol{a}$ (pokiaľ existuje). Táto limita sa nazýva **n-rozmerná** (**viacrozmerná**) **limita** a predstavuje m limít reálnych n-rozmerných funkcií $f_j(\boldsymbol{x})$: $R^n \to R$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Pre limitu $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_m) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) &= \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}); \ldots; f_m(\boldsymbol{x}))\\ &= \Big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_1(\boldsymbol{x}); \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_2(\boldsymbol{x}); \ldots; \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_m(\boldsymbol{x})\Big).\end{aligned}$$

To znamená limitu pre každú zložku, t. j. m limít

$$b_1 = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_1(\boldsymbol{x}),\ b_2 = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_2(\boldsymbol{x}),\ \ldots,\ b_m = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_m(\boldsymbol{x}).$$

Vzťah $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, t. j. $(x_1; x_2; \ldots; x_n) \to (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ znamená $x_1 \to a_1$, $x_2 \to a_2$, $\ldots$, $x_n \to a_n$ pre každú zložku. Limitu môžeme písať vo viacerých tvaroch, napr.

$$\begin{aligned}\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) &= \lim_{(x_1;x_2;\ldots;x_n)\to(a_1;a_2;\ldots;a_n)} f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \cdots\\ x_n\to a_n}} f(x_1; x_2; \ldots; x_n)\\ &= \lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \cdots\\ x_n\to a_n}} (f_1(x_1; x_2; \ldots; x_n); f_2(x_1; x_2; \ldots; x_n); \ldots; f_m(x_1; x_2; \ldots; x_n))\\ &= \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (f_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}); \ldots; f_m(\boldsymbol{x})).\end{aligned}$$

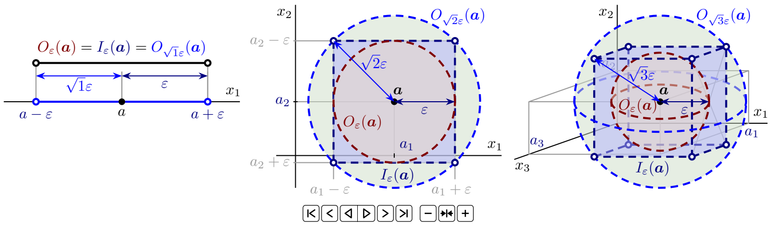
Ak pre aspoň jedno $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $a_i = \pm\infty$, potom hovoríme **o limite v nevlastnom bode $\boldsymbol{a}$**. Inak hovoríme **o limite vo vlastnom bode $\boldsymbol{a}$**.

Ak pre aspoň jedno $j = 1, 2, \ldots, m$ platí $b_j = \pm\infty$, potom sa limita nazýva **nevlastná limita**. V opačnom prípade sa nazýva **vlastná limita**. To znamená, že limita $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ je vlastná, ak sú vlastné všetky jej zložky $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Nech $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in R^n$, $n \in N$ je konečný bod, $\varepsilon > 0$. Otvorený interval

$$I_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = (a_1 - \varepsilon; a_1 + \varepsilon) \times (a_2 - \varepsilon; a_2 + \varepsilon) \times \cdots \times (a_n - \varepsilon; a_n + \varepsilon)$$

geometricky predstavuje n-rozmernú kocku bez obalu s hranou dĺžky 2ε (viď pr. 2.1.1) a stredom (t. j. ťažiskom a priesečníkom telesových uhlopriečok) v bode $\boldsymbol{a}$. Telesové uhlopriečky majú dĺžku $2\sqrt{n}\varepsilon$, pretínajú sa v bode $\boldsymbol{a}$ a spájajú dvojice najvzdialenejších bodov (protiľahlých vrcholov) intervalu $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$. Kocka má 2^n vrcholov a $2n$ stien, pričom každú stenu tvorí opäť kocka, ale s rozmerom $n - 1$.



Obr. 2.1.9: Intervaly $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ a okolia $O_\varepsilon(\boldsymbol{a})$, $O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a})$ bodov $\boldsymbol{a}\in R^n$ pre $n = 1, 2, 3$

Ak $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$, potom $x_i \in (a_i - \varepsilon; a_i + \varepsilon)$, t. j. $a_i - \varepsilon < x_i < a_i + \varepsilon$ platí pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom $-\varepsilon < x_i - a_i < \varepsilon$, t. j. $(x_i - a_i)^2 < \varepsilon^2$ a platí

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \sqrt{n\varepsilon^2} = \sqrt{n}\varepsilon.$$

To znamená, že sa interval $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ zmestí do okolia bodu $\boldsymbol{a}$ s polomerom $\sqrt{n}\varepsilon$, t. j. platí

$$I_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}).$$

Protiľahlé steny sa líšia iba v jednej súradnici, ktorej hodnota je $a_i - \varepsilon$ alebo $a_i + \varepsilon$. Stien je ich n párov, jeden pár pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a vzdialenosť medzi nimi je 2ε. To znamená, že sa medzi ne zmestí okolie $O_\varepsilon(\boldsymbol{a})$. Potom platí (obr. 2.1.9 pre $n = 1, 2, 3$)

$$O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset I_\varepsilon(\boldsymbol{a}). \implies O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset I_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}).$$

Ak budeme uvažovať interval $I_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a})$, potom $\sqrt{n}(\sqrt{n}\varepsilon) = n\varepsilon$ a analogicky platí

$$O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}) \subset I_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}) \subset O_{n\varepsilon}(\boldsymbol{a}). \implies O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset I_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}) \subset I_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}) \subset O_{n\varepsilon}(\boldsymbol{a}).$$

Ak to zhrnieme, potom pre každé $\varepsilon > 0$ platí

$$O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset I_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}), \qquad I_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}) \subset I_{\sqrt{n}\varepsilon}(\boldsymbol{a}). \tag{2.4}$$

Poznámka 2.1.9.
Zo vzťahu (2.4) vyplýva, že vo všetkých doterajších i nasledujúcich úvahach môžeme namiesto okolí $O_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ používať otvorené intervaly $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ a naopak.[13] *V zmysle poznámky pod čiarou a zjednodušenia názvoslovia môžeme $\varepsilon > 0$ považovať za* ***polomer intervalu*** *$I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$. Pre $n = 1$, t. j. v priestore R sú pojmy $O_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ a $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ rovnaké, platí $O_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$.*

Poznámka 2.1.10.
Okoliami bodov $\pm\infty$ na reálnej osi $R^1 = R$ sú intervaly $(r; \infty)$ a $(-\infty; r)$, kde $r \in R$. Mnohokrát je vhodné zvoliť $r = \pm\frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, kde pre $\varepsilon \to 0$ platí $\frac{1}{\varepsilon} \to \infty$, $-\frac{1}{\varepsilon} \to -\infty$, t. j.

$$O_\varepsilon(\infty) = I_\varepsilon(\infty) = (\tfrac{1}{\varepsilon}; \infty), \quad \textit{resp. } O_\varepsilon(-\infty) = I_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\tfrac{1}{\varepsilon}).$$

V tomto zmysle budeme v priestoroch R^n uvažovať neohraničené intervaly $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ a aj okolia $O_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ v nevlastných bodoch $\boldsymbol{a}$.

[13] Interval $I_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ predstavuje okolie bodu $\boldsymbol{a}$ s polomerom ε pri použití ekvivalentnej maximovej normy (viď poznámka 2.1.2).

Z definície je zrejmé, že limita predstavuje lokálnu záležitosť v nejakom okolí bodu $\boldsymbol{a}$, pričom funkcia v tomto bode nemusí byť definovaná. Analogicky ako pri reálnych funkciách $f\colon R^1 \to R^1$, môžeme limitu charakterizovať pomocou okolí (definícia v zmysle Cauchyho). Uvedená definícia pomocou postupností sa nazýva v zmysle Heineho. Tieto definície sú ekvivalentné a v praxi sa používajú obe. Vyplýva to z vety 2.1.6, ktorú uvádzame bez dôkazu. Dôkaz je analogický ako pre limitu reálnej funkcie jednej reálnej premennej [49].

Veta 2.1.6.
Funkcia $f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, body $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$, $\boldsymbol{b} \in (R^*)^m$. Potom platí:

$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff$
- Bod $\boldsymbol{a}$ je hromadným bodom množiny $D(f)$.
- Pre každé okolie $O(\boldsymbol{b})$ existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{b})$.

Ak sú body body $\boldsymbol{a} \in R^n$, $\boldsymbol{b} \in R^m$ vlastné a ak označíme polomery okolí ε, δ, môžeme druhé tvrdenie vety na pravej strane symbolicky písať v tvare

$$\underbrace{\forall O_\varepsilon(\boldsymbol{b})}_{\forall \varepsilon > 0}\, \underbrace{\exists O_\delta(\boldsymbol{a})}_{\exists \delta > 0}\, \forall \boldsymbol{x} \in D(f)\colon\ \underbrace{\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}}_{0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n < \delta} \implies \underbrace{f(\boldsymbol{x}) \in O_\varepsilon(\boldsymbol{b})}_{\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}\|_m < \varepsilon}.$$

Limita funkcie $f\colon R^n \to R^m$ má m zložiek, t. j. m reálnych limít $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_j(\boldsymbol{x}) = b_j$ pre $j = 1, 2, \ldots, m$. Predchádzajúce tvrdenie môžeme potom rozpísať

$$\underbrace{\forall O_\varepsilon(b_j)}_{\forall \varepsilon > 0}\, \underbrace{\exists O_\delta(\boldsymbol{a})}_{\exists \delta > 0}\, \forall \boldsymbol{x} \in D(f)\colon\ \underbrace{\boldsymbol{x} \in O_\delta(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}}_{0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n < \delta} \implies \underbrace{f_j(\boldsymbol{x}) \in O_\varepsilon(b_j)}_{\circledast}, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

pričom $\circledast$: $|f_j(\boldsymbol{x}) - b_j| < \varepsilon$ pre vlastnú limitu $b_j \in R$ a $\circledast$: $f_j(\boldsymbol{x}) < -\frac{1}{\varepsilon}$ pre nevlastnú limitu $b_j = -\infty$, resp. $\circledast$: $f_j(\boldsymbol{x}) > \frac{1}{\varepsilon}$ pre $b_j = \infty$.

V tomto zmysle môžeme tieto úvahy rozšíriť aj pre prípad, keď je bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ nevlastný, t. j. keď je aspoň jedna z hodnôt a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ nevlastná.

Poznámka 2.1.11.
Ak uvážime poznámku 2.1.9 a vzťah (2.4), predchádzajúce tvrdenia ostanú v platnosti, ak namiesto okolí $O_\delta(\boldsymbol{a})$, $O_\varepsilon(\boldsymbol{b})$ použijeme intervaly $I_\delta(\boldsymbol{a})$, $I_\varepsilon(\boldsymbol{b})$.

Viacrozmerné limity majú podobné vlastnosti ako limity reálnych funkcií jednej reálnej premennej (ma1: 3.2 Limita funkcie). Funkcia $f\colon R \to R$ je špeciálny prípad viacrozmernej funkcie $f\colon R^n \to R^m$ pre $m = n = 1$, takže mnoho vlastností môžeme zovšeobecniť pre vektorové funkcie a naopak.

Nasledujúca veta sa často používa pri výpočte limít. Zložitejšiu funkciu nahradíme jednoduchšou, ktorá je na nejakom intervale, resp. okolí **zhodná s pôvodnou funkciou**. Veta sa väčšinou pri výpočte neuvádza, predpoklady sa overujú priebežne počas výpočtu.

Veta 2.1.7.
Funkcie $f, g\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $M = D(f) \cap D(g)$. $I(\boldsymbol{a})$ je otvorený interval[14] taký, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in I(\boldsymbol{a}) \cap M$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$.

$\implies$ Pokiaľ limity existujú, platí $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$.

[14]Interval $I(\boldsymbol{a})$ môžeme nahradiť okolím $O(\boldsymbol{a})$ a tvrdenie vety sa nezmení (poznámka 2.1.9).

Dôkaz.
Nech $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \in (R^*)^m$
Nech $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M - \{\boldsymbol{a}\}$ je taká, že $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$. Potom $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{b}$.
Je zrejmé, že existuje $k_0 \in N$ také, že pre všetky $k \in N$, $k \geq k_0$ platí $\boldsymbol{x}_k \in I(\boldsymbol{a})$.
To znamená, že $\boldsymbol{x}_k \in I(\boldsymbol{a}) \cap M - \{\boldsymbol{a}\}$ a teda aj $f(\boldsymbol{x}_k) = g(\boldsymbol{x}_k)$. Potom platí

$$\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \lim_{k\to\infty} g(\boldsymbol{x}_k) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}, \text{ t. j. } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}. \blacksquare$$

Príklad 2.1.13.
Uvažujme funkcie $f(x_1; x_2) = x_1 + x_2 \colon R^2 \to R$ a $g(x_1; x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} \colon R^2 \to R$.
$D(f) = R^2$, $D(g) = R^2 - \{(x; x), x \in R\}$. Pre všetky $\boldsymbol{x} \in D(f) \cap D(g) = D(g)$ platí

$$g(\boldsymbol{x}) = g(x_1; x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 = f(x_1; x_2) = f(\boldsymbol{x}).$$

- $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (x_1 + x_2) = x_1 + x_2$ existuje pre všetky $\boldsymbol{x} \in (R^*)^2 - \{(\pm\infty; \mp\infty)\}$.
- $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2}$ má navyše problémový smer $x_1 = x_2$, kde nie je g definovaná.

Pre všetky $\boldsymbol{x} \in R^2 - \{(\pm\infty; \mp\infty)\}$ limita existuje a $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$. Potom napr.:

$$\lim_{\substack{x_1\to 1\\ x_2\to 1}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1\to 1\\ x_2\to 1}} \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1\to 1\\ x_2\to 1}} (x_1 + x_2) = 1 + 1 = 2.$$

$$\lim_{\substack{x_1\to \infty\\ x_2\to \infty}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1\to \infty\\ x_2\to \infty}} \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1\to \infty\\ x_2\to \infty}} (x_1 + x_2) = \infty + \infty = \infty.$$

$$\lim_{\substack{x_1\to \infty\\ x_2\to -\infty}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1\to \infty\\ x_2\to -\infty}} \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1\to \infty\\ x_2\to -\infty}} (x_1 + x_2) = \infty - \infty, \quad \text{t. j. neexistuje.} \blacksquare$$

Veta 2.1.8.
Funkcia $f \colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$.
Existuje vlastná (konečná) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \in R^m$.

$\Longrightarrow$ a) Existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$ také, že f je ohraničená na $O(\boldsymbol{a}) - \{\boldsymbol{a}\}$.
b) Existuje interval $I(\boldsymbol{a})$ taký, že f je ohraničená na $I(\boldsymbol{a}) - \{\boldsymbol{a}\}$.

Dôkaz.
V zmysle poznámky 2.1.9 sú obe tvrdenia ekvivalentné a stačí dokázať jedno z nich.
Tvrdenie a) vyplýva priamo z vety 2.1.6.
Nech $O(\boldsymbol{b})$ je ľubovoľné okolie, potom existuje $O(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{b})$. T. j. existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$, v ktorom je f ohraničená. $\blacksquare$

Veta 2.1.9.
a) Funkcie $f, g \colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f) \cap D(g)$.

Číslo $c \in R$. Existujú limity $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d}$, kde $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \in (R^*)^m$.

$\Longrightarrow$ Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel a limity existujú, platí:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big[f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})\big] = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \pm \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{d}, \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big[cf(\boldsymbol{x})\big] = c \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{b}.$$

b) Funkcie $f, g\colon R^n \to R$, $n \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f) \cap D(g)$.
Existujú limity $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = d$, kde $b, d \in R^*$.

$\Longrightarrow$ Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel a limity existujú, platí:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\big] = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \cdot \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = bd, \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})}{\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})} = \frac{b}{d}.$$

Dôkaz.
Vetu dokážeme pre súčet. Ostatné tvrdenia sa dokážu analogicky.
Nech $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \cap D(g) - \{\boldsymbol{a}\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$.
Potom (definícia) $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{b}$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{d}$. Z toho vyplýva tvrdenie vety

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big[f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})\big] = \lim_{n\to\infty} \big[f(\boldsymbol{x}_n) \pm g(\boldsymbol{x}_n)\big]$$
$$= \lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) \pm \lim_{n\to\infty} g(\boldsymbol{x}_n) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) + \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{d}. \blacksquare$$

Ak niektorý z výrazov $\boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{d}$, $c\boldsymbol{b}$, bd, resp. b/d v predchádzajúcej vete nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje (musíme ju vypočítať iným spôsobom). Najčastejšie pomôže vhodná úprava výrazu, ktorým je funkcia definovaná. Niekedy to je vhodný rozklad, inokedy pomôže pripočítanie a odpočítanie rovnakého výrazu (pripočítame nulu) alebo vynásobenie čitateľa aj menovateľa v zlomku rovnakým výrazom.

Veta 2.1.10.
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b \in R^*$.

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |f(\boldsymbol{x})| = \Big|\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\Big| = |b|$.

Dôkaz.
Dôkaz je analogický ako dôkaz predchádzajúcej vety 2.1.9. $\blacksquare$

Veta 2.1.11.
Funkcie $f, g\colon R^n \to R$, $n \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $M = D(f) \cap D(g)$.
Okolie $O(\boldsymbol{a})$ je také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap M$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$.

$\Longrightarrow$ Pokiaľ limity existujú, platí $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \leq \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$.

Dôkaz.
Nech $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = d$, pričom $b, d \in R^*$. Dokážeme sporom.
Nech $b \leq d$ neplatí, t. j. $b > d$. Potom existujú okolia $O(b)$, $O(d)$ také, že $O(b) \cap O(d) = \emptyset$.
Potom pre všetky $u \in O(b)$, $v \in O(d)$ platí $u > v$ a tiež (veta 2.1.6) platí:

- Ku $O(b)$ existuje $O_f(\boldsymbol{a})$ tak, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O_f(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) \in O(b)$.
- Ku $O(d)$ existuje $O_g(\boldsymbol{a})$ tak, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O_g(\boldsymbol{a}) \cap D(g)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $g(\boldsymbol{x}) \in O(d)$.

Potom existuje okolie $O^*(\boldsymbol{a}) \subset O(\boldsymbol{a}) \cap O_f(\boldsymbol{a}) \cap O_g(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O^*(\boldsymbol{a}) \cap M$ platí nerovnosť $f(\boldsymbol{x}) > g(\boldsymbol{x})$. To je spor s predpokladmi. $\blacksquare$

Ak v predchádzajúcej vete $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$ nahradíme predpokladom $f(\boldsymbol{x}) < g(\boldsymbol{x})$, tvrdenie vety $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \leq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$ sa vo všeobecnosti nezmení.

V prípade nevlastných limít platia implikácie:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \infty. \implies \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = \infty. \quad \text{Resp.} \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = -\infty. \implies \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = -\infty.$$

Dôsledok 2.1.11.a (Veta o zovretí).
Funkcie $f, g, h\colon R^n \to R$, $n \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $M = D(f) \cap D(g) \cap D(h)$.
Okolie $O(\boldsymbol{a})$ je také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap M$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $h(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$.
Existujú limity $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = b$, kde $b \in R^*$.

$$\implies \text{Existuje limita } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b, \quad \text{t. j. } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}).$$

Dôsledok 2.1.11.b.
Funkcie $f, g\colon R^n \to R$, $n \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f) \cap D(g)$.
Funkcia f je ohraničená v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a}) - \{\boldsymbol{a}\}$. Existuje $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = 0$.

$$\implies \text{Existuje limita } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} [f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})] = 0.$$

Okolie $O(\boldsymbol{a})$ môžeme v predpokladoch vety 2.1.11, jej dôsledkoch a aj v nasledujúcich vetách nahradiť intervalom $I(\boldsymbol{a})$ a ich tvrdenia sa nezmenia (viď poznámka 2.1.9).

Z vety 2.1.11 vyplývajú nasledujúce vety, ktoré sú analógiami viet pre reálne funkcie jednej premennej. Aj ich dôkazy sú analogické, preto ich neuvádzame [49].

Veta 2.1.12.
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$. Potom platí:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0. \iff \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |f(\boldsymbol{x})| = 0.$$

Dôsledok 2.1.12.a.
Funkcia $f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$. Potom platí:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_m. \iff \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \|f(\boldsymbol{x})\|_m = \|\boldsymbol{0}_m\|_m = 0.$$

Veta 2.1.13.
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$.
Existuje aspoň jedna z limít $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \infty$, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = -\infty$, resp. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |f(\boldsymbol{x})| = \infty$.

$$\implies \text{Existuje } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{1}{f(\boldsymbol{x})} = 0.$$

Veta 2.1.14.
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$. Existuje $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0$.
Existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí:

a) $f(\boldsymbol{x}) < 0. \implies \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{1}{f(\boldsymbol{x})} = -\infty.$

b) $f(\boldsymbol{x}) > 0. \implies \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{1}{f(\boldsymbol{x})} = \infty.$

Veta 2.1.15.
Funkcie $f, g\colon R^n \to R$, $n \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $M = D(f) \cap D(g)$.
Existujú limity (môžu byť aj nevlastné) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) < \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$.

$$\implies \text{Existuje okolie } O(\boldsymbol{a}) \text{ také, že pre všetky } \boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap M,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a} \text{ platí } f(\boldsymbol{x}) < g(\boldsymbol{x}).$$

Dôsledok 2.1.15.a.
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$. Potom platí:

a) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) < 0. \implies$ Existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) < 0$.

b) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) > 0. \implies$ Existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) > 0$.

Veta 2.1.16 (O limite zloženej funkcie).
Funkcie $f\colon R^n \to R^m$, $g\colon R^m \to R^l$, $n, m, l \in N$, $H(f) \subset D(g)$.
Bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$, bod $\boldsymbol{b} \in (R^*)^m$ je hromadný bod $D(g)$, bod $\boldsymbol{c} \in (R^*)^l$.
Existujú limity $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, $\lim\limits_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{b}} g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c}$. Platí aspoň jeden z predpokladov a), b).
a) $g(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}$.
b) Existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}) \cap D(f)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{b}$.

$\implies$ Pre zloženú funkciu $F = g(f)$ platí $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} F(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(f(\boldsymbol{x})) = \lim\limits_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{b}} g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c}$.

Dôkaz.
Z predpokladov je zrejmé, že $\boldsymbol{a}$ je tiež hromadným bodom množiny $D(F) = D(g(f))$.
$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, t. j. pre všetky $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f) - \{\boldsymbol{a}\}$ také, že $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$, platí $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{b}$.
$\lim\limits_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{b}} g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c}$, t. j. pre všetky $\{\boldsymbol{u}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(g) - \{\boldsymbol{b}\}$ také, že $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{b}$, platí $\lim\limits_{k\to\infty} g(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{c}$.
Ak platí a), potom $\lim\limits_{k\to\infty} F(\boldsymbol{x}_k) = \lim\limits_{k\to\infty} g(f(\boldsymbol{x}_k)) = g(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}$.
Ak platí b), potom pre $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ platí $\{f(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset D(g) - \{\boldsymbol{b}\}$. Ak položíme $\boldsymbol{u}_k = f(\boldsymbol{x}_k)$, potom $\lim\limits_{k\to\infty} g(f(\boldsymbol{x}_k)) = \lim\limits_{k\to\infty} g(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{c}$, t. j. $\lim\limits_{k\to\infty} F(\boldsymbol{x}_k) = \lim\limits_{k\to\infty} g(f(\boldsymbol{x}_k)) = \boldsymbol{c}$. ■

Predchádzajúca veta zjednodušuje v mnohých prípadoch výpočet limít. Ak pri výpočte limity zloženej funkcie $g(f)$ položíme $u = f(\boldsymbol{x})$, potom hovoríme, že **vykonávame substitúciu** $u = f(x)$. Výpočet limity pôvodnej funkcie $f(\boldsymbol{x})$ v bode $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ prevedieme na výpočet limity funkcie $g(\boldsymbol{u})$ v bode $\boldsymbol{b} \in (R^*)^m$. Predpoklad b) je splnený napríklad, ak je funkcia f v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})$ prostá a platí $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$.

Poznámka 2.1.12.
Ak platí predpoklad a), potom

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(f(\boldsymbol{x})) = \lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{b}} g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{c} = g(\boldsymbol{b}) = g\Big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\Big).$$

Ak pri výpočte limity f v bode $\boldsymbol{a}$ použijeme substitúciu $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}\colon R^n \to R^n$, potom $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n$ a dostaneme

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} f(\varphi(\boldsymbol{h})) = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}).$$

Viacrozmerné limity, pokiaľ existujú, môžeme vypočítať pomocou viacnásobných limít (veta 2.1.17). V prípade vektorových funkcií $f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}); f_2(\boldsymbol{x}); \ldots; f_m(\boldsymbol{x}))$ počítame limitu každej zložky $f_j(\boldsymbol{x})$, $j = 1, 2, \ldots, m$ zvlášť.

Nech $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R^n$, $n \in N$. Postupne označme

$$\overline{\boldsymbol{x_1}} = (x_2; x_3; \ldots; x_n),\ \overline{\boldsymbol{x_2}} = (x_1; x_3; \ldots; x_n),\ \ldots,$$
$$\overline{\boldsymbol{x_i}} = (x_1; \ldots; x_{i-1}; x_{i+1}; \ldots; x_n),\ \ldots, \overline{\boldsymbol{x_n}} = (x_1; x_2; \ldots; x_{n-1}).$$

Každý z bodov $\overline{\boldsymbol{x_i}} \in R^{n-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ má vynechanú i-tu súradnicu. Špeciálne $\overline{\boldsymbol{x_1}} = x_2$, $\overline{\boldsymbol{x_2}} = x_1$ pre $\boldsymbol{x} \in R^2$ a $\overline{\boldsymbol{x_1}} = (x_2; x_3)$, $\overline{\boldsymbol{x_2}} = (x_1; x_3)$, $\overline{\boldsymbol{x_3}} = (x_1; x_2)$ pre $\boldsymbol{x} \in R^3$.

Veta 2.1.17.
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$, bod $\boldsymbol{a} \in (R^*)^n$ je hromadný bod $D(f)$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b \in R^*$.
Okolie $O(\boldsymbol{a})$ a $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sú také, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ existuje $\lim\limits_{x_i \to a_i} f(\boldsymbol{x})$.

$$\Longrightarrow \text{ Existuje } \lim_{\overline{\boldsymbol{x_i}}\to\overline{\boldsymbol{a_i}}} \Big[\lim_{x_i\to a_i} f(\boldsymbol{x})\Big] = \lim_{\overline{\boldsymbol{x_i}}\to\overline{\boldsymbol{a_i}}}\ \lim_{x_i\to a_i} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b.$$

Dôkaz.
Okolie $O(\overline{\boldsymbol{a_i}})$ dostaneme z okolia $O(\boldsymbol{a})$, ak vynecháme i-tu súradnicu.
Označme $g(\overline{\boldsymbol{x_i}}) = \lim\limits_{x_i\to a_i} f(\boldsymbol{x})$ pre $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$.
$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b$, t. j. pre každú $\{\boldsymbol{x}_k = (x_1; x_2; \ldots; x_n)_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}$ takú, že $\lim\limits_{k\to\infty} (x_1; x_2; \ldots; x_n)_k = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, platí $\lim\limits_{k\to\infty} f((x_1; x_2; \ldots; x_n)_k) = b$.
Pre všetky $\overline{\boldsymbol{x_i}} = (x_1; \ldots; x_{i-1}; x_{i+1}; \ldots; x_n) \in O(\overline{\boldsymbol{a_i}}) - \{\overline{\boldsymbol{a_i}}\}$ existuje $g(\overline{\boldsymbol{x_i}}) = \lim\limits_{x_i\to a_i} f(\boldsymbol{x})$,
t. j. ak $\lim\limits_{k\to\infty} x_{ik} = a_i$, potom $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_1; \ldots; x_{i-1}; x_{ik}; x_{i+1}; \ldots; x_n) = g(\overline{\boldsymbol{x_i}})$.
Nech postupnosť $\{\overline{\boldsymbol{x_i}}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset O(\overline{\boldsymbol{a_i}})$, $\overline{\boldsymbol{x_i}}_k \neq \overline{\boldsymbol{a_i}}$ je taká, že
$\lim\limits_{k\to\infty} \overline{\boldsymbol{x_i}}_k = \lim\limits_{k\to\infty} (x_1; \ldots; x_{i-1}; x_{i+1}; \ldots; x_n)_k = \overline{\boldsymbol{a_i}}$, potom $\lim\limits_{k\to\infty} g(\overline{\boldsymbol{x_i}}_k) = \lim\limits_{\overline{\boldsymbol{x_i}}\to\overline{\boldsymbol{a_i}}} g(\overline{\boldsymbol{x_i}})$.
Z predchádzajúceho vzťahu navyše platí

$$g(\overline{\boldsymbol{x_i}}_k) = \lim_{k\to\infty} f((x_1; \ldots; x_{i-1}; x_{ik}; x_{i+1}; \ldots; x_n)_k) = \lim_{k\to\infty} f((x_1; x_2; \ldots; x_n)_k).$$

Ak to zhrnieme, potom z $\lim\limits_{k\to\infty} x_{ik} = a_i$ vyplýva $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ a dostávame tvrdenie vety

$$\lim_{\overline{\boldsymbol{x_i}}\to\overline{\boldsymbol{a_i}}} \Big[\lim_{x_i\to a_i} f(\boldsymbol{x})\Big] = \lim_{\overline{\boldsymbol{x_i}}\to\overline{\boldsymbol{a_i}}} g(\overline{\boldsymbol{x_i}}) = \lim_{k\to\infty} g(\overline{\boldsymbol{x_i}}_k) = \lim_{k\to\infty} \Big[\lim_{k\to\infty} f((x_1; x_2; \ldots; x_n)_k)\Big]$$
$$= \lim_{k\to\infty} f((x_1; x_2; \ldots; x_n)_k) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b. \blacksquare$$

Predchádzajúca veta naznačuje postup pre výpočet n-rozmernej limity, pokiaľ existuje. Limitu prevedieme na $(n-1)$-rozmernú limitu, na ktorú môžeme opäť aplikovať vetu a dostaneme $(n-2)$-rozmernú limitu. Takýmto spôsobom môžeme postupne n-rozmernú limitu vyjadriť ako **n-násobnú (viacnásobnú) limitu**

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{x_{i_1}\to a_{i_1}} \Big[\lim_{x_{i_2}\to a_{i_2}} \cdots \Big[\lim_{x_{i_n}\to a_{i_n}} f(\boldsymbol{x})\Big]\Big] = \lim_{x_{i_1}\to a_{i_1}}\ \lim_{x_{i_2}\to a_{i_2}} \cdots \lim_{x_{i_n}\to a_{i_n}} f(\boldsymbol{x}),$$

kde indexy $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sú nejakou permutáciou množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. To znamená, že existuje $n!$ možností na vyjadrenie. Keďže postupne počítame limity jednej premennej, niekedy sa n-násobná limita nazýva **postupná (opakovaná) limita**. Pri praktickom výpočte $\lim\limits_{x_i\to a_i} f(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ považujeme všetky premenné okrem x_i za konštanty.

Poznámka 2.1.13.
Aby sa dala n-rozmerná limita vypočítať pomocou n-násobnej limity, musí existovať.

- *Ak existuje n-rozmerná limita, potom existujú všetky n-násobné limity a rovnajú sa.*
- *Ak existujú dve nerovnajúce sa n-násobné limity, potom n-rozmerná limita neexistuje.*
- *Viacrozmerná limita nemusí existovať aj v prípade, keď všetky viacnásobné limity existujú a rovnajú sa (príklad 2.1.18).*

V rovine R^2 nazývame dvojrozmernú limitu **dvojná** a môžeme ju vypočítať pomocou **dvojnásobných limít** (dve možnosti). Ak $f\colon R^2 \to R$, $\boldsymbol{x} = (x; y)$, $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y)$, potom

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\substack{x \to a_x \\ y \to a_y}} f(x; y) = \lim_{x\to a_x} \lim_{y\to a_y} f(x; y) = \lim_{y\to a_y} \lim_{x\to a_x} f(x; y).$$

Ak použijeme označenie $f\colon R^2 \to R$, $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2)$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$, potom

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f(x_1; x_2) = \lim_{x_1\to a_1} \lim_{x_2\to a_2} f(x_1; x_2) = \lim_{x_2\to a_2} \lim_{x_1\to a_1} f(x_1; x_2).$$

Trojrozmernú limitu v R^3 nazývame **trojná**. Trojnásobných limít je 6 a každú môžeme použiť na výpočet trojnej limity. Napr. pre $f\colon R^3 \to R$, $\boldsymbol{x} = (x; y; z)$, $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$ platí

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to a_x} \lim_{y\to a_y} \lim_{z\to a_z} f(x; y; z) = \lim_{x\to a_x} \lim_{z\to a_z} \lim_{y\to a_y} f(x; y; z)$$
$$\cdots = \lim_{z\to a_z} \lim_{x\to a_x} \lim_{y\to a_y} f(x; y; z) = \lim_{z\to a_z} \lim_{y\to a_y} \lim_{x\to a_x} f(x; y; z).$$

Príklad 2.1.14.
Dvojná limita $\lim\limits_{(x_1;x_2)\to(0;0)} \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$ neexistuje, pretože dvojnásobné limity sa nerovnajú

$$\lim_{x_1\to 0} \lim_{x_2\to 0} \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2} = \lim_{x_1\to 0} \frac{x_1-0}{x_1+0} = 1, \qquad \lim_{x_2\to 0} \lim_{x_1\to 0} \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2} = \lim_{x_2\to 0} \frac{0-x_2}{0+x_2} = -1. \ \blacksquare$$

Príklad 2.1.15.
Vypočítajte dvojnú limitu $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Riešenie.
Neznáme x, y vystupujú iba vo väzbe $x^2 + y^2 \geq 0$. Ak použijeme substitúciu $t = x^2 + y^2$, potom $t \to 0^+$ a limitu môžeme previesť na limitu jednej premennej (obr. 2.1.10).

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \begin{bmatrix} \text{Subst. } & t = x^2 + y^2 \geq 0 \\ x \to 0, y \to 0, & t \to 0^+ \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}-1} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(t+1)^{\frac{1}{2}}-1} = \left[\text{L'H} \tfrac{0}{0}\right]$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(t+1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{t}} = \sqrt{1+\frac{1}{0^+}} = \sqrt{1+\infty} = \infty. \ \blacksquare$$

Príklad 2.1.16.
Vypočítajte limity (obr. 2.1.11): a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ y\to 1}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, c) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty \\ y\to \infty}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Riešenie.
a) Postupnosť $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ je ľubovoľná taká, že $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k; y_k) = (1; 1)$. Potom platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k^3+y_k^3}{x_k^2+y_k^2} = \frac{1^3+1^3}{1^2+1^2} = 1, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{(x;y)\to(1;1)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k^3+y_k^3}{x_k^2+y_k^2} = 1.$$

Pre dvojnásobné limity v bode $(1;1)$ platí

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 1}\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 1}\tfrac{x^3+1^3}{x^2+1^2}=\tfrac{1^3+1}{1^2+1}=1,\quad \lim_{y\to 1}\lim_{x\to 1}\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 1}\tfrac{1^3+y^3}{1^2+y^2}=\tfrac{1+1^3}{1+1^2}=1.$$

b) Označme $f(x;y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. Pre všetky $(x;y)\in R^2$ platí

$$0\leq|f(x;y)|=\left|\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=\tfrac{|x^3+y^3|}{|x^2+y^2|}=\begin{bmatrix}|x^3+y^3|\leq|x^3|+|y^3|=|x|^3+|y|^3\\ |x^2+y^2|=x^2+y^2=|x|^2+|y|^2\end{bmatrix}\leq\frac{|x|^3+|y|^3}{|x|^2+|y|^2}$$
$$=\frac{|x|^3}{|x|^2+|y|^2}+\frac{|y|^3}{|x|^2+|y|^2}\leq\begin{bmatrix}|x|^2+|y|^2\geq|x|^2\\ |x|^2+|y|^2\geq|y|^2\end{bmatrix}\leq\frac{|x|^3}{|x|^2}+\frac{|y|^3}{|y|^2}=|x|+|y|\,.$$

Pre dvojrozmernú limitu funkcie $|f(x;y)|$ v bode $(0;0)$ platí

$$0\leq\lim_{(x;y)\to(0;0)}\left|\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\leq\lim_{(x;y)\to(0;0)}\big[\,|x|+|y|\,\big]=0+0=0,\quad\text{t. j.}\quad\lim_{(x;y)\to(0;0)}\left|\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=0.$$

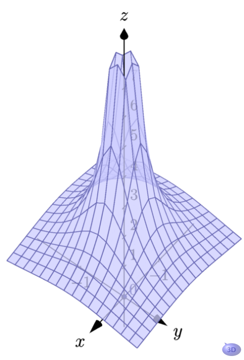
Z toho na základe vety 2.1.12 vyplýva $\displaystyle\lim_{(x;y)\to(0;0)}\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{(x;y)\to(0;0)}\left|\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=0.$

c) Keďže $x\to\infty$, $y\to\infty$, môžeme predpokladať $x>0$, $y>0$.
Ak použijeme substitúciu $u=\min\{x,y\}\to\infty$, $v=\max\{x,y\}\to\infty$, potom platí[15]

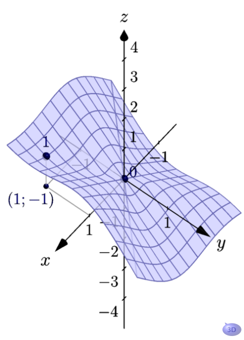
$$0<u\leq x\leq v,\quad 0<u\leq y\leq v,\quad \tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\tfrac{u^3+v^3}{u^2+v^2}\geq\tfrac{u^3+v^3}{v^2+v^2}=\tfrac{u^3+v^3}{2v^2}\geq\tfrac{v^3}{2v^2}=\tfrac{v}{2}.$$

Potom platí

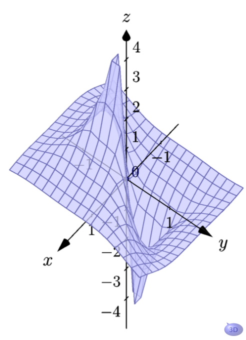
$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{u\to\infty\\ v\to\infty}}\tfrac{u^3+v^3}{u^2+v^2}\geq\lim_{\substack{u\to\infty\\ v\to\infty}}\tfrac{v}{2}=\lim_{v\to\infty}\tfrac{v}{2}=\infty,\quad\text{t. j.}\quad\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\tfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\infty.\ \blacksquare$$



Obr. 2.1.10:
$z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$
(príklad 2.1.15)



Obr. 2.1.11:
$z=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
(príklad 2.1.16)

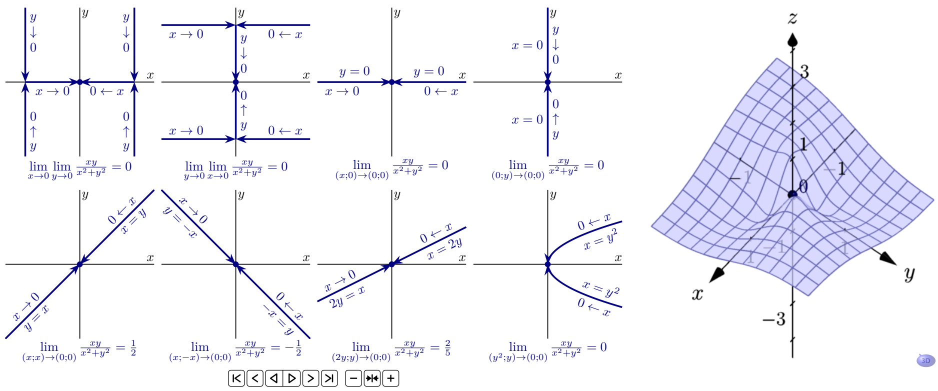


Obr. 2.1.12:
$z=\frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$
(príklad 2.1.17)

[15] Buď platí $u=x$, $v=y$ alebo $u=y$, $v=x$, t. j. $x^2+y^2=u^2+v^2$, $x^3+y^3=u^3+v^3$.

Príklad 2.1.17.
Limita $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$ neexistuje (obr. 2.1.12), pretože neexistujú dvojnásobné limity:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+0^3}{x^4+0^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.} \\ \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0^3+y^3}{0^4+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{1}{y} \text{ neexistuje.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \lim\limits_{y\to 0^-} \frac{1}{y} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{1}{y} = \frac{1}{0^+} = \infty. \ \blacksquare \end{array}$$



Obr. 2.1.13: Výpočet limity $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (príklad 2.1.18)

Príklad 2.1.18.
$L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ neexistuje, aj keď sa dvojnásobné limity rovnajú (obr. 2.1.13):

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \left[\, \tfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \tfrac{0}{x^2} = 0 \text{ pre všetky } x\in R \,\right] = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \left[\, \tfrac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \tfrac{0}{y^2} = 0 \text{ pre všetky } y\in R \,\right] = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Z predchádzajúceho vyplýva iba to, že ak limita L existuje, potom $L = 0$.
Ukážeme, že limita L neexistuje. Stačí nájsť dva smery s rôznymi hodnotami. Platí:

- Pre smer $x\to 0$, $y = 0$, resp. postupnosť $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{1}{k}; 0\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow (0;0)$ platí:

$$\lim_{(x;0)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}\cdot 0}{\frac{1}{k^2}+0^2} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

- Pre smer $x = 0$, $y\to 0$, resp. postupnosť $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(0; \frac{1}{k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow (0;0)$ platí:

$$\lim_{(0;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{0\cdot\frac{1}{k}}{0^2+\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

- Pre smer $x = y\to 0$, resp. postupnosť $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow (0;0)$ platí:

$$\lim_{(x;x)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{1}{2}.$$

- Pre smer $-x = y \to 0$, resp. postupnosť $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{1}{k}; -\frac{1}{k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow (0;0)$ platí:

$$\lim_{(x;-x)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(-x)}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}\cdot(-\frac{1}{k})}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{-1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = -\frac{1}{2}.$$

- Pre smer $x = 2y \to 0$ resp. postupnosť $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{2}{k}; \frac{1}{k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow (0;0)$ platí:

$$\lim_{(y;2y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{2y\cdot y}{4y^2+x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{2y^2}{5y^2} = \frac{2}{5}, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{k}\cdot\frac{1}{k}}{\frac{4}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{k^2}}{\frac{5}{k^2}} = \frac{2}{5}.$$

- Pre smer $x = y^2 \to 0$, resp. postupnosť $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{1}{k^2}; \frac{1}{k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow (0;0)$ platí:

$$\lim_{(y^2;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2\cdot y}{y^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y^2+1} = \frac{0}{0+1} = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^4}+\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{k}+k} = \frac{1}{0+\infty} = 0. \blacksquare$$

Poznámka 2.1.14.
Existuje nekonečne veľa smerov $(x;y) \to (0;0)$ a postupností $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow (0;0)$ a pre všetky možnosti musia byť $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k; y_k)$ rovnaké (poznámka 2.1.8).
Smer priblíženia vyjadrený explicitnou funkciou, znamená priblíženie k danému bodu po jej grafe, napr. $x = y^2 \to 0$ znamená priblíženie k $(0;0)$ po parabole určenej rovnicou $x = y^2$.
Každá z dvojnásobných limít predstavuje iba jeden zo smerov (obr. 2.1.8):

- $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x_k; y_k)$ *znamená najprv priblíženie k osi x a potom po osi x k bodu $(0;0)$,*
- $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x_k; y_k)$ *znamená najprv priblíženie k osi y a potom po osi y k bodu $(0;0)$.*

Príklad 2.1.19.
a) $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2-y^2}{\sin(x-y)} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{(x-y)(x+y)}{\sin(x-y)} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ r = x-y & x\to 0 & r\to 0 \\ \qquad\quad s = x+y & y\to 0 & s\to 0 \end{array}\right]$$
$$= \lim_{(r;s)\to(0;0)} \frac{r\cdot s}{\sin r} = \lim_{r\to 0} \frac{r}{\sin r} \cdot \lim_{s\to 0} s = 1\cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{(x;y)\to(a;a)} \frac{x^2-y^2}{\sin(x-y)} = \lim_{(x;y)\to(a;a)} \frac{(x-y)(x+y)}{\sin(x-y)} = \left[\begin{array}{l|l|l} \text{Subst.}\ \ r = x-y & x\to a & r\to 0 \\ \qquad\quad s = x+y & y\to a & s\to 2a \end{array}\right]$$
$$= \lim_{(r;s)\to(0;2a)} \frac{r\cdot s}{\sin r} = \lim_{r\to 0} \frac{r}{\sin r} \cdot \lim_{s\to 2a} s = 1\cdot 2a = 2a \text{ pre všetky } a\in R.$$

c) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x+y}{\sin(x^2+y^2)}$ neexistuje, pretože pre smer $y = x \to 0$ neexistuje limita

$$\lim_{(x;x)\to(0;0)} \frac{x+x}{\sin(x^2+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(2x^2)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x^2}{\sin(2x^2)} \cdot \frac{1}{x}\right) = \begin{cases} 1\cdot\frac{1}{0^+} = +\infty \text{ pre } x\to 0^+, \\ 1\cdot\frac{1}{0^-} = -\infty \text{ pre } x\to 0^-. \end{cases}$$

d) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y}$ neexistuje, pretože pre smery $y = x \to 0$ a $x = 0$, $y \to 0$ platí

$$\lim_{(x;x)\to(0;0)} \frac{x^2x^2}{x^2x^2+x-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1, \qquad \lim_{(0;y)\to(0;0)} \frac{0^2y^2}{0^2y^2+0-y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{-y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0. \blacksquare$$

Príklad 2.1.20.
Limita $L = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} (x+y)\sin\frac{1}{xy} = 0$, pretože pre všetky $x, y \in R - \{0\}$ platí

$$-1 \leq \sin\tfrac{1}{xy} \leq 1, \quad -|x+y| \leq x+y \leq -|x+y|,$$

$$\text{t. j. } -|x+y| \leq -|x+y| \cdot |\sin\tfrac{1}{xy}| \leq (x+y)\sin\tfrac{1}{xy} \leq |x+y| \cdot |\sin\tfrac{1}{xy}| \leq |x+y|.$$

Pre limitu potom na základe dôsledku 2.1.11.a platí

$$0 = -\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |x+y| \leq \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\tfrac{1}{xy} \leq \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |x+y| = 0, \quad \text{t. j. } L = 0. \blacksquare$$

2.1.4 Spojitosť funkcie n premenných

Ako sme už spomínali, limita a spojitosť funkcie v priestore R^n, $n \in N$ sa definujú analogicky ako v R a majú podobné vlastnosti. Keďže R^1 je špeciálny prípad priestoru R^n pre $n = 1$, vlastnosti platné v R^n musia platiť aj v R.

