

# Kapitola 1

## Integrál reálnej funkcie



# Kapitola 2

## Funkcie $n$ reálnych premenných

### 2.1 Reálne a vektorové funkcie

S pojmom vektor sme sa stretli už na základnej škole, keď sme v rovine alebo v priestore spájali dva body. Vo všeobecnosti vektormi môžu byť rôzne objekty (usporiadané  $n$ -tice, matice, funkcie alebo aj reálne čísla). Spolu so svojimi vlastnosťami tvoria vektorový priestor [11, 20, 34]. **Vektorový priestor** sa tiež niekedy nazýva **lineárny priestor**, jeho prvky sa nazývajú **vektory**. Prvky poľa, t. j. komutatívneho telesa, nad ktorým je definovaný, sa nazývajú **skaláre**. Vo všeobecnosti môžeme vektorový priestor definovať nad ľubovoľným poľom. My sa obmedzíme na pole  $(R, +, \cdot)$ , t. j. množinu všetkých reálnych čísel  $R$  s operáciami sčítania  $+$  a násobenia  $\cdot$ . Vektory, ktorými sa budeme zaoberať, budú usporiadané  $n$ -tice reálnych čísel, t. j. prvky Euklidoveho priestoru  $R^n$ , kde  $n \in N$ .

Najprv si zopakujeme základné vlastnosti. Uvažujme neprázdnu množinu  $V$  prvkov (vektorov), na ktorej je definovaná binárna operácia sčítanie<sup>1</sup>  $\oplus: V \times V \rightarrow V$  taká, že dvojica  $(V, \oplus)$  tvorí komutatívnu grupu. To znamená:

- Pre všetky  $\alpha, \beta, \gamma \in V$  platí  $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$  (asociatívny zákon).
- Existuje  $\mathbf{0} \in V$  (neutrálny prvok) taký, že pre všetky  $\alpha \in V$  platí  $\alpha \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus \alpha = \alpha$ .
- Ku každému  $\alpha \in V$  existuje jediné  $\beta$  (symetrizačný prvok) tak, že  $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha = \mathbf{0}$ . Symetrizačný prvok sa tiež nazýva inverzný, resp. opačný a označuje sa  $\beta = \ominus \alpha$ .
- Pre všetky  $\alpha, \beta \in V$  platí  $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$  (komutatívny zákon).

Nech vonkajšia operácia<sup>2</sup>  $\odot: R \times V \rightarrow V$  je taká, že pre všetky  $c, d \in R, \alpha, \beta \in V$  platí:

- $c \odot (d \odot \alpha) = (c \cdot d) \odot \alpha$ .
- $c \odot (\alpha \oplus \beta) = (c \odot \alpha) \oplus (c \odot \beta)$ .
- $(c + d) \odot \alpha = (c \odot \alpha) \oplus (d \odot \alpha)$ .
- $1 \odot \alpha = \alpha$ .

Potom  $(V, \oplus, \odot)$ , t. j. množinu  $V$  s binárnou operáciou  $\oplus$  a vonkajšou operáciou  $\odot$ , nazývame **vektorovým (lineárnym) priestorom** nad telesom  $R$ .

Funkcia  $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow R$  sa nazýva **skalárny súčin** lineárneho priestoru  $V$  a lineárny priestor sa nazýva **so skalárnym súčinom**, ak:

- Pre všetky  $\alpha, \beta \in V$  platí  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$  (symetrickosť).
- Pre všetky  $\alpha, \beta \in V, c \in R$  platí  $(c \odot \alpha, \beta) = c \cdot (\alpha, \beta)$  (homogénosť).

<sup>1</sup>Ak sčítame dva vektory, dostaneme opäť vektor.

<sup>2</sup>Ak vynásobíme číslo (skalár) a vektor, dostaneme vektor.

- Pre všetky  $\alpha, \beta, \gamma \in V$  platí  $(\alpha \oplus \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$  (aditívnosť).
- Pre všetky  $\alpha \neq \mathbf{0}$  platí  $(\alpha, \alpha) > 0$  (kladná definitnosť).

Funkcia  $\|\cdot\|: V \rightarrow R$  sa nazýva **norma** lineárneho priestoru  $V$  a lineárny priestor sa nazýva **normovaný**, ak:

- Pre všetky  $\alpha \in V$  platí  $\|\alpha\| \geq 0$ , pričom  $\|\alpha\| = 0$  platí práve vtedy, ak  $\alpha = \mathbf{0}$ .
- Pre všetky  $\alpha \in V, c \in R$  platí  $\|c \odot \alpha\| = |c| \cdot \|\alpha\|$ .
- Pre všetky  $\alpha, \beta \in V$  platí trojuholníková nerovnosť  $\|\alpha \oplus \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ .

Funkcia  $\varrho: V \times V \rightarrow R$  sa nazýva **metrika** lineárneho priestoru  $V$  a lineárny priestor sa nazýva **metrický**, ak:

- Pre všetky  $\alpha, \beta \in V$  platí  $\varrho(\alpha, \beta) \geq 0$ , pričom  $\varrho(\alpha, \beta) = 0$  platí iba pre  $\alpha = \beta$ .
- Pre všetky  $\alpha, \beta \in V$  platí  $\varrho(\alpha, \beta) = \varrho(\beta, \alpha)$  (symetrickosť).
- Pre všetky  $\alpha, \beta, \gamma \in V$  platí trojuholníková nerovnosť  $\varrho(\alpha, \beta) \leq \varrho(\alpha, \gamma) + \varrho(\gamma, \beta)$ .

Ak  $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow R$  je skalárnym súčinom lineárneho priestoru  $V$ , potom funkcia  $\|\cdot\|: V \rightarrow R$  definovaná vzťahom  $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$  je normou tohto lineárneho priestoru. Hovoríme, že **skalárny súčin indukuje normu** priestoru.

Funkcia  $\varrho: V \times V \rightarrow R$  definovaná vzťahom  $\varrho(\alpha, \beta) = \|\alpha \ominus \beta\|$  je metrikou tohto lineárneho priestoru. Hovoríme, že **norma indukuje metriku** priestoru.

V danom lineárnom priestore  $V$  môže byť definovaných viacero skalárnych súčtov, noriem, či metrik (viď poznámka 2.1.2). Ak hovoríme o metrickom priestore, normovanom priestore, resp. o priestore so skalárnym súčinom, musíme uvažovať priestor  $V$  s konkrétnou metrikou, normou, resp. skalárnym súčinom.

Pomocou skalárneho súčinu môžeme vybudovať v priestore  $R^n, n \in N$  geometriu s použitím vzdialeností a uhlov, ako sme zvyknutí v rovine, resp. v priestore. Skalárny súčin dvoch vektorov reprezentuje uhol (jeho kosínus), t. j. odchýlku prvkov (vektorov). Metrika vyjadruje vzdialenosť prvkov a norma vyjadruje veľkosť (dĺžku) prvku.

### 2.1.1 Euklidov priestor $R^n$

Množina  $R^n = R \times R \times \dots \times R = \{\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n), x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}, n \in N$  sa skladá z usporiadaných  $n$ -tíc reálnych čísel. Pre všetky skaláre  $c \in R$  a pre všetky vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n, \mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n), \mathbf{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$  sú definované (binárna) operácia súčet  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  usporiadaných  $n$ -tíc (vektorov) a (vonkajšia) operácia  $c \cdot \mathbf{x}$  súčin reálneho čísla (skalára) a usporiadanej  $n$ -tice (vektora) po zložkách predpismi

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1; x_2; \dots; x_n) + (y_1; y_2; \dots; y_n) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n), \\ c\mathbf{x} &= c \cdot \mathbf{x} = c \cdot (x_1; x_2; \dots; x_n) = (cx_1; cx_2; \dots; cx_n).\end{aligned}$$

Pre ľubovoľné  $n \in N$  je priestor  $(R^n, +, \cdot)$  lineárny (vektorový) s neutrálnym (nulovým) prvkom  $\mathbf{0}_n = (0; 0; \dots; 0)$ . Pre svoje metrické vlastnosti sa nazýva **Euklidov**, resp. **euklidovský ( $n$ -rozmerný) priestor**. Namiesto  $(R^n, +, \cdot)$  budeme stručne písať  $R^n$ .

Jeho **kanonickú** (základnú, prirodzenú) **bázu** tvoria vektory

$$\varepsilon_1 = (1; 0; \dots; 0), \varepsilon_2 = (0; 1; \dots; 0), \dots, \varepsilon_n = (0; 0; \dots; 1),$$

t. j. vektory  $\varepsilon_i = (0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0), i = 1, 2, \dots, n$  (na  $i$ -tom mieste je jednotka).

Pre  $n = 1$  dostaneme tiež lineárny priestor. Je ním množina všetkých reálnych čísel  $R$ . Vektor  $\mathbf{x} = (x) \in R$  budeme zapisovať stručne bez zátvoriek, t. j.  $x$ .

Nech  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ ,  $n \in N$ ,  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ . **Skalárny súčin** prvkov (vektorov)  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  definujeme vzťahom ( $\mathbf{y}^T$  je transponovaný vektor k  $\mathbf{y}$ )

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbf{y}^T = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

**Veľkosť (dĺžku)** prvku (vektora)  $\mathbf{x}$  definujeme pomocou normy indukovanej týmto skalárnym súčinom, ktorú nazývame **euklidovská norma**, vzťahom

$$\|\mathbf{x}\|_n = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}^T} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

**Vzdialenosť prvkov** (vektorov)  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  definujeme pomocou metriky indukovanej euklidovskou normou, ktorú nazývame **euklidovská metrika**, vzťahom

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_n = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Keďže platí  $\|\mathbf{x}\|_n = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}_n\|_n$ , potom veľkosť (dĺžka) vektora  $\mathbf{x}$  v priestore  $R^n$  znamená súčasne vzdialenosť vektorov  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{0}_n$ .

### Poznámka 2.1.1.

*Euklidovská metrika a norma reprezentujú vzdialenosť a veľkosť, ako ju poznáme z analytickej geometrie v priestoroch  $R, R^2, R^3$  a zovšeobecňujú pre  $R^n$ ,  $n \in N$ .*

*Pre  $n = 1$ , t. j. pre čísla  $\mathbf{x} = x$ ,  $\mathbf{y} = y$  na priamke  $R$  platí*

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = |x - y|.$$

*Pre  $n = 2$ , t. j. pre vektory  $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1; y_2)$  v rovine  $R^2$  platí*

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

*Pre  $n = 3$ , t. j. pre vektory  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)$  v priestore  $R^3$  platí*

$$\|\mathbf{x}\|_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_3 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

*Skalárny súčin  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|_n \cdot \|\mathbf{y}\|_n \cdot \cos \varphi$  vyjadruje uhol  $\varphi$ , ktorý zvierajú  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ . Špeciálne*

$$\cos \varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \quad \text{pre } n = 2, \quad \cos \varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \quad \text{pre } n = 3.$$

### Poznámka 2.1.2.

*Euklidovská norma v priestore  $R^n$ ,  $n \in N$  je špeciálnym prípadom  $p$ -normy pre  $p = 2$ .*

*Uvedená  $p$ -norma,  $p > 1$  je pre  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in R^n$  definovaná predpisom*

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p}.$$

*V priestore  $R^n$  sa ešte používajú maximová (kubická) norma  $\|\cdot\|_m$  a súčtová (oktaedrická) norma  $\|\cdot\|_s$  (všetky uvedené normy sú ekvivalentné)*

$$\|\mathbf{x}\|_m = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}, \quad \|\mathbf{x}\|_s = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

*V priestore  $R^n$  sú všetky uvedené normy  $\|\cdot\|_n, \|\cdot\|_p, \|\cdot\|_m, \|\cdot\|_s$  navzájom ekvivalentné.*

Nasledujúce definície v  $n$ -rozmernom priestore  $R^n$ ,  $n \in N$  sú identické ako na množine reálnych čísel  $R$  (ma1: 2.2 Topologické a metrické vlastnosti reálnych čísel).

Nech  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in R^n$ ,  $n \in N$ . **Okolím** ( $\delta$ -**okolím**)  $O_\delta(\mathbf{a})$  bodu  $\mathbf{a}$  s polomerom  $\delta > 0$  nazývame množinu (obr. 2.1.1)

$$O_\delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in R^n, \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_n < \delta\}.$$

Ak z okolia vylúčime bod  $\mathbf{a}$ , dostaneme **prstencové okolie** bodu  $\mathbf{a}$  s polomerom  $\delta > 0$

$$P_\delta(\mathbf{a}) = O_\delta(\mathbf{a}) - \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{x} \in R^n, 0 < \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_n < \delta\}.$$

V prípade, že nie je veľkosť polomeru  $\delta > 0$  podstatná, hovoríme o okolí, resp. o prstencovom okolí bodu  $\mathbf{a}$  a označujeme stručne  $O(\mathbf{a})$ , resp.  $P(\mathbf{a})$ .



Obr. 2.1.1:  $\delta$ -okolie  $O_\delta(\mathbf{a})$  bodu  $\mathbf{a} = a \in R$ ,  
bod  $\mathbf{a} = (a_x; a_y) \in R^2$  a bod  $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z) \in R^3$



Uvažujme množinu  $A \subset R^n$  a bod  $\mathbf{a} \in R^n$ , kde  $n \in N$ .

$\mathbf{a} \in A$  sa nazýva **vnútorný bod** množiny  $A$ , ak existuje okolie  $O(\mathbf{a}) \subset A$ . Množinu všetkých vnútorných bodov  $A$  nazývame **vnútro množiny**  $A$  a označujeme  $\text{int } A$ .

$\mathbf{a} \in R^n$  sa nazýva **vonkajší bod** množiny  $A$ , ak je vnútorným bodom jej doplnku  $A' = R^n - A$ . Množinu všetkých vonkajších bodov  $A$  nazývame **vonkajšok množiny**  $A$  a označujeme  $\text{ext } A$ .

$\mathbf{a} \in R^n$  sa nazýva **hraničný bod** množiny  $A$ , ak nie je ani vnútorným a ani vonkajším bodom množiny  $A$ . To znamená, že v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod patriaci do  $A$  a aspoň jeden bod patriaci do  $R^n - A$ . Množinu všetkých hraničných bodov  $A$  nazývame **hranica množiny**  $A$  a označujeme  $\partial A$ .

$\mathbf{a} \in R^n$  sa nazýva **hromadný bod** množiny  $A$ , ak v každom jeho okolí  $O(\mathbf{a})$  leží aspoň jeden bod z množiny  $A$  rôzny od  $\mathbf{a}$ , t. j.  $(O(\mathbf{a}) - \{\mathbf{a}\}) \cap A \neq \emptyset$ . Zjednotenie  $A$  s množinou všetkých jej hromadných bodov nazývame **uzáver množiny**  $A$  a označujeme  $\bar{A}$ .

$\mathbf{a} \in A$ , ktorý nie je hromadným bodom  $A$  sa nazýva **izolovaný bod** množiny  $A$ .

### Poznámka 2.1.3.

Ak  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$ , potom sú množiny  $\text{int } A$ ,  $\partial A$  a  $\text{ext } A$  po dvoch disjunktné a ich zjednotenie tvorí celý priestor  $R^n$ , t. j.  $\text{int } A \cup \partial A \cup \text{ext } A = R^n$ .

Pre doplnok  $A' = R^n - A$  platí  $\partial A = \partial A'$ ,  $\text{int } A = \text{ext } A'$ ,  $\text{ext } A = \text{int } A'$ .

Množina  $A \subset R^n$ , kde  $n \in N$ , sa nazýva:

- **uzavretá**, ak  $A = \bar{A}$  (obsahuje všetky svoje hromadné body).
- **otvorená**, ak  $A = \text{int } A$  (každý jej bod je vnútorný).



Obr. 2.1.2: Príklady nesúvislých množín  $A, B, C$  a súvislých množín  $D, E$  v  $R^2$



- **ohraničená**, ak existuje  $\alpha > 0$  tak, že  $\|x\|_n < \alpha$  pre všetky  $x \in A$ .
- **nesúvislá** (obr. 2.1.2), ak existujú otvorené množiny  $A_1, A_2 \subset R^n$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  také, že platí  $A \subset A_1 \cup A_2$ ,  $A \cap A_1 \neq \emptyset$ ,  $A \cap A_2 \neq \emptyset$ .
- **súvislá**, ak nie je nesúvislá množina.
- **oblasť**, ak je otvorená a súvislá množina.



Obr. 2.1.3: Príklady intervalov v priestore  $R^2$



Okrem okolí, dôležitými množinami pre analýzu viacpremenných funkcií su intervaly. **Intervalom** ( **$n$ -rozmerným intervalom**)  $I$  v priestore  $R^n$ ,  $n \in N$  nazývame množinu

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{x = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in R^n, x_i \in I_i \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n\},$$

kde  $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sú jednorozmerné reálne intervaly,<sup>3</sup>  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \in R^*$  sú také, že  $a_1 \leq b_1$ ,  $a_2 \leq b_2$ ,  $\dots$ ,  $a_n \leq b_n$ . Príklady intervalov v  $R^2$  sú na obr. 2.1.3.

$I$  je **otvorený interval**, ak sú všetky čiastkové intervaly  $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  otvorené.

$I$  je **uzavretý interval**, ak sú všetky čiastkové intervaly  $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  uzavreté.

$I$  sa nazýva **nedegenerovaný interval**, ak pre všetky  $i = 1, 2, \dots, n$  platí  $a_i < b_i$ . Ak pre aspoň jedno  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí  $a_i = b_i$ , potom sa  $I$  nazýva **degenerovaný**.

$I$  sa nazýva **ohraničený interval**, ak sú všetky intervaly  $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ohraničené. Ak je aspoň jeden z  $I_i$  neohraničený, potom sa  $I$  nazýva **neohraničený**.

### Príklad 2.1.1.

Z geometrického hľadiska je zaujímavým objektom  $n$ -rozmerná kocka (hyperkocka) s rozmerom  $n = 1, 2, 3, \dots$ . V tomto ponímaní môžeme úsečku považovať za jednorozmernú kocku, štvorec za dvojrozmernú kocku a bod za kocku s rozmerom nula.

Vo všeobecnosti má  $n$ -rozmerná kocka  $2^n$  vrcholov  $u = (u_1; u_2; \dots; u_n)$ , pričom  $u_i \in \{0, a\}$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$  a  $a > 0$  je dĺžka jej hrany. Hyperkocka má  $2n$  stien a každú stenu tvorí

<sup>3</sup> $I_i = (a_i; b_i)$ ,  $I_i = [a_i; b_i]$ ,  $I_i = \langle a_i; b_i \rangle$ , resp.  $I_i = \langle a_i; b_i \rangle$ .



Obr. 2.1.4: Hyperkocky s hranou  $a = 1$  pre  $n = 1, 2, 3$   
a ich rozklad na jednotlivé steny (príklad 2.1.1)



$(n-1)$ -rozmerná kocka, t. j. kocka rozmeru o jednotku nižšieho (obr. 2.1.4). Tieto steny tvoria  $n$  protiľahlých párov, ktoré sa líšia iba v jednej, a to  $i$ -súradnici ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Body prvej steny z páru majú túto súradnicu  $u_i = 0$  a body protiľahlej steny majú túto súradnicu  $u_i = a$ . To znamená, že tieto steny sú od seba vzdialené o hodnotu  $a$ .

Najvzdialenejšie vrcholy sú protiľahlé vrcholy, ktoré majú súradnice  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n)$  a  $\mathbf{v} = (v_1; v_2; \dots; v_n) = (a - u_1; a - u_2; \dots; a - u_n)$ , kde  $u_1, u_2, \dots, u_n \in \{0, a\}$ . Spojnice vrcholov  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  tvoria najdlhšie uhlopriečky v kocke a platí  $u_i = a, v_i = 0$ , resp.  $u_i = 0, v_i = a$  a tiež  $u_i + v_i = a, u_i - v_i = |a|$ . Takýchto uhlopriečok<sup>4</sup> je  $2^{n-1}$  a ich dĺžka je

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_n = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2} = \sqrt{a^2 + \dots + a^2} = \sqrt{na^2} = \sqrt{n}a.$$

Na obrázkoch 2.1.4 a 2.1.5 sú znázornené  $n$ -rozmerné kocky pre  $n = 1, 2, 3, 4$ . Kvôli názorosti položíme  $a = 1$  a súradnice vrcholov budeme písať bez zátvoriek a bez oddeľovacích znakov. Symbol  $\sqcup$  postupne nahrádzame hodnotami 0 a 1.

- V priestore  $R^1 = R$  (priamka) tvorí jednorozmernú kocku úsečka s vrcholmi 0 a 1, ktoré sú zároveň aj stenami. Uhlopriečky neexistujú.
- V priestore  $R^2$  (rovina) tvorí dvojrozmernú kocku štvorec s vrcholmi 00, 10, 01 a 11. Kocka má štyri steny (úsečky) 0 $\sqcup$ -1 $\sqcup$ ,  $\sqcup$ 0- $\sqcup$ 1 a dve uhlopriečky 00-11, 10-01.
- V priestore  $R^3$  má kocka osem vrcholov 000, 100, 110, 010, 001, 101, 111 a 011, šesť stien (štvorcov) 00 $\sqcup$ -10 $\sqcup$ -11 $\sqcup$ -01 $\sqcup$ , 0 $\sqcup$ 0-1 $\sqcup$ 0-1 $\sqcup$ 1-0 $\sqcup$ 1,  $\sqcup$ 00- $\sqcup$ 10- $\sqcup$ 11- $\sqcup$ 01 a štyri telesové uhlopriečky 000-111, 001-110, 010-101, 100-011.
- V priestore  $R^4$  má tesseract (štvorrozmerná kocka) šestnásť vrcholov 0000, 1000,  $\dots$ , 1111, osem stien (trojrozmerné kocky) 000 $\sqcup$ -100 $\sqcup$ ---011 $\sqcup$ , 00 $\sqcup$ 0-10 $\sqcup$ 0---01 $\sqcup$ 1, 0 $\sqcup$ 00-1 $\sqcup$ 00---0 $\sqcup$ 11,  $\sqcup$ 000- $\sqcup$ 100--- $\sqcup$ 011 a taktiež osem telesových uhlopriečok 0000-1111, 1000-0111, 0100-1011, 0010-1101, 0001-1110, 1100-0011, 1010-0101, 1001-0110. ■

<sup>4</sup>Každá zložka  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  vrcholu  $\mathbf{u}$  môže nadobúdať iba dve hodnoty 0 alebo  $a$ . Vrcholov  $\mathbf{u}$  a taktiež dvojíc  $\mathbf{uv}$  je potom  $2^n$ . Keďže uhlopriečky  $\mathbf{uv}$  a  $\mathbf{vu}$  sú identické, ich počet je polovičný  $2^{n-1}$ .