Funkcia $y = f(x)$: $R^n \to R^m$, $n, m \in N$ **je spojitá v bode $a \in D(f)$**, ak platí:

- Pre všetky $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, platí $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$,

  t. j. ak $x_k \in D(f)$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow a$, potom platí $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$.

Spojitosť funkcie $f = (f_1; f_2; \ldots; f_m)$: $R^n \to R^m$, $n, m \in N$ v bode $a \in D(f)$ znamená spojitosť všetkých zložiek $f_1, f_2, \ldots, f_m$: $R^n \to R$ v bode a. Bod a nazývame **bodom spojitosti funkcie f**.

Poznámka 2.1.15.
Bod $a \in D(f)$ môže byť iba hromadný alebo izolovaný.
Ak bod a je izolovaný, potom existuje jediná postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{a\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow a$, pre ktorú platí $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty} = \{f(a)\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow f(a)$, t. j. f je ***spojitá v izolovanom bode a****.*

Z definícií limity a spojitosti funkcie v bode vyplýva nasledujúca veta.

Veta 2.1.18.
Funkcia f: $R^n \to R^m$, $n, m \in N$, bod $a \in D(f)$ je hromadný bod $D(f)$. Potom platí:

Funkcia f je spojitá v bode a. $\iff$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ak funkcia f: $R^n \to R^m$, $n, m \in N$ nie je spojitá v bode $a \in D(f)$, nazýva sa **nespojitá v bode a**, ktorý nazývame **bod nespojitosti funkcie f**. Z poznámky 2.1.15 vyplýva, že funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode $D(f)$. Preto rozšírime pojem bodu nespojitosti na všetky vlastné hromadné body $D(f)$. To znamená, že funkcia f: $R^n \to R^m$, $n, m \in N$ je nespojitá v bode $a \in R^n$, hromadnom bode $D(f)$, ak:

- Existuje $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(f)$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow a$ taká, že $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \not\longrightarrow f(a)$,

  t. j. ak $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, ale $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) \neq f(a)$ alebo $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$ neexistuje.

Ak existuje konečná $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, potom sa bod a nazýva[16] **bodom neodstrániteľnej nespojitosti**. Inak sa nazýva **bodom neodstrániteľnej nespojitosti**.

[16] Stačí položiť $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ a nespojitosť v bode a sa odstráni.

Limita a spojitosť funkcie sú lokálne záležitosti v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})$. Pri spojitosti je potrebné, aby $\boldsymbol{a}\in D(f)$. Pri limite musí byť bod $\boldsymbol{a}$ hromadným bodom $D(f)$.

Spojité funkcie v R^n, $n\in N$ majú podobné vlastnosti ako spojité funkcie jednej premennej (viď napr. [6]). Ekvivalentnú definíciu spojitosti vyjadruje nasledujúca veta.

Ak uvážime poznámku 2.1.9, všetky nasledujúce tvrdenia ostanú v platnosti, ak namiesto okolí $O(\boldsymbol{a})$, $O(f(\boldsymbol{a}))$ použijeme intervaly $I(\boldsymbol{a})$, $I(f(\boldsymbol{a}))$.

Veta 2.1.19.
Funkcia $f\colon R^n \to R^m$, $n,m\in N$, je spojitá v bode $\boldsymbol{a}\in D(f)$.

$\iff$ • Pre každé okolie $O(f(\boldsymbol{a}))$ existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{a})\cap D(f)$ platí $f(\boldsymbol{x})\in O(f(\boldsymbol{b}))$.

Ak označíme polomery okolí ε, δ, môžeme tvrdenie vety symbolicky písať v tvare

$$\underbrace{\forall O_\varepsilon(f(\boldsymbol{a}))}_{\forall\varepsilon>0}\,\underbrace{\exists O_\delta(\boldsymbol{a})}_{\exists\delta>0}\,\forall\boldsymbol{x}\in D(f)\colon\quad \underbrace{\boldsymbol{x}\in O_\delta(\boldsymbol{a})}_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n<\delta}\quad\Longrightarrow\quad \underbrace{f(\boldsymbol{x})\in O_\varepsilon(f(\boldsymbol{a}))}_{\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})\|_m<\varepsilon}.$$

Príklad 2.1.21.
Funkcia $f(x;y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\colon R^2\to R$ je spojitá v každom bode $\boldsymbol{a}\in D(f)=R^2-\{(0;0)\}$.
Jediný problematický bod je $(0;0)\notin D(f)$, ktorý je bodom neodstrániteľnej nespojitosti, pretože neexistuje $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ (pr. 2.1.18). ■

Veta 2.1.20.
a) Funkcie $f,g\colon R^n\to R^m$, $n,m\in N$ sú spojité v bode $\boldsymbol{a}\in D(f)$, číslo $c\in R$.

$\Longrightarrow$ Funkcie $f\pm g$, cf sú spojité v bode $\boldsymbol{a}$.

b) Funkcie $f,g\colon R^n\to R$, $n\in N$ sú spojité v bode $\boldsymbol{a}\in D(f)$.

$\Longrightarrow$ Funkcie $|f|$, fg a pre $g(\boldsymbol{a})\neq 0$ aj funkcie $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ sú spojité v bode $\boldsymbol{a}$.

Veta 2.1.21 (Spojitosť zloženej funkcie).
Funkcie $f\colon R^n\to R^m$, $g\colon R^m\to R^l$, $n,m,l\in N$, $H(f)\subset D(g)$,
Funkcia f je spojitá v bode $\boldsymbol{a}\in D(f)$, funkcia g je spojitá v bode $\boldsymbol{b}=f(\boldsymbol{a})\in D(g)$.

$\Longrightarrow$ Zložená funkcia $F=g(f)$ je spojitá v bode $\boldsymbol{a}$.

Veta 2.1.22 (O zovretí).
Funkcie $f,g,h\colon R^n\to R$, $n\in N$, $\boldsymbol{a}\in M=D(f)\cap D(g)\cap D(g)$.
Okolie $O(\boldsymbol{a})$ je také, že pre všetky $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{a})\cap M$ platí $h(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{x})\le g(\boldsymbol{x})$.
$f(\boldsymbol{a})=g(\boldsymbol{a})=h(\boldsymbol{a})$, funkcie g, h sú spojité v bode $\boldsymbol{a}$.

$\Longrightarrow$ Funkcia f je spojitá v bode $\boldsymbol{a}$.

Predpoklad $f(\boldsymbol{a})=g(\boldsymbol{a})=h(\boldsymbol{a})$ je dôležitý, bez neho nemôžeme vetu použiť. Ak nie je splnený, potom funkcia f v bode $\boldsymbol{a}$ nemusí byť spojitá.

Funkcia $f\colon R^n\to R^m$, $n,m\in N$ je spojitá na množine $A\subset D(f)$, ak je spojitá v každom bode $\boldsymbol{a}\in A$. Ak je spojitá na celom svojom $D(f)$, potom ju nazývame **spojitá**.

Je zrejmé, že ak je funkcia f spojitá na nejakej množine A, potom je spojitá na každej podmnožine $B\subset A$.

Veta 2.1.23.
Funkcia $f\colon R^n \to R^m$, $n,m\in N$ je spojitá v bode $\boldsymbol{a}\in D(f)$.

$\Longrightarrow$ a) Existuje okolie $O(\boldsymbol{a})$ také, že f je ohraničená na $O(\boldsymbol{a})$.

b) Existuje interval $I(\boldsymbol{a})$ taký, že f je ohraničená na $I(\boldsymbol{a})$.

Tvrdenia vety predstavujú lokálnu ohraničenosť v bode $\boldsymbol{a}$ spojitej funkcie v bode $\boldsymbol{a}$. T. j. pre všetky $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{a})\cap D(f)$, resp. $\boldsymbol{x}\in I(\boldsymbol{a})\cap D(f)$ platí $\|f(\boldsymbol{x})\|_m \leq \alpha$, kde $\alpha \geq 0$.

Zo spojitosti funkcie f na ohraničenej množine $A \subset D(f)$ ešte nevyplýva jej ohraničenosť na tejto množine. Množina musí byť uzavretá (veta 2.1.25). Napríklad funkcia

$$f : z = \tfrac{1}{x^2+y^2},\ (x;y)\in R^2 - \{(0;0)\}$$

je spojitá na ohraničenej množine $A = (0;2\rangle\times(0;2\rangle$, ale nie je na A ohraničená (obr. 2.1.14).

Veta 2.1.24.
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n\in N$ je spojitá v bode $\boldsymbol{a}\in D(f)$. Potom platí:

a) $f(\boldsymbol{a}) < 0.$ $\Longrightarrow$ Existuje $O(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{a})\cap D(f)$ platí $f(\boldsymbol{x}) < 0$.

b) $f(\boldsymbol{a}) > 0.$ $\Longrightarrow$ Existuje $O(\boldsymbol{a})$ také, že pre všetky $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{a})\cap D(f)$ platí $f(\boldsymbol{x}) > 0$.

Veta 2.1.25.
Funkcia $f\colon R^n \to R^m$, $n,m\in N$ je spojitá, množina $A \subset D(f)$ je uzavretá a ohraničená.

$\Longrightarrow$ Obraz $f(A)$ je uzavretá a ohraničená množina.

Ak je spojitá funkcia $f\colon A \to f(A)$, kde $A \subset R^n$, $f(A) \subset R^m$, $n,m\in N$ prostá, potom k nej existuje inverzná funkcia $f^{-1}\colon f(A) \to A$, ktorá je tiež spojitá.

Príklad 2.1.22.
Uvažujme funkciu $f(x;y) = (x+y; x-y)\colon R^2 \to R^2$ a množinu $A = \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$.

Funkcia f je spojitá a množina A je uzavretá a ohraničená. Potom je množina $f(A)$ tiež uzavretá a ohraničená (veta 2.1.25). Skutočne to platí, pretože $f(A) = \langle 0;2\rangle \times \langle -1;1\rangle$. Funkcia $f\colon A \to f(A)$ je spojitá a bijektívna. Pre inverznú funkciu $f^{-1}\colon f(A) \to A$ platí:

$$f(x;y) = (x+y; x-y) = (u;v). \iff f^{-1}(u;v) = (x;y).$$

Z rovníc $x+y = u$, $x-y = v$ vyjadríme neznáme x a y. Po sčítaní a odčítaní rovníc platí

$$\left.\begin{aligned} 2x &= (x+y)+(x-y) = u+v. \\ 2y &= (x+y)-(x-y) = u-v. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Longrightarrow\ x = \tfrac{u+v}{2},\ y = \tfrac{u-v}{2}. \\ &\qquad\Longrightarrow\ f^{-1}(u;v) = \left(\tfrac{u+v}{2}; \tfrac{u-v}{2}\right)\colon f(A) \to A. \end{aligned}$$

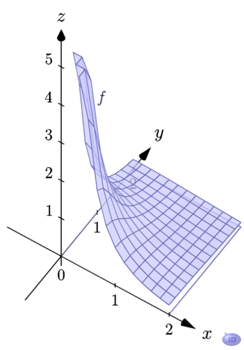
Platnosť overíme jednoducho dosadením. Pre všetky $(x;y)\in A$, resp. $(u;v)\in f(A)$ platí:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x;y)) &= f^{-1}(x+y; x-y) = \left(\tfrac{x+y+x-y}{2}; \tfrac{x+y-x+y}{2}\right) = (x;y). \\ f(f^{-1}(u;v)) &= f\left(\tfrac{u+v}{2}; \tfrac{u-v}{2}\right) = \left(\tfrac{u+v}{2} + \tfrac{u-v}{2}; \tfrac{u+v}{2} - \tfrac{u-v}{2}\right) = (u;v). \ \blacksquare \end{aligned}$$

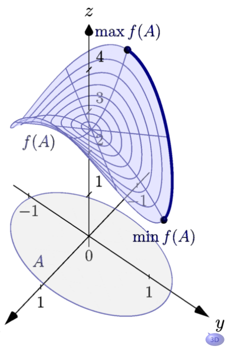
Veta 2.1.26.
Funkcia $f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ je spojitá, $A \subset D(f)$ je súvislá množina.
$\Longrightarrow$ Obraz $f(A)$ je súvislá množina.

Na záver tejto časti uvedieme rozšírenie Weierstrasseho vety (ma1: veta 3.3.10) pre n-rozmerné funkcie.

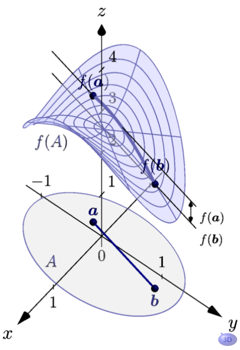
Veta 2.1.27.
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$ je spojitá na oblasti $A \subset R^n$ (otvorená a súvislá množina). Body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$ sú ľubovoľné.
$\Longrightarrow$ Funkcia f nadobúda všetky hodnoty z intervalu s koncovými bodmi $f(\boldsymbol{a})$ a $f(\boldsymbol{b})$.



Obr. 2.1.14: Veta 2.1.23



Obr. 2.1.15: Veta 2.1.26



Obr. 2.1.16: Veta 2.1.27

2.2 Derivácia a diferenciál funkcie n premenných

2.2.1 Diferencovateľnosť funkcie viacerých premenných

Pojem derivácie funkcie dvoch a viacerých premenných je trochu zložitejší ako pojem derivácie funkcie jednej premennej. Derivácia funkcie $f\colon R \to R$ v bode $a \in D(f)$ geometricky predstavuje smernicu dotyčnice ku grafu funkcie f v tomto bode a.

Pri derivácii funkcie $f\colon R^2 \to R$ v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2) \in D(f)$ hovoríme o dotykovej rovine ku grafu funkcie f v bode $(a_1; a_2)$ a potrebujeme dve dotykové priamky a ich smernice.

Pri derivácii funkcie $f\colon R^3 \to R$ v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3) \in D(f)$ už potrebujeme tri dotykové priamky a ich smernice atď. Tieto funkcie môžeme derivovať v danom bode v smere ľubovoľného vektora patriaceho do $D(f)$.

Špeciálne, derivácie v smere súradnicových osí, nazývame parciálne derivácie. Treba si však uvedomiť, že existencia všetkých parciálnych derivácií v danom bode ešte nezaručuje derivácie v ostatných smeroch. To znamená, že funkcia nemusí mať v tomto bode deriváciu, dokonca ani nemusí byť spojitá v tomto bode.

Uvažujme funkciu $f\colon A \to R^m$, kde $A \subset R^n$ je oblasť (otvorená a súvislá množina), $n, m \in N$, bod $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$ a ľubovoľný vektor $\boldsymbol{h} = (h_1; h_2; \ldots; h_n) \in R^n$ taký, že $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in A$. Funkcia f sa nazýva **diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$**, ak existuje lineárne zobrazenie $\lambda(\boldsymbol{h})\colon R^m \to R^n$ reprezentované reálnou maticou $\boldsymbol{D}$ typu $m \times n$ také, že

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\lambda(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \boldsymbol{0}_m. \tag{2.5}$$

Matica $\boldsymbol{D}$ sa nazýva **derivácia funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$** a značí sa $f'(\boldsymbol{a})$, t. j. $\boldsymbol{D} = f'(\boldsymbol{a})$. Lineárna funkcia $\lambda(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T = \boldsymbol{D}\boldsymbol{h}^T$ reprezentovaná maticou $\boldsymbol{D} = f'(\boldsymbol{a})$ sa nazýva **diferenciál**[17] **funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$** a označuje sa $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$, t. j. $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T$.

Ak použijeme substitúciu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in A$, potom pre $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n$ platí

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{h},\ \ \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a},\ \ \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{D}^T.$$

Limitu (2.5) môžeme písať v tvare

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} = \boldsymbol{0}_m. \tag{2.6}$$

Ak je funkcia f diferencovateľná v každom bode $\boldsymbol{a} \in B$, kde $B \subset A$, potom sa f nazýva **diferencovateľná na množine B**. Ak je f diferencovateľná v každom bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$, nazýva sa **diferencovateľná**.

Veta 2.2.1.
Funkcia $f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ má v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ najviac jednu deriváciu $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{D}$.

Dôkaz.
Nech $A \subset D(f)$ je oblasť taká, že $\boldsymbol{a} \in A$ a nech existuje $f'(a)$.
Dokážeme sporom. Nech existujú dve matice $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$ typu $m \times n$ také, že $\boldsymbol{D}_1 \neq \boldsymbol{D}_2$ a platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_1^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \boldsymbol{0}_m, \qquad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_2^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \boldsymbol{0}_m.$$

Z vety 2.1.8 vyplýva, že v nejakom okolí $O(\boldsymbol{0}_n)$ sú ohraničené argumenty predchádzajúcich limít. Je zrejmé, že v tomto okolí sú ohraničené aj funkcie $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})$, $\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_1^T$, $\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_2^T$. Potom majú zmysel nasledujúce limity a platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_1^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}, \qquad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_2^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}. \tag{2.7}$$

Ak odčítame obe rovnosti, dostaneme

$$\boldsymbol{0}_m = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_1^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} - \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_2^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_1^T-\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}_2^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{h}\boldsymbol{C}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}. \tag{2.8}$$

Rozdiel $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n} = \boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2 \neq \boldsymbol{0}_{m\times n}$ je nenulová matica, označme jej j-ty riadok $\boldsymbol{c}_j = (c_{j1}; c_{j2}; \ldots; c_{jn})$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Potom platí $\boldsymbol{h}\boldsymbol{c}_j^T = h_1c_{j1} + h_2c_{j2} + \cdots + h_nc_{jn}$,

$$\boldsymbol{h}\boldsymbol{C}^T = (h_1; h_2; \ldots; h_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}^T = (h_1; h_2; \ldots; h_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= (h_1c_{11} + h_2c_{12} + \cdots + h_nc_{1n}; \ldots; h_1c_{m1} + h_2c_{m2} + \cdots + h_nc_{mn}),$$

[17] Takto definovaný diferenciál sa zvykne nazývať **totálny**, **silný**, resp. **Fréchetov diferenciál**.

t. j. $\boldsymbol{hC}^T = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{c}_1^T; \boldsymbol{c}_2^T; \ldots; \boldsymbol{c}_m^T) = (\boldsymbol{hc}_1^T; \boldsymbol{hc}_2^T; \ldots; \boldsymbol{hc}_m^T)$. Pre vzťah (2.8) potom platí

$$(0;0;\ldots;0) = \boldsymbol{0}_m = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{hC}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{(\boldsymbol{hc}_1^T; \boldsymbol{hc}_2^T; \ldots; \boldsymbol{hc}_m^T)}{\|\boldsymbol{h}\|_n}$$
$$= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \left(\frac{\boldsymbol{hc}_1^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}; \frac{\boldsymbol{hc}_2^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}; \ldots; \frac{\boldsymbol{hc}_m^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} \right) = \left(\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{hc}_1^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}; \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{hc}_2^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}; \ldots; \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{hc}_m^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} \right).$$

Posledné limity sú nulové, t. j. aj pre každý smer musia byť nulové. Pre $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}_n$ zvoľme smer $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n$ v tvare[18] $t\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n$, $t \in (0;1)$, t. j. $t \to 0^+$. Potom pre $j = 1, 2, \ldots, m$ platí

$$0 = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{\boldsymbol{hc}_j^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\boldsymbol{hc}_j^T}{\|t\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\boldsymbol{hc}_j^T}{t\cdot\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\boldsymbol{hc}_j^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \frac{\boldsymbol{hc}_j^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}, \qquad \text{t. j. } \frac{\boldsymbol{hc}_j^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0.$$

Posledné rovnosti sú možné iba ak $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_2 = \cdots = \boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{0}_n$, t. j. $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}_{m\times n}$ (spor). Potom platí $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2$ a existuje iba jedna derivácia $f'(a)$. ■

Veta 2.2.2.
Množina $A \subset R^n$, $m, n \in N$ je oblasť, funkcia $f\colon A \to R^m$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in A$.
$\Longrightarrow$ Funkcia f je spojitá v bode $\boldsymbol{a}$.

Dôkaz.
Funkcia f je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$, potom platí[19]

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{hD}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \boldsymbol{0}_m, \qquad \text{t. j. } \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \left[f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{hD}^T \right] = \boldsymbol{0}_m.$$

Ak označíme $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, potom (veta 2.1.18) dostaneme tvrdenie vety

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \left[f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{hD}^T \right] = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{0}_m = f(\boldsymbol{a}). \ ■$$

Príklad 2.2.1.
Vypočítajte $f'(\boldsymbol{a})$, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$ funkcie $f(x_1;x_2) = x_1^2 + x_2^2\colon R^2 \to R$ v bode $\boldsymbol{a} \in R^2$.

Riešenie.
Bod $\boldsymbol{a} = (a_1;a_2) \in R^2$ je ľubovoľný. Nech $\boldsymbol{h} = (h_1;h_2) \in R^2$ je ľubovoľné, potom platí

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = f(a_1+h_1; a_2+h_2) - f(a_1;a_2)$$
$$= \left[(a_1+h_1)^2 + (a_1+h_2)^2\right] - \left[a_1^2 + a_2^2\right] = \left[(a_1+h_1)^2 - a_1^2\right] + \left[(a_2+h_2)^2 - a_2^2\right]$$
$$= (2a_1+h_1)h_1 + (2a_2+h_2)h_2 = h_1^2 + h_2^2 + 2a_1h_1 + 2a_2h_2.$$

Označme $\boldsymbol{D} = (d_1;d_2)$, potom $\boldsymbol{hD}^T = (h_1;h_2)(d_1;d_2)^T = d_1h_1 + d_2h_2$ a platí

$$\frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{hD}^T}{\|\boldsymbol{h}\|} = \frac{h_1^2+h_2^2+2a_1h_1+2a_2h_2-d_1h_1-d_2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \sqrt{h_1^2+h_2^2} + \frac{(2a_1-d_1)h_1+(2a_2-d_2)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Keďže $\|\boldsymbol{h}\| = \sqrt{h_1^2+h_2^2} \to 0$ pre $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0} = (0;0)$, platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{hD}^T}{\|\boldsymbol{h}\|} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \left(\sqrt{h_1^2+h_2^2} + \frac{(2a_1-d_1)h_1+(2a_2-d_2)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right) = (0;0).$$
$$\Longleftrightarrow \ (2a_1-d_1)h_1 + (2a_2-d_2)h_2 = 0, \qquad \text{t. j. } d_1 = 2a_1, \ d_2 = 2a_2.$$

To znamená, že funkcia f je diferencovateľná v každom bode $\boldsymbol{a} = (a_1;a_2) \in R^2$ a platí

$$f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{D} = (2a_1;2a_2), \quad \mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{hD}^T = \boldsymbol{Dh}^T = f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}^T = 2a_1h_1 + 2a_2h_2. \ ■$$

---

[18] K bodu $\boldsymbol{0}_n$ sa približujeme po úsečke so začiatkom $\boldsymbol{h}$ a koncovým bodom $\boldsymbol{0}_n$.
[19] Keďže je limita zlomku nulová, musí byť aj limita jeho čitateľa nulová.

2.2.2 Parciálne derivácie funkcie n premenných

Uvažujme funkciu $f\colon A \to R^m$, kde $A \subset R^n$ je oblasť, $n, m \in N$ a bod $\boldsymbol{a} \in A$.

Derivácia f v bode $\boldsymbol{a}$ predstavuje konštantnú maticu typu $m \times n$. Jej výpočet na základe definície (príklad 2.2.1) je voľba nevhodná a väčšinou prakticky nemožná. Deriváciu $f'(\boldsymbol{a})$ môžeme jednoducho vypočítať pomocou jej tzv. parciálnych derivácii.

Funkcia f má v bode $\boldsymbol{a}$ parciálnu deriváciu j-tej zložky, $j = 1, 2, \ldots, m$ **podľa i-tej premennej (podľa x_i)**, $i = 1, 2, \ldots, n$, ak existuje konečná (vlastná) limita[20]

$$\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f_j(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i+t;a_{i+1};\ldots;a_n) - f_j(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i;a_{i+1};\ldots;a_n)}{t}$$
$$= \left[\begin{array}{l} \text{Subst. } x_i = a_i + t \\ \quad t \to 0, \quad x_i \to a_i \end{array}\right] = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f_j(a_1;\ldots;a_{i-1};x_i;a_{i+1};\ldots;a_n) - f_j(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i;a_{i+1};\ldots;a_n)}{x_i - a_i}.$$

Hodnota funkcie f_j sa mení iba v závislosti od i-tej premennej, od ostatných premenných je nezávislá. Pre $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ definujeme jednorozmerné funkcie

$$g_{ij}(x_i) = f(a_1; \ldots; a_{i-1}; x_i; a_{i+1}; \ldots; a_n)\colon\ R \to R.$$

Potom pre $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ platí $\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d} g_{ij}(a_i)}{\mathrm{d} x_i} = g'_{ij}(a_i)$.

Funkcia f má **parciálnu deriváciu** j-tej zložky, $j = 1, 2, \ldots, m$ podľa i-tej premennej, $i = 1, 2, \ldots, n$ **na množine $B \subset A$**, ak pre každé $\boldsymbol{a} \in B$ existuje $\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}$.

Veta 2.2.3.
Množina $A \subset R^n$ je oblasť, $n, m \in N$, funkcia $f\colon A \to R^m$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in A$, pričom derivácia $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{D} = (d_{ij})_{m \times n}$.

$\implies$ Existujú všetky parciálne derivácie $\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = d_{ji}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Dôkaz.
Označme j-ty riadok matice $\boldsymbol{D}$ symbolom $\boldsymbol{d}_j = (d_{j1}; d_{j2}; \ldots; d_{jn})$, $j = 1, 2, \ldots, m$.
Potom $\boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{d}_1^T; \boldsymbol{d}_2^T; \ldots; \boldsymbol{c}_m^T) = (\boldsymbol{h}\boldsymbol{d}_1^T; \boldsymbol{h}\boldsymbol{d}_2^T; \ldots; \boldsymbol{h}\boldsymbol{d}_m^T)$ a vzťah (2.5) môžeme vyjadriť

$$\boldsymbol{0}_m = \lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{h}\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}$$
$$= \lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n} \frac{(f_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}); f_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}); \ldots; f_m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})) - (f_1(\boldsymbol{a}); f_2(\boldsymbol{a}); \ldots; f_m(\boldsymbol{a})) - (\boldsymbol{h}\boldsymbol{d}_1^T; \boldsymbol{h}\boldsymbol{d}_2^T; \ldots; \boldsymbol{h}\boldsymbol{d}_m^T)}{\|\boldsymbol{h}\|_n}.$$

To znamená (viď dôkaz vety 2.2.1), že platí

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n} \frac{f_j(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f_j(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{h}\boldsymbol{d}_j^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0 \quad \text{pre } j = 1, 2, \ldots, m.$$

Ak v tomto vzťahu pre $j = 1, 2, \ldots, m$ zvolíme za $\boldsymbol{h}$ postupne pre $i = 1, 2, \ldots, n$ smery $\boldsymbol{t}_i = (0; \ldots; 0; t; 0; \ldots; 0) \to \boldsymbol{0}_n$ (na i-tom mieste je $t \in R$, $t \to 0$), dostaneme

$$\|\boldsymbol{t}_i\|_n = \sqrt{t^2} = |t|, \quad \boldsymbol{t}_i\boldsymbol{d}_j^T = (0; \ldots; 0; t; 0; \ldots; 0) \cdot (d_{j1}; \ldots; d_{ji}; \ldots; d_{jn})^T = t d_{ji}.$$

Pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ potom platí

$$0 = \lim_{\boldsymbol{t}_i \to \boldsymbol{0}_n} \frac{f_j(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{t}_i) - f_j(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{t}_i\boldsymbol{d}_j^T}{\|\boldsymbol{t}_i\|_n} = \lim_{\boldsymbol{t}_i \to \boldsymbol{0}_n} \left| \frac{f_j(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{t}_i) - f_j(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{t}_i\boldsymbol{d}_j^T}{\|\boldsymbol{t}_i\|_n} \right|$$

[20] V zložke f_j sa mení iba i-ta premenná $a_i + t \to a_i$, resp. $x_i \to a_i$.

$$= \lim_{t\to 0} \left| \frac{f_j(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i+t;a_{i+1};\ldots;a_n) - f_j(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i;a_{i+1};\ldots;a_n) - td_{ji}}{t} \right|$$

$$= \lim_{t\to 0} \left| \frac{f_j(a_1;\ldots;a_i+t;\ldots;a_n) - f_j(a_1;\ldots;a_i;\ldots;a_n)}{t} - d_{ji} \right| = \left| \frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} - d_{ji} \right|,$$

t. j. $\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} - d_{ji} = 0$ a aj tvrdenie vety $\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = d_{ji}$. ■

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že ak je funkcia $f\colon A \to R^m$, $A \subset R^n$, $n, m \in N$ **diferencovateľná** v bode $\boldsymbol{a} \in A$, t. j. ak existuje $f'(\boldsymbol{a})$, potom **existujú všetky** $\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ a tvoria maticu $f'(\boldsymbol{a})$, ktorú nazývame **Jacobiho matica**

$$f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{D} = \left(\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} \right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Poznámka 2.2.1.
Opačné tvrdenie vety 2.2.3 pre $n \in N$, $n \geq 2$ neplatí.
*Existencia všetkých parciálnych derivácií $\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}$ v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ **nezaručuje** existenciu derivácie $f'(\boldsymbol{a})$ a **nezaručuje** ani spojitosť f v bode $\boldsymbol{a}$ (príklad 2.2.5).*

• *Opačné tvrdenie platí iba pre $n = 1$, t. j. pre funkcie $f\colon R \to R$, kde existuje iba jedna parciálna derivácia identická s deriváciou $f'(a)$. V tomto prípade, ak existuje konečná derivácia $f'(a)$, potom je f v bode a spojitá (ma1: veta 4.1.1).*

• *Spojitosť funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ pre $n > 1$ zaručuje existencia derivácie $f'(\boldsymbol{a})$ (nie iba existencia matice derivácie), t. j. diferencovateľnosť funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ (veta 2.2.2).*

V niektorých špeciálnych prípadoch sa môže Jacobiho matica zjednodušiť.

• **Funkcia $f\colon R \to R$, t. j. $n = m = 1$, $\boldsymbol{x} = (x) = x$, $\boldsymbol{a} = (a) = a$, $\boldsymbol{h} = (h) = h$.**

Matica derivácie $f'(\boldsymbol{a})$ sa redukuje na jeden prvok. Dostávame deriváciu reálnej funkcie jednej premennej, ako ju poznáme doposiaľ (ma1: 4.1 Derivácia reálnej funkcie). Platí

$$f'(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x} \right) = \frac{\partial f(a)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x} = f'(a), \quad \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x} \right) = f'(a)h = \mathrm{d}f(a, h).$$

• **Funkcia $f\colon R \to R^m$, t. j. $n = 1$, $m \in N$, $m \geq 2$,**
$f = (f_1; f_2; \ldots; f_m)$, $\boldsymbol{x} = (x) = x$, $\boldsymbol{a} = (a) = a$, $\boldsymbol{h} = (h) = h$

Matica derivácie $f'(\boldsymbol{a})$ sa redukuje na stĺpcový vektor s m zložkami, ktorý sa nazýva **dotykový vektor funkcie f v bode a**. Funkcia f geometricky predstavuje krivku parametrizovanú rovnicami $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, ..., $y_m = f_m(x)$, $x \in A$. Platí

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x} \\ \ldots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1(a)}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}f_2(a)}{\mathrm{d}x} \\ \ldots \\ \frac{\mathrm{d}f_m(a)}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \\ \ldots \\ f_m'(a) \end{pmatrix},$$

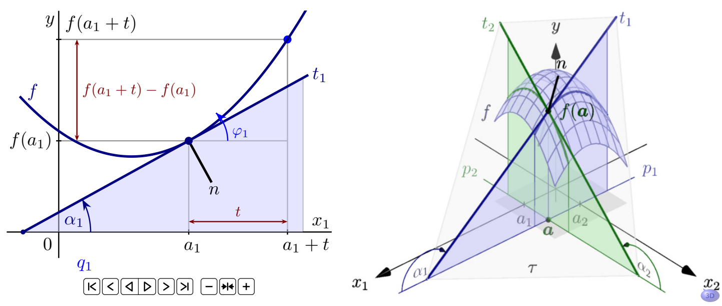
$$\mathrm{d}f(a, h) = hf'(a)^T = \left(\frac{\partial f_1(a)}{\partial x} h; \frac{\partial f_2(a)}{\partial x} h; \ldots; \frac{\partial f_m(a)}{\partial x} h \right) = \left(f_1'(a)h; f_2'(a)h; \ldots; f_m'(a)h \right).$$

• **Funkcia** $f\colon R^n \to R$**, t. j.** $n \in N$**,** $n \geq 2$**,** $m = 1$**,**
$\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$**,** $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$**,** $\boldsymbol{h} = (h_1; h_2; \ldots; h_n)$

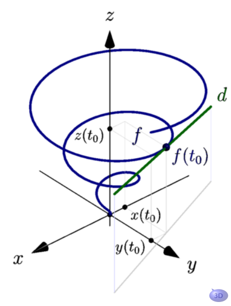
Matica derivácie $f'(\boldsymbol{a})$ sa redukuje na riadkový vektor s n zložkami, ktorý sa nazýva **gradient funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$** a označuje $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$. Platí

$$f'(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \Big(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\Big),$$
$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})^T = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}^T = \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} h_n.$$

Na obr. 2.2.17 vpravo sú znázornené parciálne derivácie funkcie $f\colon R^2 \to R$. Geometricky vyjadrujú smernice, t. j. tangensy uhlov α_1 a α_2 dotykových priamok t_1 a t_2 ku grafu funkcie f v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$ so svojimi kolmými priemetmi p_1 a p_2 do súradnicovej roviny $x_1 x_2$. Priemety p_1 a p_2 sú rovnobežné so súradnicovými osami x_1 a x_2. Priamky t_1 a t_2 jednoznačne určujú dotykovú rovinu ku grafu funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ (viď poznámka 2.2.2 a príklad 2.2.4).



Obr. 2.2.17: Geometrická interpretácia derivácie funkcií $f\colon R \to R$ (vľavo) a $f\colon R^2 \to R$ (vpravo)



Obr. 2.2.18: Príklad 2.2.3

Keď zafixujeme premennú x_2 na hodnotu a_2 dostaneme reálnu funkciu $f(x_1)\colon R \to R$ jednej reálnej premennej. Jej grafom je (rovinná) krivka, ktorá vznikne prierezom pôvodného grafu rovinou určenou priamkami d_1 a p_1 (rovinou rovnobežnou so súradnicovou rovinou $x_1 y$ obsahujúcou dotyčnicu d_1). Analogicky môžeme fixovať premennú x_1 na hodnotu a_1. Potom dostaneme reálnu funkciu $f(x_2)\colon R \to R$, ktorej graf vznikne prierezom pôvodného grafu rovinou určenou priamkami d_2 a p_2 (rovinou rovnobežnou s rovinou $x_2 y$ obsahujúcou dotyčnicu d_2).

- **Funkcia f: $R^n \to R^n$, t. j. $n = m \in N$, $n \geq 2$,**
  $f = (f_1; f_2; \ldots; f_m)$, $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, $\boldsymbol{h} = (h_1; h_2; \ldots; h_n)$

Derivácia $f'(\boldsymbol{a})$ je štvorcová matica[21] typu $n \times n$, jej determinant $\det f'(\boldsymbol{a})$ sa nazýva **Jakobián**. Platí

$$f'(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} f'(\boldsymbol{a})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} h_n \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} h_n \\ \cdots \\ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial f_n(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} h_n \end{pmatrix}.$$

Príklad 2.2.2.
Pre funkciu $f(x; y) = x^y$: $(0; \infty) \times R \to R$ platí

$$\mathrm{grad}\, f(x; y) = f'(x; y) = \left(\tfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}; \tfrac{\partial f(x;y)}{\partial y} \right) = \left(y x^{y-1}; x^y \ln x \right),$$
$$f'(1; 1) = (1 \cdot 1^{1-1}; 1^1 \cdot \ln 1) = (1; 0), \quad f'(1; 0) = (0 \cdot 1^{0-1}; 1^0 \cdot \ln 1) = (0; 0).$$

Pre funkciu $f(x; y) = (f_1(x; y); f_2(x; y)) = (x^y; y^x)$: $(0; \infty)^2 \to R^2$ platí

$$f'(x; y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x;y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x;y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x;y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x;y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y x^{y-1} & x^y \ln x \\ x y^{x-1} & y^x \ln y \end{pmatrix}, \quad f'(x; y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

Poznámka 2.2.2.
Uvažujme reálnu funkciu jednej reálnej premennej $y = f(x_1)$: $R \to R$ a bod $a_1 \in D(f)$. Dotyčnica t_1 ku grafu funkcie f v bode a_1 má rovnicu (obr. 2.2.17 vľavo)

$$t_1\colon\ y - f(a_1) = \mathrm{d}f(a_1, x_1 - a_1) = f'(a_1) \cdot (x_1 - a_1) = \mathrm{tg}\, \alpha_1 \cdot (x_1 - a_1),$$

kde $(1; f'(a_1)) = (1; \mathrm{tg}\, \alpha_1)$ je smerový vektor dotyčnice t_1. Normálový vektor k dotyčnici t_1 má tvar $(f'(a_1); -1) = (\mathrm{tg}\, \alpha_1; -1)$. ***Normála*** *$n$, t. j. kolmica ku dotyčnici t_1 v bode dotyku $(a_1; f(a_1))$ má parametrické vyjadrenie*

$$n\colon\ x_1 = a_1 + f'(a_1) t, \quad y = f(a_1) - t, \quad t \in R,$$
$$\text{resp. rovnicu } n\colon\ y - f(a_1) = -\tfrac{1}{f'(a_1)} \cdot (x_1 - a_1) \text{ pre } f'(a_1) \neq 0.$$

Poznámka 2.2.3.
Uvažujme funkciu dvoch premenných $y = f(x_1; x_2)$: $R^2 \to R$ a bod $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2) \in D(f)$.

[21] Niekedy sa ako Jacobiho matica nazýva $f'(\boldsymbol{a})$ iba v tomto prípade $n \times n$.

Dotyková rovina τ ku grafu f v bode $\boldsymbol{a}$ má rovnicu (obr. 2.2.17 vpravo)

$$\tau\colon\ y - f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T = \left(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix},$$
$$= \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - a_1) + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} \cdot (x_2 - a_2) = \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot (x_1 - a_1) + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot (x_2 - a_2).$$

Normálový vektor dotykovej roviny τ má tvar $\left(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}; -1\right) = (\operatorname{tg}\alpha_1; \operatorname{tg}\alpha_2; -1)$. *Priamka n prechádzajúca dotykovým bodom $(\boldsymbol{a}; f(\boldsymbol{a}))$ kolmá na rovinu τ sa nazýva* ***normála ku grafu funkcie f v bode*** $(\boldsymbol{a}; f(\boldsymbol{a}))$ *a má parametrický tvar*

$$n\colon\ x_1 = a_1 + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} t, \quad x_2 = a_2 + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} t, \quad y = f(a_1; a_2) - t, \quad t \in R.$$

Ak $y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)\colon R^n \to R$, $n \in N$, potom dotykovú množinu τ v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ nazývame ***dotyková nadrovina ku grafu f v bode $\boldsymbol{a}$*** $= (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ *a má tvar*

$$\tau\colon y - f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}(x_n - a_n).$$

Príklad 2.2.3.
Uvažujme funkciu $f(t) = (x; y; z) = \left(\frac{2t\sin(2\pi t)}{\pi}; \frac{2t\cos(2\pi t)}{\pi}; t\right)\colon \langle 0; \infty) \to R^3$.
Funkcia f predstavuje priestorovú krivku v R^3, jej grafom je špirála (obr. 2.2.18) začínajúca v bode $(0; 0; 0)$. Prakticky je krivka definovaná parametricky rovnicami

$$f\colon x(t) = \tfrac{2t\sin(2\pi t)}{\pi}, \quad y(t) = \tfrac{2t\cos(2\pi t)}{\pi}, \quad z(t) = t, \quad t \geq 0.$$

Pre deriváciu funkcie f, t. j. dotykový vektor v bode $t \in \langle 0; \infty)$ platí

$$f'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial z(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sin(2\pi t)}{\pi} + \frac{4\pi t\cos(2\pi t)}{\pi} \\ \frac{2\cos(2\pi t)}{\pi} - \frac{4\pi t\sin(2\pi t)}{\pi} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sin(2\pi t)}{\pi} + 4t\cos(2\pi t) \\ \frac{2\cos(2\pi t)}{\pi} - 4t\sin(2\pi t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Derivácia $f'(t_0)^T = (x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)) = (x'(t_0); y'(t_0); 1)$ v bode $t_0 \in \langle 0; \infty)$ predstavuje smerový vektor dotykovej priamky d ku grafu funkcie f v tomto bode $f(t_0)$. Parametrický tvar dotyčnice d (obr. 2.2.18) je

$$d\colon\ d_x(t) = x(t_0) + x'(t_0) \cdot t, \quad d_y(t) = y(t_0) + y'(t_0) \cdot t, \quad d_z(t) = z(t_0) + t, \quad t \in R.$$

Napríklad pre $t_0 = 2$ dostaneme $f(2) = (x; y; z) = (0; \frac{4}{\pi}; 2)$, $f'(2) = (8; \frac{2}{\pi}; 1)$ a dotyčnicu

$$d\colon\ d_x(t) = 0 + 8t = 8t, \quad d_y(t) = \tfrac{4}{\pi} + \tfrac{2t}{\pi} = \tfrac{4+2t}{\pi}, \quad d_z(t) = 2 + t, \quad t \in R. \ \blacksquare$$

Príklad 2.2.4.
Pre funkciu $y = f(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2\colon R^2 \to R$ (pr. 2.2.1) v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2) \in R^2$ platí

$$\tfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = 2x_1, \ \tfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} = 2x_2, \quad \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a}) = \left(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}\right) = (2a_1; 2a_2),$$
$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} f'(\boldsymbol{a})^T = (h_1; h_2) \cdot (2a_1; 2a_2)^T = 2a_1 h_1 + 2a_2 h_2.$$

Dotykovú rovinu τ (obr. 2.2.19) ku grafu funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ tvoria dotyčnice t_1 a t_2. Ich kolmé priemety do súradnicovej roviny $x_1 x_2$ sú rovnobežné s osami x_1 a x_2. Priamky t_1 a p_1 zvierajú uhol α_1 a priamky t_2 a p_2 uhol α_2, pričom $\operatorname{tg}\alpha_1 = 2a_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = 2a_2$. $\blacksquare$

Príklad 2.2.5.
Uvažujme funkciu $f\colon R^2 \to R$ definovaná vzťahom $f(\boldsymbol{x}) = f(x;y) = \begin{cases} 1 \text{ pre } xy = 0, \\ 2 \text{ pre } xy \neq 0. \end{cases}$
Uvažujme bod $\boldsymbol{a} = (0;0)$. Derivácia $f'(\boldsymbol{a})$ neexistuje, aj keď obe parciálne derivácie funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ existujú a sú konečné.