Obr. 2.1.5: 4-rozmerná hyperkocka  
(teserakt)

## 2.1.2 Funkcie v priestore $R^n$

V tejto časti sa budeme venovať funkciám, kde definičný obor a aj obor hodnôt sú viacrozmerné Euklidove priestory. Pojem funkcia, t. j. zobrazenie dvoch množín,<sup>5</sup> rozširuje pojem relácie a jeho definícia je identická pre ľubovoľné množiny (viď napr. [6, 49]).

**Zobrazenie (funkciu)** z množiny  $A \neq \emptyset$  (definičný obor, množina vzorov) do množiny  $B \neq \emptyset$  (obor hodnôt, množina obrazov, množina funkčných hodnôt) nazývame každú reláciu  $f \subset A \times B$  takú, že pre každé  $x \in A$  existuje najviac jedno  $y \in B$  také, že  $(x; y) \in f$  a označujeme  $f: A \rightarrow B$ , resp.  $y = f(x)$ .

Ak definičný obor  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  a obor hodnôt  $B \subset R^m$ ,  $m \in N$ , potom  $f: A \rightarrow B$  nazývame  **$n$ -rozmerná funkcia**, resp. **funkcia  $n$  premenných**, označenie  $y = f(x)$ .

Vzor  $x \in A$  predstavuje vektor  $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  s  $n$  prvkami a obraz  $y \in B$  predstavuje vektor  $y = (y_1; y_2; \dots; y_m)$  s  $m$  prvkami. To znamená, že predpis  $y = f(x)$  reprezentuje rovnosť dvoch  $m$ -rozmerných vektorov

$$y = (y_1; y_2; \dots; y_m) \text{ a } f(x) = (f_1(x); f_2(x); \dots; f_m(x)),$$

t. j. pre všetky  $j = 1, 2, \dots, m$  musí platiť  $y_j = f_j(x) = f_j(x_1; x_2; \dots; x_n)$ . Funkciu  $f$  môžeme zapísať ako rovnosť stĺpcových vektorov

$$y^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{pmatrix} = f(x)^T.$$

Pre  $m = 1$  sa  $f$  nazýva **reálna funkcia  $n$  premenných**, resp.  **$n$ -rozmerná reálna funkcia** a obrazom je jednorozmerný vektor  $y = (y) = y \in R$ . Funkciu zapisujeme

$$y = f(x) = (f_1(x); f_2(x); \dots; f_m(x)).$$

Špeciálne pre  $m = n = 1$  sa funkcia  $f$  nazýva **reálna funkcia (jednej) reálnej premennej** a venovali sme sa jej v predchádzajúcej časti Matematická analýza 1.

<sup>5</sup>Pojmy funkcia a zobrazenie znamenajú to isté, iba pre číselné množiny sa preferuje názov funkcia.

Pre  $m > 1$  sa  $f$  nazýva ( $m$ -zložková) **vektorová funkcia  $n$  premenných**, resp.  **$m$ -zložková  $n$ -rozmerná vektorová funkcia**.

Pre funkcie  $f, g: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  a reálne čísla  $c \in R$  definujeme súčet dvoch funkcií  $f \pm g \in R^m$  a súčin skalára a vektora  $cf \in R^m$  po zložkách nasledovne

$$\begin{aligned}(f \pm g)(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}) \pm g_1(\mathbf{x}); f_2(\mathbf{x}) \pm g_2(\mathbf{x}); \dots; f_m(\mathbf{x}) \pm g_m(\mathbf{x})), \\ (cf)(\mathbf{x}) &= cf(\mathbf{x}) = (cf_1(\mathbf{x}); cf_2(\mathbf{x}); \dots; cf_m(\mathbf{x})).\end{aligned}$$

### Príklad 2.1.2.

Reálne funkcie sú napríklad<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}y &= f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_1; x_2; x_3) = x_1 + x_2: R^3 \rightarrow R, & y &= f_2(x; y) = xy: R^2 \rightarrow R, \\ y &= f_3(\mathbf{x}) = f_3(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2: R^2 \rightarrow R, & y &= f_4(x; y) = x: R^2 \rightarrow R.\end{aligned}$$

Vektorové funkcie sú napríklad

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= (y_1; y_2) = f_5(\mathbf{x}) = f_5(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; x_1 - x_2): R^2 \rightarrow R^2, \\ \mathbf{y} &= (y_1; y_2; y_3) = f_6(\mathbf{x}) = (x; x^2; x^3): R \rightarrow R^3. \blacksquare\end{aligned}$$

Body  $\mathbf{x} = (x; y)$  Euklidovej roviny  $R^2$  najčastejšie vyjadrujeme v karteziánskom systéme súradníc (obr. 2.1.6 vľavo), kde sú súradnice totožné so zložkami, t. j.  $\mathbf{x} = (x; y)$ .

V polárnom súradnicovom systéme má bod  $\mathbf{x} = (x; y)$  súradnice  $\mathbf{x} = (\rho; \varphi)$ , kde  $\rho \geq 0$  vyjadruje jeho vzdialenosť od počiatku (pólu) 0 a  $\varphi \in R$  je orientovaný uhol, ktorý zvierá polárna poloos s polpriamkou  $0\mathbf{x}$  spájajúcou počiatok s bodom  $\mathbf{x}$  (obr. 2.1.6 v strede).

Súradnice bodu v polárnych súradniciach (na rozdiel od karteziánskych súradníc) nie sú určené jednoznačne. Ak má bod  $\mathbf{x}$  polárne súradnice  $\mathbf{x} = (\rho; \varphi)$ , potom má tiež polárne súradnice  $\mathbf{x} = (\varphi + 2k\pi; \rho)$  pre každé  $k \in Z$ .

Niekedy sa požaduje, aby orientovaný uhol  $\varphi$  patrilo do nejakého konkrétného intervalu s dĺžkou  $2\pi$ , napr.  $\varphi \in (0; 2\pi)$  alebo  $\varphi \in (-\pi; \pi)$  pre výhodu symetrie okolo polárnej osi. V týchto prípadoch majú všetky body Euklidovej roviny  $R^2$  okrem počiatku 0 jednoznačne určené polárne súradnice.

### Príklad 2.1.3.

Ak  $(\rho; \varphi)$  sú polárne súradnice bodu  $\mathbf{x} \in R^2$ , potom  $\mathbf{x} = (x; y) = (\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi)$  sú jeho karteziánske súradnice. Takže prevod súradníc z polárneho do karteziánskeho systému určuje vektorová funkcia

$$(x; y) = \Psi(\rho; \varphi) = (\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi): (0; \infty) \times R \rightarrow R^2.$$

Ak  $(x; y)$  sú karteziánske súradnice bodu  $\mathbf{x} \in R^2$ , potom s prevodom do polárnych súradníc je to trochu zložitejšie. Funkcia  $\Psi$  nie je prostá a neexistuje k nej inverzná funkcia.

Pre vektorovú funkciu  $(\rho; \varphi) = \Phi(x; y): R^2 - \{0\} \rightarrow (0; \infty) \times (0; 2\pi)$  pre prevod z karteziánskych do polárnych súradníc platí

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

<sup>6</sup>V rovine  $R^2$ , resp. v priestore  $R^3$  obvykle označujeme premenné a súradnicové osi  $x, y$ , resp.  $x, y, z$ .

Z úvah vylúčime bod  $\mathbf{0} = (0; 0)$ , pretože nevieme jednoznačne určiť jeho polárne súradnice. Ďalej budeme požadovať  $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$ . Funkciu  $\Phi$  vyjadríme v každom kvadrante roviny  $R^2$  zvlášť. Ak označíme uhol  $\tau = \arcsin \frac{y}{\rho}$ , potom  $\tau \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$  a platí (obr. 2.1.6 vpravo):

$$\begin{aligned} \text{I: } x \geq 0, y \geq 0, \varphi &= \tau, & (\rho; \varphi) &= \Phi(x; y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}; \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \\ \text{II: } x \leq 0, y \geq 0, \varphi &= \pi - \tau, & (\rho; \varphi) &= \Phi(x; y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}; \pi - \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \\ \text{III: } x \leq 0, y \leq 0, \varphi &= \pi + \tau, & (\rho; \varphi) &= \Phi(x; y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}; \pi + \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \\ \text{IV: } x \geq 0, y \leq 0, \varphi &= 2\pi - \tau, & (\rho; \varphi) &= \Phi(x; y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}; 2\pi - \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \end{aligned}$$

Ak budeme požadovať  $\varphi \in (-\pi; \pi)$ , potom pre  $\varphi$  platí:

$$\begin{aligned} \text{II: } \varphi &= \pi - \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{I: } \varphi &= \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \text{III: } \varphi &= -\pi + \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{IV: } \varphi &= -\arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \blacksquare \end{aligned}$$



Obr. 2.1.6: Karteziánsky a polárny súradnicový systém v Euklidovej rovine  $R^2$



Nech  $f: A \rightarrow R$ , kde  $A \neq \emptyset$ ,  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je reálna funkcia. Množinu

$$\{(\mathbf{x}; f(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in A\} = \{(\mathbf{x}; y), \mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in A, y = f(\mathbf{x})\} \subset R^{n+1}$$

nazývame **graf funkcie**  $f$ , resp. **nadplocha funkcie**  $f$  v  $R^{n+1}$ . Množinu

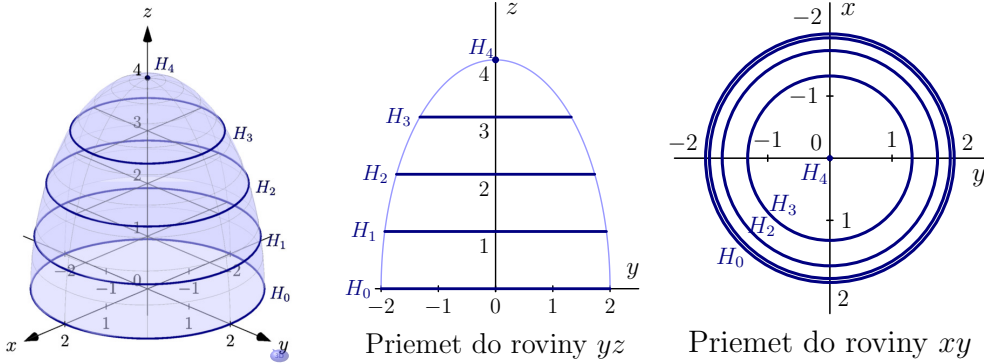
$$H_c = \{\mathbf{x} \in A, f(\mathbf{x}) = c\}, \quad \text{kde } c \in R$$

nazývame **hladina funkcie**  $f$  **prislúchajúca číslu**  $c$ . V Euklidovej rovine  $R^2$  sa hladina nazýva **vrstevnica** prislúchajúca číslu  $c$ . Vrstevnice na geografických mapách označujú miesta s rovnakou nadmorskou výškou.

#### Príklad 2.1.4.

Uvažujme funkciu  $f: R^2 \rightarrow R$  danú predpisom  $z = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$  (obr. 2.1.7).

Definičný obor  $D(f) = \{(x; y) \in R^2, 4 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x; y) \in R^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$  je kruh so stredom v bode  $(0; 0)$  a polomerom 2. Obor hodnôt  $H(f) = \langle 0; 4 \rangle$ .



Obr. 2.1.7: Graf a vrstevnice funkcie  
 $z = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}: R^2 \rightarrow R$  (príklad 2.1.4)



Grafom funkcie  $f$  je (povrch polovice rotačného elipsoidu pre  $z \geq 0$ ) množina

$$\{(x; y; z), x^2 + y^2 \leq 4, z = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

Pre  $c \notin H(f) = \langle 0; 4 \rangle$  vrstevnice  $H_c$  neexistujú, t. j. platí  $H_c = \emptyset$ . Pre  $c \in \langle 0; 4 \rangle$  platí

$$c = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}. \iff \frac{c^2}{4} = 4 - x^2 - y^2. \iff x^2 + y^2 = 4 - \frac{c^2}{4} = \frac{16 - c^2}{4}.$$

Potom  $H_c = \{(x; y; c), x^2 + y^2 = \frac{16 - c^2}{4}\}$ ,  $c \in \langle 0; 4 \rangle$  je kružnica rovnobežná s rovinou  $xy$  s polomerom  $\frac{\sqrt{16 - c^2}}{2}$  a stredom  $(0; 0; c)$ . Špeciálne  $H_4 = \{(0; 0; 4)\}$  je bod. ■

Nech  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R^m$ ,  $\mathbf{y} = g(\mathbf{x}): R^m \rightarrow R^l$ ,  $n, m, l \in N$  sú také, že  $H(f) \subset D(g)$ . Funkcia  $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R^l$  definovaná pre všetky  $\mathbf{x} \in D(f)$  vzťahom  $F(\mathbf{x}) = g[f(\mathbf{x})]$  sa nazýva **zložená funkcia**  $f$  a  $g$ . Funkcia  $f$  sa nazýva **vnútorná (zložka)** a funkcia  $g$  sa nazýva **vonkajšia (zložka)**.

#### Príklad 2.1.5.

Pre funkcie  $f(\mathbf{x}) = f(x_1; x_2) = x_1 + 2x_2: R^2 \rightarrow R$ ,  $g(x) = (x^2; x^3): R \rightarrow R^2$  platí

$$g(f): R^2 \rightarrow R^2, \quad g[f(\mathbf{x})] = g(x_1 + 2x_2) = ((x_1 + 2x_2)^2; (x_1 + 2x_2)^3).$$

$$f(g): R \rightarrow R, \quad f[g(x)] = f(x^2; x^3) = x^2 + 2x^3. \blacksquare$$

#### Príklad 2.1.6.

Uvažujme funkciu  $f(x; y): R^2 \rightarrow R^m$ ,  $m \in N$  s dvomi premennými  $x, y$  v karteziánskych súradniciach. Prevod funkcie  $f$  do polárnych súradníc pomocou funkcie (príklad 2.1.3)

$$(x; y) = \Psi(\rho; \varphi) = (\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi): \langle 0; \infty \rangle \times R \rightarrow R^2$$

predstavuje zloženú funkciu  $F(\rho; \varphi) = f[\Psi(\rho; \varphi)] = f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi): R^2 \rightarrow R^m$ . ■

Funkcia  $f: A \rightarrow R^m$ , kde  $A \neq \emptyset$ ,  $A \subset R^n$ ,  $n, m \in N$ , sa nazýva **lineárna**,<sup>7</sup> ak pre všetky  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1; v_2; \dots; v_n)$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$ ,  $c \in R$  platí

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \quad f(c\mathbf{u}) = cf(\mathbf{v}). \quad (2.1)$$

**Poznámka 2.1.4.**

Lineárna funkcia  $f: y = kx + q$ ,  $x \in R$ , kde  $k, q \in R$ , nie je v zmysle predchádzajúcej definície pre  $q \neq 0$  lineárna (aj keď sa tak nazýva). Lineárna je iba pre  $q = 0$ , t. j.  $f: y = kx$ .

Neplatí ani jedna z podmienok (2.1). Pre  $u, v \in R$ ,  $c \in R$ ,  $c \neq 1$  totiž platí:

$$\begin{aligned} f(u + v) &= k(u + v) + q = ku + kv + q, & f(cu) &= k(cu) + q = cku + q, \\ f(u) + f(v) &= ku + q + kv + q = ku + kv + 2q, & cf(u) &= c(ku + q) = cku + cq. \end{aligned}$$

**Príklad 2.1.7.**

Funkcia  $f(\mathbf{x}) = f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2; x_1 - x_2 - x_3): R^3 \rightarrow R^2$  je lineárna.

Pre všetky  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3) \in R^3$ ,  $c \in R$  platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= f(u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3) \\ &= ((u_1 + v_1) + (u_2 + v_2); (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3)) \\ &= (u_1 + u_2; u_1 - u_2 - u_3) + (v_1 + v_2; v_1 - v_2 - v_3) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \\ f(c\mathbf{u}) &= f(cu_1; cu_2; cu_3) = (cu_1 + cu_2; cu_1 - cu_2 - cu_3) \\ &= (c(u_1 + u_2); c(u_1 - u_2 - u_3)) = c(u_1 + u_2; u_1 - u_2 - u_3) = cf(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Priestor  $R^3$  je lineárny a má kanonickú bázu  $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1; 0; 0)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0; 1; 0)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0; 0; 1)$ . Obrazy  $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)$ ,  $f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)$ ,  $f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)$  vytvoria maticu typu  $2 \times 3$ , ktorú označíme  $\mathbf{F}$ :

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\varepsilon}_1) &= f(1; 0; 0) = (1; 1), \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_2) &= f(0; 1; 0) = (1; -1), \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_3) &= f(0; 0; 1) = (0; -1), \end{aligned} \quad \text{t. j. } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_2) \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pre funkciu  $f$  potom platí

$$\mathbf{x}\mathbf{F} = (x_1; x_2; x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2; x_1 - x_2 - x_3) = f(\mathbf{x}).$$

Výhodnejšie je považovať  $\mathbf{x}$ ,  $f(\mathbf{x})$  za stĺpcové vektory a označiť  $\mathbf{D} = \mathbf{F}^T$ . Potom platí

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix} = f(\mathbf{x})^T.$$

To znamená, že sme lineárnu funkciu  $f$  vyjadrili pomocou matic  $\mathbf{D}$  alebo  $\mathbf{F}$ . ■

Nech  $\mathbf{D} = (d_{ij})_{m \times n}$  je matica reálnych čísel  $d_{ij} \in R$  typu  $m \times n$ , kde  $m, n \in N$ . Potom funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$  daná predpisom

$$f(\mathbf{x})^T = \mathbf{D}\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1n}x_n \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \dots + d_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1}x_1 + d_{m2}x_2 + \dots + d_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

<sup>7</sup>Ak  $f: A \rightarrow A$ , kde  $A \subset R^n$  je lineárny priestor, potom sa  $f$  často nazýva **lineárna transformácia**.

$$\begin{aligned} \text{t. j. } f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}\mathbf{D}^T = (x_1; x_2; \dots; x_n) \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & \dots & d_{m1} \\ d_{12} & d_{22} & \dots & d_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{1n} & d_{2n} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \\ &= (d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1n}x_n; \dots; d_{m1}x_1 + d_{m2}x_2 + \dots + d_{mn}x_n) \end{aligned}$$

je lineárna (stačí jednoduché dosadenie, viď napr. [11, 35]).

Príklad 2.1.7 môžeme zovšeobecniť na ľubovoľnú lineárnu funkciu  $f: R^n \rightarrow R^m$ , kde  $m, n \in N$ . Ak predchádzajúce úvahy zhrnieme, potom platí:

- Každá reálna matica  $\mathbf{D}$  typu  $m \times n$  reprezentuje lineárnu funkciu  $f: R^n \rightarrow R^m$ .
- Ku každej lineárnej funkcii  $f: R^n \rightarrow R^m$  existuje reálna matica  $\mathbf{D}$  typu  $m \times n$  taká, že platí  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{D}^T$ , t. j.  $f(\mathbf{x})^T = \mathbf{D}\mathbf{x}^T$ . Maticu  $\mathbf{D}$  nazývame **matica lineárnej funkcie**  $f$ .

Funkcia  $f: R \rightarrow R$  sa nazýva **elementárna** (ma1: 3.1.2 Elementárne funkcie), ak ju dokážeme vytvoriť z funkcií  $y = \text{konšt.}$ ,  $y = x$ ,  $y = e^x$ ,  $y = \ln x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arctg x$  pomocou sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania funkcií.

**Viacrozmerné reálne elementárne funkcie**  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  dostaneme analogicky pomocou uvedených operácií a funkcií pre jednotlivé premenné  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Viacrozmerná vektorová funkcia**  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $m, n \in N$  je **elementárna**, ak je elementárnou funkciou každá jej zložka  $f_j: R^n \rightarrow R$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

### Príklad 2.1.8.

Nasledujúce funkcie sú elementárne v  $R^n$ :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= (\sin x_1, \sin x_2): R^2 \rightarrow R^2, & f_2(x, y, z) &= x + y - e^{x-z} + 1: R^3 \rightarrow R, \\ f_3(x, y, z) &= x + 1: R^3 \rightarrow R, & f_4(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + 2x_2^4x_1 - x_3: R^3 \rightarrow R, \\ f_5(x_1, x_2) &= \sin x_1 \cdot \sin x_2: R^2 \rightarrow R, & f_6(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2: R^3 \rightarrow R, \\ f_7(x) &= (x, x^2, x^3): R \rightarrow R^3, & f_8(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 - 2x_2 - 2x_3^2: R^3 \rightarrow R. \blacksquare \end{aligned}$$

**Jednočlenom** v  $R^n$ ,  $n \in N$  nazývame funkciu  $f: R^n \rightarrow R$  definovanú vzťahom

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1; x_2; \dots; x_n) = cx_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

kde koeficient  $c \in R$  a exponenty  $k_1, k_2, \dots, k_n \in N \cup \{0\}$ . Súčet  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  nazývame **stupeň jednočlena**.