Riešenie.
Pre parciálne derivácie platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x} &= \frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x;0)-f(0;0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0, \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y} &= \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0;y)-f(0;0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{1-1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

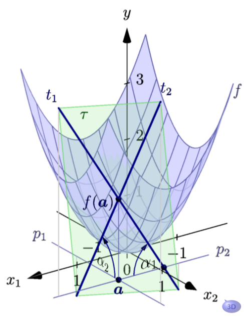
Funkcia f nie je spojitá v bodoch $(t;0)$, $(0;t)$, $t \in R$, t. j. ani v bode $\boldsymbol{a}$ a neexistuje ani limita funkcie f v týchto bodoch (obr. 2.2.20).
Predpokladajme, že existuje $f'(\boldsymbol{a})$. Ak derivácia existuje, potom (veta 2.2.3) musí platiť

$$f'(\boldsymbol{a}) = f'(0;0) = \boldsymbol{D} = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y} \right) = (0;0).$$

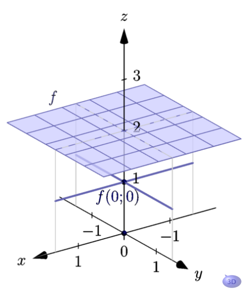
Pre deriváciu $f'(\boldsymbol{a})$ podľa definície, t. j. podľa vzťahu (2.6) platí

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot D^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x;y)-f(0;0)-((x;y)-(0;0))\cdot(0;0)^T}{\|(x;y)-(0;0)\|_2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x;y)-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x;y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left[\begin{matrix} \text{Smer } \ x = y \to 0 \\ xy \neq 0,\ f(x;y) = 2 \end{matrix} \right] = \lim_{\substack{x=y\\ x\to 0}} \frac{f(x;x)}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{2x^2}} = \frac{2}{0^+} = \infty. \end{aligned}$$

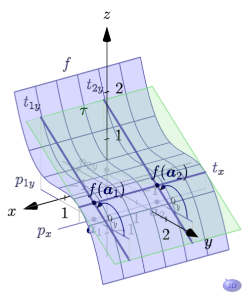
Dostali sme spor. To znamená, že derivácia $f'(0;0)$ neexistuje. ∎



Obr. 2.2.19: Príklad 2.2.4



Obr. 2.2.20: Príklad 2.2.5



Obr. 2.2.21: Príklad 2.2.6

Príklad 2.2.6.
Funkcia $f(x;y) = 2y^3\colon R^2 \to R$ je spojitá na celom svojom definičnom obore $D(f) = R^2$.
Pre deriváciu funkcie f v bode $\boldsymbol{x} = (x;y) \in D(f)$ platí

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x}) = f'(x;y) = \left(\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}; \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial 2y^3}{\partial x}; \frac{\partial 2y^3}{\partial y} \right) = (0;3y^2).$$

Parciálna derivácia $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 0$ je pre všetky body $\boldsymbol{x} \in D(f)$ rovnaká.
Pre všetky body $\boldsymbol{a}_1 = (a_{1x}; a_y)$, $\boldsymbol{a}_2 = (a_{2x}; a_y) \in D(f)$, ktoré majú rovnakú y-ovú súradnicu, platí $f(\boldsymbol{a}_1) = f(\boldsymbol{a}_2)$, $f'(\boldsymbol{a}_1) = f'(\boldsymbol{a}_2)$. V bodoch $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ sú dotyčnice $t_{1x} = t_{2x} = t_x$ identické a dotyčnice t_{1y}, t_{2y} rovnobežné.
To znamená, že dotyková rovina τ v bodoch $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ je rovnaká (obr. 2.2.21). ■

Príklad 2.2.7.
Funkcia $(x; y) = \Psi(\rho; \varphi) = (\rho \cos\varphi; \rho \sin\varphi)$: $\langle 0; \infty) \times R \to R^2$ z príkladu 2.1.3 určuje prevod súradníc bodov euklidovskej roviny z polárneho systému do karteziánskeho systému. Funkcia Ψ je spojitá a diferencovateľná v každom bode $(\rho; \varphi) \in D(\Psi) = \langle 0; \infty) \times R$. Platí

$$\Psi'(\rho; \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\rho;\varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial x(\rho;\varphi)}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y(\rho;\varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial y(\rho;\varphi)}{\partial \rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho \sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Pre Jakobián platí $\det \Psi'(\rho; \varphi) = \rho \cos^2\varphi + \rho \sin^2\varphi = \rho$. To znamená, že pre $\rho > 0$, t. j. pre všetky body $(\rho; \varphi) \in (0; \infty) \times R$ je matica $\Psi'(\rho; \varphi)$ reguárna. ■

Príklad 2.2.8.
Určte dotykovú rovinu τ ku grafu funkcie f: $z = f(x; y) = 1{,}5x^2 - y^2$, $(x; y) \in R^2$ s dotykovým bodom $\boldsymbol{a} \in D(f)$ tak, aby bola rovnobežná s rovinou ρ: $6x + 4y + 2z - 12 = 0$.

Riešenie.
Pre všetky $(x; y) \in R^2$ platí $z = f(x; y) = \frac{3x^2}{2} - y^2$, $z' = f'(x; y) = (3x; -2y)$.
Dotyková rovina τ ku grafu f v bode $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y)$ má rovnicu (poznámka 2.2.3)

$$\begin{aligned} \tau\colon\ z = f(\boldsymbol{a}) + \Big(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x}; \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y}\Big) \cdot \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \end{pmatrix} &= \tfrac{3a_x^2}{2} - a_y^2 + (3a_x; -2a_y) \cdot \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{3a_x^2}{2} - a_y^2 + 3a_x(x - a_x) - 2a_y(y - a_y) = 3a_x x - 2a_y y - \tfrac{3a_x^2}{2} + a_y^2. \end{aligned}$$

Ak odstránime zlomky a presunieme všetky premenné na jednu stranu, dostaneme

$$\tau\colon\ -6a_x x + 4a_y y + 2z + 3a_x^2 - 2a_y^2 = 0. \tag{2.9}$$

Roviny τ a ρ sú rovnobežné, ak ich rovnice majú rovnaké koeficienty pri príslušných premenných (tieto koeficienty tvoria normálové vektory) a rôzne absolútne členy. Rovinu τ sme upravili tak, aby mala pri premennej z rovnakú premennú ako rovina ρ. Potom sú tieto roviny rovnobežné, ak majú rovnaké aj ostatné koeficienty, t. j. ak $-6a_x = 6$, $4a_y = 4$. Potom $a_x = -1$, $a_y = 1$, $3a_x^2 - 2a_y^2 = 1$ (obr. 2.2.22) a rovina τ: $6x + 4y + 2z + 1 = 0$.

Iné riešenie.
Roviny τ a ρ sú rovnobežné, ak sú ich normálové vektory lineárne závislé. Normálový vektor roviny ρ má tvar[22] $(6; 4; 2)$, resp. $(3; 2; 1)$. Normálový vektor roviny τ má tvar

$$\Big(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x}; \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y}; -1\Big) = (3a_x; -2a_y; -1).$$

Aby boli normálové vektory lineárne závislé, musí existovať $t \in R$, $t \neq 0$ tak, aby

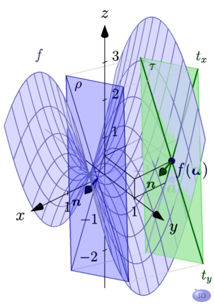
$$(3a_x; -2a_y; -1) = t(3; 2; 1) = (3t; 2t; t), \quad \text{t. j. } 3a_x = 3t,\ -2a_y = 2t,\ -1 = t.$$

[22] Normálovým vektorom je tiež každý násobok skalárom $t(6; 4; 2) = (6t; 4t; 2t)$, $t \in R$, $t \neq 0$.

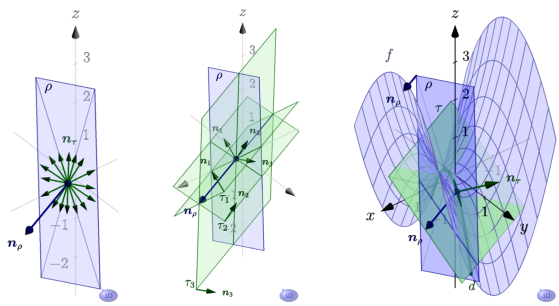
Potom $t = -1$, $-2a_y = -2$, $3a_x = -3$, t. j. $a_x = -1$, $a_y = 1$, $\boldsymbol{a} = (-1; 1)$, $f(\boldsymbol{a}) = 0{,}5$. Dotyková rovina má potom rovnicu τ: $3a_x x - 2a_y y - z + c = -3x - 2y - z + c = 0$. Ešte musíme určiť $c \in R$ tak, aby bod $(\boldsymbol{a}; f(\boldsymbol{a})) = (-1; 1; 0{,}5)$ ležal v rovine τ. Musí platiť

$$0 = -3\cdot(-1) - 2\cdot 1 - 0{,}5 + c = 3 - 2 - 0{,}5 + c = 0{,}5 + c, \quad \text{t. j. } c = -0{,}5.$$

Dotyková rovina má potom tvar τ: $-3x - 2y - z - 0{,}5 = 0$, resp. τ: $6x + 4y + 2z + 1 = 0$. ■



Obr. 2.2.22: Dotyková rovina τ (príklad 2.2.8)



Obr. 2.2.23: Dotyková rovina τ kolmá na danú rovinu ρ (príklad 2.2.9)

Príklad 2.2.9.
Určte dotykovú rovinu τ ku grafu funkcie f: $z = f(x; y) = 1{,}5x^2 - y^2$, $(x; y) \in R^2$ s dotykovým bodom $\boldsymbol{a} \in D(f)$ tak, aby bola kolmá na rovinu ρ: $6x + 4y + 2z - 12 = 0$.

Riešenie.
V príklade 2.2.8 sme hľadali rovnobežnú rovinu, teraz hľadáme kolmú rovinu na ρ. Normálový vektor roviny ρ má tvar[22] $(6; 4; 2)$, resp. $\boldsymbol{n}_\rho = (3; 2; 1)$. Normálový vektor dotykovej roviny τ v bode $\boldsymbol{a}$ má tvar

$$\boldsymbol{n}_\tau = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y}; -1\right) = (3a_x; -2a_y; -1).$$

Roviny ρ a τ a teda aj ich normálové vektory $\boldsymbol{n}_\rho$ a $\boldsymbol{n}_\tau$ majú byť na seba kolmé. Takých možností je nekonečne veľa (obr. 2.2.23 vľavo). Všetky $\boldsymbol{n}_\tau$, ktoré ležia v rovine ρ sú kolmé na $\boldsymbol{n}_\rho$ a môžu byť normálovým vektorom dotykovej roviny τ (obr. 2.2.23 v strede). Vektory $\boldsymbol{n}_\rho$, $\boldsymbol{n}_\tau$ sú na seba kolmé, ak je ich skalárny súčin nulový[23]

$$(\boldsymbol{n}_\rho, \boldsymbol{n}_\tau) = \big((3; 2; 1), (3a_x; -2a_y; -1)\big) = 9a_x - 4a_y - 1 = 0, \quad \text{t. j. } a_y = \tfrac{9a_x - 1}{4}.$$

Ak označíme $a_x = t$, potom $a_y = \frac{9t-1}{4}$ a platí

$$\boldsymbol{a} = \left(t; \tfrac{9t-1}{4}\right), \quad f(\boldsymbol{a}) = f\left(t; \tfrac{9t-1}{4}\right) = \tfrac{3t^2}{2} - \tfrac{(9t-1)^2}{16} = \tfrac{-57t^2 + 18t - 1}{16}.$$

[23] Kolmé vektory $\boldsymbol{n}_\rho$ a $\boldsymbol{n}_\tau$ zvierajú uhol $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a platí $(\boldsymbol{n}_\rho, \boldsymbol{n}_\tau) = \|\boldsymbol{x}\|_3 \cdot \|\boldsymbol{y}\|_3 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Dotykových rovín τ je nekonečne veľa a ich body dotyku $(a_x; a_y; f(\boldsymbol{a}))$ s grafom funkcie f tvoria priestorovú krivku d (obr. 2.2.23 vpravo) parametricky definovanú vzťahmi

$$d\colon\ x(t) = t, \quad y(t) = \tfrac{9t-1}{4}, \quad z(t) = \tfrac{18t-57t^2-1}{16}, \quad t \in R.$$

Ku konkrétnemu $t \in R$, t. j. $\boldsymbol{a} = \left(t; \frac{9t-1}{4}\right)$ na základe vzťahu (2.9) patrí dotyková rovina

$$\begin{aligned} \tau\colon\ 0 &= -6a_x x + 4a_y y + 2z + 3a_x^2 - 2a_y^2 = -6tx + 4\tfrac{9t-1}{4}y + 2z + 3t^2 - 2\left(\tfrac{9t-1}{4}\right)^2 \\ &= -6tx + (9t-1)y + 2z + 3t^2 - \tfrac{(9t-1)^2}{8}, \quad \text{pričom } \boldsymbol{n}_\tau = (-6t; 9t-1; 2). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Veta 2.2.4 (Lagrangeova).
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$ je diferencovateľná na oblasti $A \subset D(f)$,
body $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n), \boldsymbol{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n) \in A$.

$\Longrightarrow$ Pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ existuje $\boldsymbol{c}_i = (a_1; \ldots; a_{i-1}; c_i; b_{i+1}; \ldots; b_n) \in A$ tak, že $\|\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{a}\|_n < \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|_n$, $\|\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{b}\|_n < \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|_n$ a platí

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}(b_i - a_i) = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \cdots + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n}(b_n - a_n). \tag{2.10}$$

Dôkaz.
Na základe vety 2.2.2 je funkcia f spojitá na množine A.
Pre $i = 1, 2, \ldots, n$ označme $m_i = \min\{a_i, b_i\}$, $M_i = \max\{a_i, b_i\}$ a uvažujme funkcie

$$g_i(x) = f(a_1; \ldots; a_{i-1}; x; b_{i+1}; \ldots; b_n)\colon\ \langle m_i; M_i\rangle \to R.$$

Platí $f(\boldsymbol{b}) = g_1(b_1)$, $f(\boldsymbol{a}) = g_n(a_n)$ a navyše $g_i(a_i) = g_{i+1}(b_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

• Ak pre $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $a_i = b_i$, potom $\langle m_i; M_i\rangle = \{a_i\}$ je jednoprvková množina. Ak položíme $c_i = a_i = b_i$, potom

$$g_i(b_i) = g_i(a_i) = f(a_1; \ldots; a_{i-1}; c_i; b_{i+1}; \ldots; b_n) = f(\boldsymbol{c}_i).$$

Keďže $|c_i - a_i| = 0$, $|b_i - c_i| = 0$ a bod $\boldsymbol{c}_i$ má ostatné súradnice totožné s $\boldsymbol{a}$ alebo $\boldsymbol{b}$, platia aj nerovnosti $\|\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{a}\|_n < \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|_n$, $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}_i\|_n < \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|_n$.
Derivácia $\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}$ existuje podľa predpokladov vety, takže platí

$$0 = g_i(b_i) - g_i(a_i) = b_i - a_i, \quad \text{t. j. } g_i(b_i) - g_i(a_i) = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i} \cdot (b_i - a_i).$$

• Ak pre $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $a_i \neq b_i$, potom sú splnené predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (ma1: veta 4.3.3). Funkcia g_i je spojitá na $\langle m_i; M_i\rangle$ a pre všetky body $x \in (m_i; M_i)$ existuje derivácia $g_i'(x)$. Potom existuje $c_i \in (m_i; M_i)$ také, že platí

$$g_i'(c_i) = \tfrac{g_i(b_i) - g_i(a_i)}{b_i - a_i}, \quad \text{t. j. } g_i(b_i) - g_i(a_i) = g_i'(c_i)(b_i - a_i).$$

Ďalej platí $|c_i - a_i| < |b_i - a_i|$, $|b_i - c_i| < |b_i - a_i|$. Pretože bod $\boldsymbol{c}_i$ má zostávajúce súradnice totožné s $\boldsymbol{a}$ alebo $\boldsymbol{b}$, platí aj $\|\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{a}\|_n < \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|_n$, $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}_i\|_n < \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|_n$.
Keďže $g_i(c_i) = f(a_1; \ldots; a_{i-1}; c_i; b_{i+1}; \ldots; b_n) = f(\boldsymbol{c}_i)$, potom platí

$$g_i'(c_i) = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}, \quad \text{t. j. } g_i(b_i) - g_i(a_i) = g_i'(c_i) \cdot (b_i - a_i) = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i} \cdot (b_i - a_i).$$

Ak to zhrnieme, potom platí

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = g_1(b_1) - g_n(a_n) = \Big[\, g_1(a_1) = g_2(b_2),\ g_2(a_2) = g_3(b_3),\ \ldots,\ g_{n-1}(a_{n-1}) = g_n(b_n) \,\Big]$$
$$= \big[g_1(b_1) - g_1(a_1)\big] + \big[g_2(b_2) - g_2(a_2)\big] + \cdots + \big[g_n(b_n) - g_n(a_n)\big]$$
$$= \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_2)}{\partial x_2}(b_2 - a_2) + \cdots + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n}(b_n - a_n). \blacksquare$$

Poznámka 2.2.4.
Veta je zovšeobecnením známej a často používanej Lagrangeovej vety o strednej hodnote (ma1: veta 4.3.3). My ju uvádzame ako dôsledok 2.2.4.b.
V praxi sú známe ešte Rolleho a Cauchyho vety o strednej hodnote (ma1: vety 4.3.2, 4.3.4).

Z dôkazu vety je zrejmé, že predpoklady vety môžeme zjednodušiť a vetu formulovať analogicky ako v jednorozmernom prípade pre parciálne derivácie.

Dôsledok 2.2.4.a.
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$ je spojitá a má parciálne derivácie podľa všetkých premenných v každom bode oblasti $A \subset D(f)$, body $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n) \in A$.

$\Longrightarrow$ Existujú $c_i \in (m_i; M_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ také, že platí vzťah (2.10), t. j.

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}(b_i - a_i) = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \cdots + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n}(b_n - a_n)$$
$$= (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \cdot \Big(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1}; \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_2)}{\partial x_2}; \ldots; \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n}\Big)^T = \Big(\tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1}; \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_2)}{\partial x_2}; \ldots; \tfrac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n}\Big) \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})^T.$$

Dôsledok 2.2.4.b (Lagrangeova veta o strednej hodnote).
Funkcia $f\colon R \to R$ je spojitá na $\langle a; b\rangle$, pre všetky $x \in (a; b)$ existuje (aj nevlastná) $f'(x)$.

$\Longrightarrow$ Existuje $c \in (a; b)$ také, že $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, t. j.

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Dôsledok 2.2.4.c (Lagrangeova veta v R^2).
Funkcia $f\colon R^2 \to R$ je diferencovateľná na oblasti $A \subset D(f)$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2) \in A$.

$\Longrightarrow$ Existujú[24] $c_1 \in (m_1; M_1)$, $c_2 \in (m_2; M_2)$ také, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \tfrac{\partial f(c_1; b_2)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \tfrac{\partial f(a_1; c_2)}{\partial x_2}(b_2 - a_2).$$

[24] Ako v dôkaze vety 2.2.4 označenie $m_i = \min\{a_i, b_i\}$, $M_i = \max\{a_i, b_i\}$, $i = 1, 2, 3$.

Dôsledok 2.2.4.d (Lagrangeova veta v R^3).
$f\colon R^3 \to R$ je diferencovateľná na oblasti $A \subset D(f)$, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3), \boldsymbol{b} = (b_1; b_2; b_3) \in A$.
$\Longrightarrow$ Existujú[24] $c_1 \in (m_1; M_1)$, $c_2 \in (m_2; M_2)$, $c_3 \in (m_3; M_3)$ také, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \tfrac{\partial f(c_1;b_2;b_3)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \tfrac{\partial f(a_1;c_2;b_3)}{\partial x_2}(b_2 - a_2) + \tfrac{\partial f(a_1;a_2;c_3)}{\partial x_3}(b_3 - a_3).$$

Uvažujme funkciu $f\colon R^n \to R$, $n \in N$ diferencovateľnú na oblasti $A \subset D(f)$ a body $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n), \boldsymbol{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n) \in A$.

Ak vo vzťahu (2.10) nahradíme všetky body $\boldsymbol{c}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ bodom $\boldsymbol{a}$, potom môžeme funkciu f v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})$ aproximovať nasledovne

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) \approx \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}(x_i - a_i) = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}(x_n - a_n).$$

To znamená, že pre $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$ platí

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}(x_n - a_n) = f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}). \qquad (2.11)$$

Ak označíme rozdiel medzi ľavou a pravou stranou

$$\omega(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot f'(\boldsymbol{a})^T,$$

potom zo vzťahu (2.6) pre funkciu $\omega(\boldsymbol{x})$ vyplýva

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \tfrac{\omega(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \tfrac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) f'(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n} = 0.$$

Pre (**absolútnu**) **zmenu funkcie f od bodu $\boldsymbol{a}$ po bod $\boldsymbol{x}$** platí

$$\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot f'(\boldsymbol{a})^T + \omega(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \omega(\boldsymbol{x}).$$

Funkciu $\omega(\boldsymbol{x})$ nazývame **zvyšok zmeny funkcie f od bodu $\boldsymbol{a}$ po bod $\boldsymbol{x}$** a predstavuje chybu pri nahradení $\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ diferenciálom $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$.

Ak $f(\boldsymbol{a}) \neq 0$, potom pomer absolútnej zmeny $\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ a funkčnej hodnoty $f(\boldsymbol{a})$ nazývame **relatívna zmena funkcie f**. Platí

$$\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \approx \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot f'(\boldsymbol{a})^T,$$
$$\delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = \tfrac{\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})}{f(\boldsymbol{a})} \approx \tfrac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})}{f(\boldsymbol{a})} = \tfrac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot f'(\boldsymbol{a})^T}{f(\boldsymbol{a})}.$$

Ak použijeme substitúciu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in O(\boldsymbol{a})$, potom dostaneme $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{h} \in O(\boldsymbol{0}_n)$, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} \cdot f'(\boldsymbol{a})^T$ a $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n$ pre $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$. Pre zmenu f od $\boldsymbol{a}$ po bod $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}$ platí

$$\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{h} \cdot f'(\boldsymbol{a})^T + \omega(\boldsymbol{h}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) + \omega(\boldsymbol{h}). \qquad (2.12)$$

Funkciu f aproximujeme v bode $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{h} \in O(\boldsymbol{0}_n)$ v tvare

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h} f'(\boldsymbol{a})^T, \quad \text{kde } \lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}_n} \tfrac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0. \qquad (2.13)$$

Pre absolútnu zmenu a relatívnu zmenu funkcie f platia vzťahy

$$\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) \approx \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} f'(\boldsymbol{a})^T, \quad \delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \tfrac{\Delta f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})}{f(\boldsymbol{a})} \approx \tfrac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})}{f(\boldsymbol{a})} = \tfrac{\boldsymbol{h} \cdot f'(\boldsymbol{a})^T}{f(\boldsymbol{a})}.$$

Predchádzajúce vzťahy zodpovedajú prípadu funkcie jednej premennej (ma1: Veta 4.2.2 o najlepšej lokálnej lineárnej aproximácii pomocou diferenciálu) a **majú lokálny charakter**, t. j. majú zmysel iba v nejakom blízkom okolí $O(\boldsymbol{a})$, resp. $O(\boldsymbol{0}_n)$.

Poznámka 2.2.5.
V súčasnej dobe ľahko dostupnej výpočtovej techniky už nemajú vzťahy (2.11), resp. (2.13) taký význam pri aproximovaní číselných výrazov ako kedysi. Ale stále majú veľký význam pri zjednodušovaní mnohých vzťahov v technických, ekonomických, fyzikálnych a iných odvetviach. Zložitejšie nelineárne úlohy sa nahradia jednoduchšími lineárnymi, ktoré sú samozrejme menej presné, ale dajú sa vypočítať a chyba výpočtu je prípustná.

Príklad 2.2.10.
Približne vypočítajte hodnoty: a) $0{,}97^{2{,}02}$, b) $\sqrt{1{,}98^3+4{,}05^2+4{,}92^2}$.

Riešenie.
a) Označme $f(x;y)=x^y\colon (0;\infty)\times R\to R$ (viď pr. 2.2.2), potom $f'(x;y)=(yx^{y-1};x^y\ln x)$.
Označme $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y)=(1;2)$, potom $f(\boldsymbol{a})=1^2=1$, $f'(\boldsymbol{a})=(2\cdot 1^{2-1};1^2\cdot\ln 1)=(2;0)$.
Ak položíme $\boldsymbol{x}=(x;y)=(0{,}97;2{,}02)$, potom

$$f(\boldsymbol{x})=0{,}97^{2{,}02},\qquad \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}=(0{,}97-1;2{,}02-2)=(-0{,}03;0{,}02).$$

Pre odhad hodnoty $0{,}97^{2{,}02}$ pomocou vzťahu (2.11) potom platí

$$\begin{aligned}0{,}97^{2{,}02}=f(\boldsymbol{x})\approx f(\boldsymbol{a})+\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})&=f(\boldsymbol{a})+f'(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T\\&=1+(2;0)\cdot(-0{,}03;0{,}02)^T=1-0{,}06+0=0{,}94.\end{aligned}$$

Aby sme mohli použiť postup, postačí, aby bola f definovaná v $O(\boldsymbol{a})$ takom, že $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{a})$.
Presná hodnota výtazu na šesť desatinných miest je $0{,}97^{2{,}02}=0{,}940\,327$.

b) Označme $f(\boldsymbol{x})=f(x_1;x_2;x_3)=\sqrt{x_1^3+x_2^2+x_3^2}=\big(x_1^3+x_2^2+x_3^2\big)^{\frac{1}{2}}\colon R^3\to R$.
Pre deriváciu funkcie f v bode $\boldsymbol{x}\in R^3$ platí

$$\begin{aligned}f'(\boldsymbol{x})&=\Big(\tfrac{3}{2}x_1^2(x_1^3+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}};\tfrac{2}{2}x_2(x_1^3+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}};\tfrac{2}{2}x_3(x_1^3+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}}\Big)\\&=\Big(\tfrac{3x_1^2}{2\sqrt{x_1^3+x_2^2+x_3^2}};\tfrac{x_2}{\sqrt{x_1^3+x_2^2+x_3^2}};\tfrac{x_3}{\sqrt{x_1^3+x_2^2+x_3^2}}\Big)=\Big(\tfrac{3x_1^2}{2f(\boldsymbol{x})};\tfrac{x_2}{f(\boldsymbol{x})};\tfrac{x_3}{f(\boldsymbol{x})}\Big).\end{aligned}$$

Ak označíme $\boldsymbol{a}=(2;4;5)$, $\boldsymbol{h}=(-0{,}02;0{,}05;-0{,}08)$, potom $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}=(1{,}98;4{,}05;4{,}92)$.
Ďalej $f(\boldsymbol{a})=\sqrt{2^3+4^2+5^2}=7$, $f'(\boldsymbol{a})=(\frac{12}{7};\frac{4}{7};\frac{5}{7})$ a pre odhad odmocniny platí

$$\begin{aligned}\sqrt{1{,}98^3+4{,}05^2+4{,}92^2}&=f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})\approx f(\boldsymbol{a})+\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{h}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T\\&=7+(-0{,}02;0{,}05;-0{,}08)\cdot\big(\tfrac{12}{7};\tfrac{4}{7};\tfrac{5}{7}\big)^T=7-\tfrac{0{,}02\cdot 12}{7}+\tfrac{0{,}05\cdot 4}{7}-\tfrac{0{,}08\cdot 5}{7}=\tfrac{48{,}56}{7}.\end{aligned}$$

Zlomok $\frac{48{,}56}{7}\approx 6{,}937\,143$ a presná hodnota na šesť desatinných miest je $6{,}954\,947$. ■

Predpokladajme, že vzťah $y=f(x_1;x_2;\dots;x_n)$ vyjadruje závislosť nejakej veličiny y od veličín $x_1,x_2,\dots,x_n\in R$ a že sme každú z veličín x_i, $i=1,2,\dots,n$ namerali s absolútnou chybou Δx_i, ktorá je v porovnaní s x_i malá.

Ak označíme $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;\dots;x_n)$, $\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x_1;\Delta x_2;\dots;\Delta x_n)$, potom môžeme **absolútnu chybu** $\Delta y=\Delta f(\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{x})$ vyjadriť ako diferenciál $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{x})$.

Ak okolie $O(\boldsymbol{x})$ je také, že $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x})$, t. j. $\Delta\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{0}_n)$, potom pre absolútnu chybu Δy a relatívnu chybu δ_y pre $\Delta\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{0}_n)$ platí

$$\Delta y=f(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\approx\mathrm{d}f(\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{x})=\Delta\boldsymbol{x}\cdot f'(\boldsymbol{x})^T,\qquad \delta_y=\frac{\Delta y}{y}\approx\frac{\Delta\boldsymbol{x}\cdot f'(\boldsymbol{x})^T}{f(\boldsymbol{x})}.$$

Relatívna chyba δ_y sa často vyjadruje v percentách v tvare $\delta_y\cdot 100\,\%$.

Príklad 2.2.11.
Aká je chyba pre objem gule, ak sme jej polomer r namerali s absolútnou chybou Δr?

Riešenie.
Absolútna chyba merania je Δr a relatívna chyba merania je $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$.
Pre objem gule pre $r > 0$ platí $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3} r^3$, $V'(r) = \frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$.
Pre absolútnu chybu ΔV a relatívnu chybu δ_V platí

$$\Delta V \approx \Delta r \cdot V'(r) = \Delta r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^2 \Delta r, \quad \delta_V = \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3\Delta r}{r} = 3\delta_r. \blacksquare$$

Príklad 2.2.12.
V sklárskom podniku Drevoplech vyrábajú poháre v tvare valca s vnútorným polomerom podstavy 3 cm a výškou 10 cm. Kontrolnými meraniami sa zistilo, že pri výrobe dosahuje relatívna chyba výšky pohárov 1,1 % a relatívna chyba polomeru podstáv 1,5 %. Aká je absolútna a relatívna chyba objemu pohárov?

Riešenie.
Ak označíme $r = 3\,\text{cm}$ polomer podstavy a $v = 10\,\text{cm}$ výšku valca, potom pre objem valca platí $V(r; v) = \pi r^2 v = 90\pi\,\text{cm}^3$, $V'(r; v) = (2\pi r v; \pi r^2) = (60\pi\,\text{cm}^2; 9\pi\,\text{cm}^2)$.
Pre relatívne a absolútne chyby polomeru δ_r, Δr a výšky δ_v, Δv platí:

$$100\delta_r = 1{,}5\,\%. \;\Rightarrow\; \frac{\Delta r}{r} = \delta_r = \frac{1{,}5}{100}, \;\text{ t. j. } \Delta r = \frac{1{,}5r}{100} = \frac{1{,}5\cdot 3}{100}\,\text{cm} = \frac{4{,}5}{100}\,\text{cm} = 0{,}045\,\text{cm}.$$
$$100\delta_v = 1{,}1\,\%. \;\Rightarrow\; \frac{\Delta v}{v} = \delta_v = \frac{1{,}1}{100}, \;\text{ t. j. } \Delta v = \frac{1{,}1r}{100} = \frac{1{,}1\cdot 10}{100}\,\text{cm} = \frac{11}{100}\,\text{cm} = 0{,}11\,\text{cm}.$$

Pre absolútnu chybu ΔV a relatívnu chybu δ_V objemu potom platí:

$$\Delta V = (\Delta r; \Delta v) \cdot V'(r; v)^T = (0{,}045\,\text{cm}; 0{,}11\,\text{cm}) \cdot (60\pi\,\text{cm}^2; 9\pi\,\text{cm}^2)$$
$$= 2{,}7\pi\,\text{cm}^3 + 0{,}99\pi\,\text{cm}^3 = 3{,}69\pi\,\text{cm}^3, \qquad \delta_{\text{V}} = \frac{\Delta \text{V}}{\text{V}} = \frac{3{,}69\pi}{90\pi} = 0{,}041.$$

Absolútna chyba objemu je $3{,}69\pi\,\text{cm}^3$ a relatívna chyba objemu je 4,1 % $\blacksquare$

Poznámka 2.2.6.
Objem vyrábaného pohára by mal byť $V = V(3; 10) = 90\pi\,cm^3$.
Ak uvážime chyby výroby, potom pre polomer r a výšku v pohárov platí

$$r \approx 3 \pm 0{,}015 \cdot 3\,cm = 3 \pm 0{,}045\,cm, \quad v \approx 10 \pm 0{,}011 \cdot 10\,cm = 10 \pm 0{,}11\,cm.$$

Najmenší objem $V_{\min} = 2{,}955^2 \cdot 9{,}89\pi\,cm^3 \approx 86{,}359\,727\pi\,cm^3$ dostaneme pre

$$r_{\min} = 3 - 0{,}045\,cm = 2{,}955\,cm, \quad v_{\min} = 10 - 0{,}11\,cm = 9{,}89\,cm.$$

Najväčší objem $V_{\max} = 3{,}045^2 \cdot 10{,}11\pi\,cm^3 \approx 93{,}740\,173\pi\,cm^3$ dostaneme pre

$$r_{\max} = 3 + 0{,}045\,cm = 3{,}045\,cm, \quad v_{\max} = 10 + 0{,}11\,cm = 10{,}11\,cm.$$

Pre relatívne chyby objemov $V_{\min}$ a $V_{\max}$ potom platí

$$\delta_{V_{\min}} = \frac{V - V_{\min}}{V} = \frac{3{,}640\,273}{90} \approx 0{,}040\,447, \quad \delta_{V_{\max}} = \frac{V_{\max} - V}{V} = \frac{3{,}740\,173}{90} \approx 0{,}041\,557,$$

čo zodpovedá výsledkom predchádzajúceho príkladu $\delta_v = 0{,}041$.

Spojitosť funkcie $f\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ v danom bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ nezaručuje jej diferencovateľnosť v tomto bode (viď veta 2.2.2). Neplatí to ani pre reálne funkcie, napr. funkcia $y = |x|\colon R \to R$ je spojitá v bode 0, ale nemá deriváciu v tomto bode. Diferencovateľnosť funkcie zaručuje napríklad spojitosť parciálnych derivácií podľa všetkých premenných.

Poznámka 2.2.7.
Kvôli prehľadnosti nasledujúce tvrdenia formulujeme pre reálne funkcie $f\colon R^n \to R$, $n \in N$. Pri vektorových funkciách $f = (f_1; f_2; \ldots; f_m)\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ aplikujeme dané tvrdenia samostatne na každú zložku $f_j\colon R^n \to R$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Veta 2.2.5.
Množina $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť, bod $\boldsymbol{a} \in A$.
Funkcia $f\colon A \to R$ má v bode $\boldsymbol{a}$ spojité všetky parciálne derivácie $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
$\implies$ Funkcia f je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$.

Dôkaz.
Ukážeme, že existuje limita

$$L = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} = 0, \quad \text{kde } \boldsymbol{D} = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right).$$

Parciálne derivácie sú spojité v bode $\boldsymbol{a}$, t. j. existujú v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a}) \subset A$.
Pre každé $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$ sú splnené podmienky Lagrangeovej vety 2.2.4 (viď poznámka 2.2.4).
Potom existujú $\boldsymbol{c}_i \in O(\boldsymbol{a})$, $\|\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{a}\|_n < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$ také, že platí (2.10), t. j.

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{C}^T, \quad \text{pričom } \boldsymbol{C} = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_2)}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n}\right).$$

Potom pre argument limity L platí

$$\frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{C}^T - (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{D}^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{C}^T-\boldsymbol{D}^T)}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n}.$$

Pre limitu L platí

$$\begin{aligned}
0 \le |L| &= \left|\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n}\right| = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \left|\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})^T}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n}\right| = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{\left|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})^T\right|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} \\
&\le \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{\left|\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}\right)\cdot(x_1-a_1) + \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}\right)\cdot(x_2-a_2) + \cdots + \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right)\cdot(x_n-a_n)\right|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} \\
&\le \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{\left|\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}\right|\cdot|x_1-a_1| + \left|\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}\right|\cdot|x_2-a_2| + \cdots + \left|\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right|\cdot|x_n-a_n|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n} \\
&= \left[\text{Pre všetky } i = 1, 2, \ldots, n \text{ platí } |x_i - a_i| \le \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n \text{ a navyše pre } \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a} \text{ platí } \boldsymbol{c}_i \to \boldsymbol{a}.\right] \\
&\le \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \left[\left|\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_n)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right|\right] \\
&= 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Posledná rovnosť vyplýva zo spojitosti parciálnych derivácií a z konštrukcie bodov $\boldsymbol{c}_i$.
To znamená, že $0 = |L| = L$ (veta 2.1.12) a tvrdenie vety je dokázané. ■

Poznámka 2.2.8.
Spojitosť všetkých parciálnych derivácií funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ vo vete2.2.5 je iba postačujúca podmienka diferencovateľnosti funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$, ale nie nutná. Napríklad funkcia f definovaná predpisom $f(x; y) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ pre $(x; y) \in R^2 - \{(0; 0)\}$ a $f(0; 0) = 0$ nespĺňa predpoklady tejto vety (pr. 2.2.13, obr. 2.2.24), ale je diferencovateľná v bode $(0; 0)$.

Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$ sa nazýva **hladká v bode** $\boldsymbol{a} \in D(f)$, ak má v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})$ spojité všetky parciálne derivácie $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$ sa nazýva **hladká**, ak je hladká v každom bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$. Z definície vyplýva, že definičným oborom hladkej funkcie musí byť otvorená množina.

Dôsledok 2.2.5.a.
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$ je hladká v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$.
$\Longrightarrow$ Funkcia f je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$.

Dôsledok 2.2.5.b.
Funkcia $f\colon R^n \to R$, $n \in N$ je hladká. $\Longrightarrow$ Funkcia f je diferencovateľná.

Príklad 2.2.13.
Uvažujme funkciu $f(\boldsymbol{x}) = f(x;y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{pre } (x;y) \neq (0;0), \\ 0 & \text{pre } (x;y) = (0;0). \end{cases}$

Funkcia f je definovaná a spojitá v každom bode $\boldsymbol{x} \in D(f) = R^2$ (obrázok 2.2.24). Jediný problematický bod je $\boldsymbol{x} = (0;0)$, v ktorom platí (dôsledok 2.1.11.b)

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} (x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \left[\lim_{(x;y)\to(0;0)} (x^2+y^2) = 0 \,\Big|\, -1 \le \sin\frac{1}{x^2+y^2} \le 1 \right] = 0 = f(0;0).$$

Pre všetky $\boldsymbol{x} = (x;y) \in D(f)$, $\boldsymbol{x} \neq (0;0)$ platí[25]

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x} = 2x\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y} = 2y\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Tieto parciálne derivácie sú spojité v bode $\boldsymbol{x}$. To znamená, že v každom bode $\boldsymbol{x} \neq (0;0)$ je funkcia f diferencovateľná (veta 2.2.5).
Pre bod $\boldsymbol{x} = (0;0)$ platí

$$\frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t;0)-f(0;0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\cdot\sin\frac{1}{t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\left(t\cdot\sin\frac{1}{t^2}\right) = \begin{bmatrix} -1 \le \sin\frac{1}{t^2} \le 1 \\ \lim_{t\to 0} t = 0 \end{bmatrix} = 0,$$
$$\frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0;0+t)-f(0;0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\cdot\sin\frac{1}{t^2}-0}{t} = 0.$$

Parciálne derivácie v bode $(0;0)$ spojité nie sú, pretože (veta 2.1.18) platí

$$L_x = \lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \neq 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial x}, \quad L_y = \lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} \neq 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}.$$

L_x, L_y neexistujú, pretože pre $\left\{(0;\frac{1}{k})\right\}_{k=1}^{\infty} \to (0;0)$ a pre $\left\{(\frac{1}{k};0)\right\}_{k=1}^{\infty} \to (0;0)$ platí

$$L_x = \lim_{k\to\infty}\left(2\cdot 0\cdot\sin\frac{1}{0+\frac{1}{k^2}} - 2\cdot 0\cdot\frac{1}{0+\frac{1}{k^2}}\cdot\cos\frac{1}{0+\frac{1}{k^2}}\right) = \begin{bmatrix} -1 \le \sin\frac{1}{\frac{1}{k^2}} \le 1 \\ -1 \le \cos\frac{1}{\frac{1}{k^2}} \le 1 \end{bmatrix} = 0,$$
$$L_y = \lim_{k\to\infty}\left(2\cdot 0\cdot\sin\frac{1}{\frac{1}{k^2}+0} - 2\cdot 0\cdot\frac{1}{\frac{1}{k^2}+0}\cdot\cos\frac{1}{\frac{1}{k^2}+0}\right) = 0.$$

A pre $\left\{(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}};0)\right\}_{k=1}^{\infty} \to (0;0)$ a pre $\left\{(0;\frac{1}{\sqrt{2k\pi}})\right\}_{k=1}^{\infty} \to (0;0)$ platí

$$L_x = \lim_{k\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\cdot\sin\frac{1}{\frac{1}{2k\pi}+0} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2k\pi}+0}\cdot\cos\frac{1}{\frac{1}{2k\pi}+0}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{2k\pi}+0} = \frac{1}{\frac{1}{2k\pi}} = 2k\pi, \quad k\in N \\ \sin 2k\pi = 0,\ \cos 2k\pi = 1 \end{bmatrix}$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k\pi}}\cdot\sin 2k\pi - 2\cdot\sqrt{2k\pi}\cdot\cos 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{\infty}\cdot 0 - 2\cdot\infty\cdot 1 = 0 - \infty = -\infty,$$

[25] $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2)^{-1}\right] = (-1)\cdot(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right] = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$.

$$L_y = \lim_{k\to\infty}\Big(2\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2k\pi}}\cdot\sin\tfrac{1}{0+\frac{1}{2k\pi}} - 2\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2k\pi}}\cdot\tfrac{1}{0+\frac{1}{2k\pi}}\cdot\cos\tfrac{1}{0+\frac{1}{2k\pi}}\Big) = -\infty.$$

V bode $\mathbf{0}=(0;0)$ neplatia predpoklady vety 2.2.5. Funkcia f ale v bode $\mathbf{0}$ je diferencovateľná, t. j. $f'(\mathbf{0}) = \big(\frac{\partial f(0;0)}{\partial x}; \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}\big) = (0;0)$, pretože existuje limita a platí[26]

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{0}+\boldsymbol{h})-f(\mathbf{0})-\boldsymbol{h}\cdot f'(\mathbf{0})^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{(h_x;h_y)\to(0;0)} \frac{f(h_x;h_y)-f(0;0)-(h_x;h_y)\cdot(0;0)^T}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}}$$

$$= \lim_{(h_x;h_y)\to(0;0)} \frac{(h_x^2+h_y^2)\cdot\sin\frac{1}{h_x^2+h_y^2}-0-0}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} = \lim_{(h_x;h_y)\to(0;0)} \sqrt{h_x^2+h_y^2}\cdot\sin\frac{1}{h_x^2+h_y^2}$$

$$= \Big[\lim_{(h_x;h_y)\to(0;0)}\sqrt{h_x^2+h_y^2}=0 \,\Big|\, -1\le\sin\tfrac{1}{h_x^2+h_y^2}\le 1\Big] = 0. \blacksquare$$

Príklad 2.2.14.
Uvažujme funkciu $f(\boldsymbol{x}) = f(x;y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}\cdot\sin(x^2+y^2) & \text{pre } (x;y)\neq(0;0), \\ 1 & \text{pre } (x;y)=(0;0). \end{cases}$

Funkcia f je definovaná a spojitá v každom bode $\boldsymbol{x}\in D(f)=R^2$ (obrázok 2.2.25). Jediný problematický bod je $\boldsymbol{x}=(0;0)$, v ktorom platí (dôsledok 2.1.11.b)

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \begin{bmatrix}\text{Subst. } t=x^2+y^2\ge 0\\ x\to 0,\ y\to 0,\quad t\to 0\end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 = f(0;0).$$

Pre všetky $\boldsymbol{x}=(x;y)\in D(f)$, $\boldsymbol{x}\neq(0;0)$ platí

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x} = \frac{2x\cdot(x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)-2x\cdot\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 2x\cdot\frac{(x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y} = \frac{2y\cdot(x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)-2y\cdot\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 2y\cdot\frac{(x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tieto parciálne derivácie sú spojité v bode $\boldsymbol{x}\neq(0;0)$.
Pre bod $\boldsymbol{x}=(0;0)$ platí (pri výpočte limity použijeme L'Hospitalovo pravidlo)

$$\frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t;0)-f(0;0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t^2}{t^2}-1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t^2-t^2}{t^3} = \big[\text{L'H}\tfrac{0}{0}\big]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2t\cdot\cos t^2-2t}{3t^2} = \frac{2}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\cos t^2-1}{t} = \big[\text{L'H}\tfrac{0}{0}\big] = \frac{2}{3}\lim_{t\to 0}\frac{-2t\sin t^2}{1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{-2\cdot 0\cdot 0}{1} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0;0+t)-f(0;0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t^2}{t^2}-1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t^2-t^2}{t^3} = 0.$$

Parciálne derivácie $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x}$, $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y}$ sú aj v bode $(0;0)$ spojité (veta 2.1.18), pretože

$$L_x = \lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial x}, \quad L_y = \lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}.$$

To znamená (veta 2.2.5), že funkcia f je diferencovateľná v každom bode $\boldsymbol{x}\in D(f)$.
Ukážeme, že $L_x=0$, $L_y=0$. Najprv vypočítame limitu

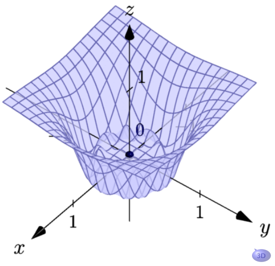
$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{(x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \begin{bmatrix}\text{Subst. } t=x^2+y^2\ge 0\\ x\to 0,\ y\to 0,\quad t\to 0\end{bmatrix}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\cos t-\sin t}{t^2} = \big[\text{L'H}\tfrac{0}{0}\big] = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t-t\cdot\sin t-\cos t}{2t} = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\sin t = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

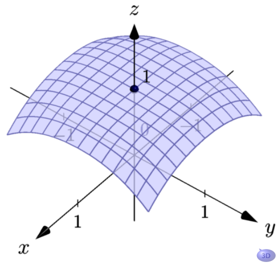
Pre limity L_x, L_y potom platí

$$L_x = \lim_{(x;y)\to(0;0)} 2x\cdot\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{(x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0\cdot 0 = 0,$$

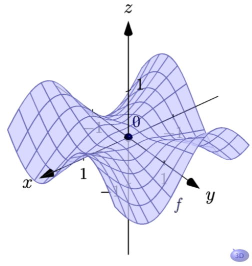
$$L_y = \lim_{(x;y)\to(0;0)} 2y\cdot\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{(x^2+y^2)\cdot\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0\cdot 0 = 0. \blacksquare$$



Obr. 2.2.24: Funkcia z príkladu 2.2.13



Obr. 2.2.25: Funkcia z príkladu 2.2.14



Obr. 2.2.26: Funkcia z príkladu 2.2.15

Veta 2.2.6.
Množina $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť.
Funkcia $f\colon A \to R$ má na A ohraničené všetky parciálne derivácie $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\Longrightarrow$ Funkcia f je spojitá na množine A.

Dôkaz.
Nech $\boldsymbol{a} \in A$ je ľubovoľný bod a okolie $O(\boldsymbol{a})$ je také, že $O(\boldsymbol{a}) \subset A$.
Podľa predpokladov existuje $\alpha > 0$ také, že $\left|\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right| \leq \alpha$ pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Potom (veta 2.2.4) pre každé $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$ existujú $\boldsymbol{c}_i \in O(\boldsymbol{a})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ také, že platí

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}(x_i - a_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(\boldsymbol{c}_i)}{\partial x_i}\right| \cdot |x_i - a_i|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha\, |x_i - a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n = n\alpha \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n.$$

Z toho vyplýva spojitosť funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ a aj na množine A, pretože platí:

$$0 \leq \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| \leq \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} n\alpha \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_n = n\alpha \cdot 0 = 0.$$
$$\Longrightarrow \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \big[f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\big] = 0. \Longrightarrow \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}). \blacksquare$$

Veta 2.2.7.
Množina $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť, bod $\boldsymbol{a} \in A$.
Funkcia $f\colon A \to R$ má v bode $\boldsymbol{a}$ spojité všetky parciálne derivácie $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\Longrightarrow$ Funkcia f je spojitá v bode $\boldsymbol{a}$.

Dôkaz.
Ak sú v danom bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ spojité všetky parciálne derivácie, potom musia byť v nejakom okolí ohraničené (veta 2.1.23). Potom (veta 2.2.6) je funkcia f spojitá v bode $\boldsymbol{a}$.

Tvrdenie vyplýva aj z vety 2.2.5 (diferencovateľnosť) a následne z vety 2.2.2 (spojitosť). $\blacksquare$

[26] Viď definícia diferencovateľnosti v bode a vzťah (2.6).

Poznámka 2.2.9.
Funkcia f z príkladu 2.2.5 (obr. 2.2.20) nie je v rozpore s tvrdeniami viet 2.2.5 a 2.2.6. Funkcia f je spojitá na $R^2 - \{(t;0), (0;t), t \in R\}$, t. j. okrem súradnicových osí x a y.

- *V bodoch $(t;0)$, $t \neq 0$ existuje $\frac{\partial f(t;0)}{\partial x} = 0$, ale neexistuje $\frac{\partial f(t;0)}{\partial y}$.*
- *V bodoch $(0;t)$, $t \neq 0$ existuje $\frac{\partial f(0;t)}{\partial y} = 0$, ale neexistuje $\frac{\partial f(0;t)}{\partial x}$.*
- *V bode $(0;0)$ existujú obe $\frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = 0$, ktoré sú samozrejme ohraničené.*

Ale neexistuje okolie $O(0;0)$, kde by v každom bode existovali obe parciálne derivácie naraz.

Príklad 2.2.15.
Uvažujme funkciu $f\colon R^2 \to R$ definovanú $f(\boldsymbol{x}) = f(x;y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{pre } (x;y) \neq (0;0), \\ 0 & \text{pre } (x;y) = (0;0). \end{cases}$
Ukážeme, že f je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$.

Riešenie.
Je zrejmé, že funkcia f je spojitá a diferencovateľná v každom bode $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ (obr. 2.2.26). Pre všetky $\boldsymbol{x} = (x;y) \neq (0;0) = \boldsymbol{a}$ platí

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq \tfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1, \\ -1 \leq \tfrac{-y^2}{x^2+y^2} \leq 0. \end{aligned}\right\} \implies -1 \leq \tfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \leq 1. \implies -|xy| \leq \tfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \tfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} \leq |xy|\,.$$

Funkcia f je spojitá v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$, pretože platí

$$0 = -\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |xy| \leq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \tfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \leq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |xy| = 0, \quad \text{t. j. } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0 = f(\boldsymbol{a}).$$

Pre parciálne derivácie funkcie f v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$ platí

$$\tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \tfrac{f(x;0)-f(0;0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \tfrac{0-0}{x} = 0, \qquad \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \tfrac{f(0;y)-f(0;0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \tfrac{0-0}{y} = 0.$$

Pre parciálne derivácie funkcie f v bode $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x} &= \tfrac{(3x^2y-y^3)\cdot(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2} = \tfrac{3x^4y-x^2y^3+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{x^4+2x^2y^2+y^4} \\ &= \tfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{x^4+2x^2y^2+y^4} = \tfrac{y(x^4+2x^2y^2+y^4+2x^2y^2-y^4-y^4)}{x^4+2x^2y^2+y^4} = y\left(1 + \tfrac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \tfrac{2y^4}{(x^2+y^2)^2}\right), \\ \tfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y} &= \tfrac{(x^3-3xy^2)\cdot(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot(0+2y)}{(x^2+y^2)^2} = \tfrac{x^5-3x^3y^2+x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} \\ &= \tfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} = \tfrac{x(x^4+2x^2y^2+y^4-6x^2y^2-y^4-y^4)}{x^4+2x^2y^2+y^4} = x\left(1 - \tfrac{3\cdot 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \tfrac{2y^4}{(x^2+y^2)^2}\right). \end{aligned}$$

Tieto parciálne derivácie sú spojité v každom bode $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$. Ukážeme ich spojitosť v bode $\boldsymbol{a}$. Pre odhady výrazov v zátvorkách pre všetky $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ platí

$$0 \leq \tfrac{2x^2y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4} \leq \tfrac{2x^2y^2}{0+2x^2y^2+0} = 1, \quad 0 \leq \tfrac{2y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq \tfrac{2y^4}{(0+y^2)^2} = \tfrac{2y^4}{y^4} = 2.$$

$$\implies \begin{cases} -1 = 1+0-2 \leq 1 + \tfrac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \tfrac{2y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq 1+1-0 = 2. \\ -4 = 1-3-2 \leq 1 - \tfrac{3\cdot 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \tfrac{2y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq 1+0-0 = 1. \end{cases}$$

Pre odhady parciálnych derivácií $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x}$, $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y}$ z toho vyplýva

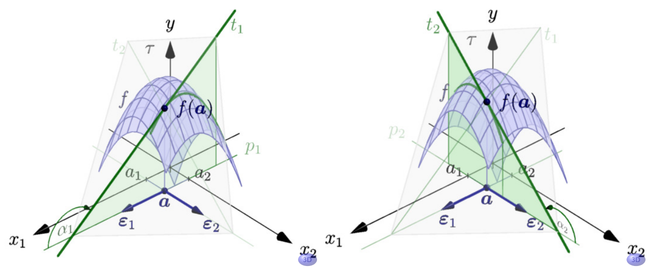
$$-|y| \leq \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x} \leq 2|y|, \quad -4|x| \leq \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y} \leq |x|.$$

Pre limity parciálnych derivácií v bode $\boldsymbol{a}$ potom platí

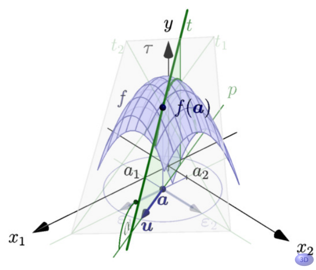
$$0 = -\lim_{y\to 0}|y| \leq \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \leq \lim_{y\to 0} 2|y| = 0. \quad \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial x}.$$

$$0 = -\lim_{x\to 0} 4|x| \leq \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \leq \lim_{x\to 0}|x| = 0. \quad \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}.$$

To znamená (veta 2.1.18), že sú parciálne derivácie $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x}$, $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y}$ spojité v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$ a na základe vety 2.2.5 je funkcia f diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} = (0;0)$. ■



Obr. 2.2.27: Derivácia v smere $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1;0)$ (vľavo) a v smere $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0;1)$ (vpravo)



Obr. 2.2.28: Derivácia v smere $\boldsymbol{u}$

2.2.3 Derivácia v smere vektora

Zovšeobecníme úvahy, ktoré nás viedli k parciálnym deriváciam. Pri konštrukcii parciálnej derivácie funkcie v danom bode podľa i-tej zložky sme fixovali všetky premenné okrem i-tej. Prakticky sme sa pohybovali iba v smere súradnicovej osi x_i.

Uvažujme reálnu funkciu $f\colon A \to R$ definovanú na oblasti $A \subset R^n$, $n \in N$ a bod[27] $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$. Pre bázické vektory $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0;\ldots;0;1;0;\ldots;0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (na i-tom mieste je jednotka) pre $t \in R$ platí

$$(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i + t;a_{i+1};\ldots;a_n) = \boldsymbol{a} + (0;\ldots;0;t;0;\ldots;0) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{\varepsilon}_i$$

a pre **parciálne derivácie** $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ na základe definície platí

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i+t;a_{i+1};\ldots;a_n) - f(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i;a_{i+1};\ldots;a_n)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{\varepsilon}_i) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Nech $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n) \in R^n$ je ľubovoľný vektor, potom (**smerovou**) **deriváciou funkcie f v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ podľa vektora $\boldsymbol{u}$** nazývame (pokiaľ existuje) limitu

$$f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

[27] Oblasť je otvorená a súvislá množina, to znamená, že bod $\boldsymbol{a}$ je vnútorný.

Z definície je zrejmé, že derivácia podľa vektora $f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})$ je závislá aj od veľkosti vektora $\boldsymbol{u}$.

Pre dva lineárne závislé vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^n$, t. j. $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{v}$, kde $c \in R$, $c \neq 0$, platí

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+tc\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{c[f(\boldsymbol{a}+ct\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})]}{ct}$$
$$= \begin{bmatrix} \text{Subst. } h = ct \\ t \to 0,\ h \to 0 \end{bmatrix} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{h} = c \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t} = cf'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}). \quad (2.14)$$

Špeciálne, ak $\boldsymbol{u} \in R^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_n = 1$, potom smerovú deriváciu funkcie f podľa vektora $\boldsymbol{u}$ nazývame **deriváciou funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ v smere vektora $\boldsymbol{u}$** a označujeme

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Poznámka 2.2.10.

Podmienka $\|\boldsymbol{u}\|_n = 1$ znamená, že vektor $\boldsymbol{u}$ má jednotkovú (normovanú) veľkosť a je veľmi dôležitá pri ďalšom použití derivácie v smere (vrátane určovania dotykovej roviny). Hodnoty derivácií v rôznych smeroch v danom bode môžeme potom porovnávať.

Ak vektor $\boldsymbol{u} \in R^n$ nemá jednotkovú veľkosť, môžeme ho jednoducho normovať podelením jeho veľkosťou $\|\boldsymbol{u}\|_n$ a dostaneme jednotkový vektor $\boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|_n$.

Poznámka 2.2.11.

Pre reálne funkcie jednej premennej $f\colon R \to R$ derivácia v smere vektora praktický význam nemá, iba formálny. Existujú iba dva smery $u = +1$, $v = -u = -1$ a platí

$$f'_u(a) = f'_{+1}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+1\cdot t)-f(\boldsymbol{a})}{t} = f'(a), \quad f'_v(a) = f'_{-1}(a) = -f'_u(a) = -f'(a),$$
$$\textit{resp. } f'_v(a) = f'_{-1}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}-1\cdot t)-f(\boldsymbol{a})}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}-t)-f(\boldsymbol{a})}{-t}$$
$$= \begin{bmatrix} \textit{Subst. } h = -t \\ t \to 0,\ h \to 0 \end{bmatrix} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+h)-f(\boldsymbol{a})}{h} = -\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t)-f(\boldsymbol{a})}{t} = -f'(a).$$

Geometrický význam smerovej derivácie podľa, resp. v smere vektora je podobný ako pri parciálnych deriváciách. Ilustrujeme ho na funkcii $f\colon R^2 \to R$ v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$.

Na obr. 2.2.27 je znázornená derivácia funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ v smere vektora $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1; 0)$, t. j. parciálna derivácia podľa x_1. Jej hodnota zodpovedá smernici dotyčnice t_1, to znamená hodnote $\operatorname{tg} \alpha_1$ (viď poznámka 2.2.2).

Na obr. 2.2.28 je derivácia f v bode $\boldsymbol{a}$ v smere jednotkového vektora $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, kde $\|\boldsymbol{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$. Jej hodnota je $\operatorname{tg} \alpha$ a predstavuje smernicu dotykovej priamky t, ktorej kolmý priemet na rovinu x_1x_2 prechádza bodom $\boldsymbol{a}$ a je rovnobežný s vektorom $\boldsymbol{u}$. T. j. α je uhol, ktorý zviera dotyčnica t so svojim kolmým priemetom p do roviny x_1x_2.

Príklad 2.2.16.

Funkcia $f(\boldsymbol{x}) = f(x; y; z) = x + y^2 + z^3\colon R^3 \to R$ je diferencovateľná v každom bode svojho definičného oboru $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z) \in R^3$.

Nech $\boldsymbol{u} = (u_x; u_y; u_z) \in R^3$, potom $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u} = (a_x + tu_x; a_y + tu_y; a_z + tu_z)$ a platí

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(a_x+tu_x)+(a_y+tu_y)^2+(a_z+tu_z)^3-(a_x+a_y^2+a_z^3)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{(a_x+tu_x-a_x)+(a_y^2+2ta_yu_y+t^2u_y^2-a_y^2)+(a_z^3+3ta_z^2u_z+3t^2a_zu_z^2+t^3u_z^3-a_z^3)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{tu_x+(2ta_yu_y+t^2u_y^2)+(3ta_z^2u_z+3t^2a_zu_z^2+t^3u_z^3)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{t(u_x+2a_yu_y+3a_z^2u_z)+t^2(u_y^2+3a_zu_z^2)+t^3u_z^3}{t} = u_x + 2a_yu_y + 3a_z^2u_z.$$

Takýto výpočet je vo všeobecnosti nepraktický aväčšinou veľmi prácny. Výhodnejší je výpočet podľa vzorca (2.15) odvodeného v nasledujúcom texte:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} \cdot f'(\boldsymbol{a})^T = (u_x; u_y; u_z) \cdot (1; 2a_y; 3a_z^2)^T = u_x + 2a_yu_y + 3a_z^2u_z. \blacksquare$$

Výpočet smerovej derivácie podľa, resp. v smere daného vektora môžeme previesť na deriváciu reálnej funkcie jednej reálnej premennej.

Uvažujme funkciu $f\colon A \to R$, kde $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť, bod $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$ a vektor $\boldsymbol{u} \in R^n$. Označme funkciu

$$\Phi(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u})\colon\ R \to R.$$

Definičný obor $D(\Phi) = \{t, \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u} \in A\} \subset R$, pričom bod $0 \in D(\Phi)$ je vnútorný.[28] Pre $t = 0$ platí $\Phi(0) = f(\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{a})$ a navyše pre všetky $t \in D(\Phi)$, $t \neq 0$ platí

$$\frac{\Phi(t)-\Phi(0)}{t-0} = \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t}, \quad \text{t. j. } \Phi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)-\Phi(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t} = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}).$$

Ak je funkcia f diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$, t. j. existuje

$$f'(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right),$$

potom pre zmenu funkcie f od bodu $\boldsymbol{a}$ po bod $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}$ platí vzťah (2.12)

$$\Delta f(\boldsymbol{a}, t\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a}) = t\boldsymbol{u} \cdot f'(\boldsymbol{a})^T + \omega(t\boldsymbol{u}) = t\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad}(\boldsymbol{a})^T + \omega(t\boldsymbol{u}),$$

pričom pre zvyšok ω platí

$$0 = \lim_{t\boldsymbol{u}\to \boldsymbol{0}_n} \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{\|t\boldsymbol{u}\|_n} = \lim_{t\to 0} \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{\|t\boldsymbol{u}\|_n} = \lim_{t\to 0} \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{|t| \cdot \|\boldsymbol{u}\|_n} = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|_n} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{|t|}.$$
$$\Longrightarrow\ 0 = \lim_{t\to 0} \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{t}.$$

Pre smerovú deriváciu $f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})$ podľa, resp. v smere vektora $\boldsymbol{u}$ potom platí

$$f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\boldsymbol{u}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T + \omega(t\boldsymbol{u})}{t} = \lim_{t\to 0}\left[\boldsymbol{u}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T + \frac{\omega(t\boldsymbol{u})}{t}\right] = \boldsymbol{u}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T,$$

$$\text{t. j. } f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})^T = \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} u_1 + \cdots + \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} u_n = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}^T. \qquad (2.15)$$

Poznámka 2.2.12.

Funkcia $\Phi(t) = f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u}) = f(g(t))$, $D(\Phi) \subset R$ je zložená funkcia, pričom vnútorná zložka je $\boldsymbol{x} = g(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}\colon R \to R^n$ a vonkajšia zložka je $f(\boldsymbol{x})\colon A \to R$, $A \subset R^n$.
Môžeme ju derivovať podľa vety 2.2.12 z nasledujúcej časti. Potom platí

$$\Phi'(t) = \left[f(g(t))\right]' = f'(\boldsymbol{x}) \cdot g'(t) = f'(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u})' = f'(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}^T.$$
$$\Longrightarrow\ f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \Phi'(0) = f'(\boldsymbol{a} + 0\cdot\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}^T = f'(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{u} \cdot f'(\boldsymbol{a})^T = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}).$$

[28] Bod $\boldsymbol{a}$ je vnútorný bod množiny A (otvorenej a súvislej), potom aj 0 je vnútorný bod $D(\Phi)$.

Keďže platí $f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \Phi'(0)$ a $\Phi'(0)$ je obyčajnou deriváciou reálnej funkcie reálnej premennej v bode 0, platia pre smerovú deriváciu rovnaké pravidlá ako pre deriváciu reálnej funkcie reálnej premennej.

Veta 2.2.8.
Funkcie $f, g\colon A \to R$ sú diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$, kde $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť, vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n) \in R^n$ je ľubovoľný. Potom platí:

$$(f \pm g)'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) \pm g'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}), \qquad (fg)'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}) \cdot g'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}).$$

Ak navyše $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$, potom platí $\left(\frac{f}{g}\right)'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = \frac{f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a}) \cdot g'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})}$.

Dôkaz.
Ak označíme $\Phi(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u})\colon R \to R$, $\Psi(t) = g(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u})\colon R \to R$, potom platí:

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) &= (\Phi \pm \Psi)'(0) = \Phi'(0) \pm \Psi'(0) = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) \pm g'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}),\\
(fg)'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) &= (\Phi\Psi)'(0) = \Phi'(0) \cdot \Psi(0) + \Phi(0) \cdot \Psi'(0) = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}) \cdot g'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}),\\
(f/g)'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) &= (\Phi/\Psi)'(0) = \frac{\Phi'(0) \cdot \Psi(0) - \Phi(0) \cdot \Psi'(0)}{\Psi^2(0)} = \frac{f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a}) \cdot g'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})} \quad \text{pre } g(\boldsymbol{a}) \neq 0. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Veta 2.2.9.
Funkcia $f\colon A \to R$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$, kde $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť, vektory $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n), \boldsymbol{v} = (v_1; v_2; \ldots; v_n) \in R^n$, číslo $c \in R$. Potom platí

$$f'_{\boldsymbol{0}_n}(\boldsymbol{a}) = 0, \qquad f'_{c\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = (c\boldsymbol{u}) \cdot f'(\boldsymbol{a})^T = c \cdot f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}), \qquad f'_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) + f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}).$$

Navyše pre vektory $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0; 1; \ldots; 0)$, $\ldots$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (0; 0; \ldots; 1)$ platí

$$f'_{\boldsymbol{\varepsilon}_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}, \qquad f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = u_1 \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} + \cdots + u_n \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}.$$

Dôkaz.
Tvrdenia vyplývajú priamo z definície. Druhé tvrdenie vyplýva tiež zo vzťahu (2.14).

$$\begin{aligned}
f'_{\boldsymbol{0}_n}(\boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{0}_n \cdot f'(\boldsymbol{a})^T = (0; 0; \ldots; 0) \cdot \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right)^T = 0.\\
f'_{c\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) &= (c\boldsymbol{u}) \cdot f'(\boldsymbol{a})^T = c \cdot \boldsymbol{u} \cdot f'(\boldsymbol{a})^T = c \cdot \left[\boldsymbol{u} \cdot f'(\boldsymbol{a})^T\right] = c \cdot f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}).\\
f'_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot f'(\boldsymbol{a})^T = \boldsymbol{u} \cdot f'(\boldsymbol{a})^T + \boldsymbol{v} \cdot f'(\boldsymbol{a})^T = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) + f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}).
\end{aligned}$$

Pre $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$f'_{\boldsymbol{\varepsilon}_i}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot f'(\boldsymbol{a})^T = (0; \ldots; 0; 1; 0; \ldots; 0) \cdot \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right)^T = \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}.$$

Vektory $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ tvoria bázu lineárneho priestoru R^n a $\boldsymbol{u} \in R^n$ sa dá zapísať ako ich lineárna kombinácia, t. j. $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n) = u_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + u_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + u_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$. Potom platí:

$$\begin{aligned}
f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) &= f'_{u_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + u_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + u_n\boldsymbol{\varepsilon}_n}(\boldsymbol{a}) = (u_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + u_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + u_n\boldsymbol{\varepsilon}_n) \cdot f'(\boldsymbol{a})^T\\
&= u_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 f'(\boldsymbol{a})^T + u_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 f'(\boldsymbol{a})^T + \cdots + u_n\boldsymbol{\varepsilon}_n f'(\boldsymbol{a})^T = u_1 \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} + \cdots + u_n \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}.
\end{aligned}$$

Posledné tvrdenie samozrejme vyplýva aj priamo zo vzťahu (2.15). $\blacksquare$

Nech $f\colon A \to R$, pričom $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť, $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$. Nech vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n) \in R^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_n = 1$ je jednotkový, t. j. $\|\boldsymbol{u}\|_n = 1$ a γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sú uhly, ktoré zviera vektor $\boldsymbol{u}$ so súradnicovými osami x_i (obr. 2.2.29). Potom platí

$$\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n) = (\cos\gamma_1; \cos\gamma_2; \ldots; \cos\gamma_n), \quad \text{t. j. } u_i = \cos\gamma_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pre deriváciu funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ v smere vektora $\boldsymbol{u}$ potom platí

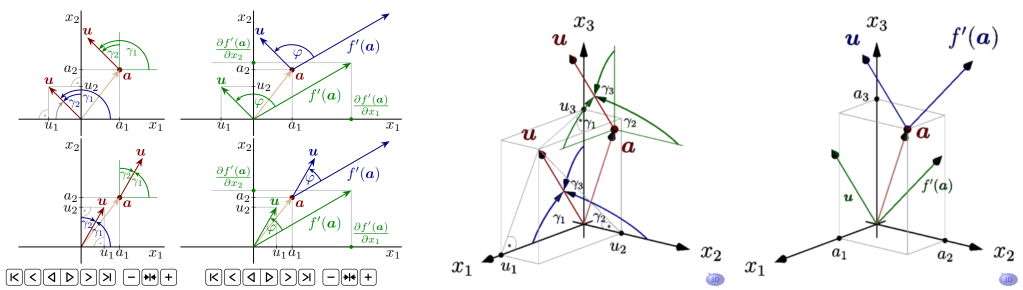
$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} = f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = u_1 \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} + \cdots + u_n \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} = \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} \cos\gamma_1 + \cdots + \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \cos\gamma_n,$$

pričom posledný vzťah predstavuje skalárny súčin vektorov $f'(\boldsymbol{a})$ a $\boldsymbol{u}$ známy z analytickej geometrie a φ je uhol (obr. 2.2.29), ktorý zvierajú vektory $f'(\boldsymbol{a})$ a $\boldsymbol{u}$. Keďže $\|\boldsymbol{u}\|_n = 1$, potom pre deriváciu v smere dostávame

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{u}} = \|f'(\boldsymbol{a})\|_n \cdot \|\boldsymbol{u}\|_n \cdot \cos\varphi = \|f'(\boldsymbol{a})\|_n \cdot \cos\varphi.$$

Keďže $f'(\boldsymbol{a})$ je pre dané $\boldsymbol{a}$ konštanta, posledný výraz je maximálny pre $\cos\varphi = 1$, t. j. pre $\varphi = 0$ a minimálny pre $\cos\varphi = -1$, t. j. pre $\varphi = \pi$. To znamená, ak sú vektory $f'(\boldsymbol{a})$ a $\boldsymbol{u}$ kolineárne (rovnobežné).

Derivácia funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ v smere je najväčšia v smere derivácie $f'(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$, t. j. v smere gradientu a najmenšia v opačnom smere. Takže $f'(\boldsymbol{a})$ je vektor, ktorý udáva **smer najväčšieho rastu** (**najväčšej kladnej zmeny**) funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ a $-f'(\boldsymbol{a})$ je vektor, ktorý udáva smer **najväčšieho poklesu** funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$.



Obr. 2.2.29: Skalárny súčin $(f'(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{u}) = \|f'(\boldsymbol{a})\|_n \cdot \|\boldsymbol{u}\|_n \cdot \cos\varphi$ v priestore R^2 (vľavo) a v priestore R^3 (vpravo)

2.2.4 Výpočet derivácií

Pri reálnych funkciách jednej premennej sme dokázali derivovať súčet, súčin a podiel niekoľkých funkcií. Analogické pravidlá existujú aj pre reálne funkcie s viacerými premennými, t. j. pre funkcie $R^n \to R$, $n \in N$. Keďže ani existencia všetkých parciálnych derivácií vo všeobecnosti nezaručuje diferencovateľnosť uvedených funkcií (poznámka 2.2.1), budeme predpokladať diferencovateľnosť zúčastnených funkcií.

Pri operáciách s deriváciami a diferenciálmi funkcií $f, g\colon R^n \to R$, $n \in N$ je potrebné si uvedomiť, že $f(\boldsymbol{a})$, $g(\boldsymbol{a})$, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$, $\mathrm{d}g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$ sú reálne čísla a výrazy $f'(\boldsymbol{a})$, $g'(\boldsymbol{a})$ predstavujú n-rozmerné vektory.

Najprv uvedieme jednu z najdôležitejších nerovností v matematike, ktorú budeme potrebovať. Je známa ako **Cauchy-Schwarzova**, niekedy sa tiež nazýva **Buňakovského** a často sa používa v rôznych oblastiach matematiky, fyziky i technickej praxe.

Veta 2.2.10 (Cauchy-Schwarzova nerovnosť).
V je lineárny priestor so skalárnym súčinom $(\cdot,\cdot)$ a normou $\|\cdot\|$, vektory $\alpha,\beta\in V$.

$$\Longrightarrow\ (\alpha,\beta)^2 \le (\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta),\quad \text{t. j. } |(\alpha,\beta)| \le \sqrt{(\alpha,\alpha)}\cdot\sqrt{(\beta,\beta)} = \|\alpha\|\cdot\|\beta\|.$$

Dôkaz.
- Pre $\beta=\mathbf{0}$ platí nerovnosť triviálne, pretože $(\alpha,\mathbf{0})^2=0$, $(\alpha,\alpha)\cdot(\mathbf{0},\mathbf{0})=(\alpha,\alpha)\cdot 0=0$.
- Pre $\beta\neq\mathbf{0}$ označme $k=\frac{(\alpha,\beta)}{\|\beta\|^2}=\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$. Potom platí

$$\begin{aligned}0 \le \|\alpha-k\beta\|^2 &= (\alpha-k\beta,\alpha-k\beta) = (\alpha,\alpha-k\beta)-(k\beta,\alpha-k\beta)\\ &= (\alpha,\alpha)-(\alpha,k\beta)-(k\beta,\alpha)+(k\beta,k\beta) = (\alpha,\alpha)-k(\alpha,\beta)-k(\beta,\alpha)+k^2(\beta,\beta)\\ &= (\alpha,\alpha)-\tfrac{(\alpha,\beta)\cdot(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}-\tfrac{(\beta,\alpha)\cdot(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}+\tfrac{(\alpha,\beta)^2\cdot(\beta,\beta)}{(\beta,\beta)^2} = (\alpha,\alpha)-\tfrac{(\alpha,\beta)\cdot(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}.\end{aligned}$$

Pri poslednej úprave sme využili symetriu skalárneho súčtu $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$. Z toho vyplýva

$$0 \le (\alpha,\alpha)\cdot(\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)\cdot(\alpha,\beta),\quad \text{t. j. } (\alpha,\beta)^2 \le (\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta).\ \blacksquare$$

Dôsledok 2.2.10.a (Cauchy-Schwarzova nerovnosť v R^n).
Vektory $\boldsymbol{x}=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1;y_2;\ldots;y_n)\in R^n$, $n\in N$.

$$\Longrightarrow\ \left|\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\right| \le \|\boldsymbol{x}\|_n\cdot\|\boldsymbol{y}\|_n,$$

$$\text{t. j. } \left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},\quad \text{resp. } \left[\sum_{i=1}^n x_iy_i\right]^2 \le \sum_{i=1}^n x_i^2\cdot\sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Dôkaz.
Ak označíme φ uhol, ktorý zvierajú vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$, potom platí

$$\left|\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\right| = |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| = \|\boldsymbol{x}\|_n\cdot\|\boldsymbol{y}\|_n\cdot|\cos\varphi| \le \|\boldsymbol{x}\|_n\cdot\|\boldsymbol{y}\|_n.$$

$$\Longrightarrow\ \left|\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\right| \le \|\boldsymbol{x}\|_n\cdot\|\boldsymbol{y}\|_n,\quad \text{resp. } \left(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T\right)^2 \le \|\boldsymbol{x}\|_n{}^2\cdot\|\boldsymbol{y}\|_n{}^2.\ \blacksquare$$

Veta 2.2.11.
$A\subset R^n$, $n\in N$ je oblasť, číslo $c\in R$, funkcie $f,g\colon A\to R$ sú diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}\in A$.
$\Longrightarrow$ Funkcie cf, $f\pm g$, fg sú diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}\in A$ a platí:

$$\begin{aligned}(cf)'(\boldsymbol{a}) &= cf'(\boldsymbol{a}), & \mathrm{d}(cf)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) &= c\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}),\\ (f\pm g)'(\boldsymbol{a}) &= f'(\boldsymbol{a})\pm g'(\boldsymbol{a}), & \mathrm{d}(f\pm g)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) &= \mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\pm\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}),\\ (fg)'(\boldsymbol{a}) &= f'(\boldsymbol{a})\cdot g(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{a})\cdot g'(\boldsymbol{a}), & \mathrm{d}(fg)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) &= \mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\cdot g(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}).\end{aligned}$$

Ak navyše $g(\boldsymbol{a})\neq 0$, potom je v bode $\boldsymbol{a}\in A$ diferencovateľná funkcia f/g a platí:

$$\left(\tfrac{f}{g}\right)'(\boldsymbol{a}) = \frac{f'(\boldsymbol{a})\cdot g(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a})\cdot g'(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})},\qquad \mathrm{d}\left(\tfrac{f}{g}\right)(\boldsymbol{a}) = \frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\cdot g(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})}{g^2(\boldsymbol{a})}.$$

Dôkaz.
Funkcie f, g sú podľa predpokladov diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}$, t. j. existujú derivácie $f'(\boldsymbol{a})$, $g'(\boldsymbol{a})$ a diferenciály $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T$, $\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T$, pričom platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0, \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-g(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0.$$

Označme zvyškové funkcie z čitateľov[29] ω_f, ω_g. Potom platí:

$$\omega_f(\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{h}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T\colon R^n \to R, \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{\omega_f(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0,$$
$$\omega_g(\boldsymbol{h}) = g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - g(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T\colon R^n \to R, \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{\omega_g(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0.$$

• Prvý pár tvrdení pre funkciu cf platí triviálne, pretože

$$(cf)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - (cf)(\boldsymbol{a}) - c\cdot\boldsymbol{h}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T = c\big[f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{h}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T\big] = c\cdot\omega_f(\boldsymbol{h}),$$
$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{(cf)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-(cf)(\boldsymbol{a})-c\cdot\boldsymbol{h}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{c\cdot\omega_f(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = c\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{\omega_f(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = c\cdot 0 = 0.$$

To znamená (veta 2.2.1), že $(cf)'(\boldsymbol{a}) = c\cdot f'(\boldsymbol{a})$, $\mathrm{d}(cf)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = c\cdot\boldsymbol{h}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T = c\cdot\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$.

• Pre súčet a rozdiel funkcií $f \pm g$ platí analogicky

$$(f\pm g)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - (f\pm g)(\boldsymbol{a}) - \big[\boldsymbol{h}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T \pm \boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T\big] = \omega_f(\boldsymbol{h}) \pm \omega_g(\boldsymbol{h}),$$
$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{(f\pm g)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-(f\pm g)(\boldsymbol{a})-[\boldsymbol{h}\cdot f'(\boldsymbol{a})^T\pm\boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T]}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n} \tfrac{\omega_f(\boldsymbol{h})\pm\omega_g(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = 0\pm 0 = 0,$$

t. j. $(f\pm g)'(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\pm g'(\boldsymbol{a})$, $\mathrm{d}(f\pm g)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T \pm \boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\pm\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$.

• Pre súčin funkcií fg platí

$$\begin{aligned}
&(fg)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - (fg)(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{h}\cdot\big[f'(\boldsymbol{a})^T\cdot g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\cdot g'(\boldsymbol{a})^T\big] \\
&\quad= \big[f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T + \omega_f(\boldsymbol{h})\big]\cdot\big[g(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T + \omega_g(\boldsymbol{h})\big] \\
&\qquad\qquad - f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) - g(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T - f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T \\
&\quad= f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T + f(\boldsymbol{a})\omega_g(\boldsymbol{h}) + g(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T + \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T\cdot\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T \\
&\qquad\qquad + \omega_g(\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T + g(\boldsymbol{a})\omega_f(\boldsymbol{h}) + \omega_f(\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T + \omega_f(\boldsymbol{h})\omega_g(\boldsymbol{h}) \\
&\qquad\qquad - f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a}) - g(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T - f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T \\
&\quad= f(\boldsymbol{a})\omega_g(\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T\cdot\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T + \omega_g(\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T \\
&\qquad\qquad + g(\boldsymbol{a})\omega_f(\boldsymbol{h}) + \omega_f(\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T + \omega_f(\boldsymbol{h})\omega_g(\boldsymbol{h}) \\
&\quad= f(\boldsymbol{a})\omega_g(\boldsymbol{h}) + g(\boldsymbol{a})\omega_f(\boldsymbol{h}) + \big[\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T + \omega_f(\boldsymbol{h})\big]\cdot\big[\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T + \omega_g(\boldsymbol{h})\big] = \omega(\boldsymbol{h}).
\end{aligned}$$

Kvôli prehľadnosti sme posledný výraz označili $\omega(\boldsymbol{h})$. Je zrejmé, že $\omega(\boldsymbol{h})\colon R^n \to R$.
Funkcie f, g, f', g' sú v bode $\boldsymbol{a}$ konečné, t. j. existuje $\alpha > 0$ také, že platí

$$|f(\boldsymbol{a})| \le \alpha, \quad |g(\boldsymbol{a})| \le \alpha, \quad \|f'(\boldsymbol{a})\|_n \le \alpha, \quad \|g'(\boldsymbol{a})\|_n \le \alpha.$$

Na základe Cauchy-Schwarzovej nerovnosti (dôsledok 2.2.10.a) platí

$$\big|\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T\big| \le \|\boldsymbol{h}\|_n\cdot\|f'(\boldsymbol{a})\|_n, \quad \big|\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T\big| \le \|\boldsymbol{h}\|_n\cdot\|g'(\boldsymbol{a})\|_n.$$

[29] Viď vzťahy (2.12) a (2.13).

Najprv ohraničíme výraz $\omega(\boldsymbol{h})/\|\boldsymbol{h}\|_n$. Platí

$$0 \le \left|\frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n}\right| = \frac{|\omega(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \frac{\left|f(\boldsymbol{a})\omega_g(\boldsymbol{h})+g(\boldsymbol{a})\omega_f(\boldsymbol{h})+\left[\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T+\omega_f(\boldsymbol{h})\right]\cdot\left[\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T+\omega_g(\boldsymbol{h})\right]\right|}{\|\boldsymbol{h}\|_n}$$
$$\le \frac{|f(\boldsymbol{a})\omega_g(\boldsymbol{h})|+|g(\boldsymbol{a})\omega_f(\boldsymbol{h})|+\left[\left|\boldsymbol{h}f'(\boldsymbol{a})^T\right|+|\omega_f(\boldsymbol{h})|\right]\cdot\left[\left|\boldsymbol{h}g'(\boldsymbol{a})^T\right|+|\omega_g(\boldsymbol{h})|\right]}{\|\boldsymbol{h}\|_n}$$
$$\le \frac{|f(\boldsymbol{a})|\cdot|\omega_g(\boldsymbol{h})|+|g(\boldsymbol{a})|\cdot|\omega_f(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} + \frac{\left[\|\boldsymbol{h}\|_n\cdot\left\|f'(\boldsymbol{a})\right\|_n+|\omega_f(\boldsymbol{h})|\right]\cdot\left[\|\boldsymbol{h}\|_n\cdot\left\|g'(\boldsymbol{a})\right\|_n+|\omega_g(\boldsymbol{h})|\right]}{\|\boldsymbol{h}\|_n}$$
$$\le \frac{\alpha\,|\omega_g(\boldsymbol{h})|+\alpha\,|\omega_f(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} + \frac{\left[\alpha\|\boldsymbol{h}\|_n+|\omega_f(\boldsymbol{h})|\right]\cdot\left[\alpha\|\boldsymbol{h}\|_n+|\omega_g(\boldsymbol{h})|\right]}{\|\boldsymbol{h}\|_n\cdot\|\boldsymbol{h}\|_n}\cdot\|\boldsymbol{h}\|_n$$
$$= \alpha\frac{|\omega_g(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} + \alpha\frac{|\omega_f(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} + \left[\alpha+\frac{|\omega_f(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n}\right]\cdot\left[\alpha+\frac{|\omega_g(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n}\right]\cdot\|\boldsymbol{h}\|_n.$$

Pre limitu potom platí

$$0 \le \left|\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n}\right| = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\left|\frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n}\right|$$
$$\le \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\left(\alpha\frac{|\omega_g(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} + \alpha\frac{|\omega_f(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n} + \left[\alpha+\frac{|\omega_f(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n}\right]\cdot\left[\alpha+\frac{|\omega_g(\boldsymbol{h})|}{\|\boldsymbol{h}\|_n}\right]\cdot\|\boldsymbol{h}\|_n\right)$$
$$= \alpha\cdot 0+\alpha\cdot 0+[\alpha+0]\cdot[\alpha+0]\cdot 0 = 0.$$

Z toho vyplýva, že platí

$$0 = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\frac{(fg)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-(fg)(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\cdot[f'(\boldsymbol{a})^T\cdot g(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{a})\cdot g'(\boldsymbol{a})^T]}{\|\boldsymbol{h}\|_n}.$$

To znamená, že platia tvrdenia vety pre deriváciu súčinu funkcií fg.