Ak sčítame viacero jednočlenov, dostaneme **mnohočlen (polynóm)** v  $R^n$ , pričom jeho stupeň je rovný najväčšiemu zo stupňov jednotlivých jednočlenov. V príklade 2.1.8 sú polynómami funkcie  $f_3, f_4, f_6$  a  $f_8$ , pričom  $f_3$  má stupeň 1, polynóm  $f_4$  má stupeň 5 a polynómy  $f_6$  a  $f_8$  majú stupeň 2.

Polynóm  $f: R^n \rightarrow R$  sa nazýva **homogénny stupňa  $k$** , resp. (častejší názov) **forma  $k$ -teho stupňa (stupňa  $k$ )**, ak všetky jeho jednočleny majú rovnaký stupeň  $k \in N \cup \{0\}$ .

Je zrejmé, že pre každú formu  $f: R^n \rightarrow R$  každého stupňa  $k \in N$  platí

$$f(\mathbf{0}_n) = f(0; 0; \dots; 0) = 0.$$

Špeciálne formu prvého stupňa  $f: R^n \rightarrow R$  definovanú vzťahom

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{i=1}^n c_ix_i = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x}^T,$$

kde<sup>8</sup>  $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ ,  $\mathbf{c} = (c_1; c_2; \dots; c_n) \in R^n$ , nazývame **lineárna forma v  $R^n$** .

Formu druhého stupňa (napr. funkcia  $f_6$  v príklade 2.1.8)  $f: R^n \rightarrow R$  definovanú

$$f(\mathbf{x}) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \cdots + c_{1n}x_1x_n + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2 + \cdots + c_{2n}x_2x_n \\ \cdots + c_{n1}x_nx_1 + c_{n2}x_nx_2 + \cdots + c_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_ix_j,$$

kde  $c_{ij} \in R$  pre  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , nazývame **kvadratická forma v  $R^n$** . Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že pre všetky  $i \neq j$  platí  $c_{ij} = c_{ji}$ , pretože<sup>9</sup>

$$c_{ij}x_ix_j + c_{ji}x_jx_i = (c_{ij} + c_{ji})x_ix_j = \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}x_ix_j + \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}x_jx_i.$$

Tieto koeficienty môžeme usporiadať do symetrickej matice

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

ktorú nazývame **matica kvadratickej formy  $f(\mathbf{x})$** . Číslo  $\det \mathbf{C}$  nazývame **determinat kvadratickej formy  $f(\mathbf{x})$** .

V maticovom tvare môžeme kvadratickú formu  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in R^n$  zapísať v tvare

$$f(\mathbf{x}) = (x_1; x_2; \dots; x_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_ix_j. \quad (2.2)$$

Ak je matica  $\mathbf{C}$  diagonálna, t. j. ak pre všetky  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$  platí  $c_{ij} = c_{ji} = 0$ , potom hovoríme, že kvadratická forma má **diagonálny (kanonický) tvar**. Potom platí

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{x}^T = \sum_{i=1}^n c_{ii}x_i^2 = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + \cdots + c_{nn}x_n^2.$$

### Poznámka 2.1.5.

*Kvadratická forma v  $R^n$  je špeciálnym prípadom bilineárnej formy v  $R^n$ .*

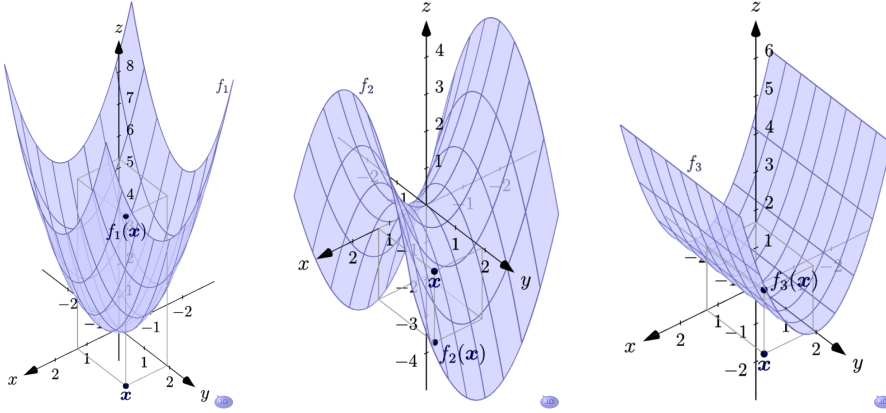
*Reálna funkcia  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}): R^n \times R^n \rightarrow R$  dvoch vektorových premenných  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$  sa nazýva bilineárna forma v priestore  $R^n$ , ak pre pevné  $\mathbf{x} = \mathbf{u}$  a pre pevné  $\mathbf{y} = \mathbf{v}$  sú funkcie  $f(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ ,  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  lineárnymi formami v  $R^n$ . Bilineárnu formu môžeme reprezentovať reálnou štvorcovou maticou  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n \times n}$  a písať v tvare*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{y}^T = (x_1; x_2; \dots; x_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_iy_j.$$

<sup>8</sup> $(\mathbf{c}, \mathbf{x})$  predstavuje skalárny súčin vektorov  $\mathbf{c}$  a  $\mathbf{x}$ .

<sup>9</sup>Prírastok funkcie  $c_{ij}x_ix_j + c_{ji}x_jx_i$  sa nezmení, iba sa symetricky (rovnomerne) rozloží.

Ak je matica  $\mathbf{C}$  symetrická, potom funkcia  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T$  tvorí kvadratickú formu v  $R^n$ .



Obr. 2.1.8: Kvadratické formy v  $R^2$ :  $f_1(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2$  (eliptická),  $f_2(x_1; x_2) = x_1^2 - x_2^2$  (hyperbolická),  $f_3(x_1; x_2) = x_1^2$  (parabolická)

Kvadratická forma  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  zo vzťahu (2.2), kde  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n \times n}$  je symetrická reálna matica, sa nazýva:

- **kladne definitná**, ak pre všetky  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$  platí  $f(\mathbf{x}) > 0$ .
- **záporne definitná**, ak pre všetky  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$  platí  $f(\mathbf{x}) < 0$ .
- **kladne semidefinitná**, ak pre všetky  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$  platí  $f(\mathbf{x}) \geq 0$ .
- **záporne semidefinitná**, ak pre všetky  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$  platí  $f(\mathbf{x}) \leq 0$ .
- **indefinitná**, ak existujú  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$  také, že platí  $f(\mathbf{x}) > 0 > f(\mathbf{y})$ .

Každú kvadratickú formu  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$ , kde  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n \times n}$  je symetrická reálna matica, môžeme vhodnou lineárnou transformáciou

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{t}) = \mathbf{t}\mathbf{B}^T: R^n \rightarrow R^n, \quad \text{t. j. } \mathbf{x}^T = \varphi(\mathbf{t})^T = \mathbf{B}\mathbf{t}^T,$$

kde  $\mathbf{B}$  je regulárna matica<sup>10</sup> (t. j.  $\det \mathbf{B} \neq 0$ ), upraviť na diagonálny tvar  $\mathbf{t}\mathbf{D}\mathbf{t}^T$ .

To znamená, že existuje reálna diagonálna matica  $\mathbf{D}$  typu  $n \times n$  taká, že platí

$$\mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T = f(\mathbf{x}) = f(\varphi(\mathbf{t})) = \mathbf{t}\mathbf{D}\mathbf{t}^T = d_{11}t_1^2 + d_{22}t_2^2 + \cdots + d_{nn}t_n^2.$$

Ak to zhrnieme, potom  $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T\mathbf{C}\mathbf{B}$ , pretože platí

$$f(\varphi(\mathbf{t})) = \varphi(\mathbf{t})\mathbf{C}\varphi(\mathbf{t})^T = \mathbf{t}\mathbf{B}^T\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{t}^T = \mathbf{t}\mathbf{D}\mathbf{t}^T = d_{11}t_1^2 + d_{22}t_2^2 + \cdots + d_{nn}t_n^2. \quad (2.3)$$

Transformácia  $\varphi$  nemusí byť určená jednoznačne, ale zachováva základné vlastnosti kvadratickej formy, čiže aj definitnosť (vety 2.1.2 a 2.1.3). Tieto aj nasledujúce úvahy patria do sféry lineárnej algebry, preto ich nebudeme dokazovať (viď napr. [3, 13, 20, 35, 45]).

<sup>10</sup>Matica  $\mathbf{B}$  nemusí byť určená jednoznačne.

**Veta 2.1.1.**

Diagonálna kvadratická forma  $f(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n d_{ii}t_i^2: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$ ,  $d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn} \in R$ .

- a)  $f$  je kladne definitná.  $\iff d_{ii} > 0$  pre všetky  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- b)  $f$  je záporne definitná.  $\iff d_{ii} < 0$  pre všetky  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- c)  $f$  je kladne semidefinitná.  $\iff d_{ii} \geq 0$  pre všetky  $i = 1, 2, \dots, n$  a existuje  $d_{ii} = 0$ .
- d)  $f$  je záporne semidefinitná.  $\iff d_{ii} \leq 0$  pre všetky  $i = 1, 2, \dots, n$  a existuje  $d_{ii} = 0$ .
- e)  $f$  je indefinitná.  $\iff$  Existuje  $d_{ii} > 0$  a existuje  $d_{jj} < 0$ .

**Príklad 2.1.9.**

Kvadratická forma

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3^2: R^3 \rightarrow R$$

je indefinitná, pretože  $f(1; 0; 0) = 1 > 0$ ,  $f(0; 0; 1) = -2 < 0$ . Matica formy  $f$  má tvar

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{t. j. } f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}C\mathbf{x}^T = \mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}^T.$$

Upravíme  $f$  na diagonálny tvar a ukážeme, že aj v tomto tvare je indefinitná.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2) - (2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_2x_3 - 2x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3 - x_2^2 - 3x_3^2 = \circledast \end{aligned}$$

Vybrali sme všetky jednočleny obsahujúce premennú  $x_1$  a výraz sme doplnili na úplný štvorec (prvá zátvorka). Členy, ktoré sme doplnili, sme následne odpočítali, aby sa hodnota  $f(\mathbf{x})$  nezmenila (druhá zátvorka). Uvedený postup aplikujeme postupne na všetky premenné  $x_2, x_3$ , atď.

$$\begin{aligned} \circledast &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 - 3x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2 = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2. \end{aligned}$$

Dostali sme tvar  $f(\mathbf{t}) = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2$ , pričom  $t_1 = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $t_2 = x_2 + 2x_3$ ,  $t_3 = x_3$ . Forma je indefinitná podľa vety 2.1.1, resp. stačí uvážiť, že  $f(1; 0; 0) = 1$ ,  $f(0; 1; 0) = -1$ . Pre lineárnu transformáciu  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{t}): R^n \rightarrow R^n$  prechodu na diagonálny tvar platí

$$\left. \begin{matrix} t_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ t_2 = x_2 + 2x_3, \\ t_3 = x_3. \end{matrix} \right\} \implies \left. \begin{matrix} x_1 = t_1 - t_2 + t_3, \\ x_2 = t_2 - 2t_3, \\ x_3 = t_3. \end{matrix} \right\} \implies B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = B\mathbf{t}^T.$$

Pre diagonálny tvar  $f(\varphi(\mathbf{t})) = \mathbf{t}B^T C B \mathbf{t}^T$  zo vzťahu (2.3) platí

$$f(\varphi(\mathbf{t})) = \mathbf{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{t}^T = \mathbf{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{t}^T. \blacksquare$$

Existuje oveľa viac spôsobov ako upraviť kvadratickú formu na diagonálny tvar (viď napr. [13, 45]). Jeden z častých spôsobov využíva vlastné čísla a vlastné vektory matice kvadratickej formy. My budeme vlastnosti kvadratických foriem využívať pri určovaní extrémov funkcií viacerých premenných (?? Extrémy funkcií) a bude nás zaujímať iba ich definitnosť. Nebudeme k tomu potrebovať maticu transformácie na diagonálny tvar. Postačia nám iba vlastné čísla vyšetrovanej kvadratickej formy, ktoré sú vždy reálne.<sup>11</sup> Nebudeme teda potrebovať ani vlastné vektory k nim prisluchajúce. Pre prevod kvadratickej formy na jej diagonálny tvar platia nasledujúce tvrdenia.

### Veta 2.1.2.

$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T: R^n \rightarrow R, n \in N$  je kvadratická forma, pričom  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n \times n}$  je symetrická reálna matica a  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \in R$  sú jej vlastné čísla (vrátane násobnosti).

$\implies$  Existuje lineárna transformácia  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{t}) = \mathbf{t}\mathbf{B}^T: R^n \rightarrow R^n$ ,  
kde  $\mathbf{B}$  je reálna matica  $n \times n$ , pre ktorú  $f(\varphi(\mathbf{t})) = \delta_1 t_1^2 + \delta_2 t_2^2 + \dots + \delta_n t_n^2$ .

Z predchádzajúcej vety a z vety 2.1.1 vyplýva, že definitnosť kvadratickej formy vieme jednoducho určiť pomocou vlastných čísel jej matice.

Problém väčšinou nastane pri výpočte vlastných čísel (sú to korene reálneho polynómu stupňa  $n$ ). Matica transformácie  $\mathbf{B}$  je vytvorená pomocou vlastných vektorov matice  $\mathbf{C}$ . Pripomeňme, že ak má niektoré vlastné číslo geometrickú násobnosť (počet lineárne nezávislých vektorov k nemu patriacich) menšiu ako algebraickú násobnosť (násobnosť ako koreňa charakteristického polynómu), musíme zostávajúce vlastné vektory konštruovať pomocou reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov.

### Veta 2.1.3 (Sylvestrova veta o zotrvačnosti kvadratických foriem).

$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T: R^n \rightarrow R, n \in N$  je kvadratická forma,  $\mathbf{C}_{n \times n}$  je symetrická reálna matica.

$\implies$  Existuje lineárna transformácia  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{t}) = \mathbf{t}\mathbf{B}^T: R^n \rightarrow R^n$ ,  
kde  $\mathbf{B}_{n \times n}$  je reálna matica, pre ktorú platí  
 $f(\varphi(\mathbf{t})) = d_{11}t_1^2 + d_{22}t_2^2 + \dots + d_{nn}t_n^2$ , kde  $d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn} \in \{-1, 0, 1\}$ .

Diagonálny tvar kvadratickej formy vo vete 2.1.3 sa nazýva **normálový**. Lineárne transformácie v predchádzajúcich vetách nie sú určené jednoznačne, ale zachovávajú základné vlastnosti kvadratickej formy.

Nasledujúce charakteristiky kvadratickej formy sú jednoznačné:

- **Hodnosť**  $h$ , t. j. hodnosť matíc  $\mathbf{C}$ ,  $\text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  a  $\text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ .
- **Kladný index zotrvačnosti**  $k$ , t. j. počet kladných členov v diagonálnom tvare.
- **Záporný index zotrvačnosti**  $l$ , t. j. počet záporných členov v diagonálnom tvare.
- **Počet nulových členov**  $o$  v diagonálnom tvare.
- **Signatúra**  $\sigma$ , t. j. dvojica  $(k; l)$ .

Je zrejmé, že platí  $h = k + l$ ,  $n = k + l + o$ ,  $o = n - k - l$ . Z predchádzajúcich úvah a z vety 2.1.1 vyplýva nasledujúce tvrdenie.

<sup>11</sup> Reálne symetrické matice majú iba reálne vlastné čísla a reálne vlastné vektory.

**Veta 2.1.4.**

$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T: R^n \rightarrow R, n \in N$  je kvadratická forma,  $\mathbf{C}_{n \times n}$  je symetrická reálna matica.

- a)  $f$  je kladne definitná.  $\iff k = n, l = o = 0$ .
- b)  $f$  je záporne definitná.  $\iff l = n, k = o = 0$ .
- c)  $f$  je kladne semidefinitná.  $\iff 0 < k < n, l = 0, o \neq 0$ .
- d)  $f$  je záporne semidefinitná.  $\iff 0 < l < n, k = 0, o \neq 0$ .
- e)  $f$  je indefinitná.  $\iff k > 0, l > 0$ .

Definitnosť kvadratickej formy  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T: R^n \rightarrow R, n \in N$ , kde  $\mathbf{C}$  je symetrická reálna matica typu  $n \times n$ , môžeme zistiť aj bez toho, aby sme počítali vlastné čísla matice  $\mathbf{C}$ , resp. upravovali kvadratickú formu  $f$  na diagonálny tvar.

Označme pre  $k = 1, 2, \dots, n$  subdeterminanty

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{vmatrix}, \text{ t. j. } \Delta_1 = |c_{11}|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Veta 2.1.5 (Sylvestrovo kritérium).**

$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T: R^n \rightarrow R, n \in N$  je kvadratická forma,  $\mathbf{C}_{n \times n}$  je symetrická reálna matica.

Potom platí:

- a)  $f$  je kladne definitná.  $\iff \Delta_k > 0$  pre všetky  $k = 1, 2, \dots, n$ .
- b)  $f$  je záporne definitná.  $\iff (-1)^k \Delta_k > 0$  pre všetky  $k = 1, 2, \dots, n$ .
- c)  $f$  je indefinitná.  $\iff \Delta_n \neq 0$  a  $f$  nie je kladne a  $f$  nie je záporne definitná.

V iných prípadoch nemôžeme Sylvestrovo kritérium použiť, pretože nevieme rozhodnúť, či je kvadratická forma kladne semidefinitná, záporne semidefinitná alebo indefinitná.

**Poznámka 2.1.6.**

Z praktických dôvodov pri zisťovaní kladnej definitnosti alebo zápornej definitnosti kvadratickej formy  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T: R^n \rightarrow R, n \in N$  je výhodné najprv zisťovať hodnoty párnych subdeterminantov  $\Delta_2, \Delta_4, \dots$ , ktoré by mali byť kladné.

**Poznámka 2.1.7.**

Ak v kvadratickej forme  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{C}\mathbf{x}^T: R^n \rightarrow R, n \in N$  (v ľubovoľnom vyjadrení) existuje aspoň jedno  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  také, že  $c_{ii} = 0$ , potom  $f(\mathbf{x})$  nemôže byť definitná. Môže byť iba semidefinitná alebo indefinitná. Je zrejmé, že  $f(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = 0$  pre nenulový vektor  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ .

Toto tvrdenie vyplýva taktiež zo Sylvestrovho kritéria. Keďže vo forme  $f$  nezáleží na poradí premenných  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , môžeme si ich usporiadať tak aby premenná  $x_i$  bola prvá. Lenže v tomto prípade bude  $\Delta_1 = |c_{ii}| = 0$  a podľa Sylvestrovho kritéria (veta 2.1.5) nemôžeme dostať definitnosť ani kladnú a ani zápornú.

**Príklad 2.1.10.**

Uvažujme indefinitnú kvadratickú formu

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_3^2: R^3 \rightarrow R$$

z príkladu 2.1.9. Indefinitnosť dokážeme pomocou Sylvestrovho kritéria.

*Riešenie.*

Matica kvadratickej formy  $f$  má tvar

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{t. j. } f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}C\mathbf{x}^T = \mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}^T.$$

Forma je indefinitná, pretože platí

$$\Delta_1 = |1| = +1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad (\text{nie je kladne ani záporne definitná}),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}_{+1 \times r01} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 + 2) = -1 < 0. \blacksquare$$

### Príklad 2.1.11.

Určte definitnosť kvadratickej formy  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_2^2 - x_3^2: R^3 \rightarrow R$ .

*Riešenie.*

Sylvestrovho kritérium nemôžeme použiť, pretože platí

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}^T, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{+1 \times r02}^{+1 \times r02} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{+1 \times r02} = 0.$$

Kvadratická forma  $f$  je indefinitná, stačí položiť  $f(1; 0; 0) = 1 > 0$  a  $f(0; 0; 1) = -1 < 0$ . Ak upravíme kvadratickú formu  $f$  na diagonálny tvar, dostaneme

$$f(\mathbf{x}) = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 2x_3^2, \\ \text{t. j. } f(\mathbf{t}) = t_1^2 - 2t_3^2, \quad \text{kde } t_1 = x_1 - x_2 + x_3, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = x_3.$$

V tomto prípade stačí položiť napríklad  $f(1; 1; 0) = 1 > 0$ ,  $f(0; 1; 1) = -2 < 0$ . ■

### Príklad 2.1.12.

Vyšetrite definitnosť formy  $f(x; y) = c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2: R^2 \rightarrow R$ , kde  $c_{11}, c_{12}, c_{22} \in R$ .

*Riešenie.*

Kvadratickú formu  $f$  môžeme vyjadriť v tvare  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x}^T$ , kde  $\mathbf{x} = (x; y) \in R^2$ .

Subdeterminanty sú  $\Delta_1 = |c_{11}| = c_{11}$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$ . Sú dve možnosti:

1.  $\Delta_1 = c_{11} \neq 0$ , potom  $f(\mathbf{x}) = c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2$ ,  $\Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$ .

•  $\Delta_2 < 0. \implies f$  je **indefinitná**. [ $c_{11} \neq 0, \Delta_2 < 0$ ]

•  $\Delta_2 > 0$ .

◊  $\Delta_1 > 0. \implies f$  je **kladne definitná**. [ $c_{11} > 0, \Delta_2 > 0$ ]

- ◊  $\Delta_1 < 0. \implies f$  je **záporne definitná**.  $[c_{11} < 0, \Delta_2 > 0]$
- $\Delta_2 = 0$ , potom  $c_{11}c_{22} = c_{12}^2$  a sú dve možnosti.
  - ◊  $c_{12} = 0, c_{22} = 0$ , potom  $f(\mathbf{x}) = c_{11}x^2$ .
    - $\implies f$  je **kladne semidefinitná** pre  $c_{11} > 0$ .  $[c_{11} > 0, c_{12} = 0, c_{22} = 0]$
    - $\implies f$  je **záporne semidefinitná** pre  $c_{11} < 0$ .  $[c_{11} < 0, c_{12} = 0, c_{22} = 0]$
  - ◊  $c_{12} \neq 0, c_{22} \neq 0$ , potom sú vektory  $(c_{11}; c_{12}), (c_{12}; c_{22})$  lineárne závislé.  
 Potom  $(c_{11}; c_{12}) = q(c_{12}; c_{22})$ , t. j.  $c_{12} = qc_{22}, c_{11} = qc_{12} = q^2c_{22}$ , kde  $q \neq 0$ .  
 Potom  $f(\mathbf{x}) = q^2c_{22}x^2 + 2qc_{22}xy + c_{22}y^2 = c_{22}(q^2x^2 + 2qxy + y^2) = c_{22}(qx + y)^2$ .
    - $\implies f$  je **kladne semidefinitná** pre  $c_{22} > 0$ .  $[c_{11} > 0, c_{12} = 0, c_{22} > 0]$
    - $\implies f$  je **záporne semidefinitná** pre  $c_{22} < 0$ .  $[c_{11} < 0, c_{12} = 0, c_{22} < 0]$
- 2.  $\Delta_1 = c_{11} = 0$ , potom  $f(\mathbf{x}) = 2c_{12}xy + c_{22}y^2, \Delta_2 = -c_{12}^2 \leq 0$ .
  - $\Delta_2 < 0$ , t. j.  $c_{12} \neq 0. \implies f$  je **indefinitná**.  $[c_{11} = 0, c_{12} \neq 0, c_{22} \in \mathbb{R}]$
  - $\Delta_2 = 0$ , t. j.  $c_{12} = 0$ , potom  $f(\mathbf{x}) = c_{22}y^2$  a sú tri možnosti.
    - ◊  $c_{22} > 0. \implies f$  je **kladne semidefinitná**.  $[c_{11} = 0, c_{12} = 0, c_{22} > 0]$
    - ◊  $c_{22} < 0. \implies f$  je **záporne semidefinitná**.  $[c_{11} = 0, c_{12} = 0, c_{22} < 0]$
    - ◊  $c_{22} = 0. \implies f(\mathbf{x}) = 0$  pre všetky  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . ■

### 2.1.3 Limita funkcie $n$ premenných

Limita a spojitosť funkcií v priestore  $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$  sa definujú analogicky ako v  $\mathbb{R}$  a majú podobné vlastnosti (viď [6, 7, 8, 49]). Keďže  $\mathbb{R}$  je špeciálny prípad priestoru  $\mathbb{R}^n$  pre  $n = 1$ , vlastnosti platné v  $\mathbb{R}^n$  musia platiť aj v  $\mathbb{R}$ . Najprv si zopakujeme definíciu hromadného bodu, bez ktorého nemôžeme definovať limitu.

Bod  $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^*)^n, n \in \mathbb{N}$  sa nazýva **hromadným bodom** množiny  $A \subset \mathbb{R}^n, A \neq \emptyset$ , ak v každom jeho okolí  $O(\mathbf{a})$  existuje aspoň jeden bod  $\mathbf{b}$  z množiny  $A$  taký, že  $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$ .

**Množina**  $A \subset \mathbb{R}^n$  sa nazýva **uzavretá**, ak obsahuje všetky svoje hromadné body.

Uvažujme funkciu  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kde  $n, m \in \mathbb{N}$  a body  $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^*)^n, \mathbf{b} \in (\mathbb{R}^*)^m$ , t. j.  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n), a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^*, \mathbf{b} = (b_1; b_2; \dots; b_m), b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}^*$ .

**Funkcia  $f$  má v bode  $\mathbf{a}$  limitu rovnú  $\mathbf{b}$  (limita funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  sa rovná  $\mathbf{b}$ ),** označenie  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ , ak platí:

- Bod  $\mathbf{a}$  je hromadným bodom množiny  $D(f)$ .
- Pre všetky  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^\infty \subset D(f) - \{\mathbf{a}\}$  také, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ , platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{b}$ .

$\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^\infty \subset D(f) - \{\mathbf{a}\}$  je postupnosť<sup>12</sup> vektorov  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ , kde  $\mathbf{x}_k \in D(f), \mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$ . Po zložkách ich budeme označovať  $\mathbf{x}_k = (x_1; x_2; \dots; x_n)_k$ , resp.  $\mathbf{x}_k = (x_{k1}; x_{k2}; \dots; x_{kn})$ .

#### Poznámka 2.1.8.

*Druhá podmienka predstavuje implikáciu „Ak  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow \mathbf{a}$ , potom  $\{f(\mathbf{x}_k)\}_{k=1}^\infty \rightarrow \mathbf{b}$ .“ a musí platiť pre každú postupnosť bodov  $\mathbf{x}_k \in D(f), \mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$ . To znamená, že uvedená implikácia musí platiť „pre každý možný spôsob priblíženia k bodu  $\mathbf{a}$ “.*

<sup>12</sup>Keďže  $n$  reprezentuje dimenziu priestoru  $\mathbb{R}^n$ , museli sme pre členy postupnosti zvoliť inú premennú  $k$ .

- V prípade limity reálnej funkcie jednej reálnej premennej (ma1: 3.2 Limita funkcie) to sú smery zľava a sprava, prípadne ich ľubovoľné striedanie.
- Pre limitu funkcie dvoch a viacerých premenných to nie je také jednoduché. Spôsobov priblíženia k bodu  $\mathbf{a}$  existuje nepreberné a nekonečné množstvo. Môžeme sa približovať po ľubovoľnej krivke (nekonečne veľa možností), napr. po polpriamke (nekonečne veľa smerov), po parabole (nekonečne veľa možností), po špirále (nekonečne veľa možností), po hyperbole (nekonečne veľa možností) atď. Toto priblíženie nemusí byť po krivke, môže to byť ľubovoľný spôsob, aký vymyslíme. Dôležité je, aby priblíženie skončilo v bode  $\mathbf{a}$ .

Z jednoznačnosti limity postupnosti vyplýva **jednoznačnosť limity** funkcie  $f$  v danom bode  $\mathbf{a}$  (pokiaľ existuje). Táto limita sa nazýva  **$n$ -rozmerná (viacrozmerná) limita** a predstavuje  $m$  limít reálnych  $n$ -rozmerných funkcií  $f_j(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R, j = 1, 2, \dots, m$ .

Pre limitu  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  platí

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = (b_1; b_2; \dots; b_m) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f_1(\mathbf{x}); f_2(\mathbf{x}); \dots; f_m(\mathbf{x})) \\ &= \left( \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_1(\mathbf{x}); \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_2(\mathbf{x}); \dots; \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_m(\mathbf{x}) \right). \end{aligned}$$

To znamená limitu pre každú zložku, t. j.  $m$  limít

$$b_1 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_1(\mathbf{x}), b_2 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_2(\mathbf{x}), \dots, b_m = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_m(\mathbf{x}).$$

Vzťah  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ , t. j.  $(x_1; x_2; \dots; x_n) \rightarrow (a_1; a_2; \dots; a_n)$  znamená  $x_1 \rightarrow a_1, x_2 \rightarrow a_2, \dots, x_n \rightarrow a_n$  pre každú zložku. Limitu môžeme písať vo viacerých tvaroch, napr.

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) &= \lim_{(x_1; x_2; \dots; x_n) \rightarrow (a_1; a_2; \dots; a_n)} f(x_1; x_2; \dots; x_n) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ &= \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} (f_1(x_1; x_2; \dots; x_n); f_2(x_1; x_2; \dots; x_n); \dots; f_m(x_1; x_2; \dots; x_n)) \\ &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f_1(\mathbf{x}); f_2(\mathbf{x}); \dots; f_m(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Ak pre aspoň jedno  $i = 1, 2, \dots, n$  platí  $a_i = \pm\infty$ , potom hovoríme **o limite v ne-vlastnom bode  $\mathbf{a}$** . Inak hovoríme **o limite vo vlastnom bode  $\mathbf{a}$** .

Ak pre aspoň jedno  $j = 1, 2, \dots, m$  platí  $b_j = \pm\infty$ , potom sa limita nazýva **ne-vlastná limita**. V opačnom prípade sa nazýva **vlastná limita**. To znamená, že limita  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  je vlastná, ak sú vlastné všetky jej zložky  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_j(\mathbf{x}) = b_j, j = 1, 2, \dots, m$ .

Nech  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in R^n, n \in N$  je konečný bod,  $\varepsilon > 0$ . Otvorený interval

$$I_\varepsilon(\mathbf{a}) = (a_1 - \varepsilon; a_1 + \varepsilon) \times (a_2 - \varepsilon; a_2 + \varepsilon) \times \dots \times (a_n - \varepsilon; a_n + \varepsilon)$$

geometricky predstavuje  $n$ -rozmernú kocku bez obalu s hranou dĺžky  $2\varepsilon$  (viď pr. 2.1.1) a stredom (t. j. ťažiskom a priesečníkom telesových uhlopriečok) v bode  $\mathbf{a}$ . Telesové uhlopriečky majú dĺžku  $2\sqrt{n}\varepsilon$ , pretínajú sa v bode  $\mathbf{a}$  a spájajú dvojice najvzdialenejších bodov (protiľahlých vrcholov) intervalu  $I_\varepsilon(\mathbf{a})$ . Kocka má  $2^n$  vrcholov a  $2n$  stien, pričom každú stenu tvorí opäť kocka, ale s rozmerom  $n - 1$ .



Obr. 2.1.9: Intervaly  $I_\varepsilon(\mathbf{a})$  a okolia  $O_\varepsilon(\mathbf{a})$ ,  $O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\mathbf{a})$   
bodov  $\mathbf{a} \in R^n$  pre  $n = 1, 2, 3$



Ak  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in I_\varepsilon(\mathbf{a})$ , potom  $x_i \in (a_i - \varepsilon; a_i + \varepsilon)$ , t. j.  $a_i - \varepsilon < x_i < a_i + \varepsilon$  platí pre každé  $i = 1, 2, \dots, n$ . Potom  $-\varepsilon < x_i - a_i < \varepsilon$ , t. j.  $(x_i - a_i)^2 < \varepsilon^2$  a platí

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \sqrt{n\varepsilon^2} = \sqrt{n}\varepsilon.$$

To znamená, že sa interval  $I_\varepsilon(\mathbf{a})$  zmestí do okolia bodu  $\mathbf{a}$  s polomerom  $\sqrt{n}\varepsilon$ , t. j. platí

$$I_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\mathbf{a}).$$

Protiľahlé stený sa líšia iba v jednej súradnici, ktorej hodnota je  $a_i - \varepsilon$  alebo  $a_i + \varepsilon$ . Stien je ich  $n$  párov, jeden pár pre každé  $i = 1, 2, \dots, n$  a vzdialenosť medzi nimi je  $2\varepsilon$ . To znamená, že sa medzi ne zmestí okolie  $O_\varepsilon(\mathbf{a})$ . Potom platí (obr. 2.1.9 pre  $n = 1, 2, 3$ )

$$O_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset I_\varepsilon(\mathbf{a}). \implies O_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset I_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\mathbf{a}).$$

Ak budeme uvažovať interval  $I_{\sqrt{n}\varepsilon}(\mathbf{a})$ , potom  $\sqrt{n}(\sqrt{n}\varepsilon) = n\varepsilon$  a analogicky platí

$$O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\mathbf{a}) \subset I_{\sqrt{n}\varepsilon}(\mathbf{a}) \subset O_{n\varepsilon}(\mathbf{a}). \implies O_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset I_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\mathbf{a}) \subset I_{\sqrt{n}\varepsilon}(\mathbf{a}) \subset O_{n\varepsilon}(\mathbf{a}).$$

Ak to zhrnieme, potom pre každé  $\varepsilon > 0$  platí

$$O_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset I_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\mathbf{a}), \quad I_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset O_{\sqrt{n}\varepsilon}(\mathbf{a}) \subset I_{\sqrt{n}\varepsilon}(\mathbf{a}). \quad (2.4)$$

#### Poznámka 2.1.9.

Zo vzťahu (2.4) vyplýva, že vo všetkých doterajších i nasledujúcich úvahách môžeme namiesto okolí  $O_\varepsilon(\mathbf{a})$  používať otvorené intervaly  $I_\varepsilon(\mathbf{a})$  a naopak.<sup>13</sup> V zmysle poznámky pod čiarou a zjednodušenia názvoslovie môžeme  $\varepsilon > 0$  považovať za **polomer intervalu**  $I_\varepsilon(\mathbf{a})$ . Pre  $n = 1$ , t. j. v priestore  $R$  sú pojmy  $O_\varepsilon(\mathbf{a})$  a  $I_\varepsilon(\mathbf{a})$  rovnaké, platí  $O_\varepsilon(\mathbf{a}) = I_\varepsilon(\mathbf{a})$ .

#### Poznámka 2.1.10.

Okoliami bodov  $\pm\infty$  na reálnej osi  $R^1 = R$  sú intervaly  $(r; \infty)$  a  $(-\infty; r)$ , kde  $r \in R$ . Mnohokrát je vhodné zvoliť  $r = \pm\frac{1}{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , kde pre  $\varepsilon \rightarrow 0$  platí  $\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty$ ,  $-\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow -\infty$ , t. j.

$$O_\varepsilon(\infty) = I_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}; \infty\right), \quad \text{resp. } O_\varepsilon(-\infty) = I_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

V tomto zmysle budeme v priestoroch  $R^n$  uvažovať neohraničené intervaly  $I_\varepsilon(\mathbf{a})$  a aj okolia  $O_\varepsilon(\mathbf{a})$  v nevlasných bodoch  $\mathbf{a}$ .

<sup>13</sup>Interval  $I_\varepsilon(\mathbf{a})$  predstavuje okolie bodu  $\mathbf{a}$  s polomerom  $\varepsilon$  pri použití ekvivalentnej maximovej normy (viď poznámka 2.1.2).

Z definície je zrejmé, že limita predstavuje lokálnu záležitosť v nejakom okolí bodu  $\mathbf{a}$ , pričom funkcia v tomto bode nemusí byť definovaná. Analogicky ako pri reálnych funkciách  $f: R^1 \rightarrow R^1$ , môžeme limitu charakterizovať pomocou okolí (definícia v zmysle Cauchyho). Uvedená definícia pomocou postupností sa nazýva v zmysle Heineho. Tieto definície sú ekvivalentné a v praxi sa používajú obe. Vyplyva to z vety 2.1.6, ktorú uvádzame bez dôkazu. Dôkaz je analogický ako pre limitu reálnej funkcie jednej reálnej premennej [49].

### Veta 2.1.6.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$ , body  $\mathbf{a} \in (R^*)^n$ ,  $\mathbf{b} \in (R^*)^m$ . Potom platí:

- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \iff$
- Bod  $\mathbf{a}$  je hromadným bodom množiny  $D(f)$ .
  - Pre každé okolie  $O(\mathbf{b})$  existuje okolie  $O(\mathbf{a})$  také, že pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a}) \cap D(f)$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  platí  $f(\mathbf{x}) \in O(\mathbf{b})$ .

Ak sú body  $\mathbf{a} \in R^n$ ,  $\mathbf{b} \in R^m$  vlastné a ak označíme polomery okolí  $\varepsilon$ ,  $\delta$ , môžeme druhé tvrdenie vety na pravej strane symbolicky písať v tvare

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0} \underbrace{\exists O_\delta(\mathbf{a})} \forall \mathbf{x} \in D(f): \underbrace{\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{a}), \mathbf{x} \neq \mathbf{a}}_{0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n < \delta} \implies \underbrace{f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(\mathbf{b})}_{\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\|_m < \varepsilon}.$$

Limita funkcie  $f: R^n \rightarrow R^m$  má  $m$  zložiek, t. j.  $m$  reálnych limít  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_j(\mathbf{x}) = b_j$  pre  $j = 1, 2, \dots, m$ . Predchádzajúce tvrdenie môžeme potom rozpísať

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0} \underbrace{\exists O_\delta(\mathbf{a})} \forall \mathbf{x} \in D(f): \underbrace{\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{a}), \mathbf{x} \neq \mathbf{a}}_{0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n < \delta} \implies \underbrace{f_j(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(b_j)}_{\textcircled{*}}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

pričom  $\textcircled{*}: |f_j(\mathbf{x}) - b_j| < \varepsilon$  pre vlastnú limitu  $b_j \in R$  a  $\textcircled{*}: f_j(\mathbf{x}) < -\frac{1}{\varepsilon}$  pre nevlastnú limitu  $b_j = -\infty$ , resp.  $\textcircled{*}: f_j(\mathbf{x}) > \frac{1}{\varepsilon}$  pre  $b_j = \infty$ .

V tomto zmysle môžeme tieto úvahy rozšíriť aj pre prípad, keď je bod  $\mathbf{a} \in (R^*)^n$  nevlastný, t. j. keď je aspoň jedna z hodnôt  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  nevlastná.

### Poznámka 2.1.11.

Ak uvážime poznámku 2.1.9 a vzťah (2.4), predchádzajúce tvrdenia ostanú v platnosti, ak namiesto okolí  $O_\delta(\mathbf{a})$ ,  $O_\varepsilon(\mathbf{b})$  použijeme intervaly  $I_\delta(\mathbf{a})$ ,  $I_\varepsilon(\mathbf{b})$ .

Viacrozmerné limity majú podobné vlastnosti ako limity reálnych funkcií jednej reálnej premennej (ma1: 3.2 Limita funkcie). Funkcia  $f: R \rightarrow R$  je špeciálny prípad viacrozmernej funkcie  $f: R^n \rightarrow R^m$  pre  $m = n = 1$ , takže mnoho vlastností môžeme zovšeobecniť pre vektorové funkcie a naopak.

Nasledujúca veta sa často používa pri výpočte limít. Zložitejšiu funkciu nahradíme jednoduchšou, ktorá je na nejakom intervale, resp. okolí **zhodná s pôvodnou funkciou**. Veta sa väčšinou pri výpočte neuvádza, predpoklady sa overujú priebežne počas výpočtu.

### Veta 2.1.7.

Funkcie  $f, g: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$ , bod  $\mathbf{a} \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $M = D(f) \cap D(g)$ .  $I(\mathbf{a})$  je otvorený interval<sup>14</sup> taký, že pre všetky  $\mathbf{x} \in I(\mathbf{a}) \cap M$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  platí  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ .

$\implies$  Pokiaľ limity existujú, platí  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ .

<sup>14</sup>Interval  $I(\mathbf{a})$  môžeme nahradiť okolím  $O(\mathbf{a})$  a tvrdenie vety sa nezmení (poznámka 2.1.9).

*Dôkaz.*

Nech  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in (R^*)^m$

Nech  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M - \{\mathbf{a}\}$  je taká, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ . Potom  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{b}$ .

Je zrejmé, že existuje  $k_0 \in N$  také, že pre všetky  $k \in N$ ,  $k \geq k_0$  platí  $\mathbf{x}_k \in I(\mathbf{a})$ .

To znamená, že  $\mathbf{x}_k \in I(\mathbf{a}) \cap M - \{\mathbf{a}\}$  a teda aj  $f(\mathbf{x}_k) = g(\mathbf{x}_k)$ . Potom platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(\mathbf{x}_k) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}, \text{ t. j. } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \blacksquare$$

### Príklad 2.1.13.

Uvažujme funkcie  $f(x_1; x_2) = x_1 + x_2: R^2 \rightarrow R$  a  $g(x_1; x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2}: R^2 \rightarrow R$ .

$D(f) = R^2$ ,  $D(g) = R^2 - \{(x; x), x \in R\}$ . Pre všetky  $\mathbf{x} \in D(f) \cap D(g) = D(g)$  platí

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1; x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 = f(x_1; x_2) = f(\mathbf{x}).$$

- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (x_1 + x_2) = x_1 + x_2$  existuje pre všetky  $\mathbf{x} \in (R^*)^2 - \{(\pm\infty; \mp\infty)\}$ .
- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2}$  má navyše problémový smer  $x_1 = x_2$ , kde nie je  $g$  definovaná.

Pre všetky  $\mathbf{x} \in R^2 - \{(\pm\infty; \mp\infty)\}$  limita existuje a  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ . Potom napr.:

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 1 \\ x_2 \rightarrow 1}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 1 \\ x_2 \rightarrow 1}} \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 1 \\ x_2 \rightarrow 1}} (x_1 + x_2) = 1 + 1 = 2.$$

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow \infty}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow \infty}} \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow \infty}} (x_1 + x_2) = \infty + \infty = \infty.$$

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow -\infty}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow -\infty}} \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow -\infty}} (x_1 + x_2) = \infty - \infty, \text{ t. j. neexistuje. } \blacksquare$$

### Veta 2.1.8.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$ , bod  $\mathbf{a} \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f)$ .

Existuje vlastná (konečná)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in R^m$ .

$\implies$  a) Existuje okolie  $O(\mathbf{a})$  také, že  $f$  je ohraničená na  $O(\mathbf{a}) - \{\mathbf{a}\}$ .

b) Existuje interval  $I(\mathbf{a})$  taký, že  $f$  je ohraničená na  $I(\mathbf{a}) - \{\mathbf{a}\}$ .

*Dôkaz.*

V zmysle poznámky 2.1.9 sú obe tvrdenia ekvivalentné a stačí dokázať jedno z nich.