• Tvrdenie pre podiel funkcií dokážeme pomocou súčinu. Najprv dokážeme vzorce

$$\left(\tfrac{1}{g}\right)'(\boldsymbol{a}) = -\frac{g'(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})}, \quad \mathrm{d}\left(\tfrac{1}{g}\right)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = -\frac{\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})}{g^2(\boldsymbol{a})}. \tag{2.16}$$

Pre funkciu $\frac{1}{g}$ platí

$$\left(\tfrac{1}{g}\right)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \left(\tfrac{1}{g}\right)(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{g(\boldsymbol{a})} - \frac{1}{g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})} = \frac{g(\boldsymbol{a})-g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})}{g(\boldsymbol{a})\cdot g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})}$$
$$= \frac{g(\boldsymbol{a})-[g(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T+\omega_g(\boldsymbol{h})]}{g(\boldsymbol{a})\cdot g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})} = -\frac{\boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T}{g(\boldsymbol{a})\cdot g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})} - \frac{\omega_g(\boldsymbol{h})}{g(\boldsymbol{a})\cdot g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})}.$$

Limita $\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\frac{\boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}$ existuje a je konečná,[30] označme $\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\frac{\boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = s$. Potom platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\left(\frac{1}{g}\right)(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{h}\cdot\left[-\frac{g'(\boldsymbol{a})^T}{g^2(\boldsymbol{a})}\right]}{\|\boldsymbol{h}\|_n} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\frac{-\frac{\boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T}{g(\boldsymbol{a})\cdot g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})}-\frac{\omega_g(\boldsymbol{h})}{g(\boldsymbol{a})\cdot g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})}+\frac{\boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T}{g^2(\boldsymbol{a})}}{\|\boldsymbol{h}\|_n}$$
$$= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}_n}\left(-\frac{1}{g(\boldsymbol{a})\cdot g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})}\cdot\frac{\boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n} - \frac{1}{g(\boldsymbol{a})\cdot g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})}\cdot\frac{\omega_g(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_n} + \frac{1}{g^2(\boldsymbol{a})}\cdot\frac{\boldsymbol{h}\cdot g'(\boldsymbol{a})^T}{\|\boldsymbol{h}\|_n}\right)$$
$$= -\frac{1}{g(\boldsymbol{a})^2}\cdot s - \frac{1}{g(\boldsymbol{a})^2}\cdot 0 + \frac{1}{g(\boldsymbol{a})^2}\cdot s = 0.$$

To znamená, že platia vzťahy (2.16). Pre podiel $\frac{f}{g} = f\cdot\frac{1}{g}$, t. j. súčin $f\cdot\frac{1}{g}$, potom platí

$$\left(f\cdot\tfrac{1}{g}\right)'(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\frac{1}{g(\boldsymbol{a})} + f(\boldsymbol{a})\left(\tfrac{1}{g}\right)'(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\frac{1}{g(\boldsymbol{a})} - f(\boldsymbol{a})\frac{g'(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})} = \frac{f'(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a})g'(\boldsymbol{a})}{g^2(\boldsymbol{a})},$$
$$\mathrm{d}\left(f\cdot\tfrac{1}{g}\right)'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\frac{1}{g(\boldsymbol{a})} + f(\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{g}\right)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \frac{\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})g(\boldsymbol{a})-f(\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})}{g^2(\boldsymbol{a})}. \blacksquare$$

[30] Vzťah (2.7) z dôkazu vety 2.2.1.

Príklad 2.2.17.
Uvažujme funkcie $f, g\colon R^2 \to R$ definované vzťahmi

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x;y) = x^2+y^2, \quad g(\boldsymbol{x}) = g(x;y) = x^2-y^2.$$

Funkcie f, g sú diferencovateľné v každom bode $\boldsymbol{x} = (x;y) \in R^2$ a platí:

$$\begin{aligned}
f'(\boldsymbol{x}) &= (x^2+y^2)' = (2x;2y), \qquad g'(\boldsymbol{x}) = (x^2-y^2)' = (2x;-2y),\\
(f+g)'(\boldsymbol{x}) &= \big[(x^2+y^2)+(x^2-y^2)\big]' = (2x^2)' = (4x;0),\\
(fg)'(\boldsymbol{x}) &= \big[(x^2+y^2)\cdot(x^2-y^2)\big]' = (x^4-y^4)' = (4x^3;-4y^3),\\
\Big(\frac{f}{g}\Big)'(\boldsymbol{x}) &= \Big(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\Big)' = \Big(\frac{2x(x^2-y^2)-(x^2+y^2)2x}{(x^2-y^2)^2}; \frac{2y(x^2-y^2)-(x^2+y^2)\cdot(-2y)}{(x^2-y^2)^2}\Big)\\
&= \Big(\frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2}; \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}\Big) = \frac{1}{(x^2-y^2)^2}\cdot(-4xy^2;4x^2y) \ \text{ pre } x \neq y.
\end{aligned}$$

Ak použijeme vetu 2.2.11, potom platí:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(\boldsymbol{x}) &= f'(\boldsymbol{x})+g'(\boldsymbol{x}) = (2x;2y)+(2x;-2y) = (4x;0),\\
(fg)'(\boldsymbol{x}) &= f'(\boldsymbol{x})\cdot g(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x})\cdot g'(\boldsymbol{x}) = (2x;2y)\cdot(x^2-y^2)+(x^2+y^2)\cdot(2x;-2y)\\
&= (2x^3-2xy^2;2x^2y-2y^3)+(2x^3+2xy^2;-2x^2y-2y^3) = (4x^3;-4y^3),\\
\Big(\frac{f}{g}\Big)'(\boldsymbol{x}) &= \frac{f'(\boldsymbol{x})\cdot g(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\cdot g'(\boldsymbol{x})}{g^2(\boldsymbol{x})} = \frac{(2x;2y)\cdot(x^2-y^2)-(x^2+y^2)\cdot(2x;-2y)}{(x^2-y^2)^2}\\
&= \frac{(2x^3-2xy^2;2x^2y-2y^3)-(2x^3+2xy^2;-2x^2y-2y^3)}{(x^2-y^2)^2} = \frac{(-4xy^2;4x^2y)}{(x^2-y^2)^2} \ \text{ pre } x \neq y. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Ak počítame parciálne derivácie zloženej funkcie viacerých premenných, prakticky derivujeme zloženú reálnu funkciu jednej premennej. Jednotlivé zložky derivujeme samostatne a ostatné premenné považujeme za konštantné.

Pri riešení reálnych problémov sa často vyskytujú implicitné rovnice, v ktorých vystupujú vektorové funkcie a mnohokrát imlicitne a v derivovanom tvare. Vzťahy, ktoré vyplývajú z nasledujúcej vety, majú veľký význam pri riešení takýchto rovníc, pri ich transformáciách na jednoduchšie a ľahšie riešiteľné tvary. Vetu uvádzame bez dôkazu, myšlienka dôkazu je podobná ako pri vete 2.2.11 (viď napr. [8]).

Veta 2.2.12 (O derivovaní zloženej funkcie).
Funkcia $\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{x})\colon A \to R^m$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} = (a_1;a_2;\ldots;a_n) \in A$, funkcia $\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{u})\colon B \to R^l$ je diferencovateľná v bode $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} = (b_1;b_2;\ldots;b_m) \in B$, pričom množina $A \subset R^n$ je oblasť, množina $B \subset R^m$ je otvorená, $f(A) \subset B$, $n, m, l \in N$.

$\Longrightarrow$ Zložená funkcia $F = g(f)\colon A \to R^l$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$ a platí

$$F'(\boldsymbol{a}) = \big[g(f)\big]'(\boldsymbol{a}) = g'\big(f(\boldsymbol{a})\big)\cdot f'(\boldsymbol{a}) = g'(\boldsymbol{b})\cdot f'(\boldsymbol{a}).$$

Špeciálne pre $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,l$ platí

$$\frac{\partial F_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = \frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_m}\cdot\frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_k}\cdot\frac{\partial f_k(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}.$$

Derivovanie zloženej funkcie $F = g(f)\colon R^n \to R^l$ formálne predstavuje násobenie matíc $g'(\boldsymbol{b})$ a $f'(\boldsymbol{a})$. Keďže $f\colon R^n \to R^m$, $g\colon R^m \to R^l$, potom

$$F'(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial F_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times n}, \quad g'(\boldsymbol{b}) = \left(\frac{\partial g_j(\boldsymbol{a})}{\partial u_i}\right)_{l\times m}, \quad f'(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{m\times n}.$$

Deriváciu $F'(\boldsymbol{a}) = g'(\boldsymbol{b}) \cdot f'(\boldsymbol{a})$ môžeme pomocou matíc prepísať

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial F_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial F_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots \;\; \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_l(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_l(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial F_l(\boldsymbol{a})}{\partial x_m} \end{pmatrix}}_{F'(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial F_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\boldsymbol{b})}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{b})}{\partial u_2} \cdots & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{b})}{\partial u_m} \\ \frac{\partial g_2(\boldsymbol{b})}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{b})}{\partial u_2} \cdots & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{b})}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots \;\; \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_l(\boldsymbol{b})}{\partial u_1} & \frac{\partial g_l(\boldsymbol{b})}{\partial u_2} \cdots & \frac{\partial g_l(\boldsymbol{b})}{\partial u_m} \end{pmatrix}}_{g'(\boldsymbol{b})=\left(\frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_i}\right)_{l\times m}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots \;\; \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{f'(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial f_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{m\times n}},$$

$$\text{t. j.} \quad \left(\frac{\partial F_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times n} = \left(\frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_1}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_m}\frac{\partial f_m(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times n} = \left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g_j(\boldsymbol{b})}{\partial u_k}\frac{\partial f_k(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right)_{l\times n}.$$

Poznámka 2.2.13.

Diferencovateľnosti funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ a funkcie g v bode $\boldsymbol{b}$ môžeme nahradiť silnejšími predpokladmi – spojitosťou všetkých ich parciálnych derivácií v daných bodoch.
Potom na základe vety 2.2.5 je funkcia f diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a}$, funkcia g je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{b}$ a môžeme použiť vetu 2.2.12. Zo spojitosti všetkých parciálnych derivácií vyplýva v nejakých okoliach $O(\boldsymbol{a})$, resp. $O(\boldsymbol{b})$ ohraničenosť funkcií f a g (veta 2.1.23) a tiež spojitosť funkcií f a g (veta 2.2.6) a potom aj spojitosť zloženej funkcie F (veta 2.1.21).

Príklad 2.2.18.

Uvažujme funkciu $f(x;y) = (f_1(x;y); f_2(x;y)) = (\ln(x^2+y^2); \operatorname{arctg}(x^2+1))\colon R^2 \to R^2$.
Funkcie $f_1(x;y) = \ln(x^2+y^2)$, $f_2(x;y) = \operatorname{arctg}(x^2+1)\colon R^2 \to R$ sú zložené a platí

$$f_1(x;y) = \psi_1(\varphi_1(x;y)), \quad \text{kde } \psi_1(t) = \ln(t)\colon R \to R, \quad \varphi_1(x;y) = x^2+y^2\colon R^2 \to R,$$
$$f_2(x;y) = \psi_2(\varphi_2(x;y)), \quad \text{kde } \psi_2(t) = \operatorname{arctg}(t)\colon R \to R, \quad \varphi_2(x;y) = x^2+1\colon R^2 \to R.$$

Funkcie f_1, f_2 môžeme derivovať podľa predchádzajúcej vety:

$$\begin{aligned} f_1'(x;y) &= \psi_1'(\varphi_1(x;y)) \cdot \varphi_1'(x;y) = \tfrac{1}{\varphi_1(x;y)} \cdot \left(\tfrac{\partial\varphi_1(x;y)}{\partial x}; \tfrac{\partial\varphi_1(x;y)}{\partial y}\right) \\ &= \tfrac{1}{x^2+y^2} \cdot (2x; 2y) = \left(\tfrac{2x}{x^2+y^2}; \tfrac{2y}{x^2+y^2}\right), \\ f_2'(x;y) &= \psi_2'(\varphi_2(x;y)) \cdot \varphi_2'(x;y) = \tfrac{1}{1+\varphi_2^2(x;y)} \cdot \left(\tfrac{\partial\varphi_2(x;y)}{\partial x}; \tfrac{\partial\varphi_2(x;y)}{\partial y}\right) \\ &= \tfrac{1}{1+(x^2+1)^2} \cdot (2x; 0) = \left(\tfrac{2x}{x^4+2x^2+2}; 0\right). \end{aligned}$$

Je to nepraktické, preto funkciu f derivujeme priamo

$$f'(x;y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x;y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x;y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x;y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x;y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial x} & \frac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{arctg}(x^2+1)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{arctg}(x^2+1)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{2x}{1+(x^2+1)^2} & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Nezávislé premenné funkcií sa v priestoroch R^2 a R^3 zvyknú označovať symbolmi x, y, resp. x, y, z. Parciálne derivácie funkcií $f(x;y)\colon R^2 \to R$, resp. $f(x;y;z)\colon R^3 \to R$ v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ sa často (hlavne vo fyzike a praxi) označujú

$$f_x(\boldsymbol{a}) = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x}, \;\; f_y(\boldsymbol{a}) = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial y}, \;\; f_z(\boldsymbol{a}) = \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial z}.$$

Tieto označenia sú prehľadnejšie, preto ich v nasledujúcom texte budeme preferovať.

Poznámka 2.2.14.
Niekedy sa parciálne derivácie označujú aj symbolmi $f'_x(\boldsymbol{a})$, $f'_y(\boldsymbol{a})$, resp. $f'_z(\boldsymbol{a})$.

Príklad 2.2.19.
Nech $g(t)\colon R \to R$ je diferencovateľná funkcia v R, označme $F(x;y) = g(x^2+y^2)\colon R^2 \to R$. Funkcia $f(x;y) = x^2 + y^2\colon R^2 \to R$ je diferencovateľná v R^2. Potom tiež zložená funkcia $F = g(f)$ je diferencovateľná v R^2 a pre všetky $(x;y) \in R^2$ platí

$$\begin{aligned} f'(x;y) &= (f_x(x;y); f_y(x;y)) = (2x; 2y), \\ F'(x;y) &= (F_x(x;y); F_y(x;y)) = \big[g(f(x;y))\big]' = g'(x^2+y^2) \cdot f'(x;y) \\ &\qquad = g'(x^2+y^2) \cdot (2x; 2y) = (2x \cdot g'(x^2+y^2); 2y \cdot g'(x^2+y^2)). \end{aligned}$$

• Špeciálne pre $g(t) = \ln t\colon (0;\infty) \to R$ platí

$$F(x;y) = \ln(x^2+y^2)\colon R^2 - \{(0;0)\} \to R, \quad g'(t) = \big[\ln t\big]' = \tfrac{1}{t},$$
$$g'(x^2+y^2) = \tfrac{1}{x^2+y^2}, \quad F'(x;y) = \tfrac{1}{x^2+y^2} \cdot (2x; 2y) = \big(\tfrac{2x}{x^2+y^2}; \tfrac{2y}{x^2+y^2}\big).$$

Rovnaký výsledok dostaneme aj priamym derivovaním $\big[\ln(x^2+y^2)\big]' = \big(\tfrac{2x}{x^2+y^2}; \tfrac{2y}{x^2+y^2}\big)$. ■

Príklad 2.2.20.
Nech $f(x;y)\colon R^2 \to R$ je diferencovateľná funkcia v R^2.
Uvažujme transformáciu premenných $(x;y) = g(u;v)$ určenú diferencovateľnými funkciami

$$x = \alpha(u;v),\ y = \beta(u;v)\colon R^2 \to R, \quad \text{t. j. } (x;y) = g(u;v) = (\alpha(u;v); \beta(u;v))\colon R^2 \to R^2.$$

Funkcia f má v nových premenných vyjadrenie $F = f(g)$, t. j.

$$F(u;v) = f(g(u;v)) = f(\alpha(u;v); \beta(u;v))\colon R^2 \to R.$$

Pre deriváciu funkcie F platí

$$\begin{aligned} F'(u;v) &= \big(F_u(u;v); F_v(u;v)\big) = \big[f(g(u;v))\big]' = f'\big(\alpha(u;v); \beta(u;v)\big) \cdot g'(u;v) \\ &= \Big(f_x\big(\alpha(u;v); \beta(u;v)\big); f_y\big(\alpha(u;v); \beta(u;v)\big)\Big) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_u(u;v) & \alpha_v(u;v) \\ \beta_u(u;v) & \beta_v(u;v) \end{pmatrix} \\ &= \Big(f_x\big(\alpha(u;v); \beta(u;v)\big) \cdot \alpha_u(u;v) + f_y\big(\alpha(u;v); \beta(u;v)\big) \cdot \beta_u(u;v); \\ &\qquad f_x\big(\alpha(u;v); \beta(u;v)\big) \cdot \alpha_v(u;v) + f_y\big(\alpha(u;v); \beta(u;v)\big) \cdot \beta_v(u;v)\Big). \end{aligned}$$

Kvôli prehľadnosti prepíšeme uvedené vzťahy bez premenných

$$F' = (F_u; F_v) = \big[f(g)\big]' = f' \cdot g' = (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} = \big(f_x\alpha_u + f_y\beta_u; f_x\alpha_v + f_y\beta_v\big).$$

• Špeciálne, ak $F(u; v) = f(x; y) = f(u^2 + v^2; u^2 - v^2)$: $R^2 \to R$, potom platí[31]

$$F' = (F_u; F_v) = (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} = \big(2uf_x + 2uf_y; 2vf_x - 2vf_y\big).$$

• Pri prevode do polárnych súradníc (príklady 2.1.3, 2.2.7) $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,

$$\text{t. j. } (x; y) = \Psi(\rho; \varphi) = \big(\alpha(\rho; \varphi); \beta(\rho; \varphi)\big) = (\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\colon \langle 0; \infty) \times R \to R^2$$

pre deriváciu funkcie $F(\rho; \varphi) = f(\Psi(\rho; \varphi)) = f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)$: $\langle 0; \infty) \times R \to R$ platí

$$\begin{aligned} F'(\rho; \varphi) &= (F_\rho; F_\varphi) = (f_x; f_y) \cdot \Psi' = (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_\rho & \alpha_\varphi \\ \beta_\rho & \beta_\varphi \end{pmatrix} \\ &= (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} = \big(f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi; -\rho f_x\sin\varphi + \rho f_y\cos\varphi\big). \end{aligned}$$

• Špeciálne pre funkciu $f(x; y) = \frac{x+y}{x-y}$, $(x; y) \in R^2$, $x \neq y$ má platiť $\rho\cos\varphi \neq \rho\sin\varphi$. To znamená $(\rho; \varphi) \in \langle 0; \infty) \times R$, $\varphi \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$,

$$\begin{aligned} F(\rho; \varphi) &= f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi) = \tfrac{\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi} = \tfrac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}, \\ f'(x; y) &= \big(\tfrac{x+y}{x-y}\big)' = \big(f_x(x; y); f_y(x; y)\big) = \Big(\tfrac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2}; \tfrac{x-y+(x+y)}{(x-y)^2}\Big) = \tfrac{2}{(x-y)^2} \cdot (-y; x), \\ f'(\Psi(\rho; \varphi)) &= \tfrac{2(-\rho\sin\varphi; \rho\cos\varphi)}{\rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^2} = \tfrac{2(-\rho\sin\varphi; \rho\cos\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi)} = \tfrac{2(-\sin\varphi; \cos\varphi)}{\rho(1-\sin 2\varphi)}. \end{aligned}$$

Pre deriváciu F potom platí $F' = (F_\rho; F_\varphi) = (f_x; f_y) \cdot \Psi'$, t. j.

$$\begin{aligned} F'(\rho; \varphi) &= (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} = \tfrac{2(-\sin\varphi; \cos\varphi)}{\rho(1-\sin 2\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{2}{\rho(1-\sin 2\varphi)} \cdot \big(0; \rho\sin^2\varphi + \rho\cos^2\varphi\big) = \tfrac{2}{\rho(1-\sin 2\varphi)} \cdot (0; \rho) = \big(0; \tfrac{2}{1-\sin 2\varphi}\big). \end{aligned}$$

Priamy výpočet je najjednoduchší:

$$\begin{aligned} F'(\rho; \varphi) &= \big(\tfrac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}\big)' = \Big(0; \tfrac{(-\sin\varphi + \cos\varphi)\cdot(\cos\varphi - \sin\varphi) - (\cos\varphi + \sin\varphi)\cdot(-\sin\varphi - \cos\varphi)}{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}\Big) \\ &= \Big(0; \tfrac{(-2\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - (-2\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}{\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi}\Big) = \big(0; \tfrac{2}{1-\sin 2\varphi}\big). \ \blacksquare \end{aligned}$$

2.2.5 Diferencovateľnosť a parciálne derivácie vyšších rádov

Deriváciu, diferenciál i parciálne derivácie, ktoré sme zaviedli v predchádzajúcich častiach, tiež nazývame prvého rádu. Ak funkcie derivujeme ďalej, potom ich nazývame analogicky ako pri reálnej funkcii jednej premennej (ma1: 4.2.3 Derivácia a diferenciál vyšších rádov) derivácia, diferenciál, parciálne derivácie druhého, tretieho, resp. vyšších rádov.

[31] Funkcie $x = \alpha(u; v) = u^2 + v^2$, $y = \beta(u; v) = u^2 - v^2$ sú diferencovateľné v R^2.

Kvôli prehľadnosti budeme uvažovať reálne funkcie $f\colon R^n \to R$, $n \in N$. Pri vektorových funkciách $f = (f_1; f_2; \ldots; f_m)\colon R^n \to R^m$, $n, m \in N$ aplikujeme nasledujúce definície a tvrdenia na každú zložku $f_1, \ldots, f_m$ samostatne.

Uvažujme funkciu $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\colon A \to R$, kde $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť. Nech $A_1 \subset A$ je oblasť taká, že pre všetky $\boldsymbol{a} \in A_1$ existujú parciálne derivácie $\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon A_1 \to R$$

je funkcia a (pokiaľ existuje) môžeme vypočítať v bode $\boldsymbol{a} \in A_1$ jej parciálnu deriváciu podľa j-tej premennej, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ktorú onačujeme

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{resp. } \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i^2} \text{ pre } i = j$$

a nazývame **druhá parciálna derivácia** (**druhého rádu**) funkcie f **podľa i-tej a j-tej premennej**, resp. **podľa x_i a x_j**. Ak $i \neq j$, potom ju nazývame **zmiešaná**.

Zmiešané parciálne derivácie podľa x_i a x_j sa nazývajú **zameniteľné**, ak platí rovnosť

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Takýmto spôsobom môžeme pokračovať a definovať pre funkciu f parciálne derivácie ostatných (vyšších) rádov. Ak $k \in N$, $k \neq 1$ a existujú parciálne derivácie rádu $k-1$ podľa premenných $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}$, kde $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} \in \{1, 2, \ldots, n\}$, potom (pokiaľ existuje)

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^{k-1} f(\boldsymbol{a})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k-1}}}\right) = \frac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_k} \quad \text{pre } x_{i_k},\ i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

sa nazýva **k-ta parciálna derivácia** (**rádu k**) funkcie f **podľa $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}$**.

Ak sú aspoň dve z premenných podľa ktorých derivujeme rôzne, parciálna derivácia sa nazýva **zmiešaná**. Ak pri danej k-tej parciálnej derivácii zmeníme poradie premenných, podľa ktorých derivujeme a pri ľubovoľnej zmene tohto poradia dostaneme rovnakú hodnotu, potom tieto parciálne derivácie nazývame **zameniteľné**.

Poznámka 2.2.15.
Musíme si uvedomiť, že maximálny počet parciálnych derivácií funkcie $f\colon R^n \to R$ rastie geometricky s rádom derivácie. Prvých parciálnych derivácií môže existovať n, druhých n^2 a parciálnych derivácií rádu $k \in N$ môže existovať n^k, pokiaľ existujú všetky.

Parciálne derivácie vyšších rádov funkcií $f(x; y)\colon R^2 \to R$, resp. $f(x; y; z)\colon R^3 \to R$ v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$ môžeme tiež označovať[32]

$$f_{xx}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^2},\ f_{xy}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x \partial y},\ f_{yx}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x},\ f_{yz}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial z},$$

$$f_{yxz}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x \partial z},\ f_{yxx}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial y \partial x^2},\ f_{xxx}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^3},\ \ldots.$$

Príklad 2.2.21.
a) Funkcia $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1; x_2) = (f_1(x_1; x_2); f_2(x_1; x_2)) = (x_1^2 + x_2^2; x_1^2 - x_2^2)\colon R^2 \to R^2$.
Pre všetky $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2) \in R^2$ existujú všetky parciálne derivácie všetkých rádov a platí

$$\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = 2x_1,\quad \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} = 2x_2,\quad \frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} = 2,\quad \frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0,\quad \frac{\partial^2 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} = 2,$$

$$\frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = 2x_1,\quad \frac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} = -2x_2,\quad \frac{\partial^2 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} = 2,\quad \frac{\partial^2 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = 0,\quad \frac{\partial^2 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} = -2.$$

[32] Analogicky tiež označenia v zmysle poznámky 2.2.14: $f''_{xx}(\boldsymbol{a})$, $f''_{xy}(\boldsymbol{a})$, …, $f''''_{yxyz}(\boldsymbol{a}) = f^{(4)}_{yxyz}(\boldsymbol{a})$, ….

Keďže všetky parciálne derivácie druhého rádu sú konštanty, všetky ostatné parciálne derivácie tretieho a vyšších rádov sú nulové.

$$\frac{\partial^3 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^3} = \frac{\partial^3 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \cdots = \frac{\partial^4 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^4} = \frac{\partial^4 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^3 \partial x_2} = \cdots = \frac{\partial^5 f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^5} = \cdots = 0,$$
$$\frac{\partial^3 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^3} = \frac{\partial^3 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \cdots = \frac{\partial^4 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^4} = \frac{\partial^4 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^3 \partial x_2} = \cdots = \frac{\partial^5 f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^5} = \cdots = 0.$$

b) Funkcia $f(\boldsymbol{x}) = f(x;y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$: $R^2 - \{(x;0), x\in R\} \to R$.

Pre každé $\boldsymbol{x} = (x;y)\in R^2$, $y \neq 0$ existujú všetky parciálne derivácie všetkých rádov a platí

$$f_x(\boldsymbol{x}) = \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{\frac{y}{y^2}}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad f_y(\boldsymbol{x}) = \frac{x\cdot\frac{-1}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2},$$
$$f_{xx}(\boldsymbol{x}) = \frac{0-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_{xy}(\boldsymbol{x}) = \frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_{yx}(\boldsymbol{x}) = \frac{-(x^2+y^2)-(-x)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_{yy}(\boldsymbol{x}) = \frac{0-(-x)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

c) Funkcia $f(\boldsymbol{x}) = f(x;y) = x^3 + x^2y^2 + y$: $R^2 \to R$.

Pre každé $\boldsymbol{x} = (x;y)\in R^2$ existujú všetky parciálne derivácie všetkých rádov a platí

f' [2 ks]: $\quad f_x(\boldsymbol{x}) = 3x^2 + 2xy^2, \quad f_y(\boldsymbol{x}) = 2x^2y + 1.$

f'' [4 ks]: $\quad f_{xx}(\boldsymbol{x}) = 6x + 2y^2, \quad f_{xy}(\boldsymbol{x}) = f_{yx}(\boldsymbol{x}) = 4xy, \quad f_{yy}(\boldsymbol{x}) = 2x^2.$

f''' [8 ks]: $\quad f_{xxx}(\boldsymbol{x}) = 6x, \quad f_{xxy}(\boldsymbol{x}) = f_{xyx}(\boldsymbol{x}) = f_{yxx}(\boldsymbol{x}) = 4y,$

$\quad f_{xyy}(\boldsymbol{x}) = f_{yxy}(\boldsymbol{x}) = f_{yyx}(\boldsymbol{x}) = 4x, \quad f_{yyy}(\boldsymbol{x}) = 0.$ ■

V predchádzajúcom príklade sa zmiešané parciálne derivácie podľa rovnakých premenných rovnali, ale ako ukazujú nasledujúce príklady, nemusí to byť vždy pravda.

Príklad 2.2.22.
Funkcia f: $R^2 \to R$ je definovaná (obr. 2.2.30) vzťahom $f(x;y) = \begin{cases} xy & \text{pre } |x| \geq |y|, \\ 0 & \text{pre } |x| < |y|. \end{cases}$

Pre parciálne derivácie prvého rádu funkcie f v bode $(0;0)$ platí

$$f_x(0;0) = \frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t;0)-f(0;0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot 0-0\cdot 0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$f_y(0;0) = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0;t)-f(0;0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0\cdot t-0\cdot 0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Aby sme mohli vypočítať parciálne derivácie druhého rádu f v bode $(0;0)$ potrebujeme určiť $f_x(x;0)$, $f_y(x;0)$ pre $x \neq 0$ a $f_x(0;y)$, $f_y(0;y)$ pre $y \neq 0$. Je zrejmé, že pri ich výpočte môžeme voliť body $(t;y)$ tak, aby platilo $|t| < |y|$ (obr. 2.2.30 v strede) a body $(x;t)$ tak, aby platilo $|t| \geq |y|$ (obr. 2.2.30 vpravo). Pre $x \neq 0$, resp. $y \neq 0$ platí

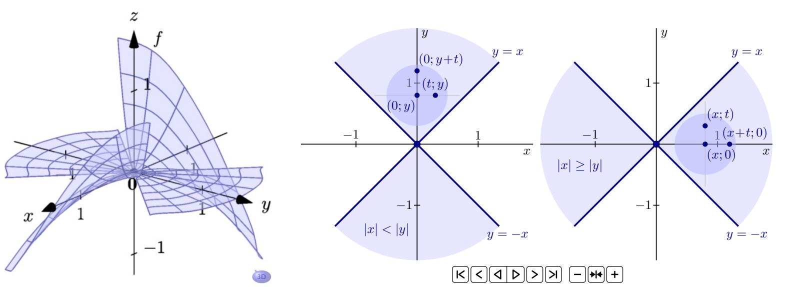
$$f_x(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t;0)-f(x;0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)\cdot 0-x\cdot 0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$f_x(0;y) = \frac{\partial f(0;y)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t;y)-f(0;y)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$

$$f_y(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x;t)-f(x;0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{x\cdot t - x\cdot 0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{xt}{t} = x,$$
$$f_y(0;y) = \frac{\partial f(0;y)}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0;y+t)-f(0;y)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Pre parciálne derivácie druhého rádu funkcie f v bode $(0;0)$ potom platí

$$f_{xx}(0;0) = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(0;0)}{\partial x}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f(t;0)}{\partial x} - \frac{\partial f(0;0)}{\partial x}}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$f_{xy}(0;0) = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(0;0)}{\partial x}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f(0;t)}{\partial x} - \frac{\partial f(0;0)}{\partial x}}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$f_{yx}(0;0) = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(0;0)}{\partial y}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f(t;0)}{\partial y} - \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t-0} = 1,$$
$$f_{yy}(0;0) = \frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(0;0)}{\partial y}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f(0;t)}{\partial y} - \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

To znamená, že sa druhé zmiešané parciálne derivácie v bode $(0;0)$ nerovnajú. ■



Obr. 2.2.30: Funkcia $f\colon R^2 \to R$ z príkladu 2.2.22

Príklad 2.2.23.
Uvažujme funkciu $f\colon R^2 \to R$ definovanú $f(x;y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{pre } (x;y) \neq (0;0), \\ 0 & \text{pre } (x;y) = (0;0). \end{cases}$

Prvé parciálne derivácie funkcie f sme vypočítali v príklade 2.2.15. Pre $x \neq 0$, $y \neq 0$ platí

$$f_x(0;0) = 0,\ f_y(0;0) = 0, \quad f_x(x;y) = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2},\ f_y(x;y) = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_x(x;0) = \frac{0}{x^4} = 0,\ f_y(x;0) = \frac{x^5}{x^4} = x,\ f_x(0;y) = \frac{-y^5}{y^4} = -y,\ f_y(0;y) = \frac{0}{y^4} = 0.$$

Pre parciálne derivácie druhého rádu v bode $\mathbf{0} = (0;0)$ platí

$$f_{xx}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_x(t;0)-f_x(\mathbf{0})}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = 0,\ f_{xy}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_x(0;t)-f_x(\mathbf{0})}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{-t-0}{t-0} = -1,$$
$$f_{yx}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_y(t;0)-f_y(\mathbf{0})}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t-0} = 1,\ f_{yy}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f_y(0;t)-f_y(\mathbf{0})}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t-0} = 0.$$

Pre parciálne derivácie druhého rádu v bode $\boldsymbol{x} = (x;y) \neq (0;0)$ platí

$$f_{xx}(\boldsymbol{x}) = (f_x)_x(\boldsymbol{x}) = \frac{(4x^3y+8xy^3)\cdot(x^2+y^2)^2-(x^4y+4x^2y^3-y^5)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{(4x^3y+8xy^3)\cdot(x^2+y^2)-4x(x^4y+4x^2y^3-y^5)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{12xy^5-4x^3y^3}{(x^2+y^2)^3},$$

$$f_{xy}(\boldsymbol{x}) = (f_x)_y(\boldsymbol{x}) = \frac{(x^4+12x^2y^2-5y^4)\cdot(x^2+y^2)^2-(x^4y+4x^2y^3-y^5)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{(x^4+12x^2y^2-5y^4)\cdot(x^2+y^2)-4y(x^4y+4x^2y^3-y^5)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3},$$
$$f_{yx}(\boldsymbol{x}) = (f_y)_x(\boldsymbol{x}) = \frac{(5x^4-12x^2y^2-y^4)\cdot(x^2+y^2)^2-(x^5-4x^3y^2-xy^4)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{(5x^4-12x^2y^2-y^4)\cdot(x^2+y^2)-4x(x^5-4x^3y^2-xy^4)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3},$$
$$f_{yy}(\boldsymbol{x}) = (f_y)_y(\boldsymbol{x}) = \frac{(-8x^3y-4xy^3)\cdot(x^2+y^2)^2-(x^5-4x^3y^2-xy^4)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$
$$= \frac{(-8x^3y-4xy^3)\cdot(x^2+y^2)-4y(x^5-4x^3y^2-xy^4)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{4x^3y^3-12x^5y}{(x^2+y^2)^3}. \blacksquare$$

Veta 2.2.13.
Funkcia $f\colon A \to R$, kde $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť, indexy $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$.
Parciálne derivácie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sú diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$.

$\Longrightarrow$ Druhé parciálne derivácie podľa x_i a x_j sú zameniteľné, t. j. $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i}$.

Dôkaz.
Funkcie $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sú diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}$, t. j. sú definované v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a}) \subset A$ a existujú (veta 2.2.3) druhé parciálne derivácie $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i}$.
V nasledujúcich úvahách sa budú vo funkcii f a ďalších uvažovaných funkciách meniť iba hodnoty i-tych a j-tych zložiek, pričom hodnoty ostatných zložiek budú zodpovedať bodu $\boldsymbol{a} \in A$ a nebudú sa meniť. Kvôli prehľadnosti označme funkciu[33]

$$g(x_i; x_j) = f(a_1; \ldots; x_i; \ldots; x_j; \ldots; a_n)$$
$$= f(a_1; \ldots; a_{i-1}; x_i; a_{i+1}; \ldots; a_{j-1}; x_j; a_{j+1}; \ldots; a_n)\colon O(a_i; a_j) \to R.$$

Je zrejmé, že existujú aj parciálne derivácie $\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_j \partial x_i}$ a platí:

$$\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial g(a_i;a_j+t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_i}}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f(a_1;\ldots;a_{j-1};a_j+t;a_{j+1};\ldots;a_n)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}}{t} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j},$$
$$\frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g(\boldsymbol{a})}{\partial x_j}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial g(a_i+t;a_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_i}}{t}$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f(a_1;\ldots;a_{i-1};a_i+t;a_{i+1};\ldots;a_n)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j}}{t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Pre pevné $t \in R$ a premenné $x \in O(a_i)$, resp. $x \in O(a_j)$ označme

$$\varphi_i(x) = g(x; a_j + t) - g(x; a_j),\ x \in O(a_i), \quad \varphi_j(x) = g(a_i + t; x) - g(a_i; x),\ x \in O(a_j).$$

Pre $t \in R$, $t \neq 0$ také, aby $(a_i + t; a_j + t) \in O(a_i; a_j)$, uvažujme funkciu

$$G(t) = g(a_i + t; a_j + t) - g(a_i + t; a_j) - g(a_i; a_j + t) + g(a_i; a_j)$$
$$= \varphi_i(a_i + t) - \varphi_i(a_i) = \varphi_j(a_j + t) - \varphi_j(a_j).$$

[33]Keďže sa menia iba premenné x_i a x_j, postačí nám okolie $O(a_i; a_j)$, t. j. $(x_i; x_j) \in O(a_i; a_j)$.

Pre derivácie funkcií φ_i, φ_j platí

$$\varphi_i'(x) = \frac{\partial g(x;a_j+t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(x;a_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(a_1;\ldots;x;\ldots;a_j+t;\ldots;a_n)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(a_1;\ldots;x;\ldots;a_j;\ldots;a_n)}{\partial x_i},\ x\in O(a_i),$$
$$\varphi_j'(x) = \frac{\partial g(a_i+t;x)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(a_i;x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(a_1;\ldots;a_i+t;\ldots;x;\ldots;a_n)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(a_1;\ldots;a_i;\ldots;x;\ldots;a_n)}{\partial x_j},\ x\in O(a_j).$$

Funkcia φ_i spĺňa na intervale I_i s hranicami a_i, a_i+t predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (dôsledok 2.2.4.b). Potom existuje[34] $a_i+\theta_i t\in I_i$, $\theta_i\in(0;1)$ tak, že

$$G(t) = \varphi_i(a_i+t) - \varphi_i(a_i) = \varphi_i'(a_i+\theta_i t)\cdot(a_i+t-a_i) = t\cdot\varphi_i'(a_i+\theta_i t).$$

Pre limitu funkcie $G(t)/t^2$ v bode 0 platí

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_i(a_i+t)-\varphi_i(a_i)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\varphi_i'(a_i+\theta_i t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_i'(a_i+\theta_i t)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_i'(a_i)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial g(a_i;a_j+t)}{\partial x_i}-\frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_i}}{t} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Analogicky funkcia φ_j spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote na intervale I_j s hranicami a_j, a_j+t a existuje $a_j+\theta_j t\in I_j$, $\theta_j\in(0;1)$ tak, že

$$G(t) = \varphi_j(a_j+t) - \varphi_j(a_j) = \varphi_j'(a_j+\theta_j t)\cdot(a_j+t-a_j) = t\cdot\varphi_j'(a_j+\theta_j t).$$

Pre limitu funkcie $G(t)/t^2$ v bode 0 analogicky platí

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_j(a_j+t)-\varphi_j(a_j)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\varphi_j'(a_j+\theta_j t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_j'(a_j+\theta_j t)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_j'(a_j)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial g(a_i+t;a_j)}{\partial x_j}-\frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_j}}{t} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}.$$

To znamená, že $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j} = \lim_{t\to 0}\frac{G(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}$ a veta je dokázaná. ■

Dôsledok 2.2.13.a.
Funkcia $f\colon A\to R$, kde $A\subset R^n$, $n\in N$ je oblasť, všetky parciálne derivácie prvého rádu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,n$ sú diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in A$.

$\Longrightarrow$ Pre ľubovoľné $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ platí $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}$ (sú zameniteľné).

K tomu, aby boli druhé parciálne derivácie zameniteľné postačí ich spojitosť v danom bode. Spojitosť funkcie sa väčšinou overuje jednoduchšie, ako diferencovateľnosť. Lenže pri praktických problémoch nás zaujímajú hlavne problematické body a body nespojitosti indikujú problémy.

Veta 2.2.14 (Schwarzova).
Funkcia[35] $f\colon A\to R$, kde $A\subset R^n$, $n\in N$ je oblasť, indexy $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, $i\neq j$. Druhé parciálne derivácie $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}$ sú spojité v bode $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\ldots;a_n)\in A$.

$\Longrightarrow$ Druhé parciálne derivácie podľa x_i a x_j sú zameniteľné, t. j. $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}$.

---

[34] Úsečka spájajúca body a_i a a_i+t má rovnicu $y=a_i+x(a_i+t-a_i)=a_i+xt$, $x\in\langle 0;1\rangle$. To znamená, že bod $a_i+\theta_i t$, $\theta_i\in(0;1)$ leží na úsečke medzi bodmi a_i a a_i+t.

[35] *Karl Hermann Amandus Schwarz* [1843 – 1921] — nemecký matematik, známy predovšetkým vďaka svojim prácam z oblasti komplexnej analýzy.

Dôkaz.
Dôkaz je podobný dôkazu predchádzajúcej vety 2.2.13 (začiatok dôkazu je identický). Použijeme rovnaké pomocné funkcie g, G, φ_i, φ_j ako pri uvedenom dôkaze:

$$g(x_i; x_j) = f(a_1; \ldots; x_i; \ldots; x_j; \ldots; a_n) \\ = f(a_1; \ldots; a_{i-1}; x_i; a_{i+1}; \ldots; a_{j-1}; x_j; a_{j+1}; \ldots; a_n) \colon O(a_i; a_j) \to R.$$

Z definície funkcie g vyplýva, že $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$ existujú, sú spojité v bode $\boldsymbol{a}$ a platí

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial g(a_i;a_j+t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_i}}{t}, \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_j \partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial g(a_i+t;a_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i;a_j)}{\partial x_i}}{t}.$$

Ďalej z toho vyplýva, že existujú v nejakom okolí $O(a_i; a_j)$ a platí

$$\lim_{(u_i;v_i)\to(0;0)} \frac{\partial^2 g(a_i+u_i;a_j+u_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad \lim_{(u_i;v_i)\to(0;0)} \frac{\partial^2 g(a_i+u_i;a_j+u_j)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 g(a_i;a_j)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Pre pevné $t \in R$ a premenné $x \in O(a_i)$, resp. $x \in O(a_j)$ označme

$$\varphi_i(x) = g(x; a_j + t) - g(x; a_j), \ x \in O(a_i), \qquad \varphi_j(x) = g(a_i + t; x) - g(a_i; x), \ x \in O(a_j).$$

Pre $t \in R$, $t \neq 0$ také, aby $(a_i + t; a_j + t) \in O(a_i; a_j)$, uvažujme funkciu

$$G(t) = g(a_i + t; a_j + t) - g(a_i + t; a_j) - g(a_i; a_j + t) + g(a_i; a_j) \\ = \varphi_i(a_i + t) - \varphi_i(a_i) = \varphi_j(a_j + t) - \varphi_j(a_j).$$

Pre derivácie funkcií φ_i, φ_j platí

$$\varphi_i'(x) = \frac{\partial g(x;a_j+t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(x;a_j)}{\partial x_i}, \ x \in O(a_i), \qquad \varphi_j'(x) = \frac{\partial g(a_i+t;x)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(a_i;x)}{\partial x_j}, \ x \in O(a_j).$$

Funkcia φ_i spĺňa na intervale I_i s hranicami a_i, $a_i + t$ predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (dôsledok 2.2.4.b). Potom existuje[36] $a_i + \theta_i t \in I_i$, $\theta_i \in (0; 1)$ tak, že

$$G(t) = \varphi_i(a_i + t) - \varphi_i(a_i) = \varphi_i'(a_i + \theta_i t) \cdot (a_i + t - a_i) \\ = t \cdot \varphi_i'(a_i + \theta_i t) = t \cdot \left[\frac{\partial g(a_i+\theta_i t;a_j+t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i+\theta_i t;a_j)}{\partial x_i} \right].$$

Označme funkciu $\psi_j(x) = \frac{\partial g(a_i+\theta_i t;x)}{\partial x_i}$, $x \in O(a_j)$. Potom $\psi_j'(x) = \frac{\partial^2 g(a_i+\theta_i t;x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $x \in O(a_j)$. Na intervale s hranicami a_j, $a_j + t$ spĺňa funkcia ψ_j predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote a existuje $\vartheta_j \in (0; 1)$ tak, že platí

$$\psi_j(a_j + t) - \psi_j(a_j) = \psi_j'(a_j + \vartheta_j t) \cdot (a_j + t - a_j) = t \cdot \psi_j'(a_j + \vartheta_j t). \\ \Longrightarrow \ t \cdot \frac{\partial^2 g(a_i+\theta_i t;a_j+\vartheta_j t)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial g(a_i+\theta_i t;a_j+t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i+\theta_i t;a_j)}{\partial x_i} = \frac{G(t)}{t}.$$

Pre limitu funkcie $G(t)/t^2$ v bode 0 potom platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{G(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial^2 g(a_i+\theta_i t;a_j+\vartheta_j t)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{bmatrix} u_1 = \theta_i t \to 0 \\ u_2 = \vartheta_j t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{\substack{u_i \to 0 \\ v_i \to 0}} \frac{\partial^2 g(a_i+u_i;a_j+u_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{2.17}$$

[36] Úsečka spájajúca body a_i a $a_i + t$ má rovnicu $y = a_i + x(a_i + t - a_i) = a_i + xt$, $x \in \langle 0; 1 \rangle$. To znamená, že bod $a_i + \theta_i t$, $\theta_i \in (0; 1)$ leží na úsečke medzi bodmi a_i a $a_i + t$.

Analogicky funkcia φ_j spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote na intervale I_j s hranicami a_j, a_j+t. Potom existuje $a_j+\theta_j t \in I_j$, $\theta_j \in (0;1)$ tak, že

$$G(t) = \varphi_j(a_j+t) - \varphi_j(a_j) = \varphi_j'(a_j+\theta_j t)\cdot(a_j+t-a_j) \\ = t\cdot\varphi_j'(a_j+\theta_j t) = t\cdot\left[\frac{\partial g(a_i+t;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(a_i;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j}\right].$$

Ak označíme $\psi_i(x) = \frac{\partial g(x;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j}$, $x\in O(a_i)$, potom $\psi_i'(x) = \frac{\partial^2 g(x;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j \partial x_i}$, $x\in O(a_i)$.
Funkcia ψ_i spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote na intervale s hranicami a_i, a_i+t. Potom existuje $\vartheta_i\in(0;1)$ tak, že platí

$$\psi_i(a_i+t) - \psi_i(a_i) = \psi_i'(a_i+\vartheta_i t)\cdot(a_i+t-a_i) = t\cdot\psi_i'(a_i+\vartheta_i t).$$

$$\Longrightarrow\ t\cdot\frac{\partial^2 g(a_i+\vartheta_i t;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j\partial x_i} = \frac{\partial g(a_i+t;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(a_i;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j} = \frac{G(t)}{t}.$$

Pre limitu funkcie $G(t)/t^2$ v bode 0 potom analogicky platí

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\partial^2 g(a_i+\vartheta_i t;a_j+\theta_j t)}{\partial x_j\partial x_i} = \begin{bmatrix} u_1=\vartheta_i t\to 0 \\ u_2=\theta_j t\to 0\end{bmatrix} = \lim_{\substack{u_i\to 0\\ v_i\to 0}}\frac{\partial^2 g(a_i+u_i;a_j+u_j)}{\partial x_j\partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}. \quad (2.18)$$

Zo vzťahov (2.17) a (2.18) vyplýva tvrdenie vety

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j} = \lim_{t\to 0}\frac{G(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i}. \ \blacksquare$$

Poznámka 2.2.16.
Podmienka $i\neq j$ vo vetách 2.2.13 a 2.2.14 je prakticky zbytočná. Pre $i=j$ platia tvrdenia oboch viet triviálne, pretože $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j\partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i^2}$.

Obe tieto vety môžeme pomocou matematickej indukcie rozšíriť na zmiešané parciálne derivácie ľubovoľného rádu $k\in N$, $k>2$.

Dôsledok 2.2.14.a.
Funkcia $f\colon A\to R$, kde $A\subset R^n$, $n\in N$ je oblasť, parciálne derivácie stupňa $k\in N$, $k>2$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}},\qquad \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\dots\partial x_{j_k}}$$

sú spojité v bode $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\dots;a_n)\in A$, pričom $i_1,i_2,\dots,i_k\in\{1,2,\dots,n\}$ sú ľubovoľné indexy a $j_1,j_2,\dots,j_k$ je ich ľubovoľná permutácia.[37]

$\Longrightarrow$ Uvedené parciálne derivácie sú zameniteľné, t. j. $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\dots\partial x_{j_k}}$.

Dôsledok 2.2.14.b.
Funkcia $f\colon A\to R$, kde $A\subset R^n$, $n\in N$ je oblasť, všetky parciálne derivácie funkcie f stupňa $k\in N$, $k>2$ sú spojité v bode $\boldsymbol{a}=(a_1;a_2;\dots;a_n)\in A$.

$\Longrightarrow$ Všetky parciálne derivácie f v bode $\boldsymbol{a}$ podľa rovnakých premenných až do rádu k (vrátane) sú zameniteľné, pričom parciálne derivácie do rádu $k-1$ (vrátane) sú zameniteľné v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})$.

[37] Skupiny indexov $i_1,i_2,\dots,i_k$ a $j_1,j_2,\dots,j_k$ obsahujú rovnaké prirodzené čísla $1,2,\dots,n$, ktoré sa môžu opakovať, ale môžu byť zoradené v inom poradí. Sú preusporiadané.

Poznámka 2.2.17.
Zameniteľnosť parciálnych derivácií prakticky znamená, že nezáleží na poradí premenných, podľa ktorých derivujeme. Parciálnych derivácii funkcie f $R^n \to R$ stupňa $k \in N$ v danom bode je n^k. Ak sú zameniteľné, potom sa ich počet[38] redukuje na číslo $\binom{n+k-1}{k}$.

Nech $f\colon A \to R$, $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť, $k \in N$. Hovoríme, že **funkcia f je k-krát diferencovateľná (diferencovateľná k-teho rádu) v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$**, ak sú všetky jej parciálne derivácie rádu $k-1$ diferencovateľné v bode $\boldsymbol{a}$.

Ak je funkcia f diferencovateľná k-teho rádu v každom bode $\boldsymbol{a} \in B$, kde $B \subset A$, potom sa nazýva **diferencovateľná k-teho rádu na množine B**.

Poznámka 2.2.18.
Ak je $f\colon A \to R$ diferencovateľná k-teho rádu v bode $\boldsymbol{a} \in A$, potom sú všetky parciálne derivácie nižších rádov diferencovateľné v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a}) \subset A$ a podľa vety 2.2.13 sú zameniteľné všetky zmiešané parciálne derivácie do rádu k, ktoré sa líšia iba poradím derivovania.

S pojmom diferencovateľnosť (prvého rádu) sme definovali aj diferenciál a deriváciu funkcie. Prvá derivácia f' funkcie $f\colon R^n \to R^m$ je matica typu $m \times n$ zložená z prvých parciálnych derivácií.

Logickým rozšírením je vyjadrenie f'' (pokiaľ existuje) pomocou parciálnych derivácií druhého rádu. Druhých parciálnych derivácií je mn^2, pričom každá zo zložiek $f_1, f_2, \ldots, f_m$ má n^2 druhých parciálnych derivácií. Takto by sme mohli pokračovať po ľubovoľnú deriváciu rádu $k \in N$, kde počet parciálnych derivácií rádu k je mn^k.

Preto sa obmedzíme (ako sme deklarovali v úvode tejto časti) na funkcie $f\colon R^n \to R$ a úvahy a tvrdenia v prípade vektorovej funkcie aplikujeme na každú zložku samostatne.

Nech $f\colon A \to R$, $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť. Ak je f v bode $\boldsymbol{a} \in A$ diferencovateľná, potom jej (prvá) **derivácia (gradient)** v bode $\boldsymbol{a}$ má tvar n-rozmerného vektora

$$f'(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n} \right).$$

Ak je f v bode $\boldsymbol{a} \in A$ diferencovateľná druhého rádu, potom **druhú deriváciu funkcie f** v bode $\boldsymbol{a}$ definujeme ako štvorcovú maticu typu $n \times n$

$$f''(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n^n} \end{pmatrix}$$

Matica $f''(\boldsymbol{a})$ je symetrická podľa hlavnej diagonály, pretože zmiešané parciálne derivácie sú zameniteľné (poznámka 2.2.18), t. j. $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j \partial x_i}$ pre $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$,

Poznámka 2.2.19.
Ak existujú všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie f v bode $\boldsymbol{a} \in A$, ale niektoré z prislúchajúcich dvojíc nie sú zameniteľné, potom ich tiež môžeme zapísať v tvare matice.

[38] Kombinácie s opakovaním k-tej triedy z n prvkov.

Táto matica nebude symetrická podľa hlavnej diagonály a nebude reprezentovať deriváciu $f''(\boldsymbol{a})$, pretože funkcia f nebude diferencovateľná druhého rádu.[39]

Príklad 2.2.24.
Uvažujme zloženú funkciu $F(u;v) = f(\alpha(u;v);\beta(u;v))\colon R^2 \to R$ z príkladu 2.2.20.

Predpokladajme, že funkcia $f(x;y)\colon R^2 \to R$ je diferencovateľná druhého rádu v R^2 a vnútorné zložky $x=\alpha(u;v)$, $y=\beta(u;v)\colon R^2 \to R$ sú tiež diferencovateľné druhého rádu v R^2. Ak použijeme rovnaké označenie $(x;y) = g(u;v) = (\alpha(u;v);\beta(u;v))\colon R^2 \to R^2$, potom $F(u;v) = f(g(u;v))$ a pre prvú deriváciu F' (viď príklad 2.2.20) platí[40]

$$F' = (F_u;F_v) = \big[f(g)\big]' = f'g' = (f_x;f_y)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix} = \big(f_x\alpha_u + f_y\beta_u; f_x\alpha_v + f_y\beta_v\big).$$

Druhá derivácia $F'' = (F_u;F_v)'$ obsahuje derivácie funkcií F_u, F_v, ktoré sú opäť zložené funkcie, pričom $f_x(x;y)$, $f_y(x;y)\colon R^2 \to R$ majú vnútorné zložky $x=\alpha(u;v)$, $y=\beta(u;v)$. Funkcie $\alpha_u, \alpha_v, \beta_u, \beta_v$ sú funkcie dvoch premenných $(u;v)\in R^2$. Potom platí

$$(\alpha_u)' = (\alpha_{uu};\alpha_{uv}),\quad (\alpha_v)' = (\alpha_{vu};\alpha_{vv}),\quad (\beta_u)' = (\beta_{uu};\beta_{uv}),\quad (\beta_v)' = (\beta_{vu};\beta_{vv}).$$

Funkcie $F_u = f_x\alpha_u + f_y\beta_u$, $F_v = f_x\alpha_v + f_y\beta_v$ derivujeme ako súčet a súčin funkcií. Platí

$$\begin{aligned}
(F_u)' &= (F_{uu};F_{uv}) = (f_x\alpha_u + f_y\beta_u)' = (f_x)'\alpha_u + f_x(\alpha_u)' + (f_y)'\beta_u + f_y(\beta_u)'\\
&= (f_{xx};f_{xy})\cdot\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix} + f_x(\alpha_{uu};\alpha_{uv}) + (f_{yx};f_{yy})\cdot\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix} + f_y(\beta_{uu};\beta_{uv}),\\
(F_v)' &= (F_{vu};F_{vv}) = (f_x\alpha_v + f_y\beta_v)' = (f_x)'\alpha_v + f_x(\alpha_v)' + (f_y)'\beta_v + f_y(\beta_v)'\\
&= (f_{xx};f_{xy})\cdot\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix} + f_x(\alpha_{vu};\alpha_{vv}) + (f_{yx};f_{yy})\cdot\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix} + f_y(\beta_{vu};\beta_{vv}).
\end{aligned}$$

Z diferencovateľnosti druhého rádu (veta 2.2.13) vyplýva zameniteľnosť zmiešaných parciálnych derivácií $f_{xy} = f_{yx}$, $\alpha_{uv} = \alpha_{vu}$, $\beta_{uv} = \beta_{vu}$. Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$F'' = \begin{pmatrix}(F_u)'\\ (F_v)'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{uu} & F_{uv}\\ F_{vu} & F_{vv}\end{pmatrix},\quad \text{pričom}$$

$$\begin{aligned}
F_{uu} &= f_{xx}(\alpha_u)^2 + 2f_{xy}\alpha_u\beta_u + f_{yy}(\beta_u)^2 + f_x\alpha_{uu} + f_y\beta_{uu},\\
F_{uv} &= f_{xx}\alpha_u\alpha_v + f_{xy}(\alpha_u\beta_v + \alpha_v\beta_u) + f_{yy}\beta_u\beta_v + f_x\alpha_{uv} + f_y\beta_{uv} = F_{vu},\\
F_{vv} &= f_{xx}(\alpha_v)^2 + 2f_{xy}\alpha_v\beta_v + f_{yy}(\beta_v)^2 + f_x\alpha_{vv} + f_y\beta_{vv}.
\end{aligned}$$

- Špeciálne pre $F(u;v) = f(x;y) = f(u^2+v^2;u^2-v^2)\colon R^2 \to R$ platí

$$F' = (F_u;F_v) = (f_x;f_y)\cdot\begin{pmatrix}2u & 2v\\ 2u & -2v\end{pmatrix} = \big(2uf_x + 2uf_y; 2vf_x - 2vf_y\big).$$

Pre derivácie funkcií $x = \alpha(u;v) = u^2+v^2$, $y = \beta(u;v) = u^2-v^2$ platí

$$x\colon\ \alpha' = (\alpha_u;\alpha_v) = (u^2+v^2)' = (2u;2v),\qquad y\colon\ \beta' = (\beta_u;\beta_v) = (u^2-v^2)' = (2u;-2v).$$

[39] Keby bola, potom by mala zameniteľné všetky príslušné parciálne derivácie druhého rádu.
[40] Kvôli prehľadnosti uvádzame nasledujúce vzťahy bez premenných u, v.

Funkcie $\alpha_u = \beta_u = 2u$, $\alpha_u = -\beta_u = 2v$ sú opäť funkcie premenných $(u; v)$ a platí

$$\alpha_u = \beta_u\colon\ (2u)' = \left(\tfrac{\partial(2u)}{\partial u}; \tfrac{\partial(2u)}{\partial v}\right) = (2; 0), \quad \alpha_v = -\beta_v\colon\ (2v)' = \left(\tfrac{\partial(2v)}{\partial u}; \tfrac{\partial(2v)}{\partial v}\right) = (0; 2).$$

Z toho vyplýva

$$\begin{aligned}(F_u)' &= (F_{uu}; F_{uv}) = \big[2u(f_x + f_y)\big]' = (2u)' \cdot (f_x + f_y) + 2u \cdot (f_x)' + 2u \cdot (f_y)'\\ &= (2; 0) \cdot (f_x + f_y) + 2u \cdot (f_{xx}; f_{xy}) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} + 2u \cdot (f_{yx}; f_{yy}) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix},\\ (F_v)' &= (F_{vu}; F_{vv}) = \big[2v(f_x - f_y)\big]' = (2v)' \cdot (f_x - f_y) + 2v \cdot (f_x)' - 2v \cdot (f_y)'\\ &= (0; 2) \cdot (f_x - f_y) + 2v \cdot (f_{xx}; f_{xy}) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} - 2v \cdot (f_{yx}; f_{yy}) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Po roznásobení a jednoduchých úpravách ($f_{xy} = f_{yx}$ sú zameniteľné) dostaneme

$$F_{uu} = 4u^2(f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}) + 2(f_x + f_y), \quad F_{uv} = 4uv(f_{xx} - f_{yy}) = F_{vu},$$
$$F_{vv} = 4v^2(f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}) + 2(f_x + f_y).$$

• Špeciálne pre prevod $f(x; y)\colon R^2 \to R$ do polárnych súradníc (pr. 2.1.3, pr. 2.2.7), t. j. pre funkciu $F(\rho; \varphi) = f\big(\Psi(\rho; \varphi)\big) = f\big((\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\big)\colon \langle 0; \infty) \times R \to R$ platí

$$\begin{aligned}F'(\rho; \varphi) = (F_\rho; F_\varphi) = (f_x; f_y) \cdot \Psi' = (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}\\ = \big(f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi; -f_x\rho\sin\varphi + f_y\rho\cos\varphi\big).\end{aligned}$$

Funkcie F_ρ, F_φ sú opäť zložené funkcie. Potom platí

$$\begin{aligned}(F_\rho)' &= (F_{\rho\rho}; F_{\rho\varphi}) = \big[f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi\big]'\\ &= (f_{xx}; f_{xy})\Psi'\cos\varphi + f_x(0; -\sin\varphi) + (f_{yx}; f_{yy})\Psi'\sin\varphi + f_y(0; \cos\varphi),\\ (F_\varphi)' &= (F_{\varphi\rho}; F_{\varphi\varphi}) = \big[-f_x\rho\sin\varphi + f_y\rho\cos\varphi\big]'\\ &= -(f_{xx}; f_{xy})\Psi'\rho\sin\varphi - f_x(\sin\varphi; \rho\cos\varphi) + (f_{yx}; f_{yy})\Psi'\rho\cos\varphi + f_y(\cos\varphi; -\rho\sin\varphi).\end{aligned}$$

Po roznásobení a jednoduchých úpravách ($f_{xy} = f_{yx}$ sú zameniteľné) dostaneme

$$F_{\rho\rho} = f_{xx}\cos^2\varphi + f_{xy}\sin 2\varphi + f_{yy}\sin^2\varphi, \tag{2.19}$$
$$F_{\rho\varphi} = \tfrac{1}{2}(f_{yy} - f_{xx})\rho\sin 2\varphi + f_{xy}\rho\cos 2\varphi - f_x\sin\varphi + f_y\cos\varphi = F_{\varphi\rho},$$
$$F_{\varphi\varphi} = f_{xx}\rho^2\sin^2\varphi - f_{xy}\rho^2\sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2\cos^2\varphi - f_x\rho\cos\varphi - f_y\rho\sin\varphi.$$

• Uvažujme funkciu $f(x; y) = \frac{x+y}{x-y}\colon R^2 \to R$ a jej vyjadrenie v polárnych súradniciach, t. j. $F(\rho; \varphi) = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}\colon \langle 0; \infty) \times R \to R$, $\varphi \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$. Pre derivácie funkcie f platí

$$f_x = \tfrac{-2y}{(x-y)^2} = \tfrac{-2\sin\varphi}{\rho(\cos\varphi - \sin\varphi)^2}, \qquad f_{xx} = \tfrac{0-(-2y)2(x-y)}{(x-y)^4} = \tfrac{4y}{(x-y)^3} = \tfrac{4\sin\varphi}{\rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^3},$$
$$f_{xy} = \tfrac{-2(x-y)^2 - (-2y)2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} = \tfrac{-2(x-y) - 4y}{(x-y)^3} = \tfrac{-2(x+y)}{(x-y)^3} = \tfrac{-2(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^3},$$

$$f_y = \tfrac{2x}{(x-y)^2} = \tfrac{2\cos\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}, \qquad f_{yy} = \tfrac{0-2x2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} = \tfrac{4x}{(x-y)^3} = \tfrac{4\cos\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3},$$
$$f_{yx} = \tfrac{2(x-y)^2-2x2(x-y)}{(x-y)^4} = \tfrac{2(x-y)-4x}{(x-y)^3} = \tfrac{-2(x+y)}{(x-y)^3} = \tfrac{-2(\sin\varphi+\cos\varphi)}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}.$$

Potom pre prvú deriváciu funkcie F platí

$$F'(\rho;\varphi) = (F_\rho;F_\varphi) = (f_x;f_y)\cdot\Psi' = \left(\tfrac{-2\sin\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2};\tfrac{2\cos\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\right)\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}$$
$$= \tfrac{2}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\cdot(-\sin\varphi;\cos\varphi)\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}$$
$$= \tfrac{2}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\cdot(-\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\varphi;\rho\sin^2\varphi+\rho\cos^2\varphi)$$
$$= \tfrac{2}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\cdot(0;\rho) = \left(0;\tfrac{2}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\right).$$

Ak dosadíme do vzorcov (2.19), potom pre druhé parciálne derivácie funkcie F platí

$$F_{\rho\rho} = f_{xx}\cos^2\varphi + f_{xy}\sin 2\varphi + f_{yy}\sin^2\varphi$$
$$= \tfrac{4\sin\varphi\cos^2\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} + \tfrac{-2(\sin\varphi+\cos\varphi)\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} + \tfrac{4\cos\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} = 0,$$
$$F_{\rho\varphi} = F_{\varphi\rho} = \tfrac{1}{2}(f_{yy}-f_{xx})\rho\sin 2\varphi + f_{xy}\rho\cos 2\varphi - f_x\sin\varphi + f_y\cos\varphi$$
$$= \tfrac{4\cos\varphi\cdot 2\rho\sin\varphi\cos\varphi}{2\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} - \tfrac{4\sin\varphi\cdot 2\rho\sin\varphi\cos\varphi}{2\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} + \tfrac{-2(\sin\varphi+\cos\varphi)\rho(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}$$
$$- \tfrac{-2\sin\varphi\sin\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2} + \tfrac{2\cos\varphi\cos\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2} = 0,$$
$$F_{\varphi\varphi} = f_{xx}\rho^2\sin^2\varphi - f_{xy}\rho^2\sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2\cos^2\varphi - f_x\rho\cos\varphi - f_y\rho\sin\varphi$$
$$= \tfrac{4\sin\varphi\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} - \tfrac{-2(\sin\varphi+\cos\varphi)\cdot 2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} + \tfrac{4\cos\varphi\rho^2\cos^2\varphi}{\rho^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}$$
$$- \tfrac{-2\sin\varphi\rho\cos\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2} - \tfrac{2\cos\varphi\rho\sin\varphi}{\rho(\cos\varphi-\sin\varphi)^2} = \tfrac{4(\sin\varphi+\cos\varphi)}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}.$$

Priamy výpočet je najjednoduchší a najprehľadnejší (viď pr. 2.2.20):

$$F' = (F_\rho;F_\varphi) = \left(\tfrac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}\right)' = \left(0;\tfrac{2}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}\right).$$

Keďže $F_{\varphi\varphi} = \frac{\partial\, 2(\cos\varphi-\sin\varphi)^{-2}}{\partial\varphi} = \frac{-2\cdot 2(-\sin\varphi-\cos\varphi)}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^3} = \frac{4(\sin\varphi+\cos\varphi)}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}$, potom platí

$$F'' = \begin{pmatrix}(F_\rho)'\\ (F_\varphi)'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{\rho\rho} & F_{\rho\varphi}\\ F_{\varphi\rho} & F_{\varphi\varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{4(\sin\varphi+\cos\varphi)}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^3}\end{pmatrix}. \blacksquare$$

Príklad 2.2.25.
Nech $z=f(x;y)\colon A\to R$ je dvakrát diferencovateľná funkcia na oblasti $A\subset R^2$ taká, že pre nejaké $(x;y)\in A$ spĺňa Laplaceovu diferenciálnu rovnicu

$$f_{xx}(x;y)+f_{yy}(x;y)=0, \quad \text{t. j. } \tfrac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2}=0.$$

Pre prevod súradníc z karteziánskeho do polárneho tvaru platí $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Funkcia f má v polárnych súradniciach tvar $F(\rho;\varphi)=f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)$. Zo vzťahu (2.19) z príkladu 2.2.24 vyplýva

$$F_{\rho\rho} = f_{xx}\cos^2\varphi + f_{xy}\sin 2\varphi + f_{yy}\sin^2\varphi,$$
$$F_{\varphi\varphi} = f_{xx}\rho^2\sin^2\varphi - f_{xy}\rho^2\sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2\cos^2\varphi - f_x\rho\cos\varphi - f_y\rho\sin\varphi.$$

Keď prvú rovnosť vynásobíme ρ^2 a pripočítame k druhej, dostaneme

$$\begin{aligned}\rho^2 F_{\rho\rho} + F_{\varphi\varphi} &= f_{xx}\rho^2\cos^2\varphi + f_{xy}\rho^2\sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2\sin^2\varphi \\ &\qquad + f_{xx}\rho^2\sin^2\varphi - f_{xy}\rho^2\sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2\cos^2\varphi - f_x\rho\cos\varphi - f_y\rho\sin\varphi \\ &= f_{xx}\rho^2 + f_{yy}\rho^2 - \rho(f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi) = (f_{xx}+f_{yy})\rho^2 - \rho F_\rho = 0 - \rho F_\rho = -\rho F_\rho.\end{aligned}$$

Z toho vyplýva vyjadrenie Laplaceovej rovnice v polárnych súradniciach.

$$\rho^2 F_{\rho\rho}(\rho;\varphi) + F_{\varphi\varphi}(\rho;\varphi) + \rho F_\rho(\rho;\varphi) = 0. \blacksquare$$

Nech funkcia $f\colon A \to R$ je k-krát diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$, kde $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť, $k \in N$. To znamená, že všetky prislúchajúce zmiešané parciálne derivácie funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ až do rádu k sú zameniteľné.

Nech $\boldsymbol{h} = (h_1; h_2; \ldots; h_n) \in R^n$ je ľubovoľný vektor taký, že platí $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} \in A$. Označme $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$. **Diferenciálom k-teho rádu** (k**-tym diferenciálom**) **funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$** nazývame formu k-teho stupňa (homogénny polynóm k-teho stupňa) v tvare

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \Big[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}h_n\Big]^k f(\boldsymbol{a}),$$
$$\text{resp. } \mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = \Big[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - a_n)\Big]^k f(\boldsymbol{a}).$$

Predchádzajúce zápisy sú formálne a naznačujú použitie polynomickej vety. Formálne výrazy umocníme, ale namiesto súčinov $\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_j}$ vytvoríme parciálne derivácie $\frac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \cdots \partial x_j}$.

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_n = k \\ 0 \le i_1, \ldots, i_n \le k}} \tfrac{k!}{i_1! \cdots i_n!}\cdot \tfrac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \cdot h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n},$$
$$\text{resp. } \mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_n = k \\ 0 \le i_1, \ldots, i_n \le k}} \tfrac{k!}{i_1! \cdots i_n!}\cdot \tfrac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \cdot (x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_n - a_n)^{i_n}.$$

Špeciálne pre $k = 0$ definujeme **diferenciál 0-teho rádu** (**0-ty diferenciál**) funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ vzťahom $\mathrm{d}^0 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a})$, resp. $\mathrm{d}^0 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a})$.

Diferenciál (prvého rádu) $\mathrm{d}^1 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$ predstavuje lineárnu formu a na základe definície diferencovateľnosti a definície parciálnych derivácií prvého rádu funkcie f platí

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) &= f'(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}^T = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}^T \\ &= \Big(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\Big)\cdot(h_1; h_2; \ldots; h_n)^T = \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2}h_2 + \cdots + \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}h_n.\end{aligned}$$

Diferenciál druhého rádu $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$ predstavuje kvadratickú formu s maticou $f''(\boldsymbol{a})$ a má veľký význam hlavne pri hľadaní extrémov funkcie f. Môžeme ho vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) &= \boldsymbol{h}\cdot f''(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}^T \\ &= (h_1; h_2; \ldots; h_n)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n^n} \end{pmatrix}\cdot(h_1; h_2; \ldots; h_n)^T \\ &= \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^2}h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1 \partial x_2}h_1h_2 + 2\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1 \partial x_3}h_1h_3 + \cdots + 2\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_{n-1} \partial x_n}h_{n-1}h_n + \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n^2}h_n^2.\end{aligned}$$

Diferenciál tretieho rádu $\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})$ predstavuje formu tretieho stupňa a po použití polynomickej vety ho môžeme písať v tvare

$$\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^3} h_1^3 + 3\tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^2 \partial x_2} h_1^2 h_2 + 3\tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1 \partial x_2^2} h_1 h_2^2 + 3\tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^2 \partial x_3} h_1^2 h_3 + \cdots + \tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n^3} h_n^3.$$

Poznámka 2.2.20.
Polynomická (multinomická) veta *je rozšírením známej binomickej vety*

$$(x_1+x_2)^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} x_1^{k-i} x_2^i = \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ 0\le i_1, i_2 \le k}} \tfrac{k!}{i_1!\cdot i_2!} \cdot x_1^{i_1} x_2^{i_2}$$

z k-tej mocniny dvoch sčítancov na k-tu mocninu n sčítancov, kde $k, n \in N$. Platí

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k = \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=k \\ 0\le i_1,\ldots,i_n \le k}} \tfrac{k!}{i_1!\cdot i_2!\cdots i_n!} \cdot x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}.$$

Príklad 2.2.26.
Nech je funkcia $f\colon R^2 \to R$ trikrát diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y)$.

Ak označíme $\boldsymbol{x} = (x; y)$, potom platí:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) &= f'(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T = \big(f_x(\boldsymbol{a}); f_y(\boldsymbol{a})\big)\cdot\begin{pmatrix} x-a_x \\ y-a_y \end{pmatrix} \\
&= f_x(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x) + f_y(\boldsymbol{a})\cdot(y-a_y), \\
\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot f''(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T \\
&= (x-a_x; y-a_y)\cdot\begin{pmatrix} f_{xx}(\boldsymbol{a}) & f_{xy}(\boldsymbol{a}) \\ f_{yx}(\boldsymbol{a}) & f_{yy}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-a_x \\ y-a_y \end{pmatrix} \\
&= f_{xx}(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x)^2 + 2f_{xy}(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x)\cdot(y-a_y) + f_{yy}(\boldsymbol{a})\cdot(y-a_y)^2, \\
\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) &= \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i}\cdot\tfrac{\partial^3 f(\boldsymbol{a})}{\partial x^{3-i}\partial y^i}\cdot(x-a_x)^{3-i}\cdot(y-a_y)^i \\
&= f_{xxx}(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x)^3 + 3f_{xxy}(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x)^2\cdot(y-a_y) \\
&\quad +3f_{xyy}(\boldsymbol{a})\cdot(x-a_x)\cdot(y-a_y)^2 + f_{yyy}(\boldsymbol{a})\cdot(y-a_y)^3. \blacksquare
\end{aligned}$$

Príklad 2.2.27.
Funkcia $f(\boldsymbol{x}) = f(x; y) = x^3 + xy^2\colon R^2 \to R$ je trikrát diferencovateľná v R^2.

Pre všetky $\boldsymbol{x} = (x; y) \in R^2$ platí:

$$f'(\boldsymbol{x}) = (3x^2+y^2; 2xy), \quad f_x(\boldsymbol{x}) = 3x^2+y^2, \quad f_y(\boldsymbol{x}) = 2xy,$$

$$f''(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad f_{xx}(\boldsymbol{x}) = 6x, \quad f_{xy}(\boldsymbol{x}) = f_{yx}(\boldsymbol{x}) = 2y, \quad f_{yy}(\boldsymbol{x}) = 2x,$$

$$f_{xxx}(\boldsymbol{x}) = 6, \quad f_{xxy}(\boldsymbol{x}) = f_{xyx}(\boldsymbol{x}) = f_{yxx}(\boldsymbol{x}) = 0,$$

$$f_{xyy}(\boldsymbol{x}) = f_{yxy}(\boldsymbol{x}) = f_{yyx}(\boldsymbol{x}) = 2, \quad f_{yyy}(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Napríklad pre $\mathbf{0} = (0;0)$, $(1;2)$ a pre ľubovoľné $\boldsymbol{a} = (a_x;a_y)\in R^2$ platí:

$$f'(a_x;a_y) = (3a_x^2 + a_y^2; 2a_xa_y), \quad f'(0;0) = (0;0), \quad f'(1;2) = (7;4),$$
$$f''(a_x;a_y) = \begin{pmatrix} 6a_x & 2a_y \\ 2a_y & 2a_x \end{pmatrix}, \quad f''(0;0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(1;2) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pre prvý, druhý a tretí diferenciál f v bodoch $\boldsymbol{a} = (a_x;a_y)$, $\mathbf{0} = (0;0)$ a $(1;2)$ platí:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = (3a_x^2 + a_y^2)\cdot(x-a_x) + 2a_xa_y(y-a_y),$$
$$\mathrm{d}f(\mathbf{0},\boldsymbol{x}) = 0, \quad \mathrm{d}f\big((1;2),\boldsymbol{x}-(1;2)\big) = 7(x-1)+4(y-2) = 7x+4y-9,$$
$$\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = 6a_x(x-a_x)^2 + 2\cdot 2a_y(x-a_x)\cdot(y-a_y) + 2a_x(y-a_y)^2,$$
$$\mathrm{d}^2f(\mathbf{0},\boldsymbol{x}) = 0, \quad \mathrm{d}^2f\big((1;2),\boldsymbol{x}-(1;2)\big) = 6(x-1)^2 + 8(x-1)\cdot(y-2) + 2(y-2)^2,$$
$$\mathrm{d}^3f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = 6(x-a_x)^3 + 3\cdot 2(x-a_x)\cdot(y-a_y)^2,$$
$$\mathrm{d}^3f(\mathbf{0},\boldsymbol{x}) = 6x^3 + 6xy^2, \quad \mathrm{d}^3f\big((1;2),\boldsymbol{x}-(1;2)\big) = 6(x-1)^3 + 6(x-1)\cdot(y-2)^2. \ \blacksquare$$

Príklad 2.2.28.
Uvažujme funkciu $f(\boldsymbol{x}) = f(x;y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\colon R^2 - \{(x;0), x\in R\} \to R$ z príkladu 2.2.21 b).
Pre všetky $\boldsymbol{x} = (x;y)\in R^2$, $y \neq 0$ existujú prvá a druhá derivácia funkcie f a platí

$$f'(\boldsymbol{x}) = \tfrac{1}{x^2+y^2}\cdot(y;-x), \quad f''(\boldsymbol{x}) = \tfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot\begin{pmatrix} -2xy & x^2-y^2 \\ x^2-y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$$

Pre prvý a druhý diferenciál funkcie f v bode $\boldsymbol{a} = (a_x;a_y)\in R^2$, $a_y \neq 0$ platí:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = \tfrac{1}{a_x^2+a_y^2}\cdot\big[a_y(x-a_x) - a_x(y-a_y)\big] = \tfrac{a_yx-a_xy}{a_x^2+a_y^2},$$
$$\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = \tfrac{-2a_xa_y(x-a_x)^2+2(a_x^2-a_y^2)(x-a_x)(y-a_y)+2a_xa_y(y-a_y)^2}{(a_x^2+a_y^2)^2}.$$

Napríklad pre $\boldsymbol{a} = (1;1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0;1)$ platí:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = \tfrac{x-y}{2}, \quad \mathrm{d}^2f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) = \tfrac{-2(x-1)^2+2(y-1)^2}{2^2} = \tfrac{(y-1)^2-(x-1)^2}{2},$$
$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varepsilon}_2) = x, \quad \mathrm{d}^2f(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varepsilon}_2) = -2x(y-1). \ \blacksquare$$

Príklad 2.2.29.
Nech je funkcia $f(\boldsymbol{x}) = f(x;y;z)\colon R^3 \to R$ trikrát diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} \in D(f)$, $\boldsymbol{a} = (a_x;a_y;a_z)$ a nech $\boldsymbol{h} = (h_x;h_y;h_z)$ je také, že $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}\in O(\boldsymbol{a}) \subset D(f)$. Potom platí:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = f'(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}^T = f_x(\boldsymbol{a})h_x + f_y(\boldsymbol{a})h_y + f_y(\boldsymbol{a})h_z,$$
$$\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\cdot f''(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}^T = f_{xx}(\boldsymbol{a})h_x^2 + f_{yy}(\boldsymbol{a})h_y^2 + f_{zz}(\boldsymbol{a})h_z^2$$
$$+2f_{xy}(\boldsymbol{a})h_xh_y + 2f_{xz}(\boldsymbol{a})h_xh_z + 2f_{yz}(\boldsymbol{a})h_yh_z,$$

$$\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = f_{xxx}(\boldsymbol{a})h_x^3 + f_{yyy}(\boldsymbol{a})h_y^3 + f_{zzz}(\boldsymbol{a})h_z^3 + 3f_{xxy}(\boldsymbol{a})h_x^2h_y + 3f_{xxz}(\boldsymbol{a})h_x^2h_z$$
$$+3f_{xyy}(\boldsymbol{a})h_xh_y^2 + 3f_{xzz}(\boldsymbol{a})h_xh_z^2 + 3f_{yyz}(\boldsymbol{a})h_y^2h_z + 3f_{yzz}(\boldsymbol{a})h_yh_z^2 + 6f_{xyz}(\boldsymbol{a})h_xh_yh_z.$$

• Špeciálne pre (trikrát diferencovateľnú) funkciu $f(x;y;z) = x^3 + xy^2z\colon R^3 \to R$ platí:

$$f_x = 3x^2 + y^2z, \quad f_y = 2xyz, \quad f_z = xy^2,$$
$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 2xz, \quad f_{zz} = 0, \quad f_{xy} = 2yz, \quad f_{xz} = y^2, \quad f_{yz} = 2xy,$$
$$f_{xxx} = 6, \quad f_{yyy} = 0, \quad f_{zzz} = 0, \quad f_{xxy} = 0, \quad f_{xxz} = 0,$$
$$f_{xyy} = 2z, \quad f_{xzz} = 0, \quad f_{yyz} = 2x, \quad f_{yzz} = 0, \quad f_{xyz} = 2y.$$

Pre diferenciály f do tretieho rádu v bode $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\boldsymbol{h} = (h_x; h_y; h_z)$ platí:

$$\mathrm{d} f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = (3a_x^2 + a_y^2a_z)h_x + 2a_xa_ya_zh_y + a_xa_y^2h_z,$$
$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = 6a_xh_x^2 + 4a_ya_zh_xh_y + 2a_y^2h_xh_z + 2a_xa_zh_y^2 + 4a_xa_yh_yh_z,$$
$$\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = 6h_x^3 + 6a_zh_xh_y^2 + 12a_yh_xh_yh_z + 6a_xh_y^2h_z.$$

Napríklad pre $\boldsymbol{\varepsilon_1} = (1;0;0)$, $\boldsymbol{\varepsilon_2} = (0;1;0)$, $\boldsymbol{\varepsilon_3} = (0;0;1)$, $\boldsymbol{0} = (0;0;0)$, $\boldsymbol{a} = (1;1;1)$ platí

$$\mathrm{d} f(\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{h}) = 3h_x,\ \ \mathrm{d} f(\boldsymbol{\varepsilon_2},\boldsymbol{h}) = 0,\ \ \mathrm{d} f(\boldsymbol{\varepsilon_3},\boldsymbol{h}) = 0,$$
$$\mathrm{d} f(\boldsymbol{0},\boldsymbol{h}) = 0,\ \ \mathrm{d} f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = 4h_x + 2h_y + h_z,$$
$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{h}) = 6h_x^2,\ \ \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{\varepsilon_2},\boldsymbol{h}) = 2h_xh_z,\ \ \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{\varepsilon_3},\boldsymbol{h}) = 0,$$
$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{0},\boldsymbol{h}) = 0,\ \ \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = 6h_x^2 + 4h_xh_y + 2h_xh_z + 2h_y^2 + 4h_yh_z,$$
$$\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{\varepsilon_1},\boldsymbol{h}) = 6h_x^3 + 6h_y^2h_z,\ \ \mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{\varepsilon_2},\boldsymbol{h}) = 6h_x^3 + 12h_xh_yh_z,\ \ \mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{\varepsilon_3},\boldsymbol{h}) = 6h_x^3 + 6h_xh_y^2,$$
$$\mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{0},\boldsymbol{h}) = 0,\ \ \mathrm{d}^3 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = 6h_x^3 + 6h_xh_y^2 + 12h_xh_yh_z + 6h_y^2h_z.\ \blacksquare$$

Príklad 2.2.30.
Funkcia $f(x;y;z) = \mathrm{e}^{x+y+z}\colon R^3 \to R$ je k-krát diferencovateľná v R^3 pre každé $k \in N$.
Pre všetky $\boldsymbol{x} = (x;y;z) \in R^3$ platí

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{x+y+z} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{e}^z, \qquad \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial y} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial z} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{e}^z = f(\boldsymbol{x}).$$

To znamená, že sú všetky parciálne derivácie každého rádu podľa premenných v ľubovoľnom poradí v bode $\boldsymbol{x} \in R^3$ rovnaké a pre všetky $i,j,l \in N$, $i+j+l=k$ platí

$$f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x^i \partial y^j \partial z^l} = \mathrm{e}^{a_x+a_y+a_z} = \mathrm{e}^{a_x}\,\mathrm{e}^{a_y}\,\mathrm{e}^{a_z}\,.$$

Pre k-ty diferenciál funkcie f v bode $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\boldsymbol{h} = (h_x; h_y; h_z)$ platí

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) = \sum_{\substack{i+j+l=k\\ 0\le i,j,l\le k}} \frac{k!}{i!j!l!}\cdot\frac{\partial^k f(\boldsymbol{a})}{\partial x^i \partial y^j \partial z^l}\cdot h_x^i h_y^j h_z^l = \sum_{\substack{i+j+l=k\\ 0\le i,j,l\le k}} \frac{k!}{i!j!l!}\cdot f(\boldsymbol{a})\cdot h_x^i h_y^j h_z^l$$
$$= f(\boldsymbol{a}) \sum_{\substack{i+j+l=k\\ 0\le i,j,l\le k}} \frac{k!}{i!j!l!}\cdot h_x^i h_y^j h_z^l = f(\boldsymbol{a})\cdot\big(h_x+h_y+h_z\big) = \mathrm{e}^{a_x+a_y+a_z}\big(h_x+h_y+h_z\big)^k.$$

Špeciálne pre $\boldsymbol{0} = (0;0;0)$ platí $f(\boldsymbol{0}) = \mathrm{e}^{0+0+0} = 1$, $\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{0},\boldsymbol{h}) = \big(h_x+h_y+h_z\big)^k$. $\blacksquare$

2.2.6 Taylorov polynóm

Z teórie reálnych funkcií jednej reálnej premennej vieme, že najlepšia aproximácia danej k-krát ($k \in N$) diferencovateľnej funkcie $f\colon R \to R$ v nejakom okolí $O(a)$, $a \in D(f)$ polynómom stupňa k je pomocou Taylorovho polynómu rovnakého stupňa (poznámka 2.2.21, ma1: 4.3.3 Taylorov polynóm), ktorý je jednoznačne určený. Túto skutočnosť zovšeobecníme pre reálne funkcie viacerých reálnych premenných.