Tvrdenie a) vyplýva priamo z vety 2.1.6.

Nech  $O(\mathbf{b})$  je ľubovoľné okolie, potom existuje  $O(\mathbf{a})$  také, že pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a}) \cap D(f)$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  platí  $f(\mathbf{x}) \in O(\mathbf{b})$ . T. j. existuje okolie  $O(\mathbf{a})$ , v ktorom je  $f$  ohraničená.  $\blacksquare$

### Veta 2.1.9.

a) Funkcie  $f, g: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$ , bod  $\mathbf{a} \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f) \cap D(g)$ .

Číslo  $c \in R$ . Existujú limity  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = d$ , kde  $b, d \in (R^*)^m$ .

$\implies$  Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel a limity existujú, platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm d, \quad \lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cb.$$

b) Funkcie  $f, g: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$ , bod  $a \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f) \cap D(g)$ . Existujú limity  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = d$ , kde  $b, d \in R^*$ .

$\implies$  Pokiaľ majú príslušné výrazy zmysel a limity existujú, platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = bd, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{d}.$$

*Dôkaz.*

Vetu dokážeme pre súčet. Ostatné tvrdenia sa dokážu analogicky.

Nech  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset D(f) \cap D(g) - \{a\}$  je taká, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Potom (definícia)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = d$ . Z toho vyplýva tvrdenie vety

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) \pm g(x_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm d. \blacksquare \end{aligned}$$

Ak niektorý z výrazov  $b \pm d$ ,  $cb$ ,  $bd$ , resp.  $b/d$  v predchádzajúcej vete nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje (musíme ju vypočítať iným spôsobom). Najčastejšie pomôže vhodná úprava výrazu, ktorým je funkcia definovaná. Niekedy to je vhodný rozklad, inokedy pomôže pripočítanie a odpočítanie rovnakého výrazu (pripočítame nulu) alebo vynásobenie čitateľa aj menovateľa v zlomku rovnakým výrazom.

#### Veta 2.1.10.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$ , bod  $a \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in R^*$ .

$$\implies \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |b|.$$

*Dôkaz.*

Dôkaz je analogický ako dôkaz predchádzajúcej vety 2.1.9.  $\blacksquare$

#### Veta 2.1.11.

Funkcie  $f, g: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$ , bod  $a \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $M = D(f) \cap D(g)$ .

Okolie  $O(a)$  je také, že pre všetky  $x \in O(a) \cap M$ ,  $x \neq a$  platí  $f(x) \leq g(x)$ .

$\implies$  Pokiaľ limity existujú, platí  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

*Dôkaz.*

Nech  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = d$ , pričom  $b, d \in R^*$ . Dokážeme sporom.

Nech  $b \leq d$  neplatí, t. j.  $b > d$ . Potom existujú okolia  $O(b)$ ,  $O(d)$  také, že  $O(b) \cap O(d) = \emptyset$ .

Potom pre všetky  $u \in O(b)$ ,  $v \in O(d)$  platí  $u > v$  a tiež (veta 2.1.6) platí:

- Ku  $O(b)$  existuje  $O_f(a)$  tak, že pre všetky  $x \in O_f(a) \cap D(f)$ ,  $x \neq a$  platí  $f(x) \in O(b)$ .
- Ku  $O(d)$  existuje  $O_g(a)$  tak, že pre všetky  $x \in O_g(a) \cap D(g)$ ,  $x \neq a$  platí  $g(x) \in O(d)$ .

Potom existuje okolie  $O^*(a) \subset O(a) \cap O_f(a) \cap O_g(a)$  také, že pre všetky  $x \in O^*(a) \cap M$  platí nerovnosť  $f(x) > g(x)$ . To je spor s predpokladmi.  $\blacksquare$

Ak v predchádzajúcej vete  $f(x) \leq g(x)$  nahradíme predpokladom  $f(x) < g(x)$ , tvrdenie vety  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  sa vo všeobecnosti nezmení.

V prípade nevlastných limit platia implikácie:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty. \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty. \quad \text{Resp.} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty. \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

### Dôsledok 2.1.11.a (Veta o zovretí).

Funkcie  $f, g, h: R^n \rightarrow R, n \in N$ , bod  $a \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $M = D(f) \cap D(g) \cap D(h)$ . Okolie  $O(a)$  je také, že pre všetky  $x \in O(a) \cap M, x \neq a$  platí  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ .

Existujú limity  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , kde  $b \in R^*$ .

$$\implies \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

### Dôsledok 2.1.11.b.

Funkcie  $f, g: R^n \rightarrow R, n \in N$ , bod  $a \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f) \cap D(g)$ .

Funkcia  $f$  je ohraničená v nejakom okolí  $O(a) - \{a\}$ . Existuje  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

$$\implies \text{Existuje limita } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = 0.$$

Okolie  $O(a)$  môžeme v predpokladoch vety 2.1.11, jej dôsledkoch a aj v nasledujúcich vetách nahradiť intervalom  $I(a)$  a ich tvrdenia sa nezmenia (viď poznámka 2.1.9).

Z vety 2.1.11 vyplývajú nasledujúce vety, ktoré sú analógiami viet pre reálne funkcie jednej premennej. Aj ich dôkazy sú analogické, preto ich neuvádzame [49].

### Veta 2.1.12.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R, n \in N$ , bod  $a \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f)$ . Potom platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0. \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$$

### Dôsledok 2.1.12.a.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m, n, m \in N$ , bod  $a \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f)$ . Potom platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \mathbf{0}_m. \iff \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\|_m = \|\mathbf{0}_m\|_m = 0.$$

### Veta 2.1.13.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R, n \in N$ , bod  $a \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f)$ .

Existuje aspoň jedna z limit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ , resp.  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$ .

$$\implies \text{Existuje } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

### Veta 2.1.14.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R, n \in N$ , bod  $a \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f)$ . Existuje  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

Existuje okolie  $O(a)$  také, že pre všetky  $x \in O(a) \cap D(f), x \neq a$  platí:

$$\text{a) } f(x) < 0. \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

$$\text{b) } f(x) > 0. \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

### Veta 2.1.15.

Funkcie  $f, g: R^n \rightarrow R, n \in N$ , bod  $a \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $M = D(f) \cap D(g)$ .

Existujú limity (môžu byť aj nevlastné)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

$$\implies \text{Existuje okolie } O(a) \text{ také, že pre všetky } x \in O(a) \cap M, x \neq a \text{ platí } f(x) < g(x).$$

**Dôsledok 2.1.15.a.**

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$ , bod  $\mathbf{a} \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f)$ . Potom platí:

- a)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) < 0. \implies$  Existuje okolie  $O(\mathbf{a})$  také,  
že pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a}) \cap D(f)$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  platí  $f(\mathbf{x}) < 0$ .
- b)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) > 0. \implies$  Existuje okolie  $O(\mathbf{a})$  také,  
že pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a}) \cap D(f)$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  platí  $f(\mathbf{x}) > 0$ .

**Veta 2.1.16 (O limite zloženej funkcie).**

Funkcie  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $g: R^m \rightarrow R^l$ ,  $n, m, l \in N$ ,  $H(f) \subset D(g)$ .

Bod  $\mathbf{a} \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f)$ , bod  $\mathbf{b} \in (R^*)^m$  je hromadný bod  $D(g)$ , bod  $\mathbf{c} \in (R^*)^l$ .  
Existujú limity  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ,  $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{b}} g(\mathbf{u}) = \mathbf{c}$ . Platí aspoň jeden z predpokladov a), b).

- a)  $g(\mathbf{b}) = \mathbf{c}$ .
- b) Existuje okolie  $O(\mathbf{a})$  také, že pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a}) \cap D(f)$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  platí  $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{b}$ .  
 $\implies$  Pre zloženú funkciu  $F = g \circ f$  platí  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(f(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{b}} g(\mathbf{u}) = \mathbf{c}$ .

*Dôkaz.*

Z predpokladov je zrejmé, že  $\mathbf{a}$  je tiež hromadným bodom množiny  $D(F) = D(g \circ f)$ .

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ , t. j. pre všetky  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^\infty \subset D(f) - \{\mathbf{a}\}$  také,  
že  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ , platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{b}$ .

$\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{b}} g(\mathbf{u}) = \mathbf{c}$ , t. j. pre všetky  $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^\infty \subset D(g) - \{\mathbf{b}\}$  také,  
že  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k = \mathbf{b}$ , platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(\mathbf{u}_k) = \mathbf{c}$ .

Ak platí a), potom  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(\mathbf{x}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(f(\mathbf{x}_k)) = g(\mathbf{b}) = \mathbf{c}$ .

Ak platí b), potom pre  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^\infty$  platí  $\{f(\mathbf{x}_k)\}_{k=1}^\infty \subset D(g) - \{\mathbf{b}\}$ . Ak položíme  $\mathbf{u}_k = f(\mathbf{x}_k)$ ,  
potom  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(f(\mathbf{x}_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(\mathbf{u}_k) = \mathbf{c}$ , t. j.  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(\mathbf{x}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(f(\mathbf{x}_k)) = \mathbf{c}$ . ■

Predchádzajúca veta zjednodušuje v mnohých prípadoch výpočet limit. Ak pri výpočte limity zloženej funkcie  $g \circ f$  položíme  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ , potom hovoríme, že **vykonávame substitúciu**  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ . Výpočet limity pôvodnej funkcie  $f(\mathbf{x})$  v bode  $\mathbf{a} \in (R^*)^n$  prevedieme na výpočet limity funkcie  $g(\mathbf{u})$  v bode  $\mathbf{b} \in (R^*)^m$ . Predpoklad b) je splnený napríklad, ak je funkcia  $f$  v nejakom okolí  $O(\mathbf{a})$  prostá a platí  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ .

**Poznámka 2.1.12.**

*Ak platí predpoklad a), potom*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(f(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{b}} g(\mathbf{u}) = \mathbf{c} = g(\mathbf{b}) = g\left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})\right).$$

*Ak pri výpočte limity  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  použijeme substitúciu  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ :  $R^n \rightarrow R^n$ ,  
potom  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n$  a dostaneme*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} f(\varphi(\mathbf{h})) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}).$$

Viacrozmerné limity, pokiaľ existujú, môžeme vypočítať pomocou viacnásobných limit (veta 2.1.17). V prípade vektorových funkcií  $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}); f_2(\mathbf{x}); \dots; f_m(\mathbf{x}))$  počítame limitu každej zložky  $f_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  zvlášť.

Nech  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in R^n$ ,  $n \in N$ . Postupne označme

$$\overline{\mathbf{x}_1} = (x_2; x_3; \dots; x_n), \quad \overline{\mathbf{x}_2} = (x_1; x_3; \dots; x_n), \quad \dots, \\ \overline{\mathbf{x}_i} = (x_1; \dots; x_{i-1}; x_{i+1}; \dots; x_n), \quad \dots, \quad \overline{\mathbf{x}_n} = (x_1; x_2; \dots; x_{n-1}).$$

Každý z bodov  $\overline{\mathbf{x}_i} \in R^{n-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  má vynechanú  $i$ -tu súradnicu. Špeciálne  $\overline{\mathbf{x}_1} = x_2$ ,  $\overline{\mathbf{x}_2} = x_1$  pre  $\mathbf{x} \in R^2$  a  $\overline{\mathbf{x}_1} = (x_2; x_3)$ ,  $\overline{\mathbf{x}_2} = (x_1; x_3)$ ,  $\overline{\mathbf{x}_3} = (x_1; x_2)$  pre  $\mathbf{x} \in R^3$ .

### Veta 2.1.17.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$ , bod  $\mathbf{a} \in (R^*)^n$  je hromadný bod  $D(f)$ ,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b \in R^*$ .

Okolie  $O(\mathbf{a})$  a  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sú také, že pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  existuje  $\lim_{x_i \rightarrow a_i} f(\mathbf{x})$ .

$$\implies \text{Existuje } \lim_{\overline{\mathbf{x}_i} \rightarrow \overline{\mathbf{a}_i}} \left[ \lim_{x_i \rightarrow a_i} f(\mathbf{x}) \right] = \lim_{\overline{\mathbf{x}_i} \rightarrow \overline{\mathbf{a}_i}} \lim_{x_i \rightarrow a_i} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b.$$

*Dôkaz.*

Okolie  $O(\overline{\mathbf{a}_i})$  dostaneme z okolia  $O(\mathbf{a})$ , ak vynecháme  $i$ -tu súradnicu.

Označme  $g(\overline{\mathbf{x}_i}) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} f(\mathbf{x})$  pre  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ .

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$ , t. j. pre každú  $\{\mathbf{x}_k = (x_1; x_2; \dots; x_n)_k\}_{k=1}^\infty \subset D(f)$ ,  $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$  takú, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_1; x_2; \dots; x_n)_k = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ , platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} f((x_1; x_2; \dots; x_n)_k) = b$ .

Pre všetky  $\overline{\mathbf{x}_i} = (x_1; \dots; x_{i-1}; x_{i+1}; \dots; x_n) \in O(\overline{\mathbf{a}_i}) - \{\overline{\mathbf{a}_i}\}$  existuje  $g(\overline{\mathbf{x}_i}) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} f(\mathbf{x})$ ,  
t. j. ak  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ik} = a_i$ , potom  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_1; \dots; x_{i-1}; x_{ik}; x_{i+1}; \dots; x_n) = g(\overline{\mathbf{x}_i})$ .

Nech postupnosť  $\{\overline{\mathbf{x}_{ik}}\}_{k=1}^\infty \subset O(\overline{\mathbf{a}_i})$ ,  $\overline{\mathbf{x}_{ik}} \neq \overline{\mathbf{a}_i}$  je taká, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{x}_{ik}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_1; \dots; x_{i-1}; x_{i+1}; \dots; x_n)_k = \overline{\mathbf{a}_i}, \text{ potom } \lim_{k \rightarrow \infty} g(\overline{\mathbf{x}_{ik}}) = \lim_{\overline{\mathbf{x}_i} \rightarrow \overline{\mathbf{a}_i}} g(\overline{\mathbf{x}_i}).$$

Z predchádzajúceho vzťahu navyše platí

$$g(\overline{\mathbf{x}_{ik}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f((x_1; \dots; x_{i-1}; x_{ik}; x_{i+1}; \dots; x_n)_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f((x_1; x_2; \dots; x_n)_k).$$

Ak to zhrnieme, potom z  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ik} = a_i$  vyplýva  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$  a dostávame tvrdenie vety

$$\begin{aligned} \lim_{\overline{\mathbf{x}_i} \rightarrow \overline{\mathbf{a}_i}} \left[ \lim_{x_i \rightarrow a_i} f(\mathbf{x}) \right] &= \lim_{\overline{\mathbf{x}_i} \rightarrow \overline{\mathbf{a}_i}} g(\overline{\mathbf{x}_i}) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(\overline{\mathbf{x}_{ik}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} f((x_1; x_2; \dots; x_n)_k) \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} f((x_1; x_2; \dots; x_n)_k) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b. \blacksquare \end{aligned}$$

Predchádzajúca veta naznačuje postup pre výpočet  $n$ -rozmernej limity, pokiaľ existuje. Limitu prevedieme na  $(n-1)$ -rozmernú limitu, na ktorú môžeme opäť aplikovať vetu a dostaneme  $(n-2)$ -rozmernú limitu. Takýmto spôsobom môžeme postupne  $n$ -rozmernú limitu vyjadriť ako  $n$ -násobnú (viacnásobnú) limitu

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{x_{i_1} \rightarrow a_{i_1}} \left[ \lim_{x_{i_2} \rightarrow a_{i_2}} \cdots \left[ \lim_{x_{i_n} \rightarrow a_{i_n}} f(\mathbf{x}) \right] \right] = \lim_{x_{i_1} \rightarrow a_{i_1}} \lim_{x_{i_2} \rightarrow a_{i_2}} \cdots \lim_{x_{i_n} \rightarrow a_{i_n}} f(\mathbf{x}),$$

kde indexy  $i_1, i_2, \dots, i_n$  sú nejakou permutáciou množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . To znamená, že existuje  $n!$  možností na vyjadrenie. Keďže postupne počítame limity jednej premennej, niekedy sa  $n$ -násobná limita nazýva **postupná (opakovaná) limita**. Pri praktickom výpočte  $\lim_{x_i \rightarrow a_i} f(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  považujeme všetky premenné okrem  $x_i$  za konštanty.

**Poznámka 2.1.13.**

Aby sa dala  $n$ -rozmerná limita vypočítať pomocou  $n$ -násobnej limity, musí existovať.

- Ak existuje  $n$ -rozmerná limita, potom existujú všetky  $n$ -násobné limity a rovnajú sa.
- Ak existujú dve nerovnajúce sa  $n$ -násobné limity, potom  $n$ -rozmerná limita neexistuje.
- Viacrozmerná limita nemusí existovať aj v prípade, keď všetky viacnásobné limity existujú a rovnajú sa (príklad 2.1.18).

V rovine  $R^2$  nazývame dvojrozmernú limitu **dvojná** a môžeme ju vypočítať pomocou **dvojnásobných limit** (dve možnosti). Ak  $f: R^2 \rightarrow R$ ,  $\mathbf{x} = (x; y)$ ,  $\mathbf{a} = (a_x; a_y)$ , potom

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{x \rightarrow a_x} f(x; y) = \lim_{x \rightarrow a_x} \lim_{y \rightarrow a_y} f(x; y) = \lim_{y \rightarrow a_y} \lim_{x \rightarrow a_x} f(x; y).$$

Ak použijeme označenie  $f: R^2 \rightarrow R$ ,  $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$ ,  $\mathbf{a} = (a_1; a_2)$ , potom

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1; x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1; x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow a_2} \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1; x_2).$$

Trojrozmernú limitu v  $R^3$  nazývame **trojná**. Trojnásobných limit je 6 a každú môžeme použiť na výpočet trojnej limity. Napr. pre  $f: R^3 \rightarrow R$ ,  $\mathbf{x} = (x; y; z)$ ,  $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z)$  platí

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) &= \lim_{x \rightarrow a_x} \lim_{y \rightarrow a_y} \lim_{z \rightarrow a_z} f(x; y; z) = \lim_{x \rightarrow a_x} \lim_{z \rightarrow a_z} \lim_{y \rightarrow a_y} f(x; y; z) \\ &\dots = \lim_{z \rightarrow a_z} \lim_{x \rightarrow a_x} \lim_{y \rightarrow a_y} f(x; y; z) = \lim_{z \rightarrow a_z} \lim_{y \rightarrow a_y} \lim_{x \rightarrow a_x} f(x; y; z). \end{aligned}$$

**Príklad 2.1.14.**

Dvojná limita  $\lim_{(x_1; x_2) \rightarrow (0; 0)} \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$  neexistuje, pretože dvojnásobné limity sa nerovnejú

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1 - 0}{x_1 + 0} = 1, \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{0 - x_2}{0 + x_2} = -1. \blacksquare$$

**Príklad 2.1.15.**

Vypočítajte dvojnú limitu  $\lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ .

Riešenie.

Neznáme  $x, y$  vystupujú iba vo väzbe  $x^2 + y^2 \geq 0$ . Ak použijeme substitúciu  $t = x^2 + y^2$ , potom  $t \rightarrow 0^+$  a limitu môžeme previesť na limitu jednej premennej (obr. 2.1.10).

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} &= \left[ \text{Subst. } t = x^2 + y^2 \geq 0 \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(t+1)^{\frac{1}{2}} - 1} = \left[ \text{L'H } \frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} (t+1)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(t+1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{t}} = \sqrt{1 + \frac{1}{0^+}} = \sqrt{1 + \infty} = \infty. \blacksquare \end{aligned}$$

**Príklad 2.1.16.**

Vypočítajte limity (obr. 2.1.11): a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ , b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ .

Riešenie.

a) Postupnosť  $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^\infty$  je ľubovoľná taká, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k; y_k) = (1; 1)$ . Potom platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^3 + y_k^3}{x_k^2 + y_k^2} = \frac{1^3 + 1^3}{1^2 + 1^2} = 1, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{(x; y) \rightarrow (1; 1)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^3 + y_k^3}{x_k^2 + y_k^2} = 1.$$

Pre dvojnásobné limity v bode  $(1;1)$  platí

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1^3}{x^2+1^2} = \frac{1^3+1}{1^2+1} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1^3+y^3}{1^2+y^2} = \frac{1+1^3}{1+1^2} = 1.$$

b) Označme  $f(x; y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ . Pre všetky  $(x; y) \in R^2$  platí

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x; y)| &= \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x^3+y^3|}{|x^2+y^2|} = \left[ \frac{|x^3+y^3| \leq |x^3|+|y^3| = |x|^3+|y|^3}{|x^2+y^2| = x^2+y^2 = |x|^2+|y|^2} \right] \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{|x|^2+|y|^2} \\ &= \frac{|x|^3}{|x|^2+|y|^2} + \frac{|y|^3}{|x|^2+|y|^2} \leq \left[ \frac{|x|^2+|y|^2 \geq |x|^2}{|x|^2+|y|^2 \geq |y|^2} \right] \leq \frac{|x|^3}{|x|^2} + \frac{|y|^3}{|y|^2} = |x|+|y|. \end{aligned}$$

Pre dvojrozmernú limitu funkcie  $|f(x; y)|$  v bode  $(0;0)$  platí

$$0 \leq \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| \leq \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} [|x|+|y|] = 0+0=0, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| = 0.$$

Z toho na základe vety 2.1.12 vyplýva  $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| = 0$ .