Poznámka 2.2.21.
Nech je funkcia $f\colon R \to R$ definovaná v nejakom okolí $O(a)$ bodu $a \in D(f)$ a nech existujú konečné derivácie $f'(a)$, $f''(a)$, $\ldots$, $f^{(k)}(a)$, kde $k \in N$. Potom funkciu (polynóm stupňa k)

$$T_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)\cdot(x-a)^i}{i!} = f(a) + \frac{f'(a)\cdot(x-a)}{1!} + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)\cdot(x-a)^k}{k!}$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{d}^i f(a,x-a)}{i!} = f(a) + \frac{\mathrm{d}^1 f(a,x-a)}{1!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^k f(a,x-a)}{k!}, \quad x \in O(a)$$

*nazývame **Taylorov polynóm** stupňa $k \in N$ funkcie f so stredom v bode a.*
*Špeciálne pre $a = 0$ sa nazýva **Maclaurinov polynóm** stupňa k funkcie f a má tvar*

$$T_k(x) = f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)\cdot x^k}{k!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(0)\cdot x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{d}^i f(0,x)}{i!}, \quad x \in O(0).$$

*Rozdiel $R_k(x) = f(x) - T_k(x)$, $x \in O(a)$ sa nazýva **zvyšok** Taylorovho polynómu, vyjadruje chybu aproximácie funkcie f pomocou T_k v bodoch $x \in O(a)$ a spĺňa vzťah*

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^k} = 0. \tag{2.20}$$

*Zvyšok $R_n(x)$ môžeme vyjadriť v rôznych tvaroch (ma1: veta 4.3.7 Taylorova). Najčastejšie sa používajú **Lagrangeov tvar** $L_n(x)$ a **Cauchyho tvar** $C_n(x)$*

$$L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad C_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n,$$

kde $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $\theta \in (0;1)$, t. j. bod ξ leží na úsečke spájajúcej body x, a. Vzťah

$$f(x) = T_k(x) + R_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(0)\cdot x^i}{i!} + R_k(x), \quad x \in O(a) \tag{2.21}$$

*sa nazýva **Taylorov vzorec** (stupňa k funkcie f v strede a).*

Nech $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in R^n$, $n \in N$, $k \in N$, funkcia $f\colon R^n \to R$ je diferencovateľná do rádu $k+1$ v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})$. Potom funkciu

$$T_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{d}^i f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{i!} = f(\boldsymbol{a}) + \frac{\mathrm{d}^1 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{1!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{k!}, \quad \boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$$

nazývame **Taylorov polynóm stupňa k funkcie f so stredom v bode $\boldsymbol{a}$**. Špeciálne pre $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}_n = (0; 0; \ldots; 0)$ ho nazývame **Maclaurinov polynóm** a má tvar

$$T_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{d}^i f(\boldsymbol{0}_n,\boldsymbol{x})}{i!} = f(\boldsymbol{0}_n) + \frac{\mathrm{d}^1 f(\boldsymbol{0}_n,\boldsymbol{x})}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{0}_n,\boldsymbol{x})}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{0}_n,\boldsymbol{x})}{k!}, \quad \boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{0}_n).$$

Rozdiel $f(\boldsymbol{x}) - T_k(\boldsymbol{x}) = R_k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$ nazývame **zvyšok** Taylorovho polynómu a vyjadruje chybu aproximácie funkcie f pomocou T_k v bodoch $\boldsymbol{x}$. Vzťah

$$f(\boldsymbol{x}) = T_k(\boldsymbol{x}) + R_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{d}^i f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{i!} + R_k(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$$

nazývame **Taylorov vzorec** (stupňa k funkcie f v strede a).

Veta 2.2.15 (Taylorova).
Funkcia $f\colon R^n \to R$ je diferencovateľná do rádu $k+1$ (vrátane) v nejakom okolí $O(\boldsymbol{a})$ bodu $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in D(f)$, kde $n \in N$, $k \in N$.

$$\Longrightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) = T_k(\boldsymbol{x}) + R_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{k} \tfrac{\mathrm{d}^i f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{i!} + R_k(\boldsymbol{x}) \ \text{ pre všetky } \boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}),$$

$$\text{pričom } R_k(\boldsymbol{x}) = \tfrac{\mathrm{d}^{k+1} f(\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{(k+1)!},\ \theta \in (0;1) \text{ a } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \tfrac{R_k(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n{}^k} = 0.$$

Dôkaz.
Nech $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; \ldots; v_n) \in O(\boldsymbol{a})$ je ľubovoľný bod. Uvažujme zúženie funkcie f na úsečku spájajúcu body $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{v}$, t. j. funkciu jednej premennej $\Phi\colon \langle 0; 1\rangle \to R$ danú predpisom

$$\Phi(t) = f\big(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})\big) = f\big(a_1 + t(v_1-a_1); a_2 + t(v_2-a_2); \ldots; a_n + t(v_n-a_n)\big).$$

Funkcia $\Phi(t) = f(g(t))$ je zložená s vnútornou zložkou $g(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})\colon \langle 0;1\rangle \to R^n$ a vonkajšou zložkou $f(\boldsymbol{x})\colon O(\boldsymbol{a}) \to R$. Pre jej deriváciu platí (viď poznámka 2.2.12)

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \big[f(g(t))\big]' = f'(\boldsymbol{x})\cdot g'(t) = f'(\boldsymbol{x})\cdot\big(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})\big)' \\
&= f'\big(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})\big)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})^T = \mathrm{d}f\big(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}\big) \\
&= \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}))}{\partial x_1}(v_1-a_1) + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}))}{\partial x_2}(v_2-a_2) + \cdots + \tfrac{\partial f(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}))}{\partial x_n}(v_n-a_n).
\end{aligned}$$

Derivácia $\Phi'(t)$ je opäť zložená funkcia s vnútornou zložkou $g(t) = \boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})$ a vonkajšou zložkou $f'(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})^T = (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})\cdot f'(\boldsymbol{x})^T\colon O(\boldsymbol{a}) \to R$. Pre jej deriváciu, t. j. $\Phi''(t)$ platí

$$\begin{aligned}
\Phi''(t) &= \big[(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})\cdot f'(\boldsymbol{x})^T\big]'\cdot g'(t) = \big[(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})\cdot f''\big(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})\big)\big]\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})^T \\
&= \tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}))}{\partial x_1^2}(v_1-a_1)^2 + 2\tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}))}{\partial x_1 \partial x_2}(v_1-a_1)(v_2-a_2) \\
&\qquad + \cdots + 2\tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}))}{\partial x_{n-1}\partial x_n}(v_{n-1}-a_{n-1})(v_n-a_n) + \tfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}))}{\partial x_n^2}(v_n-a_n)^2 \\
&= \mathrm{d}^2 f\big(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}\big).
\end{aligned}$$

Takto pokračujeme ďalej a derivujeme funkciu $\Phi(t)$ až po rád $k+1$. Druhá derivácia $\Phi''(t)$ je opäť zložená funkcia s vnútornou zložkou $g(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})$ a vonkajšou zložkou $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})\cdot f''\big(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})\big)n \cdot (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a})^T\colon O(\boldsymbol{a}) \to R$. Pre tretiu deriváciu analogicky platí $\Phi'''(t) = \mathrm{d}^3 f\big(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}\big)$, pre štvrtú $\Phi''''(t) = \mathrm{d}^4 f\big(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}\big)$, atď.
Keďže $\boldsymbol{v}$ je ľubovoľné, môžeme použiť $\boldsymbol{x}$. Potom platí

$$\Phi(t) = f\big(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\big),\ t \in \langle 0;1\rangle, \quad \Phi(0) = f(\boldsymbol{a}), \quad \Phi(1) = f(\boldsymbol{x}).$$

Ak to zhrnieme, potom pre $i = 0, 1, 2, \ldots, k, k+1$ platí

$$\Phi^{(i)}(t) = \mathrm{d}^i f\big(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\big),\ t \in \langle 0;1\rangle,\ \boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in O(\boldsymbol{a}).$$

Špeciálne pre $t = 0$ dostaneme $\Phi^{(i)}(0) = \mathrm{d}^i f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$.
Rozviňme funkciu $\Phi\colon \langle 0;1\rangle \to R$ do Taylorovho vzorca (2.21) z poznámky 2.2.21 stupňa k so stredom v bode 0 so zvyškom v Lagrangevom tvare. Pre všetky $t \in \langle 0;1\rangle$ platí

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \tfrac{\Phi'(0)\cdot t}{1!} + \cdots + \tfrac{\Phi^{(k)}(0)\cdot t^k}{k!} + \tfrac{\Phi^{(k+1)}(\xi)\cdot t^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{i=0}^{k} \tfrac{\Phi^{(i)}(0)\cdot t^i}{i!} + \tfrac{\Phi^{(k+1)}(\xi)\cdot t^{k+1}}{(k+1)!},$$

kde $\xi = 0 + \theta(t-0) = \theta t$, $\theta \in (0;1)$ a $\Phi^{(k+1)}(\xi) = \mathrm{d}^{k+1} f(\boldsymbol{a} + \theta t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$.
Špeciálne pre $t=1$ platí $\xi = \theta \cdot 1 = \theta$ a následne dostaneme tvrdenie vety

$$f(\boldsymbol{x}) = \Phi(1) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\Phi^{(i)}(0)}{i!} + \frac{\Phi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{d}^i f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{i!} + \frac{\mathrm{d}^{k+1} f(\boldsymbol{a}+\theta t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{(k+1)!}.$$

Diferencovateľnosť funkcie f rádu $k+1$ v okolí $O(\boldsymbol{a})$ znamená, že sú v $O(\boldsymbol{a})$ diferencovateľné a samozrejme aj spojité (veta 2.2.15) všetky parciálne derivácie rádu k. To znamená ďalej, že existujú a sú v $O(\boldsymbol{a})$ konečné, t. j. ohraničené, všetky parciálne derivácie rádu $k+1$. Potom existuje $\alpha > 0$ také, že pre všetky $i_1, i_2, \ldots, i_{k+1} \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$ platí

$$\left| \frac{\partial^{k+1} f(\boldsymbol{x})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{k+1}} \right| \leq \alpha.$$

Je zrejmé, že pre všetky $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a})$ platí $|x_i - a_i| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n$. Bod $\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$, $\theta \in (0;1)$ leží na úsečke s hranicami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$, t. j. tiež platí $\boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \in O(\boldsymbol{a})$.
Pre odhad zvyšku $R_k(\boldsymbol{x})$ potom platí

$$\begin{aligned}
0 \leq |R_k(\boldsymbol{x})| &= \left| \frac{\mathrm{d}^{k+1} f(\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{(k+1)!} \right| \\
&= \Bigg| \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n = k+1 \\ 0 \leq i_1,\ldots,i_n \leq k+1}} \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{(k+1)!}{i_1! \cdots i_n!} \cdot \frac{\partial^{k+1} f(\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}))}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \cdot (x_1-a_1)^{i_1} \cdots (x_n-a_n)^{i_n} \Bigg| \\
&\leq \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n = k+1 \\ 0 \leq i_1,\ldots,i_n \leq k+1}} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \cdot \left| \frac{\partial^{k+1} f(\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}))}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \right| \cdot |x_1-a_1|^{i_1} \cdots |x_n-a_n|^{i_n} \\
&\leq \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n = k+1 \\ 0 \leq i_1,\ldots,i_n \leq k+1}} 1 \cdot \alpha \cdot \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n^{\,i_1} \cdots \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n^{\,i_n} \\
&= \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n = k+1 \\ 0 \leq i_1,\ldots,i_n \leq k+1}} \alpha \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n^{\,k+1} = \alpha n^{k+1} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n^{\,k+1}.
\end{aligned}$$

Posledná rovnosť vyplýva zo skutočnosti, že počet všetkých parciálnych derivácií danej funkcie rádu $k+1$ je n^{k+1} (poznámka 2.2.17). Keďže súčin αn^{k+1} je konečné číslo, platí

$$0 \leq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{|R_k(\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n^{\,k}} \leq \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{\alpha n^{k+1} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n^{\,k+1}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n^{\,k}} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \alpha n^{k+1} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n = \alpha n^{k+1} \cdot 0 = 0.$$

Z toho vyplýva posledné tvrdenie vety $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{R_k(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n^{\,k}} = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{|R_k(\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n^{\,k}} = 0$. ■

Zvyšok $R_k(\boldsymbol{x})$ v tvare z predchádzajúcej vety sa nazýva **Lagrangeov tvar zvyšku**.

Taylorovu vetu 2.2.15 môžeme formulovať so silnejšími predpokladmi – spojitosťou všetkých parciálnych derivácií stupňa $k+1$ v bode $\boldsymbol{a}$, z ktorej vyplýva (veta 2.2.5) diferencovateľnosť rádu $k+1$ funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$.

Dôsledok 2.2.15.a (Taylorova veta).
Funkcia $f\colon A \to R$, kde $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť, f má v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$ spojité všetky parciálne derivácie rádu $k+1$, $k \in N$.

$$\Longrightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) = T_k(\boldsymbol{x}) + R_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{d}^i f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{i!} + R_k(\boldsymbol{x}) \ \text{ pre všetky } \boldsymbol{x} \in A,$$

$$\text{pričom } R_k(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{d}^{k+1} f(\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{(k+1)!},\ \theta \in (0;1) \text{ a } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{R_k(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n^{\,k}} = 0.$$

Na základe druhej časti dôkazu vety pre limitnú vlastnosť zvyšku môžeme predpoklady vety zjednodušiť. Ak nepotrebujeme vyjadriť zvyšok v nejakom tvare, potom na vyjadrenie Talyrovho vzorca s limitnou vlastnosťou zvyšku stačí diferencovateľnosť funkcie f rádu k [8].

Dôsledok 2.2.15.b.
Funkcia $f\colon A \to R$, kde $A \subset R^n$, $n \in N$ je oblasť, f má v bode $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in A$ spojité všetky parciálne derivácie rádu $k \in N$.

$$\Longrightarrow \ f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{d}^i f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}{i!} + R_k(\boldsymbol{x}) \ \text{ pre všetky } \boldsymbol{x} \in A, \text{ pričom } \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{R_k(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_n{}^k} = 0.$$

Príklad 2.2.31.
Určte Taylorov polynóm stupňa 2 so stredom $(2;2)$ funkcie

$$f(x;y) = \frac{1}{(x-1)(y-1)} = (x-1)^{-1} \cdot (y-1)^{-1} \colon R^2 \to R.$$

Riešenie.
Funkcia f je definovaná a spojitá v každom bode $(x;y) \in R^2$ okrem bodov ležiacich na priamkách $x = 1$ a $y = 1$ (obr. 2.2.31 vľavo), t. j. $D(f) = R^2 - \big\{(x;y) \in R^2, x \neq 1, y \neq 1\big\}$. Všetky prvé a druhé parciálne derivácie sú spojité v každom bode $(x;y) \in D(f)$ a platí

$$f'(x;y) = \big(f_x(x;y); f_y(x;y)\big) = \big(-(x-1)^{-2}(y-1)^{-1}; -(x-1)^{-1}(y-1)^{-2}\big),$$

$$f''(x;y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x;y) & f_{xy}(x;y) \\ f_{yx}(x;y) & f_{yy}(x;y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1)^{-3}(y-1)^{-1} & (x-1)^{-2}(y-1)^{-2} \\ (x-1)^{-2}(y-1)^{-2} & 2(x-1)^{-1}(y-1)^{-3} \end{pmatrix}.$$

Potom $f(2;2) = 1$, $f_x(2;2) = -1$, $f_y(2;2) = -1$, $f_{xx}(2;2) = 2$, $f_{xy}(2;2) = f_{yx}(2;2) = 1$ $f_{yy}(2;2) = 2$ a Taylorov polynóm stupňa 2 so stredom $(2;2)$ funkcie f má tvar

$$\begin{aligned}
T_2(x;y) &= f(2;2) + \frac{\mathrm{d}^1 f((2;2),(x;y)-(2;2))}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f((2;2),(x;y)-(2;2))}{2!} \\
&= f(2;2) + \frac{f_x(2;2)(x-2)+f_y(2;2)(y-2)}{1!} + \frac{f_{xx}(2;2)(x-2)^2+2f_{xy}(2;2)(x-2)(y-2)+f_{yy}(2;2)(y-2)^2}{2!} \\
&= 1 + \frac{-(x-2)-(y-2)}{1} + \frac{2(x-2)^2+2(x-2)(y-2)+2(y-2)^2}{2} \\
&= (x-2)^2 + (x-2)(y-2) + (y-2)^2 - x - y + 5.
\end{aligned}$$

Aproximácia funkcie f pomocou polynómu T_2 (obr. 2.2.31 vpravo) je lokálna záležitosť v nejakom (blízkom) okolí $O(2;2)$. Ak označíme $\xi = (\xi_x; \xi_y) = (2;2) + \theta((x;y) - (2;2))$ pre $\theta \in (0;1)$, t. j. $\xi_x = 2 + \theta(x-2)$, $\xi_y = 2 + \theta(y-2)$, potom pre chybu aproximácie v bode $(x;y) \in O(2;2)$ platí

$$\begin{aligned}
|R_2(x;y)| &= \Big|\frac{\mathrm{d}^3 f(\xi,(x;y)-(2;2))}{3!}\Big| = \Big|\frac{\mathrm{d}^3 f((2;2)+\theta((x;y)-(2;2)),(x;y)-(2;2))}{3!}\Big| \\
&= \Big|\frac{f_{xxx}(\xi_x;\xi_y)(x-2)^3+3f_{xxy}(\xi_x;\xi_y)(x-2)^2(y-2)+3f_{xyy}(\xi_x;\xi_y)(x-2)(y-2)^2+f_{yyy}(\xi_x;\xi_y)(y-2)^3}{6}\Big| \\
&\leq \frac{|f_{xxx}(\xi_x;\xi_y)| \cdot |x-2|^3}{6} + \frac{|f_{xxy}(\xi_x;\xi_y)| \cdot |x-2|^2 \cdot |y-2|}{2} \\
&\quad + \frac{|f_{xyy}(\xi_x;\xi_y)| \cdot |x-2| \cdot |y-2|^2}{2} + \frac{|f_{yyy}(\xi_x;\xi_y)| \cdot |y-2|^3}{6}.
\end{aligned}$$

Derivovaním druhých parciálnych derivácií dostaneme

$$f_{xxx}(x;y) = -6(x-1)^{-4}(y-1)^{-1} = \frac{-6}{(x-1)^4(y-1)},$$

$$|f_{xxx}(\xi_x;\xi_y)| = \Big|\frac{-6}{(2+\theta(x-2)-1)^4(2+\theta(y-2)-1)}\Big| = \frac{6}{|1+\theta(x-2)|^4 \cdot |1+\theta(y-2)|}.$$

$$f_{xxy}(x;y) = f_{xyx}(x;y) = f_{yxx}(x;y) = -2(x-1)^{-3}(y-1)^{-2} = \tfrac{-2}{(x-1)^3(y-1)^2},$$
$$|f_{xxy}(\xi_x;\xi_y)| = \left|\tfrac{-2}{(2+\theta(x-2)-1)^3(2+\theta(y-2)-1)^2}\right| = \tfrac{2}{|1+\theta(x-2)|^3\cdot|1+\theta(y-2)|^2},$$
$$f_{xyy}(x;y) = f_{yxy}(x;y) = f_{yyx}(x;y) = -2(x-1)^{-2}(y-1)^{-3} = \tfrac{-2}{(x-1)^2(y-1)^3},$$
$$|f_{xyy}(\xi_x;\xi_y)| = \left|\tfrac{-2}{(2+\theta(x-2)-1)^2(2+\theta(y-2)-1)^3}\right| = \tfrac{2}{|1+\theta(x-2)|^2\cdot|1+\theta(y-2)|^3},$$
$$f_{yyy}(x;y) = -6(x-1)^{-1}(y-1)^{-4} = \tfrac{-6}{(x-1)(y-1)^4},$$
$$|f_{yyy}(\xi_x;\xi_y)| = \left|\tfrac{-6}{(2+\theta(x-2)-1)(2+\theta(y-2)-1)^4}\right| = \tfrac{6}{|1+\theta(x-2)|\cdot|1+\theta(y-2)|^4}.$$

Predpokladajme, že $(x;y)\in O_\varepsilon(2;2)$, kde pre polomer platí[41] $0<\varepsilon<1$. Potom platí

$$|x-2|<\varepsilon, \quad |y-2|<\varepsilon$$

a tiež $\theta\,|x-2|<\theta\varepsilon<\varepsilon$, $\theta\,|y-2|<\theta\varepsilon<\varepsilon$, t. j. $-\varepsilon<\theta\,|x-2|<\varepsilon$, $-\varepsilon<\theta\,|y-2|<\varepsilon$. Z toho vyplýva $1+\theta(x-2)>1-\varepsilon>0$, $1+\theta(y-2)>1-\varepsilon>0$, t. j.

$$\tfrac{1}{|1+\theta(x-2)|}<\tfrac{1}{1-\varepsilon}, \quad \tfrac{1}{|1+\theta(y-2)|}<\tfrac{1}{1-\varepsilon}.$$

Pre chybu aproximácie v bode $(x;y)\in O_\varepsilon(2;2)$, kde $0<\varepsilon<1$, potom platí

$$|R_2(x;y)| \le \tfrac{|x-2|^3}{|1+\theta(x-2)|^4\cdot|1+\theta(y-2)|} + \tfrac{|x-2|^2\cdot|y-2|}{|1+\theta(x-2)|^3\cdot|1+\theta(y-2)|^2} + \tfrac{|x-2|\cdot|y-2|^2}{|1+\theta(x-2)|^2\cdot|1+\theta(y-2)|^3} + \tfrac{|y-2|^3}{|1+\theta(x-2)|\cdot|1+\theta(y-2)|^4}.$$
$$\tfrac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^4\cdot(1-\varepsilon)} + \tfrac{\varepsilon^2\cdot\varepsilon}{(1-\varepsilon)^3\cdot(1-\varepsilon)^2} + \tfrac{\varepsilon\cdot\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2\cdot(1-\varepsilon)^3} + \tfrac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)\cdot(1-\varepsilon)^4} = \tfrac{4\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^5}.$$

Napríklad pre $\varepsilon=0{,}5$ je garantovaná chyba $R_2(x;y)<\frac{4\cdot 0{,}5^3}{0{,}5^5}=\frac{4}{0{,}5^2}=16$, ale pre $\varepsilon=0{,}1$ je garantovaná chyba $R_2(x;y)<\frac{4\cdot 0{,}1^3}{0{,}9^5}\approx 0{,}006\,774$.
Špeciálne pre $(x;y)=(2{,}43;2{,}25)$ platí $|(x;y)-(2;2)|=\sqrt{0{,}43^2+0{,}25^2}\approx 0{,}498<0{,}5$, $f(x;y)=\frac{1}{1{,}43\cdot 1{,}25}\approx 0{,}559\,441$. Pre aproximáciu pomocou T_2 platí

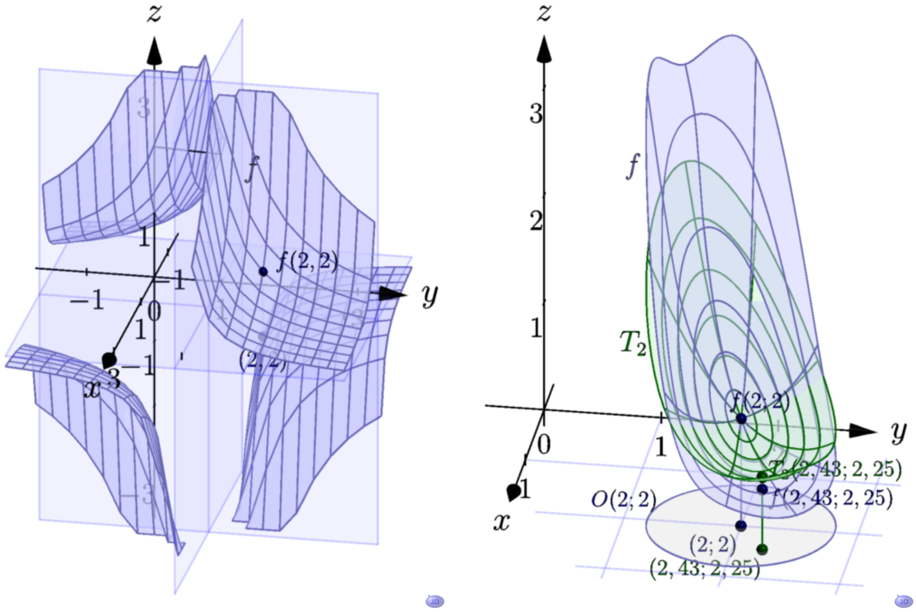
$$T_2(x;y)=0{,}43^2+0{,}43\cdot 0{,}25+0{,}25^2-2{,}43-2{,}25+5=0{,}674\,900.$$

Skutočná chyba je približne $|0{,}559\,441-0{,}674\,900|=0{,}115\,459$, čo je vcelku prípustné.
Špeciálne pre $(x;y)=(2{,}07;2{,}06)$ platí $|(x;y)-(2;2)|=\sqrt{0{,}07^2+0{,}06^2}\approx 0{,}092<0{,}1$, $f(x;y)=\frac{1}{1{,}07\cdot 1{,}06}\approx 0{,}881\,679$. Pre aproximáciu pomocou T_2 platí

$$T_2(x;y)=1{,}07^2+1{,}07\cdot 1{,}06+1{,}06^2-2{,}07-2{,}06+5=0{,}882\,700.$$

Skutočná chyba je približne $|0{,}881\,679-0{,}882\,700|=0{,}001\,021$. ■

[41] Polomer $\varepsilon\ge 1$ nemá zmysel voliť, pretože v okolí budú body, kde funkcia f nie je definovaná.



Obr. 2.2.31: Taylorov polynóm z príkladu 2.2.31

Výsledky cvičení

1 Integrál reálnej funkcie

1.1.2. $x+x^2/2-1/6+c$ pre $x\in(-\infty;-1)$, $x-x^3/3+c$ pre $x\in\langle -1;1\rangle$, $x-x^2/2+1/6+c$ pre $x\in(1;\infty)$. **1.1.4.** $f(2x)/2+c$. **1.1.5.** $2\sqrt{x}+c$, $x\in(0;\infty)$. **1.1.6.** $x+c$ pre $x\in(-\infty;0)$, e^x-1+c pre $x\in\langle 0;\infty)$. **1.1.7.** **a)** $\operatorname{arctg}[(x+2)/\sqrt{2}]/\sqrt{2}+c$, $x\in R$, **b)** $\operatorname{arctg}(x+2)+c$, $x\in R$, **c)** $c-1/(x+2)+c$, $x\in R-\{-2\}$, **d)** $\ln|x+1|/2-\ln|x+3|/2+c$, $x\in R-\{-3,-1\}$, **e)** $\ln|x+2-\sqrt{2}|/\sqrt{8}-\ln|x+2+\sqrt{2}|/\sqrt{8}+c$, $x\in R-\{-2\pm\sqrt{2}\}$, **f)** $\operatorname{arctg}[(x+1)/\sqrt{2}]/\sqrt{2}+c$, $x\in R$, **g)** $-\ln|x-1|/4+\ln|x-3|/8+\ln|x+1|/8+c$, $x\in R-\{\pm 1,3\}$, **h)** $-\ln|x-1|/4+\ln|x-2|/5+\ln|x+3|/20+c$, $x\in R-\{1,2,-3\}$, **i)** $\ln|x-1|/6+\ln|x+2|/3-\ln|x+1|/2+c$, $x\in R-\{\pm 1,-2\}$, **j)** $-\ln|x-1|/3+\ln|x-2|/4+\ln|x+2|/12+c$, $x\in R-\{1,\pm 2\}$, **k)** $\ln|x-2|-\ln|x-1|-1/(x-1)+c$, $x\in R-\{1,2\}$, **l)** $\ln|x+2|-\ln|x+1|+1/(x+1)+c$, $x\in R-\{-1,-2\}$, **m)** $\ln|x-1|/9-\ln|x+2|/9-1/(3x+6)+c$, $x\in R-\{1,-2\}$, **n)** $\ln|x+2|/9-\ln|x-1|/9+1/(3x-3)+c$, $x\in R-\{1,-2\}$, **o)** $\ln|x+1|-\ln[x^2+x+1]/2+\operatorname{arctg}[(2x+1)/\sqrt{3}]/\sqrt{3}+c$, $x\in R-\{-1\}$, **p)** $\ln|x-1|/2-\ln[x^2-x+2]/4-\operatorname{arctg}[(2x-1)/\sqrt{7}]/\sqrt{28}+c$, $x\in R-\{1\}$, **q)** $\ln|x-2|/3-\ln[x^2-x+1]/6-\operatorname{arctg}[(2x-1)/\sqrt{3}]/\sqrt{3}+c$, $x\in R-\{2\}$, **r)** $\ln|x+1|/3-\ln[x^2-x+1]/6+\operatorname{arctg}[(2x-1)/\sqrt{3}]/\sqrt{3}+c$, $x\in R-\{-1\}$, **s)** $\ln|x-1|-\ln|x|+1/x+c$, $x\in R-\{0,1\}$, **t)** $-1/[4(x^2+2x+3)^2]+c$, $x\in R$, **u)** $-(x+4)/[8(x^2+4x+6)^2]-3(x+2)/[32(x^2+4x+6)]-3\operatorname{arctg}[(x+2)/\sqrt{2}]/32+c$, $x\in R$, **v)** $-(x+3)/[4(x^2+4x+5)^2]-3(x+2)/[8(x^2+4x+5)]-3\operatorname{arctg}(x+2)/8+c$, $x\in R$, **w)** $(x+1)/[4(x^2+4x+3)^2]-3(x+2)/[8(x^2+4x+3)]+3\ln|x+3|/16-3\ln|x+1|/16+c$, $x\in R-\{-1,-3\}$, **x)** $x/[8(x^2+4x+2)^2]-3(x+2)/[32(x^2+4x+2)]+3\ln|x+2-\sqrt{2}|/\sqrt{8192}-3\ln|x+2-\sqrt{2}|/\sqrt{8192}+c$, $x\in R-\{-2\pm\sqrt{2}\}$. **1.1.8.** **a)** $-1/x+1/(3x^3)-1/(5x^5)-\operatorname{arctg}x+c$, $x\in R-\{0\}$, **b)** $1/[4(x-2)^4]+2/[3(x-2)^3]+1/[2(x-2)^2]+c$, $x\in R-\{2\}$, **c)** $-1/[4(x-1)^4]+1/[(x-1)^3]-3/[2(x-1)^2]+1/(x-1)+c$, $x\in R-\{1\}$, **d)** $1/[2(x+2)^2]-6/(x+2)-15\ln|x+2|+20(x+2)-15(x+2)^2/2+2(x+2)^3-(x+2)^4/4+c$, $x\in R-\{-2\}$, **e)** $81/[2(x-2)^2]+108/(x-2)-54\ln|x-2|-12(x-2)-(x-2)^2/2+c$, $x\in R-\{2\}$, **f)** $-1/[2(1+x^2)]+c$, $x\in R$, **g)** $-1/[4(1+x^2)^2]+c$, $x\in R$, **h)** $-1/[6(1+x^2)^3]+c$, $x\in R$, **i)** $\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+6})+c$, $x\in R$, **j)** $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}|+c$, $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;\infty)$, **k)** $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x-3}|+c$, $x\in(-\infty;-2-\sqrt{7})\cup(-2+\sqrt{7};\infty)$, **l)** $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})+c$, $x\in R$, **m)** $\arcsin[(x-2)/\sqrt{10}]+c$, $x\in(2-\sqrt{10};2+\sqrt{10})$, resp. $-\arccos[(x-2)/\sqrt{10}]+c$, $x\in(2-\sqrt{10};2+\sqrt{10})$, resp. $2\operatorname{arctg}[(\sqrt{10}-\sqrt{6-x^2+4x})/(x-2)]+c$, $x\in(2-\sqrt{10};2+\sqrt{10})-\{2\}$, resp. $-\operatorname{arctg}[\sqrt{6-x^2+4x}/(x-2)]+c$, $x\in(2-\sqrt{10};2+\sqrt{10})-\{2\}$, **n)** $\arcsin[(x-2)/\sqrt{2}]+c$, $x\in(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$, resp. $2\operatorname{arctg}[(\sqrt{2}-\sqrt{3-x^2+4x})/(x-2)]+c$, $x\in(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})-\{2\}$, resp. $-\arccos[(x-2)/\sqrt{2}]+c$, $x\in(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$, resp. $-\operatorname{arctg}[\sqrt{-x^2+4x-2}/(x-2)]+c$, $x\in(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})-\{2\}$, **o)** $\nexists$, **p)** $\arcsin[(x-2)/3]+c$, $x\in(-1;5)$, resp. $-\arccos[(x-2)/3]+c$, $x\in(-1;5)$, resp. $2\operatorname{arctg}[(3-\sqrt{5-x^2+4x})/(x-2)]+c$, $x\in(-1;5)-\{2\}$, resp. $-\operatorname{arctg}[\sqrt{5-x^2+4x}/(x-2)]+c$, $x\in(-1;5)-\{2\}$, **q)** $\arcsin[(x+2)/\sqrt{2}]+c$, $x\in(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$, resp. $-\arccos[(x+2)/\sqrt{2}]+c$, $x\in(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$, resp. $2\operatorname{arctg}[(\sqrt{2}-\sqrt{-x^2-4x-2})/(x+2)]+c$, $x\in(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})-\{-2\}$, resp. $-\operatorname{arctg}[\sqrt{-x^2-4x-2}/(x+2)]+c$, $x\in(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})-\{-2\}$, **r)** $\arcsin(x+2)+c$, $x\in(-3;-1)$, resp. $-\arccos(x+2)+c$, $x\in(-3;-1)$, resp. $2\operatorname{arctg}[(1-\sqrt{-x^2-4x-3})/(x+2)]+c$, $x\in(-3;-1)-\{-2\}$, resp. $-\operatorname{arctg}[\sqrt{-x^2-4x-3}/(x+2)]+c$, $x\in(-3;-1)-\{-2\}$, **s)** $\ln|\sqrt{2+3x}-\sqrt{8}|/\sqrt{8}-\ln|\sqrt{2+3x}+\sqrt{8}|/\sqrt{8}+c$, $x\in(-2/3;\infty)-\{2\}$, **t)** $\ln|\sqrt{3x-2}-2|/2-\ln|\sqrt{3x-2}+2|/2+c$, $x\in(2/3;\infty)-\{2\}$, **u)** $\ln|\sqrt{-1-3x}-\sqrt{2}|/\sqrt{2}-\ln|\sqrt{-1-3x}+\sqrt{2}|/\sqrt{2}+c$, $x\in(-\infty;-1/3)-\{-1\}$, **v)** $2\operatorname{arctg}\sqrt{1-2x}+c$, $x\in(-\infty;1/2)$, **w)** $2\operatorname{arctg}[\sqrt{-1-2x}/\sqrt{3}]/\sqrt{3}+c$, $x\in(-\infty;-1/2)$, **x)** $\operatorname{arctg}[\sqrt{2+3x}/2]+c$, $x\in(-2/3;\infty)$. **1.1.9.** **a)** $|x-1|(x-1)^7/8+c$, $x\in R$, **b)** $|x-1|(x-1)^8+c$, $x\in R$, **c)** $(x+2)\sqrt{x^2+4x+6}/2+\ln[x+2+\sqrt{x^2+4x+6}]+c$, $x\in R$, **d)** $(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}/2-\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}|/2+c$, $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;\infty)$, **e)** $(x-2)\sqrt{6-x^2+4x}/2+5v(x)+c$, kde

$v(x)=\arcsin[(x-2)/\sqrt{10}]$, $x\in(2-\sqrt{10};2+\sqrt{10})$, resp. $v(x)=2\,\mathrm{arctg}\,[(\sqrt{10}-\sqrt{6-x^2+4x})/(x-2)]$, $x\in(2-\sqrt{10};2+\sqrt{10})-\{2\}$, resp. $v(x)=-\arccos[(x-2)/\sqrt{10}]$, $x\in(2-\sqrt{10};2+\sqrt{10})$, resp. $v(x)=-\mathrm{arctg}\,[\sqrt{6-x^2+4x}/(x-2)]$, $x\in(2-\sqrt{10};2+\sqrt{10})-\{2\}$, **f)** $-7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x-3}|/2+(x+2)\sqrt{x^2+4x-3}/2+c$, $x\in(-\infty;-2-\sqrt{7})\cup(-2+\sqrt{7};\infty)$, **g)** $(x-2)\sqrt{4x-x^2-2}/2+v(x)+c$, kde $v(x)=\arcsin[(x-2)/\sqrt{2}]$, $x\in(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$, resp. $v(x)=2\,\mathrm{arctg}\,[(\sqrt{2}-\sqrt{3-x^2+4x})/(x-2)]$, $x\in(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})-\{2\}$, resp. $v(x)=-\arccos[(x-2)/\sqrt{2}]$, $x\in(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$, resp. $v(x)=-\mathrm{arctg}\,[\sqrt{4x-x^2-2}/(x-2)]$, $x\in(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})-\{2\}$, **h)** $(x-2)\sqrt{5-x^2+4x}/2+9v(x)/2+c$, kde $v(x)=\arcsin[(x-2)/3]$, $x\in(-1;5)$, resp. $v(x)=-\arccos[(x-2)/3]$, $x\in(-1;5)$, resp. $v(x)=2\,\mathrm{arctg}\,[(3-\sqrt{5-x^2+4x})/(x-2)]$, $x\in(-1;5)-\{2\}$, resp. $v(x)=-\mathrm{arctg}\,[\sqrt{5-x^2+4x}/(x-2)]$, $x\in(-1;5)-\{2\}$, **i)** $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})+(x+1)\sqrt{x^2+4x+3}/2+c$, $x\in R$, **j)** $\nexists$, **k)** $6\sqrt[6]{x-1}-3\sqrt[3]{x-1}+2\sqrt{x-1}-3\sqrt[3]{(x-1)^2}/2+6\sqrt[6]{(x-1)^5}/5-6\ln(1+\sqrt[6]{x-1})+c$, $x\in(1;\infty)$, **l)** $(x+2)\sqrt{-x^2-4x-2}/2+v(x)+c$, kde $v(x)=\arcsin[(x+2)/\sqrt{2}]$, $x\in(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$, resp. $v(x)=-\arccos[(x+2)/\sqrt{2}]$, $x\in(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$, resp. $v(x)=2\,\mathrm{arctg}\,[(\sqrt{2}-\sqrt{-x^2-4x-2})/(x+2)]$, $x\in(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})-\{-2\}$, resp. $v(x)=-\mathrm{arctg}\,[\sqrt{-x^2-4x-2}/(x+2)]$, $x\in(-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})-\{-2\}$, **m)** $-96\sqrt[6]{x-1}-24\sqrt[3]{x-1}-8\sqrt{x-1}-3\sqrt[3]{(x-1)^2}\ -6\sqrt[6]{(x-1)^5}/5-192\ln(\sqrt[6]{x-1}-2)+c$, $x\in(1;\infty)$, **n)** $(x+2)\sqrt{-x^2-4x-3}/2+v(x)/2+c$, kde $v(x)=\arcsin(x+2)$, $x\in(-3;-1)$, resp. $v(x)=2\,\mathrm{arctg}\,[(1-\sqrt{-x^2-4x-3})/(x+2)]$, $x\in(-3;-1)-\{-2\}$, resp. $v(x)=-\arccos(x+2)$, $x\in(-3;-1)$, resp. $v(x)=-\mathrm{arctg}\,[\sqrt{-x^2-4x-3}/(x+2)]$, $x\in(-3;-1)-\{-2\}$, **o)** $-6\sqrt[6]{x-1}-3\sqrt[3]{x-1}-2\sqrt{x-1}-3\sqrt[3]{(x-1)^2}/2-6\sqrt[6]{(x-1)^5}/5-6\ln(\sqrt[6]{x-1}-1)+c$, $x\in(1;\infty)$, **p)** $100\sqrt[20]{x}-40\sqrt[10]{x}+20\sqrt[10]{x^3}-10\sqrt[5]{x}+4\sqrt[4]{x}-20/(1+\sqrt[20]{x})-120\ln(1+\sqrt[20]{x})+c$, $x\in(0;\infty)$, **q)** $-\ln(2\sqrt{x^2+x+1}+x+2)+c$, $x\in R-\{0\}$, **r)** $\mathrm{arctg}\,[(x-3)/(2\sqrt{x^2-x-1})]+c$, $x\in(-\infty;1/2-\sqrt{5}/2)\cup(1/2+\sqrt{5}/2;\infty)$. **1.1.10.** **a)** $2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x/(1-x)}+c$, $x\in(0;1)$, **b)** $2\sqrt{2+3x}+\sqrt{8}\ln|\sqrt{2+3x}-\sqrt{8}|-\sqrt{8}\ln|\sqrt{2+3x}+\sqrt{8}|+c$, $x\in\langle-2/3;\infty)-\{2\}$, **c)** $2\sqrt{-1-2x}-2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,[\sqrt{-1-2x}/\sqrt{3}]+c$, $x\in(-\infty;-1/2\rangle$, **d)** $2\sqrt{2+3x}-4\,\mathrm{arctg}\,[\sqrt{2+3x}/2]+c$, $x\in\langle-2/3;\infty)$, **e)** $2\sqrt{1-2x}-2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{1-2x}+c$, $x\in(-\infty;1/2\rangle$, **f)** $x\sqrt{(x+1)/x}-\ln|\sqrt{(x+1)/x}-1|/2+\ln|\sqrt{(x+1)/x}+1|/2+c$, $x\in(-\infty;-1\rangle\cup(0;\infty)$, **g)** $(x+2)\sqrt{(x+1)/(x+2)}+\ln|\sqrt{(x+1)/(x+2)}-1|/2-\ln|\sqrt{(x+1)/(x+2)}+1|/2+c$, $x\in(-\infty;-2)\cup\langle-1;\infty)$, **h)** $\sqrt{1+x^2}+c$, $x\in R$, **i)** $(x+1)\sqrt{x/(x+1)}+\ln|\sqrt{x/(x+1)}-1|/2-\ln|\sqrt{x/(x+1)}+1|/2+c$, $x\in(-\infty;-1)\cup\langle0;\infty)$, **j)** $-\sqrt{1-x^2}+c$, $x\in(-1;1)$, **k)** $(x+1)\sqrt{(x+2)/(x+1)}-\ln|\sqrt{(x+2)/(x+1)}-1|/2+\ln|\sqrt{(x+2)/(x+1)}+1|/2+c$, $x\in(-\infty;-2\rangle\cup(-1;\infty)$, **l)** $(x+1)\sqrt{(x-1)/(x+1)}+\ln|\sqrt{(x-1)/(x+1)}-1|-\ln|\sqrt{(x-1)/(x+1)}+1|+c$, $x\in(-\infty;-1)\cup\langle1;\infty)$, **m)** $3(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}/5+c$, $x\in(-1;\infty)$, **n)** $-2\sqrt{x}+x+2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$, $x\in(0;\infty)$, **o)** $5+4\sqrt{x}-x-4\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$, $x\in(0;\infty)$, **p)** $5-4\sqrt{x}-x-4\ln|\sqrt{x}-1|+c$, $x\in(0;\infty)-\{1\}$, **q)** $-6\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x^5}/5+6\sqrt[6]{x^7}/7+6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x}+c$, $x\in(0;\infty)$, **r)** $2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,[(2\sqrt[6]{x}-1)/\sqrt{3}]-2\ln(1+\sqrt[6]{x})+\ln(1-\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x})+c$, $x\in(0;\infty)$, **s)** $2\sqrt{x^2+x}+c$, $x\in(-\infty;-1)\cup(0;\infty)$, **t)** $(2x^3-4)\sqrt{1+x^3}/9+c$, $x\in(-1;\infty)$, **u)** $\sqrt{x^2-1}/x+c$, $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, **v)** $\ln[\sqrt[4]{x^4+1}+x]/4-\ln[\sqrt[4]{x^4+1}-x]/4-\mathrm{arctg}\,[\sqrt[4]{x^4+1}/x]/2+c$, $x\in R-\{0\}$, **w)** $\ln|x+\sqrt[4]{x^4-1}|/4-\ln|x-\sqrt[4]{x^4-1}|/4-\mathrm{arctg}\,[\sqrt[4]{x^4-1}/x]/2+c$, $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, **x)** $\ln|\sqrt{1-x^4}+x\sqrt[4]{4-4x^4}+x^2|\sqrt{32}-\ln|\sqrt{1-x^4}-x\sqrt[4]{1-x^4}+x^2|\sqrt{32}-\mathrm{arctg}\,[\sqrt[4]{4-4x^4}/x+1]/\sqrt{8}-\mathrm{arctg}\,[\sqrt[4]{4-4x^4}/x-1]/\sqrt{8}+c$, $x\in(-1;1)-\{0\}$, **y)** $2\sqrt{(x^3+1)^3}/9-2\sqrt{x^3+1}/3+c$, $x\in(-1;\infty)$. **1.1.11.** **a)** $-\sin^2 2x\cdot\cos 2x/6-\cos 2x/3+c$, $x\in R$, resp. $\cos^3 2x/6-\cos 2x/2+c$, $x\in R$, **b)** $3x/8-\cos 3x\cdot\sin 3x/8-\cos 3x\cdot\sin^3 3x/12+c$, $x\in R$, **c)** $\cos^2 3x\cdot\sin 3x/9+2\sin 3x/9+c$, $x\in R$, resp. $\sin 3x/3-\sin^3 3x/9+c$, $x\in R$, **d)** $3x/8+3\sin 2x\cdot\cos 2x/16+\sin 2x\cdot\cos^3 2x/8+c$, $x\in R$, **e)** $-\sinh 4x\cdot\cosh 4x/8-x/2+c$, $x\in R$, resp. $\sinh 8x/16-x/2+c$ resp. $\mathrm{e}^{8x}/32-x/2-\mathrm{e}^{-8x}/32+c$, $x\in R$, **f)** $\sinh^2 2x\cdot\cosh 2x/6-\cosh 2x/3+c$, $x\in R$, resp. $\cosh^3 2x/6-\cosh 2x/2+c$, $x\in R$, resp. $=\mathrm{e}^{6x}/48-3\,\mathrm{e}^{2x}/16-3\,\mathrm{e}^{-2x}/16+\mathrm{e}^{-6x}/48+c$, $x\in R$, **g)** $3x/8-3\sinh x\cdot\cosh x/8+\sinh^3 x\cdot\cosh x/4+c$, $x\in R$, resp. $\mathrm{e}^{4x}/64-\mathrm{e}^{2x}/8+3x/8+\mathrm{e}^{-2x}/8-\mathrm{e}^{-4x}/64+c$, $x\in R$, **h)** $x\cosh x-\sinh x+c$, $x\in R$, **i)** $(x^2+2)\cosh x-2x\sinh x+c$, $x\in R$, **j)** $(x^3+6x)\cosh x-(3x^2+6)\sinh x+c$, $x\in R$, **k)** $\sinh 3x\cdot\cosh 3x/6+x/2+c$, $x\in R$, resp. $\sinh 6x/12+x/2+c$, $x\in R$, resp. $\mathrm{e}^{6x}/24+x/2-\mathrm{e}^{-6x}/24+c$, $x\in R$, **l)** $\sinh x\cdot\cosh^2 x/3+2\sinh x/3+c$, $x\in R$, resp. $\sinh^3 x/3+\sinh x+c$, $x\in R$, resp. $\mathrm{e}^{3x}/24+3\,\mathrm{e}^{x}/8-3\,\mathrm{e}^{-x}/8-\mathrm{e}^{-3x}/24+c$, $x\in R$, **m)** $3x/8+3\sinh 2x\cdot\cosh 2x/16+\sinh 2x\cdot\cosh^3 2x/8+c$, $x\in R$, resp. $\mathrm{e}^{8x}/128+\mathrm{e}^{4x}/16+3x/8-\mathrm{e}^{-4x}/16-\mathrm{e}^{-8x}/128+c$, $x\in R$, **n)** $x\sinh x-\cosh x+c$, $x\in R$, **o)** $(x^2+2)\sinh x-2x\cosh x+c$, $x\in R$, **p)** $(x^3+6x)\sinh x-(3x^2+6)\cosh x+c$, $x\in R$. **1.1.12.** **a)** $\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x+c$, $x\in\langle-1;1\rangle$, **b)** $x\sqrt{1-x^2}/4+(2x^2-1)\arcsin x/4+c$, $x\in\langle-1;1\rangle$, **c)** $(x^2+2)\sqrt{1-x^2}/9+x^3\arcsin x/3+c$, $x\in\langle-1;1\rangle$, **d)** $-\sqrt{1-x^2}+x\arccos x+c$, $x\in\langle-1;1\rangle$, **e)** $-x\sqrt{1-x^2}/4+(2x^2-1)\arccos x/4+c$, $x\in\langle-1;1\rangle$, **f)** $-(x^2+2)\sqrt{1-x^2}/9+x^3\arccos x/3+c$, $x\in\langle-1;1\rangle$, **g)** $-x/2+\mathrm{arctg}\,x/2+x^2\,\mathrm{arctg}\,x/2+c$, $x\in R$, **h)** $-x^2/6+x^3\,\mathrm{arctg}\,x/3+\ln(x^2+1)/6+c$, $x\in R$,

i) $x/4-x^3/12-\operatorname{arctg} x/4+x^4\operatorname{arctg} x/4+c,\ x\in R$, **j)** $-x\operatorname{arctg} x+(x^2+1)\operatorname{arctg}^2 x/2+\ln(x^2+1)/2+c,\ x\in R$, **k)** $x\operatorname{arccotg} x+\ln(x^2+1)/2+c,\ x\in R$, **l)** $x/2+x^2\operatorname{arccotg} x/2-\operatorname{arctg} x/2+c,\ x\in R$, **m)** $x^2/6+x^3\operatorname{arccotg} x/3-\ln(x^2+1)/6+c,\ x\in R$, **n)** $-x/4+x^3/12+x^4\operatorname{arccotg} x/4+\operatorname{arctg} x/4+c,\ x\in R$, **o)** $x\operatorname{arccotg} x+(x^2+1)\operatorname{arccotg}^2 x/2+\ln(x^2+1)/2+c,\ x\in R$, **p)** $x\arcsin\sqrt{(x+1)/x}+\sqrt{-x-1}+c,\ x\in(-\infty;-1\rangle$, **q)** $x\arcsin\sqrt{x/(x+1)}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c,\ x\in\langle 0;\infty)$, resp. $(x+1)\arcsin\sqrt{x/(x+1)}-\sqrt{x}+c,\ x\in\langle 0;\infty)$, **r)** $x\arcsin\sqrt{(x+1)/(x+2)}-\sqrt{x+1}+2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+c,\ x\in\langle -1;\infty)$, resp. $(x+2)\arcsin\sqrt{(x+1)/(x+2)}-\sqrt{x+1}+c,\ x\in\langle -1;\infty)$, **s)** $x\arcsin\sqrt{(x+2)/(x+1)}+\sqrt{-x-2}+\operatorname{arctg}\sqrt{-x-2}+c,\ x\in(-\infty;-2\rangle$, resp. $(x+1)\arcsin\sqrt{(x+2)/(x+1)}+\sqrt{-x-2}+c,\ x\in(-\infty;-2\rangle$, **t)** $x\arcsin\sqrt{(x-1)/(x+1)}-\sqrt{2x-2}+\operatorname{arctg}\sqrt{(x-1)/2}+c,\ x\in\langle 1;\infty)$, resp. $(x+1)\arcsin\sqrt{(x-1)/(x+1)}-\sqrt{2(x-1)}+c,\ x\in\langle 1;\infty)$, **u)** $x\arccos\sqrt{(x+1)/x}-\sqrt{-x-1}+c,\ x\in(-\infty;-1\rangle$, **v)** $x\arccos\sqrt{x/(x+1)}+\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c,\ x\in\langle 0;\infty)$, resp. $(x+1)\arccos\sqrt{x/(x+1)}+\sqrt{x}+c,\ x\in\langle 0;\infty)$, **w)** $x\arccos\sqrt{(x+2)/(x+1)}-\sqrt{-x-2}-\operatorname{arctg}\sqrt{-x-2}+c,\ x\in(-\infty;-2\rangle$, resp. $(x+1)\arccos\sqrt{(x+2)/(x+1)}-\sqrt{-x-2}+c,\ x\in(-\infty;-2\rangle$, **x)** $x\arccos\sqrt{(x-1)/(x+1)}+\sqrt{2(x-1)}-\operatorname{arctg}\sqrt{(x-1)/2}+c,\ x\in\langle 1;\infty)$, resp. $(x+1)\arccos\sqrt{(x-1)/(x+1)}+\sqrt{2(x-1)}+c,\ x\in\langle 1;\infty)$. **1.1.13.** **a)** $\ln^5 x/5+c,\ x\in(0;\infty)$, **b)** $\ln^2 x^4/8+c,\ x\in R-\{0\}$, **c)** $2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+c,\ x\in(0;\infty)$, **d)** $\ln(1+\mathrm{e}^x)+c,\ x\in R$, **e)** $-(x^6/2+3x^4/2+3x^2+3)\,\mathrm{e}^{-x}+c,\ x\in R$, **f)** $-(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x^2}/2+c,\ x\in R$, **g)** $\ln|\sqrt{2^x+4}-2|/\ln 4-\ln|\sqrt{2^x+4}+2|/\ln 4+c,\ x\in R$, **h)** $\ln|\sqrt{2^x+3}-\sqrt{3}|/\sqrt{3}/\ln 2-\ln|\sqrt{2^x+3}+\sqrt{3}|/\sqrt{3}/\ln 2+c,\ x\in R$, **i)** $\ln|\sqrt{2^x+2}-\sqrt{2}|/\sqrt{2}/\ln 2-\ln|\sqrt{2^x+2}+\sqrt{2}|/\sqrt{3}/\ln 2+c,\ x\in R$, **j)** $x/4-\ln(2^x+4)/\ln 16+c,\ x\in R$, **k)** $x/3-\ln(2^x+3)/\ln 8+c,\ x\in R$, **l)** $x/2-\ln(2^x+2)/\ln 4+c,\ x\in R$, **m)** $2\operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1}/\ln 2+c,\ x\in(0;\infty)$, **n)** $\operatorname{arctg}\sqrt{2^{x-2}-1}/\ln 2+c,\ x\in(2;\infty)$, **o)** $2\operatorname{arctg}\sqrt{2^x/3-1}/\sqrt{3}/\ln 2+c,\ x\in(\ln_2 3;\infty)$, **p)** $\ln|2^x-1|/\ln 2-x+c,\ x\in R-\{0\}$, **q)** $\ln|2^x-4|\ln 16-x/4+c,\ x\in R-\{2\}$, **r)** $\ln|2^x-3|\ln 8-x/3+c,\ x\in R-\{2\}$. **1.1.14.** **a)** $-1/(\operatorname{tg} x+1)+c,\ x\in R-\{-\pi/4+k\pi,\pi/2+k\pi,k\in Z\}$, **b)** $-2\operatorname{arctg}[(5\operatorname{tg}(3x/2)-2)/\sqrt{21}]/\sqrt{189}+c,\ x\in R-\{\pi/3+2k\pi/3,k\in Z\}$, **c)** $\ln|\operatorname{tg} x+2-\sqrt{3}|/\sqrt{12}-\ln|\operatorname{tg} x+2+\sqrt{3}|/\sqrt{12}+c,\ x\in R-\{-\pi/12+k\pi,7\pi/12+k\pi,\pi/2+k\pi,k\in Z\}$, **d)** $-\ln|3\operatorname{tg}(x/2)-4-\sqrt{7}\sqrt{7}|+\ln|3\operatorname{tg}(x/2)-4+\sqrt{7}|/\sqrt{7}+c,\ x\in R-\{\pi+2k\pi,k\in Z\}-\{x:\sin x=3/4\}$, **e)** $1/2/\operatorname{tg} x+c,\ x\in R-\{k\pi/2,k\in Z\}$, **f)** $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg} x/3]/3+c,\ x\in R-\{\pi/2+k\pi,k\in Z\}$, **g)** $-\ln|\operatorname{tg}(x/2)-\sqrt{3}|/\sqrt{3}+\ln|\operatorname{tg}(x/2)+\sqrt{3}|/\sqrt{3}+c,\ x\in R-\{\pm 2\pi/3+2k\pi,\pi+2k\pi,k\in Z\}$, **h)** $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(3x/2)/\sqrt{3}]/\sqrt{27}+c,\ x\in R-\{\pi/3+2k\pi/3,k\in Z\}$, **i)** $-\ln|1-2\cos 2x|/4+c,\ x\in R-\{\pm\pi/6+k\pi,k\in Z\}$, **j)** $-\ln(4-3\sin x)/3+c,\ x\in R$, **k)** $-\ln(2-\sin 3x)/3+c,\ x\in R$, **l)** $-\ln(4-3\cos 2x)/6+c,\ x\in R$, **m)** $-\arcsin x/x+\ln|x|-\ln(2+2\sqrt{1-x^2})+c,\ x\in\langle -1;1\rangle-\{0\}$, **n)** $-\arccos x/x-\ln|x|+\ln(2+2\sqrt{1-x^2})+c,\ x\in\langle -1;1\rangle-\{0\}$, **o)** $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+c,\ x\in(-1;1)$, **p)** $2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+c,\ x\in(0;1)$, **q)** $-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x+c,\ x\in(-1;1)$, **r)** $-2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\arccos\sqrt{x}+c,\ x\in(0;1)$, **s)** $[x+(x^2-1)\operatorname{arctg} x]/4/(x^2+1)+c,\ x\in R$, **t)** $-(x^2+1)\operatorname{arctg} x/4/(x^2-1)+\ln|x-1|/8-\ln|x+1|/8+c,\ x\in R-\{\pm 1\}$, **u)** $-\operatorname{arctg} x/x+\ln x^2/2-\ln(x^2+1)/2+c,\ x\in R-\{0\}$, **v)** $\operatorname{arctg}^2 x/2+c,\ x\in R$, **w)** $-\operatorname{arccotg}^2 x/2+c,\ x\in R$, **x)** $-\operatorname{arccotg} x/x-\ln x^2/2+\ln(x^2+1)/2+c,\ x\in R-\{0\}$. **1.1.15.** **a)** $\ln|\arcsin x|+c,\ x\in(-1;1)-\{0\}$, **b)** $-\ln|\arccos x|+c,\ x\in(-1;1)$, **c)** $2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\ln(x+1)+c,\ x\in(0;\infty)$, **d)** $2\sqrt{x}\operatorname{arccotg}\sqrt{x}+\ln(x+1)+c,\ x\in(0;\infty)$, **e)** $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x)/2+c,\ x\in R-\{\pi/2+k\pi,k\in Z\}$, **f)** $-\operatorname{arctg}(2\operatorname{cotg} x)/2+c,\ x\in R-\{k\pi,k\in Z\}$, **g)** $2\sqrt{3x-2}+2\ln|\sqrt{3x-2}-2|-2\ln|\sqrt{3x-2}+2|+c,\ x\in\langle 2/3;\infty)-\{2\}$, **h)** $2\sqrt{-1-3x}+\sqrt{2}\ln|\sqrt{-1-3x}-\sqrt{2}|-\sqrt{2}\ln|\sqrt{-1-3x}+\sqrt{2}|+c,\ x\in(-\infty;-1/3\rangle-\{-1\}$, **i)** $\ln^2\operatorname{arctg} x/2+c,\ x\in(0;\infty)$, **j)** $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos x^4})+c,\ x\in R$, **k)** $2\sqrt{(2+\ln x)^3}/3+c,\ x\in(\mathrm{e}^{-2};\infty)$, **l)** $\arcsin\ln x+c,\ x\in(1/\mathrm{e};\mathrm{e})$, **m)** $\ln|x|-\ln|2-x^3+2\sqrt{1-x^3+x^6}|/3+c,\ x\in R-\{0\}$, **n)** $\ln|x|-\ln|2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}|/3+c,\ x\in R-\{0\}$, **o)** $\ln(1-2\sqrt{x-x^2})/4+\operatorname{arctg}[\sqrt{x-x^2}/x]-x/2-\sqrt{x-x^2}/2+c,\ x\in(0;1)$, **p)** $x-x^2/2+3\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x}|/8+(5-2x)\sqrt{x^2-x}/4+c,\ x\in(-\infty;0)\cup\langle 1;\infty)$, **q)** $x+\sqrt[3]{3x+4}-\sqrt[3]{(3x+4)^2}/2-\ln(1+\sqrt[3]{3x+4})+c,\ x\in\langle -4/3;\infty)$, **r)** $-2\sqrt{1+x-x^2}+\ln|x|-\ln|2+x+2\sqrt{1+x-x^2}|+c,\ x\in(1/2-\sqrt{5}/2;1/2+\sqrt{5}/2)-\{0\}$, **s)** $6\operatorname{arctg}\sqrt{(1-x)/(1+x)}-4\sqrt{(1-x)/(1+x)}-\sqrt{1-x^2}+c,\ x\in(-1;1\rangle$, **t)** $4\sqrt{(1+x)/(1-x)}-6\operatorname{arctg}\sqrt{(1+x)/(1-x)}+\sqrt{1-x^2}+c,\ x\in\langle -1;1)$. **1.1.16.** **a)** $|x-1|^7(x-1)/8+c,\ x\in R$, **b)** $|x-1|^8(x-1)/9+c,\ x\in R$, **c)** $-\operatorname{sgn} x\,\mathrm{e}^{-|x|}+c,\ x\in R-\{0\}$, **d)** $\operatorname{sgn} x\,\mathrm{e}^{|x|}+c,\ x\in R-\{0\}$, **e)** $-x^2/4+x^2\ln x/2+c,\ x\in(0;\infty)$, **f)** $-x^3/9+x^3\ln x/3+c,\ x\in(0;\infty)$, **g)** $-x^4/16+x^4\ln x/4+c,\ x\in(0;\infty)$, **h)** $-x^5/25+x^5\ln x/5+c,\ x\in(0;\infty)$, **i)** $7(x+1)\ln(x+1)-7x+c,\ x\in(-1;\infty)$, **j)** $2x^3/27-2x^3\ln x/9+x^3\ln^2 x/3+c,\ x\in(0;\infty)$, **k)** $x^4/32-x^4\ln x/8+x^4\ln^2 x/4+c,\ x\in(0;\infty)$, **l)** $2x^5/125-2x^5\ln x/25+x^5\ln^2 x/5+c,\ x\in(0;\infty)$, **m)** $2(2x-3)\ln(2x-3)-4x+c,\ x\in R-\{3/2\}$, **n)** $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg} x+c,\ x\in R$, **o)** $(2\sqrt[2]{x^5}-10x^2+40\sqrt{x^3}-120x+240\sqrt{x}-240)\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+c,\ x\in\langle 0;\infty)$,

p) $(2x-4\sqrt{x}+4)\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+c$, $x\in\langle 0;\infty)$, **q)** $9\sqrt[9]{(2x-3)^{10}}/20+c$, $x\in\langle 3/2;\infty)$, **r)** $-7\sqrt[7]{(3-2x)^8}/16+c$, $x\in(-\infty;3/2\rangle$, **s)** $-(x^3+3x^2+6x+5)\,\mathrm{e}^{-x}+c$, $x\in R$, **t)** $x-\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^x-\ln(1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}})+c$, $x\in(-\infty;0\rangle$, **u)** $\mathrm{e}^x\operatorname{tg}(x/2)+c$, $x\in R-\{\pi+2k\pi, k\in Z\}$, **v)** $\mathrm{e}^x(\sin x+1)/\cos x$, $x\in R-\{\pi/2+k\pi, k\in Z\}$, **w)** $\mathrm{e}^x(\sin x-1)/\cos x$, $x\in R-\{\pi/2+k\pi, k\in Z\}$, **x)** $-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x-\ln(\mathrm{e}^{-2x}+1)/2+c$, $x\in R$. **1.1.17. a)** $-(2x^2-3)\cos 2x/4+x\sin 2x/2+c$, $x\in R$, **b)** $(3x^2-6)\sin x-(x^3-6x-1)\cos x+c$, $x\in R$, **c)** $(3x^2-6)\cos x+(x^3-6x-1)\sin x+c$, $x\in R$, **d)** $x\cos 2x/2+(2x^2-3)\sin 2x/4+c$, $x\in R$, **e)** $-(9x^2+9x+7)\cos 3x/27+(2x+1)\sin 3x/9+c$, $x\in R$, **f)** $(2x+1)\cos 3x/9+(9x^2+9x+7)\sin 3x/27+c$, $x\in R$, **g)** $\ln|\operatorname{tg}2x|/2+c$, $x\in R-\{k\pi/2, k\in Z\}$, **h)** $3(x+2)^4\ln|x+1|/2-3(x+1)^4/8-2(x+1)^3-9(x+1)^2/2-6(x+1)-3\ln|x+1|/2+c$, $x\in R-\{-1\}$, **i)** $(2x^2-2x-1)\,\mathrm{e}^{2x}/4+c$, $x\in R$, **j)** $(x-1)^5\ln(x+1)-(x+1)^5/5+5(x+1)^4/2-40(x+1)^3/3+40(x+1)^2-80(x+1)+32\ln(x+1)+c$, $x\in(-1;\infty)$, **k)** $-\sqrt{(1-2\,\mathrm{e}^x)^3}/3+c$, $x\in(-\infty;-\ln 2)$, **l)** $(x^3-1)\ln(1-x)/6-x^3/18-x^2/12-x/6+c$, $x\in(-\infty;-1)$, **m)** $2(x+1)^6\ln|x-2|/3-(x-2)^6/9-12(x-2)^5/5-45(x-2)^4/2-120(x-2)^3-405(x-2)^2-972(x-2)-486\ln|x-2|+c$, $x\in R-\{2\}$, **n)** $(9x^2+3x+8)\,\mathrm{e}^{3x}/27+c$, $x\in R$, **o)** $2\sqrt{(1+\mathrm{e}^x)^3}/3+c$, $x\in R$.

1.2.1. Napr. $D_k=\{0,1/k,2/k,\dots,(k-1)/k,1\}$ pre $k\in N$, resp. $D_k=\{0,2/k,3/k,\dots,(k-1)/k,1\}$ pre $k\in N$, resp. $D_k=\{0,2/k,4/k,\dots,2\lfloor(k-1)/2\rfloor/k,1\}$ pre $k\in N$. **1.2.2. a)** $S_D=2-1/2/n$, $S_H=2+1/2/n$, $S_T=2$ pre $n\in N$, $S_D=18/10$, $S_H=22/10$, $S_T=2$ pre $n=10$, $S_D=38/20$, $S_H=42/20$, $S_T=2$ pre $n=20$, $S_D=198/100$, $S_H=202/100$, $S_T=1/2$ pre $n=100$, **b)** $S_D=4/3-2/n-4/3/n^2$, $S_H=4/3+2/n-4/3/n^2$, $S_T=4/3+2/3/n^2$ pre $n\in N$ párne, $S_D=28/25$, $S_H=38/25$, $S_T=67/50$ pre $n=10$, $S_D=123/100$, $S_H=143/100$, $S_T=267/200$ pre $n=20$, $S_D=3283/2500$, $S_H=3383/2500$, $S_T=6667/5000$ pre $n=100$, **c)** $S_D=3/2-1/2/n$, $S_H=3/2+1/2/n$, $S_T=3/2$ pre $n\in N$, $S_D=29/20$, $S_H=31/20$, $S_T=1/2$ pre $n=10$, $S_D=59/40$, $S_H=61/40$, $S_T=1/2$ pre $n=20$, $S_D=299/200$, $S_H=301/200$, $S_T=1/2$ pre $n=100$, **d)** $S_D=2/3-1/2/n-1/6/n^2$, $S_H=2/3+1/2/n-1/6/n^2$, $S_T=2/3+1/12/n^2$ pre $n\in N$, $S_D=123/200$, $S_H=143/200$, $S_T=267/400$ pre $n=10$, $S_D=513/800$, $S_H=553/800$, $S_T=1067/1600$ pre $n=20$, $S_D=13233/20000$, $S_H=13433/20000$, $S_T=26667/40000$ pre $n=100$, **e)** $S_D=1/2-1/2/n$, $S_H=1/2+1/2/n$, $S_T=1/2$ pre $n\in N$, $S_D=9/20$, $S_H=11/20$, $S_T=1/2$ pre $n=10$, $S_D=19/40$, $S_H=21/40$, $S_T=1/2$ pre $n=20$, $S_D=99/200$, $S_H=101/200$, $S_T=1/2$ pre $n=100$, **f)** $S_D=2/3-1/2/n-1/6/n^2$, $S_H=2/3+1/2/n-1/6/n^2$, $S_T=2/3+1/12/n^2$ pre $n\in N$, $S_D=123/200$, $S_H=143/200$, $S_T=267/400$ pre $n=10$, $S_D=513/800$, $S_H=553/800$, $S_T=1067/1600$ pre $n=20$, $S_D=13233/20000$, $S_H=13433/20000$, $S_T=26667/40000$ pre $n=100$. **1.2.3.** $0{,}718\,771\,403$ pre $n=10$ pre ľavé hranice, $0{,}705\,803\,382$ pre $n=20$ pre ľavé hranice, $0{,}692\,835\,360$ pre $n=10$ pre stredy, $0{,}693\,069\,098$ pre $n=20$ pre stredy, $0{,}668\,771\,403$ pre $n=10$ pre pravé hranice, $0{,}680\,803\,382$ pre $n=20$ pre pravé hranice intervalov. **1.2.4. a)** ľavý, **b)** pravý, **c)** rovnaké, **d)** ľavý, **e)** pravý, **f)** pravý, **g)** ľavý, **h)** ľavý, **i)** ľavý. **1.2.5. a)** $\ln 2$, **b)** $1/2$, **c)** $\pi/4$, **d)** $1/(a+1)$, **e)** $2/\pi$, **f)** $2(\sqrt{8}-1)/3$. **1.2.6. a)** $\ln x$, $x>0$, **b)** $-\cos x/x$, $x>0$, **c)** $\sin x/x$, $x>0$. **1.2.7. a)** -6, sustitúciu možno použiť, správny výsledok -6, **b)** 0, v bode $\pi/2$ má funkcia $t=\operatorname{tg}(x)$ singularitu vplyvom funkcie a výjdu rovnaké hranice integrovania, správny výsledok $\pi/\sqrt{2}$, **c)** $\operatorname{arctg}2$, v bode 0 má funkcia $t=1/x$ singularitu vplyvom funkcie, správny výsledok $\operatorname{arctg}(1/2)$. **1.2.8. a)** 10; **b)** $5/2$; **c)** 0; **d)** $1-2/\mathrm{e}$; **e)** $\pi/4$; **f)** $\ln 3/2-\ln 2/2$; **g)** $1/6$; **h)** $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$; **i)** $\sqrt{15}-\sqrt{3}$; **j)** $1-\sqrt{3}/2$; **k)** $\sqrt{2}-1$; **l)** 0; **m)** $6-2\operatorname{arctg}3$; **n)** $4\ln 2+3$; **o)** $\sqrt{27}\pi/2+8$; **p)** $\ln 2\sqrt{7}+7-\ln 9$; **q)** 2π; **r)** π; **s)** $\pi/2+1$; **t)** $\pi/3+\sqrt{3}/2$; **u)** $4/\ln 3+3/\ln 4+10/\ln 6$; **v)** 0; **w)** -10; **x)** $(n^2-n)/2$. **1.2.9. a)** 1, **b)** $2/\mathrm{e}$, **c)** $2-2/\mathrm{e}$, **d)** $\mathrm{e}^2/4+1/4$, **e)** $3/2$, **f)** $1/2$, **g)** $2-\pi/4$, **h)** $2-\pi/4$, **i)** 1, **j)** 2, **k)** 0, **l)** -2, **m)** 1, **n)** 0, **o)** 0, **p)** 0, **q)** 1, **r)** $2\pi/3-\sqrt{3}/2$, **s)** π, **t)** π, **u)** π, **v)** π, **w)** 0, **x)** 0. **1.2.10. a)** 0, **b)** 0 pre $m\neq n$, π pre $m=n$, **c)** 0 pre $m\neq n$, π pre $m=n$, **d)** 0, **e)** 0 pre $m\neq n$, π pre $m=n$, **f)** 0 pre $m\neq n$, π pre $m=n$. **1.2.11. a)** $I_n=(n-1)I_{n-2}/n$, $n=2,3,4,\dots$, $I_0=\pi$, $I_1=2$, t. j. $I_n=\pi n!/2^n/(n/2)!/(n/2)!$ pre n párne, $I_n=2\cdot 2^{n-1}[(n-1)/2]![(n-1)/2]!/n!$ pre n nepárne, resp. $I_{2k}=\pi(2k)!/2^{2k}/k!/k!$, $I_{2k+1}=2\cdot 2^{2k}k!k!/(2k+1)!$, $k\in N$, $J_n=(n-1)J_{n-2}/n$, $n=2,3,4,\dots$, $I_0=2\pi$, $I_1=0$, t. j. $I_n=0$ pre n nepárne, $I_n=2\pi n!/2^n/(n/2)!/(n/2)!$ pre n párne, resp. $I_{2k}=2\pi(2k)!/2^{2k}/k!/k!$, $I_{2k+1}=0$, $k\in N$, **b)** $I_n=(n-1)I_{n-2}/n$, $n=2,3,4,\dots$, $I_0=\pi$, $I_1=0$, t. j. $I_n=0$ pre n nepárne, $I_n=\pi n!/2^n/(n/2)!/(n/2)!$ pre n párne, resp. $I_{2k}=\pi(2k)!/2^{2k}/k!/k!$, $I_{2k+1}=0$, $k\in N$, $I_n=(n-1)I_{n-2}/n$, $n=2,3,4,\dots$, $I_0=2\pi$, $I_1=0$, t. j. $I_n=0$ pre n nepárne, $I_n=2\pi n!/2^n/(n/2)!/(n/2)!$ pre n párne, resp. $I_{2k}=2\pi(2k)!/2^{2k}/k!/k!$, $I_{2k+1}=0$, $k\in N$. **1.2.12. a)** $1/6$, **b)** $1/2+1/\ln 2$, **c)** $2/\pi$, **d)** 0, **e)** $1/2$, **f)** 0. **1.2.13. a)** $\nexists$, **b)** $\nexists$, **c)** $\nexists$, **d)** $\nexists$, **e)** ∞, **f)** $-1/4$, **g)** $\ln 4-3/4$, **h)** $\ln 4-1$, **i)** ∞, **j)** $-\pi$, **k)** $\pi/2$, **l)** $3\pi/8$, **m)** $1/2$, **n)** 0, **o)** $\pi/4$, **p)** $\pi/\sqrt{27}-\ln 2/3$, **q)** π, **r)** ∞, **s)** $\nexists$, **t)** ∞. **1.2.15.** $I_n=nI_{n-1}$ pre $n\in N$, $I_0=1$, t. j. $I_n=n!$ pre $n\in N\cup\{0\}$. **1.2.16. a)** ∞, **b)** $-\pi$, **c)** 0, **d)** ∞, **e)** π, **f)** $-\infty$, **g)** 0, **h)** $\nexists$. **1.2.17. a)** ∞, **b)** $\pi/\sqrt{8}$, **c)** π, **d)** $\nexists$, **e)** $\exists$, **f)** $\exists$, **g)** $\exists$, **h)** $\exists$, **i)** $\exists$, **j)** ∞, **k)** $\exists$, **l)** $\nexists$, **m)** 0, **n)** $\exists$, **o)** $-\infty$, **p)** $\exists$. **1.2.18. a)** $\longmapsto$, **b)** $\longmapsto\infty$, **c)** $\longmapsto\infty$, **d)** $\longmapsto$, **e)** $\longmapsto$, **f)** $\longmapsto$, **g)** $\longmapsto\infty$, **h)** $\longmapsto\infty$. **1.2.19. a)** πr^2, **b)** πab. **1.2.20.** $av/2$. **1.2.21.**

a) $1/6$, **b)** $4\ln(3-\sqrt{5})-4\ln(3+\sqrt{5})+6\sqrt{5}$, **c)** $1/3$, **d)** $1/2$, **e)** 72, **f)** $32\sqrt{6}/3$, **g)** $\sqrt{89^3}/6$, **h)** $343/6$, **i)** $(\sqrt{89^3}-605)/12$, resp. $(\sqrt{89^3}+605)/12$, **j)** $34/3$, resp. $275/6$. **1.2.22.** **a)** $3-\mathrm{e}$, **b)** $14/\mathrm{e}-5$, resp. $2\,\mathrm{e}-5$, **c)** $3\,\mathrm{e}-8$. **1.2.23.** **a)** $|1/(m+1)-1/(n+1)|$, **b)** $|m/(m+1)-n/(n+1)|$, **c)** $|m/(m+1)-1/(n+1)|$, **d)** $|m/(m+1)-1/(n+1)|$, **e)** $|n/(n+1)-1/(m+1)|$, **f)** $|n/(n+1)-1/(m+1)|$. **1.2.24.** **a)** $1/12$, **b)** $43/12$. **1.2.25.** 6, 2, 48. **1.2.26.** $9\arcsin(\sqrt{14}/6-1/3)+(\sqrt{28}-\sqrt{8})\sqrt{\sqrt{56}+9}-\sqrt{14}-1/2\approx 8{,}408\,981\,979$. **1.2.27.** $4\pi-3\sqrt{7}/2-4\arcsin(3\sqrt{7}/8)+9\arcsin\sqrt{7}/4\approx 9{,}320\,477\,896$. **1.2.28.** π pre $n=1$, $3\pi/8$ pre $n=3$, $15\pi/128$ pre $n=5$, $35\pi/1024$ pre $n=7$, $315\pi/32768$ pre $n=9$. **1.2.29.** $1/2$ pre $n=2$, $1/6$ pre $n=4$, $1/20$ pre $n=6$, $1/70$ pre $n=8$. **1.2.30.** 3π. **1.2.31.** **a)** $8/15$, **c)** $n^5/60$. **1.2.32.** **a)** $3\pi^3$, **b)** $9\pi/4$, **c)** $19\pi/2$, **d)** $19\pi/2+12$. **1.2.33.** **a)** $27\pi/8$, **b)** $9\pi/48$, **c)** $19\pi/28$, **d)** $27\pi/168$, **e)** $27\pi/88$, **f)** $3\pi/28$. **1.2.34.** a. **1.2.35.** **a)** $4\pi r^3/3$, **b)** $4\pi abc/3$, **c)** $\pi r^2h/3$, **d)** $\pi(R^2+Rr+r^2)v/3$. **1.2.36.** **a)** 2π, resp. $\sqrt{512}\pi/5$, **b)** $3\pi/10$, resp. $3\pi/10$, **c)** $2\pi/15$, resp. $\pi/6$, **d)** $5\pi\sqrt{8}/3$, resp. $\pi/4$, **e)** $4\pi/5$, resp. $\pi/6$, **f)** $16\pi/35$, resp. $16\pi/35$, **g)** $10\pi\ln^2 10-20\pi\ln 10+20\pi$, resp. $100\pi\ln 10-50\pi$, **h)** $\pi^2/12$, resp. $2\pi-\pi^3/6$, **i)** $\pi^2/6$, resp. $4\pi-\pi^3/3$. **1.2.37.** $V_p=2\pi/(2-p)$ pre $p<2$, $V_p=\infty$ pre $p\geq 2$. **1.2.38.** $V_p=\pi/(2p-1)$ pre $p>1/2$, $V_p=\infty$ pre $p\leq 1/2$. **1.2.39.** **a)** $\pi/12$, resp. $8\pi/35$, **b)** $5\pi^2$, resp. $6\pi^3$, **c)** $6\pi^3+2\pi^2$, resp. $16\pi^5+8\pi^4/3-48\pi^3-\pi^2$, **d)** $12\pi^4-41\pi^2/2$, resp. $64\pi^7-476\pi^5+1437\pi^3$. **1.2.40.** **a)** $320a^3\pi/3$, **b)** $16\pi^4/3-32\pi^2$, **c)** $8\pi/3$. **1.2.41.** **a)** $2\pi r$, **b)** $\pi r+2r$. **1.2.42.** **a)** $\ln(\sqrt{5}+2)/4+2\sqrt{5}/4$, **b)** $\ln(\sqrt{401}+20/4+5\sqrt{401}$, **c)** $\ln(\sqrt{4a^2+1}+2a)/4+a\sqrt{4a^2+1}/2$, **d)** $\sqrt{5}/2+\ln(9+4\sqrt{5})/8$, **e)** $1-\sqrt{2}+\sqrt{(1+\mathrm{e}^2)}+\ln(1+\sqrt{2})-\ln(1+\sqrt{1+\mathrm{e}^2})$, **f)** $\sqrt{2197}/27-8/27$. **1.2.43.** **a)** $\ln(2+\sqrt{5})/4+\sqrt{5}/2$, **b)** $\ln(2+\sqrt{5})+2\sqrt{5}$, **c)** $8(10\sqrt{10}-1)/27$ **d)** $(22\sqrt{22}-8)/27$, **e)** π, **f)** π. **1.2.44.** $6a$. **1.2.45.** **a)** $a\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})/2+\pi a\sqrt{4\pi^2+1}$, **b)** $a\ln(8+\sqrt{65})-a\ln(2+\sqrt{5})+a\sqrt{5}/2-a\sqrt{65}/8$, **c)** $\sqrt{2}a(\mathrm{e}^{2\pi}-1)$, **d)** $8a$. **1.2.46.** **a)** $4\pi r^2$, **b)** $3\pi r^2$, **c)** $\pi r^2+\pi r\sqrt{r^2+v^2}$, **d)** $\pi R^2+\pi r^2+\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+v^2}$. **1.2.47.** **a)** $\ln(2+\sqrt{5})/4+\sqrt{5}/2$, **b)** $10\sqrt{10}/27-\pi/27$, **c)** $2\pi\ln(1+\sqrt{2})+2\sqrt{2}\pi$. **1.2.48.** **a)** $(37\sqrt{37}-1)\pi/216$, **b)** $\sqrt{8}\pi(\mathrm{e}^\pi-2)/5$, **c)** $8\pi(\sqrt{2}-1)/3$, **d)** $\sqrt{8}\pi(2\,\mathrm{e}^\pi+1)/5$. **1.2.49.** $6\pi/5$. **1.2.50.** **a)** π, **b)** $4\pi(8-\sqrt{2})/5$, **c)** $\pi^2/2$, **d)** $24\sqrt{2}\pi/5$, **e)** $\pi(\pi+2)/\sqrt{2}$, **f)** $\sqrt{2}\pi$.

Literatúra

[1] Bartsch H. J., *Matematické vzorce,* 3. revidované vydání, Praha, Mladá fronta 2002, ISBN 80-204-0607-7.

[2] Berman G. N., *Zbierka úloh z matematickej analýzy,* Bratislava, ŠNTL 1955.

[3] Bican, L., *Lineární algebra,* Praha, SNTL 1979.

[4] Birkhoff, G., Bartee, T., *Modern applied algebra,* New York, Mc Graw – Hill Book Company 1970, (Slov. preklad: *Aplikovaná algebra*, Bratislava, ALFA 1981).

[5] Birkhoff, G., Mac Lane, S., *A Survey of Modern Algebra,* New York, The Macmillan Company 1965, (Slov. preklad: *Prehľad modernej Algebry*, Bratislava, SNTL a ALFA 1979).

[6] Blaško R., *Matematická analýza 1,* Žilina, EDIS 2009, ISBN 978-80-554-0119-5.

[7] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., *Matematická analýza I,* Praha, SNTL ALFA 1985.

[8] Brabec J., Hrůza B., *Matematická analýza II,* Praha, SNTL ALFA 1986.

[9] Под редакцией Демидовича Б. П., *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов,* издание пятое, Москва, НАУКА 1966.

[10] Демидович Б. П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу,* издание девятое, Москва, Издательство НАУКА 1977.

[11] Demlová M., Nagy J., *Algebra,* Matematika pro VŠT, sešit III, Praha, SNTL 1985.

[12] Drábek, J., Križalkovič, K., Liška, J., Viktora, V., *Základy elementárni aritmetiky,* Praha, SPN 1984.

[13] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1. časť,* Bratislava, ALFA 1985.

[14] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 2. časť,* Bratislava, ALFA 1972.

[15] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 3. časť,* Bratislava, ALFA 1971.

[16] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., Šulka R,, *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 4. časť,* Bratislava, ALFA 1970.

[17] Frank L. a kolektiv autorů, *Matematika,* Praha, SNTL 1973.

[18] Göhler W., Ralle B., *Lexikón vyššej matematiky,* Vzorce, Bratislava, ALFA 1992.

[19] Goult, R. J., *Applied Linear Algebra,* New York, E. Horwood 1978.

[20] Havel, V., Holenda, J., *Lineární algebra,* Praha, SNTL a ALFA 1984.

[21] Hlaváček A., *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, I. a II. díl,* 2. změněné vydání, Praha, SPN 1971.

[22] Holenda J., *Řady,* Matematika pro VŠT, sešit XII, Praha, SNTL 1990.

[23] Horský Z., *Diferenciální počet,* Matematika pro VŠT, sešit V, Praha, SNTL 1981.

[24] Horský, Z., *Vektorové prostory,* Praha, SNTL 1980.

[25] Hruša K., Kraemer E., Sedláček J., Vyšín J., Zelinka R., *Přehled elementární matematiky,* Praha, SNTL 1957.

[26] Jarník V., *Integrální počet I, II,* Praha, Nakladatelství ČSAV 1956.

[27] Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z., *Sbírka řešených příkladů z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1982.

[28] Kluvánek I., Mišík L., Švec M., *Matematika pre štúdium technických vied, I. a II. diel,* Bratislava, SVTL 1965.

[29] Knichal V., Bašta A., Pišl M., Rektorys K., *Matematika II,* Praha, SNTL SVTL 1966.

[30] Kolář J., Štěpánková O., Chytil M., *Logika, algebry a grafy,* Praha, SNTL 1989.

[31] Kučera, L., Nešetřil, J., *Algebraické metody diskrétní matematiky,* Praha, SNTL 1989.

[32] Kolektiv autorů za redakce Nečase J., *Aplikovaná matematika I (A—L) a II (M—Ž),* odborové encyklopedie, Praha, SNTL 1978.

[33] Míka S., *Numerické metody algebry,* Matematika pro VŠT, sešit IV, Praha, SNTL 1985.

[34] Mikola M., *Algebra,* 2. vydanie, skriptá ŽU, Žilina 1998.

[35] Mikola M., Chvál V., *Lineárna algebra,* Ružomberok, Žilina 2000, ISBN 80-89039-00-6.

[36] Nagy J., Nováková E., Vacek M., *Integrální počet,* Matematika pro VŠT, sešit VI, Praha, SNTL 1984.

[37] Nekvinda M., Šrubař J., Vild J., *Úvod do numerické matematiky,* Praha, SNTL 1976.

[38] Neubrunn T., Vencko J., *Úvod do matematickej analýzy,* skriptá MFF UK, Bratislava 1981.

[39] Neubrunn T., Vencko J., *Matematická analýza II,* skriptá MFF UK, Bratislava 1984.

[40] Pondělíček, B., *Algebraické struktury s binárními operacemi,* Praha, SNTL 1977.

[41] Prágerová A., *Cvičení z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1987.

[42] Přikryl P., *Numerické metody matematické analýzy,* Matematika pro VŠT, sešit XXIV, Praha, SNTL 1985.

[43] Šilov G. J., *Matematická analýza,* Bratislava, ALFA 1974.

[44] Smoljanskij M. L., *Tabuľky neurčitých integrálov,* Bratislava, ALFA 1963.

[45] Svätokrížny P., *Lineárna algebra v úlohách,* Bratislava, ALFA 1986.

[46] Švec M., Šalát T., Neubrunn T., *Matematická analýza funkcií reálnej premennej,* Bratislava, ALFA SNTL 1987.

[47] Vitásek E, *Numerické metódy,* Praha, SNTL 1987.

[48] Blaško, R., *Matematická analýza I,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/sa-1.pdf`, (skriptum MA1) 2007.

[49] Blaško, R., *Matematická analýza I,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/ma-1.pdf`, (učebnica MA1) 2016.

[50] Blaško, R., *Neurčitý a určitý integrál reálnej funkcie,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/sa-2.pdf`, (učebnica MA2) 2016.

[51] Blaško, R., *Zbierka úloh z matematickej analýza I,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/cv1.pdf`, 2009.

[52] Blaško, R., *Základy lineárnej algebry a základy matematickej analýzy pre manažérov,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/zla-zma.pdf`, 2015.

[53] Drexel University, The Math Forum, `http://mathforum.org/`, Internet Mathematics Library, `http://mathforum.org/library/`.

[54] Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics, `http://members.aol.com/jeff570/mathword.html`.

[55] Elsevier Mathematics, `http://www.elseviermathematics.com/mathematicsweb/show/Index.htt`.

[56] EMIS, The European Mathematical Information Service, `http://www.emis.de/`.

[57] Encyklopédie des Formes Mathématiques Remarquables, `http://www.mathcurve.com/`.

[58] Excellent Matematika, `http://matematika.host.sk/index2.htm`.

[59] GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra, `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/`.

[60] Geometry the online learning center, `http://www.geometry.net/`.

[61] The Math Forum, Internet Mathematics Library, `http://mathforum.org/library/`.

[62] On-line Mathematics Dictionary, `http://pax.st.usm.edu/cmi/inform_html/glossary.html`.

[63] Turnbull, The MacTutor History of Mathematics archive, `http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/`.

[64] World of mathematics, A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/`, WolframAlpha – computational knowledge engine, `http://www.wolframalpha.com/`.