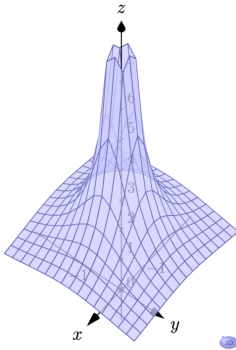
c) Keďže  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ , môžeme predpokladať  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

Ak použijeme substitúciu  $u = \min\{x, y\} \rightarrow \infty$ ,  $v = \max\{x, y\} \rightarrow \infty$ , potom platí<sup>15</sup>

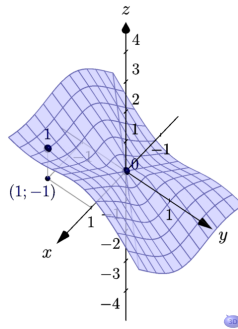
$$0 < u \leq x \leq v, \quad 0 < u \leq y \leq v, \quad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2} \geq \frac{u^3+u^3}{v^2+v^2} = \frac{u^3+v^3}{2v^2} \geq \frac{v^3}{2v^2} = \frac{v}{2}.$$

Potom platí

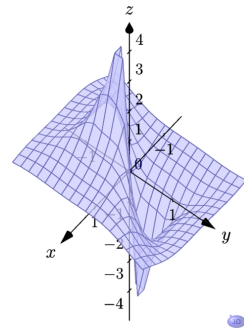
$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2} \geq \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{v}{2} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v}{2} = \infty, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \infty. \blacksquare$$



Obr. 2.1.10:  
 $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$   
(príklad 2.1.15)



Obr. 2.1.11:  
 $z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$   
(príklad 2.1.16)



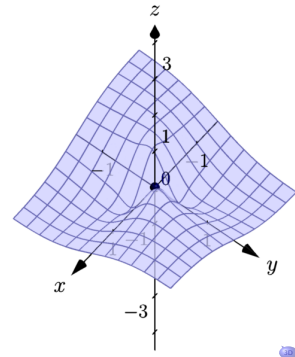
Obr. 2.1.12:  
 $z = \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$   
(príklad 2.1.17)

<sup>15</sup>Buď platí  $u = x$ ,  $v = y$  alebo  $u = y$ ,  $v = x$ , t. j.  $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ ,  $x^3 + y^3 = u^3 + v^3$ .

**Príklad 2.1.17.**

Limita  $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$  neexistuje (obr. 2.1.12), pretože neexistujú dvojnásobné limity:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+0^3}{x^4+0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje.} \\ \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^3+y^3}{0^4+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \text{ neexistuje.} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = \frac{1}{0^+} = \infty. \blacksquare \end{aligned}$$



Obr. 2.1.13: Výpočet limity  
 $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$  (príklad 2.1.18)

**Príklad 2.1.18.**

$L = \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$  neexistuje, aj keď sa dvojnásobné limity rovnajú (obr. 2.1.13):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \left[ \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \frac{0}{x^2} = 0 \text{ pre všetky } x \in \mathbb{R} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0^2+y^2} = \left[ \frac{0 \cdot y}{0^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 \text{ pre všetky } y \in \mathbb{R} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Z predchádzajúceho vyplýva iba to, že ak limita  $L$  existuje, potom  $L = 0$ .

Ukážeme, že limita  $L$  neexistuje. Stačí nájsť dva smery s rôznymi hodnotami. Platí:

- Pre smer  $x \rightarrow 0$ ,  $y = 0$ , resp. postupnosť  $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^\infty = \{(\frac{1}{k}; 0)\}_{k=1}^\infty \rightarrow (0; 0)$  platí:

$$\lim_{(x;0) \rightarrow (0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot 0}{\frac{1}{k^2}+0^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

- Pre smer  $x = 0$ ,  $y \rightarrow 0$ , resp. postupnosť  $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^\infty = \{(0; \frac{1}{k})\}_{k=1}^\infty \rightarrow (0; 0)$  platí:

$$\lim_{(0;y) \rightarrow (0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{0^2+\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

- Pre smer  $x = y \rightarrow 0$ , resp. postupnosť  $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^\infty = \{(\frac{1}{k}; \frac{1}{k})\}_{k=1}^\infty \rightarrow (0; 0)$  platí:

$$\lim_{(x;x) \rightarrow (0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{1}{2}.$$

- Pre smer  $-x = y \rightarrow 0$ , resp. postupnosť  $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^\infty = \{(\frac{1}{k}; -\frac{1}{k})\}_{k=1}^\infty \rightarrow (0; 0)$  platí:

$$\lim_{(x;-x) \rightarrow (0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (-x)}{x^2+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot (-\frac{1}{k})}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = -\frac{1}{2}.$$

- Pre smer  $x = 2y \rightarrow 0$  resp. postupnosť  $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^\infty = \{(\frac{2}{k}; \frac{1}{k})\}_{k=1}^\infty \rightarrow (0; 0)$  platí:

$$\lim_{(y;2y) \rightarrow (0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y \cdot y}{4y^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y^2}{5y^2} = \frac{2}{5}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{4}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{k^2}}{\frac{5}{k^2}} = \frac{2}{5}.$$

- Pre smer  $x = y^2 \rightarrow 0$ , resp. postupnosť  $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^\infty = \{(\frac{1}{k^2}; \frac{1}{k})\}_{k=1}^\infty \rightarrow (0; 0)$  platí:

$$\lim_{(y^2;y) \rightarrow (0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \cdot y}{y^4+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y^2+1} = \frac{0}{0+1} = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{k} + k} = \frac{1}{0+\infty} = 0. \blacksquare$$

### Poznámka 2.1.14.

Existuje nekonečne veľa smerov  $(x; y) \rightarrow (0; 0)$  a postupností  $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^\infty \rightarrow (0; 0)$  a pre všetky možnosti musia byť  $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} f(x; y) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k; y_k)$  rovnaké (poznámka 2.1.8).

Smer približenia vyjadrený explicitnou funkciou, znamená približenie k danému bodu po jej grafe, napr.  $x = y^2 \rightarrow 0$  znamená približenie k  $(0; 0)$  po parabole určenej rovnicou  $x = y^2$ .

Každá z dvojnásobných limít predstavuje iba jeden zo smerov (obr. 2.1.8):

- $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x_k; y_k)$  znamená najprv približenie k osi  $x$  a potom po osi  $x$  k bodu  $(0; 0)$ ,
- $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x_k; y_k)$  znamená najprv približenie k osi  $y$  a potom po osi  $y$  k bodu  $(0; 0)$ .

### Príklad 2.1.19.

$$\text{a) } \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2-y^2}{\sin(x-y)} = \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{(x-y)(x+y)}{\sin(x-y)} = \left[ \begin{array}{l} \text{Subst. } r = x-y \mid x \rightarrow 0 \mid r \rightarrow 0 \\ s = x+y \mid y \rightarrow 0 \mid s \rightarrow 0 \end{array} \right] \\ = \lim_{(r;s) \rightarrow (0;0)} \frac{r \cdot s}{\sin r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{\sin r} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} s = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (a;a)} \frac{x^2-y^2}{\sin(x-y)} = \lim_{(x;y) \rightarrow (a;a)} \frac{(x-y)(x+y)}{\sin(x-y)} = \left[ \begin{array}{l} \text{Subst. } r = x-y \mid x \rightarrow a \mid r \rightarrow 0 \\ s = x+y \mid y \rightarrow a \mid s \rightarrow 2a \end{array} \right] \\ = \lim_{(r;s) \rightarrow (0;2a)} \frac{r \cdot s}{\sin r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{\sin r} \cdot \lim_{s \rightarrow 2a} s = 1 \cdot 2a = 2a \text{ pre všetky } a \in \mathbb{R}.$$

- c)  $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x+y}{\sin(x^2+y^2)}$  neexistuje, pretože pre smer  $y = x \rightarrow 0$  neexistuje limita

$$\lim_{(x;x) \rightarrow (0;0)} \frac{x+x}{\sin(x^2+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x^2}{\sin(2x^2)} \cdot \frac{1}{x} \right) = \begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty & \text{pre } x \rightarrow 0^+, \\ 1 \cdot \frac{1}{0^-} = -\infty & \text{pre } x \rightarrow 0^-. \end{cases}$$

- d)  $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x - y}$  neexistuje, pretože pre smery  $y = x \rightarrow 0$  a  $x = 0, y \rightarrow 0$  platí

$$\lim_{(x;x) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 x^2}{x^2 x^2 + x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1, \quad \lim_{(0;y) \rightarrow (0;0)} \frac{0^2 y^2}{0^2 y^2 + 0 - y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0. \blacksquare$$

**Príklad 2.1.20.**

Limita  $L = \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} (x+y) \sin \frac{1}{xy} = 0$ , pretože pre všetky  $x, y \in R - \{0\}$  platí

$$-1 \leq \sin \frac{1}{xy} \leq 1, \quad -|x+y| \leq x+y \leq |x+y|,$$

$$\text{t. j. } -|x+y| \leq -|x+y| \cdot \left| \sin \frac{1}{xy} \right| \leq (x+y) \sin \frac{1}{xy} \leq |x+y| \cdot \left| \sin \frac{1}{xy} \right| \leq |x+y|.$$

Pre limitu potom na základe dôsledku 2.1.11.a platí

$$0 = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |x+y| \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x+y) \sin \frac{1}{xy} \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |x+y| = 0, \quad \text{t. j. } L = 0. \blacksquare$$

**2.1.4 Spojitosť funkcie  $n$  premenných**

Ako sme už spomínali, limita a spojitosť funkcie v priestore  $R^n$ ,  $n \in N$  sa definujú analogicky ako v  $R$  a majú podobné vlastnosti. Keďže  $R^1$  je špeciálny prípad priestoru  $R^n$  pre  $n = 1$ , vlastnosti platné v  $R^n$  musia platiť aj v  $R$ .

**Funkcia  $y = f(x): R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  je spojitá v bode  $a \in D(f)$** , ak platí:

- Pre všetky  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset D(f)$  také, že  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ , platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$ ,  
t. j. ak  $x_k \in D(f)$ ,  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow a$ , potom platí  $\{f(x_k)\}_{k=1}^\infty \rightarrow f(a)$ .

Spojitosť funkcie  $f = (f_1; f_2; \dots; f_m): R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  v bode  $a \in D(f)$  znamená spojitosť všetkých zložiek  $f_1, f_2, \dots, f_m: R^n \rightarrow R$  v bode  $a$ . Bod  $a$  nazývame **bodom spojitosti funkcie  $f$** .

**Poznámka 2.1.15.**

Bod  $a \in D(f)$  môže byť iba hromadný alebo izolovaný.

Ak bod  $a$  je izolovaný, potom existuje jediná postupnosť  $\{x_k\}_{k=1}^\infty = \{a\}_{k=1}^\infty \rightarrow a$ , pre ktorú platí  $\{f(x_k)\}_{k=1}^\infty = \{f(a)\}_{k=1}^\infty \rightarrow f(a)$ , t. j.  $f$  je spojitá v izolovanom bode  $a$ .

Z definícií limity a spojitosti funkcie v bode vyplýva nasledujúca veta.

**Veta 2.1.18.**

**Funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$ , bod  $a \in D(f)$  je hromadný bod  $D(f)$ . Potom platí:**

$$\text{Funkcia } f \text{ je spojitá v bode } a. \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ak funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  nie je spojitá v bode  $a \in D(f)$ , nazýva sa **nespojité v bode  $a$** , ktorý nazývame **bod nespojitosti funkcie  $f$** . Z poznámky 2.1.15 vyplýva, že funkcia  $f$  môže byť nespojitá iba v hromadnom bode  $D(f)$ . Preto rozšírime pojem bodu nespojitosti na všetky vlastné hromadné body  $D(f)$ . To znamená, že funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  je nespojitá v bode  $a \in R^n$ , hromadnom bode  $D(f)$ , ak:

- Existuje  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset D(f)$ ,  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow a$  taká, že  $\{f(x_k)\}_{k=1}^\infty \not\rightarrow f(a)$ ,  
t. j. ak  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ , ale  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \neq f(a)$  alebo  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$  neexistuje.

Ak existuje konečná  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ , potom sa bod  $a$  nazýva<sup>16</sup> **bodom neodstrániteľnej nespojitosti**. Inak sa nazýva **bodom neodstrániteľnej nespojitosti**.

<sup>16</sup>Stačí položiť  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  a nespojitosť v bode  $a$  sa odstráni.

Limita a spojitosť funkcie sú lokálne záležitosti v nejakom okolí  $O(\mathbf{a})$ . Pri spojitosti je potrebné, aby  $\mathbf{a} \in D(f)$ . Pri limite musí byť bod  $\mathbf{a}$  hromadným bodom  $D(f)$ .

Spojité funkcie v  $R^n$ ,  $n \in N$  majú podobné vlastnosti ako spojité funkcie jednej premennej (viď napr. [6]). Ekvivalentnú definíciu spojitosti vyjadruje nasledujúca veta.

Ak uvažujeme poznámku 2.1.9, všetky nasledujúce tvrdenia ostanú v platnosti, ak namiesto okolí  $O(\mathbf{a})$ ,  $O(f(\mathbf{a}))$  použijeme intervaly  $I(\mathbf{a})$ ,  $I(f(\mathbf{a}))$ .

### Veta 2.1.19.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$ , je spojitá v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$ .

$\iff$  • Pre každé okolie  $O(f(\mathbf{a}))$  existuje okolie  $O(\mathbf{a})$  také, že pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a}) \cap D(f)$  platí  $f(\mathbf{x}) \in O(f(\mathbf{a}))$ .

Ak označíme polomery okolí  $\varepsilon$ ,  $\delta$ , môžeme tvrdenie vety symbolicky písať v tvare

$$\underbrace{\forall O_\varepsilon(f(\mathbf{a}))}_{\forall \varepsilon > 0} \underbrace{\exists O_\delta(\mathbf{a})}_{\exists \delta > 0} \forall \mathbf{x} \in D(f): \underbrace{\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{a})}_{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n < \delta} \implies \underbrace{f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(f(\mathbf{a}))}_{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|_m < \varepsilon}.$$

### Príklad 2.1.21.

Funkcia  $f(x; y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}: R^2 \rightarrow R$  je spojitá v každom bode  $\mathbf{a} \in D(f) = R^2 - \{(0; 0)\}$ .

Jediný problematický bod je  $(0; 0) \notin D(f)$ , ktorý je bodom neodstrániteľnej nespojitosti, pretože neexistuje  $\lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$  (pr. 2.1.18). ■

### Veta 2.1.20.

a) Funkcie  $f, g: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  sú spojité v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$ , číslo  $c \in R$ .

$\implies$  Funkcie  $f \pm g$ ,  $cf$  sú spojité v bode  $\mathbf{a}$ .

b) Funkcie  $f, g: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  sú spojité v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$ .

$\implies$  Funkcie  $|f|$ ,  $fg$  a pre  $g(\mathbf{a}) \neq 0$  aj funkcie  $\frac{1}{g}$ ,  $\frac{f}{g}$  sú spojité v bode  $\mathbf{a}$ .

### Veta 2.1.21 (Spojitosť zloženej funkcie).

Funkcie  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $g: R^m \rightarrow R^l$ ,  $n, m, l \in N$ ,  $H(f) \subset D(g)$ ,

Funkcia  $f$  je spojitá v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$ , funkcia  $g$  je spojitá v bode  $\mathbf{b} = f(\mathbf{a}) \in D(g)$ .

$\implies$  Zložená funkcia  $F = g(f)$  je spojitá v bode  $\mathbf{a}$ .

### Veta 2.1.22 (O zovretí).

Funkcie  $f, g, h: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$ ,  $\mathbf{a} \in M = D(f) \cap D(g) \cap D(h)$ .

Okolie  $O(\mathbf{a})$  je také, že pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a}) \cap M$  platí  $h(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ .

$f(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}) = h(\mathbf{a})$ , funkcie  $g, h$  sú spojité v bode  $\mathbf{a}$ .

$\implies$  Funkcia  $f$  je spojitá v bode  $\mathbf{a}$ .

Predpoklad  $f(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}) = h(\mathbf{a})$  je dôležitý, bez neho nemôžeme vetu použiť. Ak nie je splnený, potom funkcia  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  nemusí byť spojitá.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  je spojitá na množine  $A \subset D(f)$ , ak je spojitá v každom bode  $\mathbf{a} \in A$ . Ak je spojitá na celom svojom  $D(f)$ , potom ju nazývame spojitá.

Je zrejmé, že ak je funkcia  $f$  spojitá na nejakej množine  $A$ , potom je spojitá na každej podmnožine  $B \subset A$ .

**Veta 2.1.23.**

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  je spojitá v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$ .

- $\implies$  a) Existuje okolie  $O(\mathbf{a})$  také, že  $f$  je ohraničená na  $O(\mathbf{a})$ .  
 b) Existuje interval  $I(\mathbf{a})$  taký, že  $f$  je ohraničená na  $I(\mathbf{a})$ .

Tvrdenia vety predstavujú lokálnu ohraničenosť v bode  $\mathbf{a}$  spojitaj funkcie v bode  $\mathbf{a}$ . T. j. pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a}) \cap D(f)$ , resp.  $\mathbf{x} \in I(\mathbf{a}) \cap D(f)$  platí  $\|f(\mathbf{x})\|_m \leq \alpha$ , kde  $\alpha \geq 0$ .

Zo spojitosti funkcie  $f$  na ohraničenej množine  $A \subset D(f)$  ešte nevyplýva jej ohraničenosť na tejto množine. Množina musí byť uzavretá (veta 2.1.25). Napríklad funkcia

$$f: z = \frac{1}{x^2+y^2}, \quad (x; y) \in R^2 - \{(0; 0)\}$$

je spojitá na ohraničenej množine  $A = (0; 2) \times (0; 2)$ , ale nie je na  $A$  ohraničená (obr. 2.1.14).

**Veta 2.1.24.**

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  je spojitá v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$ . Potom platí:

- a)  $f(\mathbf{a}) < 0$ .  $\implies$  Existuje  $O(\mathbf{a})$  také, že pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a}) \cap D(f)$  platí  $f(\mathbf{x}) < 0$ .  
 b)  $f(\mathbf{a}) > 0$ .  $\implies$  Existuje  $O(\mathbf{a})$  také, že pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a}) \cap D(f)$  platí  $f(\mathbf{x}) > 0$ .

**Veta 2.1.25.**

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  je spojitá, množina  $A \subset D(f)$  je uzavretá a ohraničená.

$\implies$  Obraz  $f(A)$  je uzavretá a ohraničená množina.

Ak je spojitá funkcia  $f: A \rightarrow f(A)$ , kde  $A \subset R^n$ ,  $f(A) \subset R^m$ ,  $n, m \in N$  prostá, potom k nej existuje inverzná funkcia  $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ , ktorá je tiež spojitá.

**Príklad 2.1.22.**

Uvažujme funkciu  $f(x; y) = (x + y; x - y): R^2 \rightarrow R^2$  a množinu  $A = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle$ .

Funkcia  $f$  je spojitá a množina  $A$  je uzavretá a ohraničená. Potom je množina  $f(A)$  tiež uzavretá a ohraničená (veta 2.1.25). Skutočne to platí, pretože  $f(A) = \langle 0; 2 \rangle \times \langle -1; 1 \rangle$ .

Funkcia  $f: A \rightarrow f(A)$  je spojitá a bijektívna. Pre inverznú funkciu  $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$  platí:

$$f(x; y) = (x + y; x - y) = (u; v). \iff f^{-1}(u; v) = (x; y).$$

Z rovníc  $x + y = u$ ,  $x - y = v$  vyjadríme neznáme  $x$  a  $y$ . Po sčítaní a odčítaní rovníc platí

$$\left. \begin{aligned} 2x &= (x + y) + (x - y) = u + v. \\ 2y &= (x + y) - (x - y) = u - v. \end{aligned} \right\} \implies x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

$$\implies f^{-1}(u; v) = \left(\frac{u+v}{2}; \frac{u-v}{2}\right): f(A) \rightarrow A.$$

Platnosť overíme jednoducho dosadením. Pre všetky  $(x; y) \in A$ , resp.  $(u; v) \in f(A)$  platí:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x; y)) &= f^{-1}(x + y; x - y) = \left(\frac{x+y+x-y}{2}; \frac{x+y-x-y}{2}\right) = (x; y). \\ f(f^{-1}(u; v)) &= f\left(\frac{u+v}{2}; \frac{u-v}{2}\right) = \left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}; \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right) = (u; v). \blacksquare \end{aligned}$$

**Veta 2.1.26.**

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  je spojitá,  $A \subset D(f)$  je súvislá množina.

$\implies$  Obraz  $f(A)$  je súvislá množina.

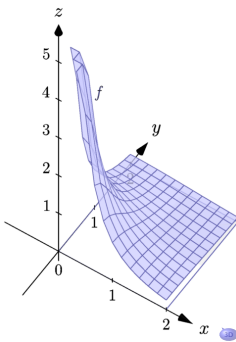
Na záver tejto časti uvedieme rozšírenie Weierstrasseho vety (mal: veta 3.3.10) pre  $n$ -rozmerné funkcie.

**Veta 2.1.27.**

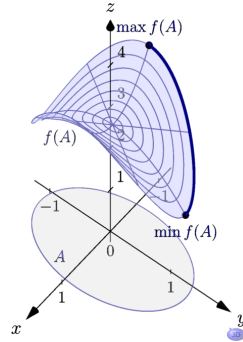
Funkcia  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  je spojitá na oblasti  $A \subset R^n$  (otvorená a súvislá množina).

Body  $a, b \in A$  sú ľubovoľné.

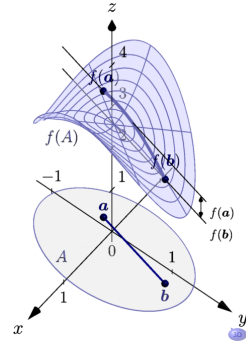
$\implies$  Funkcia  $f$  nadobúda všetky hodnoty z intervalu s koncovými bodmi  $f(a)$  a  $f(b)$ .



Obr. 2.1.14:  
Veta 2.1.23



Obr. 2.1.15:  
Veta 2.1.26



Obr. 2.1.16:  
Veta 2.1.27

## 2.2 Derivácia a diferenciál funkcie $n$ premenných

### 2.2.1 Diferencovateľnosť funkcie viacerých premenných

Pojem derivácie funkcie dvoch a viacerých premenných je trochu zložitejší ako pojem derivácie funkcie jednej premennej. Derivácia funkcie  $f: R \rightarrow R$  v bode  $a \in D(f)$  geometricky predstavuje smernicu dotykovej ku grafu funkcie  $f$  v tomto bode  $a$ .

Pri derivácii funkcie  $f: R^2 \rightarrow R$  v bode  $a = (a_1; a_2) \in D(f)$  hovoríme o dotykovej rovine ku grafu funkcie  $f$  v bode  $(a_1; a_2)$  a potrebujeme dve dotykové priamky a ich smernice.

Pri derivácii funkcie  $f: R^3 \rightarrow R$  v bode  $a = (a_1; a_2; a_3) \in D(f)$  už potrebujeme tri dotykové priamky a ich smernice atď. Tieto funkcie môžeme derivovať v danom bode v smere ľubovoľného vektora patriaceho do  $D(f)$ .

Špeciálne, derivácie v smere súradnicových osí, nazývame parciálne derivácie. Treba si však uvedomiť, že existencia všetkých parciálnych derivácií v danom bode ešte nezaručuje derivácie v ostatných smeroch. To znamená, že funkcia nemusí mať v tomto bode deriváciu, dokonca ani nemusí byť spojitá v tomto bode.

Uvažujme funkciu  $f: A \rightarrow R^m$ , kde  $A \subset R^n$  je oblasť (otvorená a súvislá množina),  $n, m \in N$ , bod  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$  a ľubovoľný vektor  $\mathbf{h} = (h_1; h_2; \dots; h_n) \in R^n$  taký, že  $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in A$ . Funkcia  $f$  sa nazýva **diferencovateľná v bode  $\mathbf{a}$** , ak existuje lineárne zobrazenie  $\lambda(\mathbf{h}): R^n \rightarrow R^m$  reprezentované reálnou maticou  $\mathbf{D}$  typu  $m \times n$  také, že

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \lambda(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{h}\mathbf{D}^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = \mathbf{0}_m. \quad (2.5)$$

Matica  $\mathbf{D}$  sa nazýva **derivácia funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$**  a značí sa  $f'(\mathbf{a})$ , t. j.  $\mathbf{D} = f'(\mathbf{a})$ . Lineárna funkcia  $\lambda(\mathbf{h}) = \mathbf{h}\mathbf{D}^T = \mathbf{D}\mathbf{h}^T$  reprezentovaná maticou  $\mathbf{D} = f'(\mathbf{a})$  sa nazýva **diferenciál<sup>17</sup> funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$**  a označuje sa  $df(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ , t. j.  $df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{h}\mathbf{D}^T$ .

Ak použijeme substitúciu  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h} \in A$ , potom pre  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n$  platí

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}, \quad df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a})\mathbf{D}^T.$$

Limitu (2.5) môžeme písať v tvare

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{h}\mathbf{D}^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - (\mathbf{x} - \mathbf{a})\mathbf{D}^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} = \mathbf{0}_m. \quad (2.6)$$

Ak je funkcia  $f$  diferencovateľná v každom bode  $\mathbf{a} \in B$ , kde  $B \subset A$ , potom sa  $f$  nazýva **diferencovateľná na množine  $B$** . Ak je  $f$  diferencovateľná v každom bode  $\mathbf{a} \in D(f)$ , nazýva sa **diferencovateľná**.

### Veta 2.2.1.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  má v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$  najviac jednu deriváciu  $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{D}$ .

*Dôkaz.*

Nech  $A \subset D(f)$  je oblasť taká, že  $\mathbf{a} \in A$  a nech existuje  $f'(\mathbf{a})$ .

Dokážeme sporom. Nech existujú dve matice  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$  typu  $m \times n$  také, že  $\mathbf{D}_1 \neq \mathbf{D}_2$  a platí

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{h}\mathbf{D}_1^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = \mathbf{0}_m, \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{h}\mathbf{D}_2^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = \mathbf{0}_m.$$

Z vety 2.1.8 vyplýva, že v nejakom okolí  $O(\mathbf{0}_n)$  sú ohraničené argumenty predchádzajúcich limit. Je zrejmé, že v tomto okolí sú ohraničené aj funkcie  $f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$ ,  $\mathbf{h}\mathbf{D}_1^T$ ,  $\mathbf{h}\mathbf{D}_2^T$ . Potom majú zmysel nasledujúce limity a platí

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{h}\mathbf{D}_1^T}{\|\mathbf{h}\|_n}, \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{h}\mathbf{D}_2^T}{\|\mathbf{h}\|_n}. \quad (2.7)$$

Ak odčítame obe rovnosti, dostaneme

$$\mathbf{0}_m = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{h}\mathbf{D}_1^T}{\|\mathbf{h}\|_n} - \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{h}\mathbf{D}_2^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{h}\mathbf{D}_1^T - \mathbf{h}\mathbf{D}_2^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{h}(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{h}\mathbf{C}^T}{\|\mathbf{h}\|_n}. \quad (2.8)$$

Rozdiel  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n} = \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2 \neq \mathbf{0}_{m \times n}$  je nenulová matica, označme jej  $j$ -ty riadok  $\mathbf{c}_j = (c_{j1}; c_{j2}; \dots; c_{jn})$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Potom platí  $\mathbf{h}\mathbf{C}_j^T = h_1c_{j1} + h_2c_{j2} + \dots + h_nc_{jn}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}\mathbf{C}^T &= (h_1; h_2; \dots; h_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}^T = (h_1; h_2; \dots; h_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \\ &= (h_1c_{11} + h_2c_{12} + \dots + h_nc_{1n}; \dots; h_1c_{m1} + h_2c_{m2} + \dots + h_nc_{mn}), \end{aligned}$$

<sup>17</sup>Takto definovaný diferenciál sa zvykne nazývať **totálny**, **silný**, resp. **Fréchetov diferenciál**.

t. j.  $\mathbf{hC}^T = \mathbf{h}(\mathbf{c}_1^T; \mathbf{c}_2^T; \dots; \mathbf{c}_m^T) = (\mathbf{hc}_1^T; \mathbf{hc}_2^T; \dots; \mathbf{hc}_m^T)$ . Pre vzťah (2.8) potom platí

$$\begin{aligned} (0; 0; \dots; 0) = \mathbf{0}_m &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{hC}^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{(\mathbf{hc}_1^T; \mathbf{hc}_2^T; \dots; \mathbf{hc}_m^T)}{\|\mathbf{h}\|_n} \\ &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \left( \frac{\mathbf{hc}_1^T}{\|\mathbf{h}\|_n}; \frac{\mathbf{hc}_2^T}{\|\mathbf{h}\|_n}; \dots; \frac{\mathbf{hc}_m^T}{\|\mathbf{h}\|_n} \right) = \left( \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{hc}_1^T}{\|\mathbf{h}\|_n}; \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{hc}_2^T}{\|\mathbf{h}\|_n}; \dots; \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{hc}_m^T}{\|\mathbf{h}\|_n} \right). \end{aligned}$$

Posledné limity sú nulové, t. j. aj pre každý smer musia byť nulové. Pre  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}_n$  zvolíme smer  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n$  v tvare<sup>18</sup>  $t\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n$ ,  $t \in (0; 1)$ , t. j.  $t \rightarrow 0^+$ . Potom pre  $j = 1, 2, \dots, m$  platí

$$0 = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{hc}_j^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t\mathbf{hc}_j^T}{\|t\mathbf{h}\|_n} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t\mathbf{hc}_j^T}{t\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{hc}_j^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = \frac{\mathbf{hc}_j^T}{\|\mathbf{h}\|_n}, \quad \text{t. j. } \frac{\mathbf{hc}_j^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = 0.$$

Posledné rovnosti sú možné iba ak  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \dots = \mathbf{c}_m = \mathbf{0}_n$ , t. j.  $\mathbf{C} = \mathbf{0}_{m \times n}$  (spor). Potom platí  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$  a existuje iba jedna derivácia  $f'(a)$ . ■

### Veta 2.2.2.

Množina  $A \subset R^n$ ,  $m, n \in N$  je oblasť, funkcia  $f: A \rightarrow R^m$  je diferencovateľná v bode  $\mathbf{a} \in A$ .

$\implies$  Funkcia  $f$  je spojitá v bode  $\mathbf{a}$ .

*Dôkaz.*

Funkcia  $f$  je diferencovateľná v bode  $\mathbf{a}$ , potom platí<sup>19</sup>

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{hD}^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = \mathbf{0}_m, \quad \text{t. j. } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} [f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{hD}^T] = \mathbf{0}_m.$$

Ak označíme  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ , potom (veta 2.1.18) dostaneme tvrdenie vety

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} [f(\mathbf{a}) + \mathbf{hD}^T] = f(\mathbf{a}) + \mathbf{0}_m = f(\mathbf{a}). \quad \blacksquare$$

### Príklad 2.2.1.

Vypočítajte  $f'(\mathbf{a})$ ,  $df(\mathbf{a}, \mathbf{h})$  funkcie  $f(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2$ :  $R^2 \rightarrow R$  v bode  $\mathbf{a} \in R^2$ .

*Riešenie.*

Bod  $\mathbf{a} = (a_1; a_2) \in R^2$  je ľubovoľný. Nech  $\mathbf{h} = (h_1; h_2) \in R^2$  je ľubovoľné, potom platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= f(a_1 + h_1; a_2 + h_2) - f(a_1; a_2) \\ &= [(a_1 + h_1)^2 + (a_2 + h_2)^2] - [a_1^2 + a_2^2] = [(a_1 + h_1)^2 - a_1^2] + [(a_2 + h_2)^2 - a_2^2] \\ &= (2a_1 + h_1)h_1 + (2a_2 + h_2)h_2 = h_1^2 + h_2^2 + 2a_1h_1 + 2a_2h_2. \end{aligned}$$

Označme  $\mathbf{D} = (d_1; d_2)$ , potom  $\mathbf{hD}^T = (h_1; h_2)(d_1; d_2)^T = d_1h_1 + d_2h_2$  a platí

$$\frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{hD}^T}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{h_1^2 + h_2^2 + 2a_1h_1 + 2a_2h_2 - d_1h_1 - d_2h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} + \frac{(2a_1 - d_1)h_1 + (2a_2 - d_2)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Keďže  $\|\mathbf{h}\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \rightarrow 0$  pre  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0} = (0; 0)$ , platí

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{hD}^T}{\|\mathbf{h}\|} &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \left( \sqrt{h_1^2 + h_2^2} + \frac{(2a_1 - d_1)h_1 + (2a_2 - d_2)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right) = (0; 0). \\ \iff (2a_1 - d_1)h_1 + (2a_2 - d_2)h_2 &= 0, \quad \text{t. j. } d_1 = 2a_1, \quad d_2 = 2a_2. \end{aligned}$$

To znamená, že funkcia  $f$  je diferencovateľná v každom bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2) \in R^2$  a platí

$$f'(\mathbf{a}) = \mathbf{D} = (2a_1; 2a_2), \quad df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{hD}^T = \mathbf{Dh}^T = f'(\mathbf{a})\mathbf{h}^T = 2a_1h_1 + 2a_2h_2. \quad \blacksquare$$

<sup>18</sup>K bodu  $\mathbf{0}_n$  sa približujeme po úsečke so začiatkom  $\mathbf{h}$  a koncovým bodom  $\mathbf{0}_n$ .

<sup>19</sup>Keďže je limita zlomku nulová, musí byť aj limita jeho čitateľa nulová.

## 2.2.2 Parciálne derivácie funkcie $n$ premenných

Uvažujme funkciu  $f: A \rightarrow R^m$ , kde  $A \subset R^n$  je oblasť,  $n, m \in N$  a bod  $\mathbf{a} \in A$ .

Derivácia  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  predstavuje konštantnú maticu typu  $m \times n$ . Jej výpočet na základe definície (príklad 2.2.1) je voľba nevhodná a väčšinou prakticky nemožná. Deriváciu  $f'(\mathbf{a})$  môžeme jednoducho vypočítať pomocou jej tzv. parciálnych derivácií.

**Funkcia  $f$  má v bode  $\mathbf{a}$  parciálnu deriváciu  $j$ -tej zložky,  $j = 1, 2, \dots, m$  podľa  $i$ -tej premennej (podľa  $x_i$ ),  $i = 1, 2, \dots, n$ , ak existuje konečná (vlastná) limita<sup>20</sup>**

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_j(a_1; \dots; a_{i-1}; a_i + t; a_{i+1}; \dots; a_n) - f_j(a_1; \dots; a_{i-1}; a_i; a_{i+1}; \dots; a_n)}{t} \\ &= \left[ \text{Subst. } x_i = a_i + t \right] = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f_j(a_1; \dots; a_{i-1}; x_i; a_{i+1}; \dots; a_n) - f_j(a_1; \dots; a_{i-1}; a_i; a_{i+1}; \dots; a_n)}{x_i - a_i}. \end{aligned}$$

Hodnota funkcie  $f_j$  sa mení iba v závislosti od  $i$ -tej premennej, od ostatných premenných je nezávislá. Pre  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  definujeme jednorozmerné funkcie

$$g_{ij}(x_i) = f(a_1; \dots; a_{i-1}; x_i; a_{i+1}; \dots; a_n) : R \rightarrow R.$$

Potom pre  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  platí  $\frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = \frac{dg_{ij}(\mathbf{a})}{dx_i} = g'_{ij}(\mathbf{a})$ .

Funkcia  $f$  má **parciálnu deriváciu  $j$ -tej zložky,  $j = 1, 2, \dots, m$  podľa  $i$ -tej premennej,  $i = 1, 2, \dots, n$  na množine  $B \subset A$ , ak pre každé  $\mathbf{a} \in B$  existuje  $\frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i}$ .**

### Veta 2.2.3.

Množina  $A \subset R^n$  je oblasť,  $n, m \in N$ , funkcia  $f: A \rightarrow R^m$  je diferencovateľná v bode  $\mathbf{a} \in A$ , pričom derivácia  $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{D} = (d_{ij})_{m \times n}$ .

$\implies$  Existujú všetky parciálne derivácie  $\frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = d_{ji}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

*Dôkaz.*

Označme  $j$ -ty riadok matice  $\mathbf{D}$  symbolom  $\mathbf{d}_j = (d_{j1}; d_{j2}; \dots; d_{jn})$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Potom  $\mathbf{hD}^T = \mathbf{h}(\mathbf{d}_1^T; \mathbf{d}_2^T; \dots; \mathbf{d}_m^T) = (\mathbf{hd}_1^T; \mathbf{hd}_2^T; \dots; \mathbf{hd}_m^T)$  a vzťah (2.5) môžeme vyjadriť

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_m &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{hD}^T}{\|\mathbf{h}\|_n} \\ &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{(f_1(\mathbf{a} + \mathbf{h}); f_2(\mathbf{a} + \mathbf{h}); \dots; f_m(\mathbf{a} + \mathbf{h})) - (f_1(\mathbf{a}); f_2(\mathbf{a}); \dots; f_m(\mathbf{a})) - (\mathbf{hd}_1^T; \mathbf{hd}_2^T; \dots; \mathbf{hd}_m^T)}{\|\mathbf{h}\|_n}. \end{aligned}$$

To znamená (viď dôkaz vety 2.2.1), že platí

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f_j(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f_j(\mathbf{a}) - \mathbf{hd}_j^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = 0 \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, m.$$

Ak v tomto vzťahu pre  $j = 1, 2, \dots, m$  zvolíme za  $\mathbf{h}$  postupne pre  $i = 1, 2, \dots, n$  smery  $\mathbf{t}_i = (0; \dots; 0; t; 0; \dots; 0) \rightarrow \mathbf{0}_n$  (na  $i$ -tom mieste je  $t \in R$ ,  $t \rightarrow 0$ ), dostaneme

$$\|\mathbf{t}_i\|_n = \sqrt{t^2} = |t|, \quad \mathbf{t}_i \mathbf{d}_j^T = (0; \dots; 0; t; 0; \dots; 0) \cdot (d_{j1}; \dots; d_{ji}; \dots; d_{jn})^T = t d_{ji}.$$

Pre všetky  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  potom platí

$$0 = \lim_{\mathbf{t}_i \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f_j(\mathbf{a} + \mathbf{t}_i) - f_j(\mathbf{a}) - \mathbf{t}_i \mathbf{d}_j^T}{\|\mathbf{t}_i\|_n} = \lim_{\mathbf{t}_i \rightarrow \mathbf{0}_n} \left| \frac{f_j(\mathbf{a} + \mathbf{t}_i) - f_j(\mathbf{a}) - \mathbf{t}_i \mathbf{d}_j^T}{\|\mathbf{t}_i\|_n} \right|$$

<sup>20</sup>V zložke  $f_j$  sa mení iba  $i$ -ta premenná  $a_i + t \rightarrow a_i$ , resp.  $x_i \rightarrow a_i$ .

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f_j(a_1; \dots; a_{i-1}; a_i + t; a_{i+1}; \dots; a_n) - f_j(a_1; \dots; a_{i-1}; a_i; a_{i+1}; \dots; a_n) - t d_{ji}}{t} \right| \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f_j(a_1; \dots; a_i + t; \dots; a_n) - f_j(a_1; \dots; a_i; \dots; a_n)}{t} - d_{ji} \right| = \left| \frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} - d_{ji} \right|,
\end{aligned}$$

t. j.  $\frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} - d_{ji} = 0$  a aj tvrdenie vety  $\frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = d_{ji}$ . ■

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že ak je funkcia  $f: A \rightarrow R^m$ ,  $A \subset R^n$ ,  $n, m \in N$  **diferencovateľná** v bode  $\mathbf{a} \in A$ , t. j. ak existuje  $f'(\mathbf{a})$ , potom **existujú všetky**  $\frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  a tvoria maticu  $f'(\mathbf{a})$ , ktorú nazývame **Jacobiho matica**

$$f'(\mathbf{a}) = \mathbf{D} = \left( \frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right)_{m \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

### Poznámka 2.2.1.

*Opačné tvrdenie vety 2.2.3 pre  $n \in N$ ,  $n \geq 2$  neplatí.*

*Existencia všetkých parciálnych derivácií  $\frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i}$  v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$  nezaručuje existenciu derivácie  $f'(\mathbf{a})$  a nezaručuje ani spojitosť  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  (príklad 2.2.5).*

• *Opačné tvrdenie platí iba pre  $n = 1$ , t. j. pre funkcie  $f: R \rightarrow R$ , kde existuje iba jedna parciálna derivácia identická s deriváciou  $f'(a)$ . V tomto prípade, ak existuje konečná derivácia  $f'(a)$ , potom je  $f$  v bode  $a$  spojitá (ma1: veta 4.1.1).*

• *Spojitosť funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  pre  $n > 1$  zaručuje existencia derivácie  $f'(\mathbf{a})$  (nie iba existencia matice derivácie), t. j. diferencovateľnosť funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  (veta 2.2.2).*

V niektorých špeciálnych prípadoch sa môže Jacobiho matica zjednodušiť.

- **Funkcia  $f: R \rightarrow R$ , t. j.  $n = m = 1$ ,  $\mathbf{x} = (x) = x$ ,  $\mathbf{a} = (a) = a$ ,  $\mathbf{h} = (h) = h$ .**

Matica derivácie  $f'(\mathbf{a})$  sa redukuje na jeden prvok. Dostávame deriváciu reálnej funkcie jednej premennej, ako ju poznáme doposiaľ (ma1: 4.1 Derivácia reálnej funkcie). Platí

$$f'(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x} \right) = \frac{\partial f(a)}{\partial x} = \frac{df(a)}{dx} = f'(a), \quad df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{h} \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x} \right) = f'(a)h = df(a, h).$$

- **Funkcia  $f: R \rightarrow R^m$ , t. j.  $n = 1$ ,  $m \in N$ ,  $m \geq 2$ ,**

$$f = (f_1; f_2; \dots; f_m), \quad \mathbf{x} = (x) = x, \quad \mathbf{a} = (a) = a, \quad \mathbf{h} = (h) = h$$

Matica derivácie  $f'(\mathbf{a})$  sa redukuje na stĺpcový vektor s  $m$  zložkami, ktorý sa nazýva **dotykový vektor funkcie  $f$  v bode  $a$** . Funkcia  $f$  geometricky predstavuje krivku parametrizovanú rovnicami  $y_1 = f_1(x)$ ,  $y_2 = f_2(x)$ ,  $\dots$ ,  $y_m = f_m(x)$ ,  $x \in A$ . Platí

$$f'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x} \\ \dots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df_1(\mathbf{a})}{dx} \\ \frac{df_2(\mathbf{a})}{dx} \\ \dots \\ \frac{df_m(\mathbf{a})}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ f'_2(a) \\ \dots \\ f'_m(a) \end{pmatrix},$$

$$df(a, h) = h f'(\mathbf{a})^T = \left( \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x} h; \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x} h; \dots; \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x} h \right) = (f'_1(a)h; f'_2(a)h; \dots; f'_m(a)h).$$

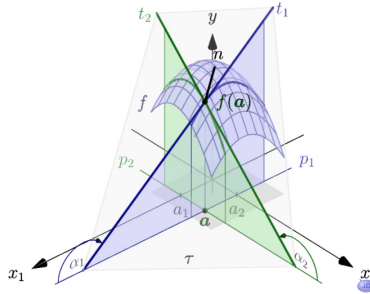
- **Funkcia**  $f: R^n \rightarrow R$ , **t. j.**  $n \in N, n \geq 2, m = 1$ ,  
 $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n), \mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n), \mathbf{h} = (h_1; h_2; \dots; h_n)$

Matica derivácie  $f'(\mathbf{a})$  sa redukuje na riadkový vektor s  $n$  zložkami, ktorý sa nazýva **gradient funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$**  a označuje  $\text{grad } f(\mathbf{a})$ . Platí

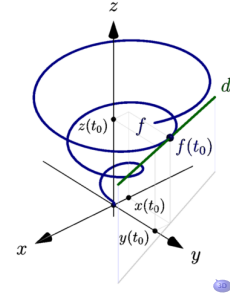
$$f'(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right),$$

$$df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot \text{grad } f(\mathbf{a})^T = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}^T = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} h_n.$$

Na obr. 2.2.17 vpravo sú znázornené parciálne derivácie funkcie  $f: R^2 \rightarrow R$ . Geometricky vyjadrujú smernice, t. j. tangensy uhlov  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  dotykových priamok  $t_1$  a  $t_2$  ku grafu funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2)$  so svojimi kolmými priemetmi  $p_1$  a  $p_2$  do súradnicovej roviny  $x_1 x_2$ . Priemety  $p_1$  a  $p_2$  sú rovnobežné so súradnicovými osami  $x_1$  a  $x_2$ . Priamky  $t_1$  a  $t_2$  jednoznačne určujú dotykovú rovinu ku grafu funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  (viď poznámka 2.2.2 a príklad 2.2.4).



Obr. 2.2.17: Geometrická interpretácia derivácie funkcií  $f: R \rightarrow R$  (vľavo) a  $f: R^2 \rightarrow R$  (vpravo)



Obr. 2.2.18: Príklad 2.2.3



Keď zafixujeme premennú  $x_2$  na hodnotu  $a_2$  dostaneme reálnu funkciu  $f(x_1): R \rightarrow R$  jednej reálnej premennej. Jej grafom je (rovinná) krivka, ktorá vznikne prierezom pôvodného grafu rovinou určenou priamkami  $d_1$  a  $p_1$  (rovinou rovnobežnou so súradnicovou rovinou  $x_1 y$  obsahujúcou dotyčnicu  $d_1$ ). Analogicky môžeme fixovať premennú  $x_1$  na hodnotu  $a_1$ . Potom dostaneme reálnu funkciu  $f(x_2): R \rightarrow R$ , ktorej graf vznikne prierezom pôvodného grafu rovinou určenou priamkami  $d_2$  a  $p_2$  (rovinou rovnobežnou s rovinou  $x_2 y$  obsahujúcou dotyčnicu  $d_2$ ).

- **Funkcia**  $f: R^n \rightarrow R^n$ , **t. j.**  $n = m \in N, n \geq 2$ ,

$$f = (f_1; f_2; \dots; f_m), \mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n), \mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n), \mathbf{h} = (h_1; h_2; \dots; h_n)$$

Derivácia  $f'(\mathbf{a})$  je štvorcová matica<sup>21</sup> typu  $n \times n$ , jej determinant  $\det f'(\mathbf{a})$  sa nazýva **Jakobián**. Platí

$$f'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_n} h_n \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_n} h_n \\ \dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{a})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f_n(\mathbf{a})}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f_n(\mathbf{a})}{\partial x_n} h_n \end{pmatrix}.$$

### Príklad 2.2.2.

Pre funkciu  $f(x; y) = x^y: (0; \infty) \times R \rightarrow R$  platí

$$\text{grad } f(x; y) = f'(x; y) = \left( \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}; \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \right) = (yx^{y-1}; x^y \ln x),$$

$$f'(1; 1) = (1 \cdot 1^{1-1}; 1^1 \cdot \ln 1) = (1; 0), \quad f'(1; 0) = (0 \cdot 1^{0-1}; 1^0 \cdot \ln 1) = (0; 0).$$

Pre funkciu  $f(x; y) = (f_1(x; y); f_2(x; y)) = (x^y; y^x): (0; \infty)^2 \rightarrow R^2$  platí

$$f'(x; y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x; y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x; y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x; y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x; y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x \\ xy^{x-1} & y^x \ln y \end{pmatrix}, \quad f'(x; y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

### Poznámka 2.2.2.

Uvažujme reálnu funkciu jednej reálnej premennej  $y = f(x_1): R \rightarrow R$  a bod  $a_1 \in D(f)$ .

Dotyčnica  $t_1$  ku grafu funkcie  $f$  v bode  $a_1$  má rovnicu (obr. 2.2.17 vľavo)

$$t_1: y - f(a_1) = df(a_1, x_1 - a_1) = f'(a_1) \cdot (x_1 - a_1) = \text{tg } \alpha_1 \cdot (x_1 - a_1),$$

kde  $(1; f'(a_1)) = (1; \text{tg } \alpha_1)$  je smerový vektor dotyčnice  $t_1$ . Normálový vektor  $k$  dotyčnici  $t_1$  má tvar  $(f'(a_1); -1) = (\text{tg } \alpha_1; -1)$ . **Normála**  $n$ , t. j. kolmica ku dotyčnici  $t_1$  v bode dotyku  $(a_1; f(a_1))$  má parametrické vyjadrenie

$$n: x_1 = a_1 + f'(a_1)t, \quad y = f(a_1) - t, \quad t \in R,$$

$$\text{resp. rovnicu } n: y - f(a_1) = -\frac{1}{f'(a_1)} \cdot (x_1 - a_1) \text{ pre } f'(a_1) \neq 0.$$

### Poznámka 2.2.3.

Uvažujme funkciu dvoch premenných  $y = f(x_1; x_2): R^2 \rightarrow R$  a bod  $\mathbf{a} = (a_1; a_2) \in D(f)$ .

<sup>21</sup>Niekedy sa ako Jacobiho matica nazýva  $f'(\mathbf{a})$  iba v tomto prípade  $n \times n$ .

Dotyková rovina  $\tau$  ku grafu  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  má rovnicu (obr. 2.2.17 vpravo)

$$\begin{aligned}\tau: y - f(\mathbf{a}) &= df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = f'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T = \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix}, \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} \cdot (x_2 - a_2) = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot (x_1 - a_1) + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot (x_2 - a_2).\end{aligned}$$

Normálový vektor dotyčkovej roviny  $\tau$  má tvar  $\left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}; -1 \right) = (\operatorname{tg} \alpha_1; \operatorname{tg} \alpha_2; -1)$ . Priamka  $n$  prechádzajúca dotykovým bodom  $(\mathbf{a}; f(\mathbf{a}))$  kolmá na rovinu  $\tau$  sa nazýva **normála ku grafu funkcie  $f$  v bode  $(\mathbf{a}; f(\mathbf{a}))$**  a má parametrický tvar

$$n: x_1 = a_1 + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} t, \quad x_2 = a_2 + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} t, \quad y = f(a_1; a_2) - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ak  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , potom dotykovú množinu  $\tau$  v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$  nazývame **dotyková nadrovina ku grafu  $f$  v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$**  a má tvar

$$\tau: y - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = f'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} (x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} (x_n - a_n).$$

### Príklad 2.2.3.

Uvažujme funkciu  $f(t) = (x; y; z) = \left( \frac{2t \sin(2\pi t)}{\pi}; \frac{2t \cos(2\pi t)}{\pi}; t \right): \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Funkcia  $f$  predstavuje priestorovú krivku v  $\mathbb{R}^3$ , jej grafom je špirála (obr. 2.2.18) začínajúca v bode  $(0; 0; 0)$ . Prakticky je krivka definovaná parametricky rovnicami

$$f: x(t) = \frac{2t \sin(2\pi t)}{\pi}, \quad y(t) = \frac{2t \cos(2\pi t)}{\pi}, \quad z(t) = t, \quad t \geq 0.$$

Pre deriváciu funkcie  $f$ , t. j. dotykový vektor v bode  $t \in \langle 0; \infty \rangle$  platí

$$f'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial z(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 \sin(2\pi t)}{\pi} + \frac{4\pi t \cos(2\pi t)}{\pi} \\ \frac{2 \cos(2\pi t)}{\pi} - \frac{4\pi t \sin(2\pi t)}{\pi} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 \sin(2\pi t)}{\pi} + 4t \cos(2\pi t) \\ \frac{2 \cos(2\pi t)}{\pi} - 4t \sin(2\pi t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Derivácia  $f'(t_0)^T = (x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)) = (x'(t_0); y'(t_0); 1)$  v bode  $t_0 \in \langle 0; \infty \rangle$  predstavuje smerový vektor dotyčkovej priamky  $d$  ku grafu funkcie  $f$  v tomto bode  $f(t_0)$ . Parametrický tvar dotyčnice  $d$  (obr. 2.2.18) je

$$d: d_x(t) = x(t_0) + x'(t_0) \cdot t, \quad d_y(t) = y(t_0) + y'(t_0) \cdot t, \quad d_z(t) = z(t_0) + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Napríklad pre  $t_0 = 2$  dostaneme  $f(2) = (x; y; z) = (0; \frac{4}{\pi}; 2)$ ,  $f'(2) = (8; \frac{2}{\pi}; 1)$  a dotyčnicu

$$d: d_x(t) = 0 + 8t = 8t, \quad d_y(t) = \frac{4}{\pi} + \frac{2t}{\pi} = \frac{4+2t}{\pi}, \quad d_z(t) = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

### Príklad 2.2.4.

Pre funkciu  $y = f(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (pr. 2.2.1) v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2$  platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} &= 2x_1, \quad \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} = 2x_2, \quad \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} \right) = (2a_1; 2a_2), \\ df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= \mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T = (h_1; h_2) \cdot (2a_1; 2a_2)^T = 2a_1 h_1 + 2a_2 h_2.\end{aligned}$$

Dotykovú rovinu  $\tau$  (obr. 2.2.19) ku grafu funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  tvoria dotyčnice  $t_1$  a  $t_2$ . Ich kolmé priemety do súradnicovej roviny  $x_1 x_2$  sú rovnobežné s osami  $x_1$  a  $x_2$ . Priamky  $t_1$  a  $p_1$  zvierajú uhol  $\alpha_1$  a priamky  $t_2$  a  $p_2$  uhol  $\alpha_2$ , pričom  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 2a_1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_2 = 2a_2$ . ■

**Príklad 2.2.5.**

Uvažujme funkciu  $f: R^2 \rightarrow R$  definovaná vzťahom  $f(\mathbf{x}) = f(x; y) = \begin{cases} 1 & \text{pre } xy = 0, \\ 2 & \text{pre } xy \neq 0. \end{cases}$

Uvažujme bod  $\mathbf{a} = (0; 0)$ . Derivácia  $f'(\mathbf{a})$  neexistuje, aj keď obe parciálne derivácie funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  existujú a sú konečné.

*Riešenie.*

Pre parciálne derivácie platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x} &= \frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x;0) - f(0;0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \\ \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y} &= \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0;y) - f(0;0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Funkcia  $f$  nie je spojitá v bodoch  $(t; 0)$ ,  $(0; t)$ ,  $t \in R$ , t. j. ani v bode  $\mathbf{a}$  a neexistuje ani limita funkcie  $f$  v týchto bodoch (obr. 2.2.20).

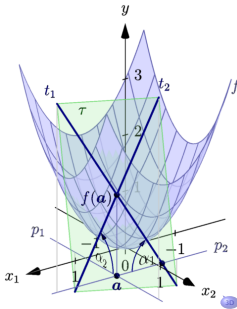
Predpokladajme, že existuje  $f'(\mathbf{a})$ . Ak derivácia existuje, potom (veta 2.2.3) musí platiť

$$f'(\mathbf{a}) = f'(0; 0) = \mathbf{D} = \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y} \right) = (0; 0).$$

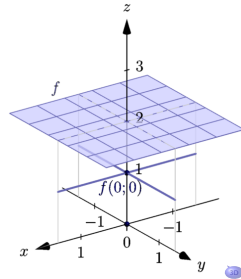
Pre deriváciu  $f'(\mathbf{a})$  podľa definície, t. j. podľa vzťahu (2.6) platí

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{D}^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x; y) - f(0; 0) - ((x; y) - (0; 0)) \cdot (0; 0)^T}{\|(x; y) - (0; 0)\|_2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x; y) - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x; y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left[ \begin{array}{l} \text{Smer } x = y \rightarrow 0 \\ xy \neq 0, f(x; y) = 2 \end{array} \right] = \lim_{\substack{x = y \\ x \rightarrow 0}} \frac{f(x; x)}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2}x} = \frac{2}{0^+} = \infty. \end{aligned}$$

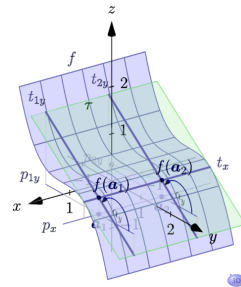
Dostali sme spor. To znamená, že derivácia  $f'(0; 0)$  neexistuje. ■



Obr. 2.2.19:  
Príklad 2.2.4



Obr. 2.2.20:  
Príklad 2.2.5



Obr. 2.2.21:  
Príklad 2.2.6

**Príklad 2.2.6.**

Funkcia  $f(x; y) = 2y^3$ :  $R^2 \rightarrow R$  je spojitá na celom svojom definičnom obore  $D(f) = R^2$ . Pre deriváciu funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{x} = (x; y) \in D(f)$  platí

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) = f'(x; y) = \left( \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial 2y^3}{\partial x}, \frac{\partial 2y^3}{\partial y} \right) = (0; 3y^2).$$

Parciálna derivácia  $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 0$  je pre všetky body  $\mathbf{x} \in D(f)$  rovnaká.

Pre všetky body  $\mathbf{a}_1 = (a_{1x}; a_y)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (a_{2x}; a_y) \in D(f)$ , ktoré majú rovnakú  $y$ -ovú súradnicu, platí  $f(\mathbf{a}_1) = f(\mathbf{a}_2)$ ,  $f'(\mathbf{a}_1) = f'(\mathbf{a}_2)$ . V bodoch  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  sú dotyčnice  $t_{1x} = t_{2x} = t_x$  identické a dotyčnice  $t_{1y}, t_{2y}$  rovnobežné.

To znamená, že dotyková rovina  $\tau$  v bodoch  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  je rovnaká (obr. 2.2.21). ■

### Príklad 2.2.7.

Funkcia  $(x; y) = \Psi(\rho; \varphi) = (\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi): \langle 0; \infty \rangle \times R \rightarrow R^2$  z príkladu 2.1.3 určuje pre-  
vody súradníc bodov euklidovskej roviny z polárneho systému do kartezianskeho systému.

Funkcia  $\Psi$  je spojitá a diferencovateľná v každom bode  $(\rho; \varphi) \in D(\Psi) = \langle 0; \infty \rangle \times R$ . Platí

$$\Psi'(\rho; \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\rho; \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial x(\rho; \varphi)}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y(\rho; \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial y(\rho; \varphi)}{\partial \rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Pre Jakobián platí  $\det \Psi'(\rho; \varphi) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$ . To znamená, že pre  $\rho > 0$ , t. j. pre všetky body  $(\rho; \varphi) \in \langle 0; \infty \rangle \times R$  je matica  $\Psi'(\rho; \varphi)$  regulárna. ■

### Príklad 2.2.8.

Určte dotykovú rovinu  $\tau$  ku grafu funkcie  $f: z = f(x; y) = 1,5x^2 - y^2$ ,  $(x; y) \in R^2$  s dotykovým bodom  $\mathbf{a} \in D(f)$  tak, aby bola rovnobežná s rovinou  $\rho: 6x + 4y + 2z - 12 = 0$ .

*Riešenie.*

Pre všetky  $(x; y) \in R^2$  platí  $z = f(x; y) = \frac{3x^2}{2} - y^2$ ,  $z' = f'(x; y) = (3x; -2y)$ .

Dotyková rovina  $\tau$  ku grafu  $f$  v bode  $\mathbf{a} = (a_x; a_y)$  má rovnicu (poznámka 2.2.3)

$$\begin{aligned} \tau: z = f(\mathbf{a}) + \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \end{pmatrix} &= \frac{3a_x^2}{2} - a_y^2 + (3a_x; -2a_y) \cdot \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{3a_x^2}{2} - a_y^2 + 3a_x(x - a_x) - 2a_y(y - a_y) = 3a_x x - 2a_y y - \frac{3a_x^2}{2} + a_y^2. \end{aligned}$$

Ak odstránime zlomky a presunieme všetky premenné na jednu stranu, dostaneme

$$\tau: -6a_x x + 4a_y y + 2z + 3a_x^2 - 2a_y^2 = 0. \quad (2.9)$$

Roviny  $\tau$  a  $\rho$  sú rovnobežné, ak ich rovnice majú rovnaké koeficienty pri príslušných premenných (tieto koeficienty tvoria normálové vektory) a rôzne absolútne členy. Rovinu  $\tau$  sme upravili tak, aby mala pri premennej  $z$  rovnakú premennú ako rovina  $\rho$ . Potom sú tieto roviny rovnobežné, ak majú rovnaké aj ostatné koeficienty, t. j. ak  $-6a_x = 6$ ,  $4a_y = 4$ . Potom  $a_x = -1$ ,  $a_y = 1$ ,  $3a_x^2 - 2a_y^2 = 1$  (obr. 2.2.22) a rovina  $\tau: 6x + 4y + 2z + 1 = 0$ .

*Iné riešenie.*

Roviny  $\tau$  a  $\rho$  sú rovnobežné, ak sú ich normálové vektory lineárne závislé. Normálový vektor roviny  $\rho$  má tvar<sup>22</sup>  $(6; 4; 2)$ , resp.  $(3; 2; 1)$ . Normálový vektor roviny  $\tau$  má tvar

$$\left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}; -1 \right) = (3a_x; -2a_y; -1).$$

Aby boli normálové vektory lineárne závislé, musí existovať  $t \in R$ ,  $t \neq 0$  tak, aby

$$(3a_x; -2a_y; -1) = t(3; 2; 1) = (3t; 2t; t), \quad \text{t. j. } 3a_x = 3t, \quad -2a_y = 2t, \quad -1 = t.$$

<sup>22</sup>Normálovým vektorom je tiež každý násobok skalárom  $t(6; 4; 2) = (6t; 4t; 2t)$ ,  $t \in R$ ,  $t \neq 0$ .

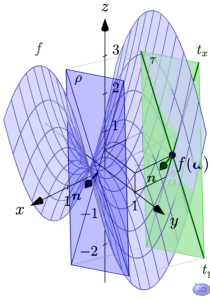
Potom  $t = -1$ ,  $-2a_y = -2$ ,  $3a_x = -3$ , t. j.  $a_x = -1$ ,  $a_y = 1$ ,  $\mathbf{a} = (-1; 1)$ ,  $f(\mathbf{a}) = 0,5$ .

Dotyková rovina má potom rovnicu  $\tau$ :  $3a_x x - 2a_y y - z + c = -3x - 2y - z + c = 0$ .

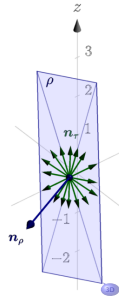
Ešte musíme určiť  $c \in \mathbb{R}$  tak, aby bod  $(\mathbf{a}; f(\mathbf{a})) = (-1; 1; 0,5)$  ležal v rovine  $\tau$ . Musí platiť

$$0 = -3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 - 0,5 + c = 3 - 2 - 0,5 + c = 0,5 + c, \quad \text{t. j. } c = -0,5.$$

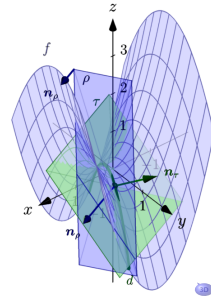
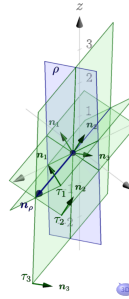
Dotyková rovina má potom tvar  $\tau$ :  $-3x - 2y - z - 0,5 = 0$ , resp.  $\tau$ :  $6x + 4y + 2z + 1 = 0$ . ■



Obr. 2.2.22:  
Dotyková rovina  $\tau$   
(príklad 2.2.8)



Obr. 2.2.23: Dotyková rovina  $\tau$   
kolmá na danú rovinu  $\rho$   
(príklad 2.2.9)



### Príklad 2.2.9.

Určte dotykovú rovinu  $\tau$  ku grafu funkcie  $f: z = f(x; y) = 1,5x^2 - y^2$ ,  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  s dotykovým bodom  $\mathbf{a} \in D(f)$  tak, aby bola kolmá na rovinu  $\rho$ :  $6x + 4y + 2z - 12 = 0$ .

*Riešenie.*

V príklade 2.2.8 sme hľadali rovnobežnú rovinu, teraz hľadáme kolmú rovinu na  $\rho$ .

Normálový vektor roviny  $\rho$  má tvar<sup>22</sup>  $(6; 4; 2)$ , resp.  $\mathbf{n}_\rho = (3; 2; 1)$ . Normálový vektor dotykovej roviny  $\tau$  v bode  $\mathbf{a}$  má tvar

$$\mathbf{n}_\tau = \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}; -1 \right) = (3a_x; -2a_y; -1).$$

Roviny  $\rho$  a  $\tau$  a teda aj ich normálové vektory  $\mathbf{n}_\rho$  a  $\mathbf{n}_\tau$  majú byť na seba kolmé. Takých možností je nekonečne veľa (obr. 2.2.23 vľavo). Všetky  $\mathbf{n}_\tau$ , ktoré ležia v rovine  $\rho$  sú kolmé na  $\mathbf{n}_\rho$  a môžu byť normálovým vektorom dotykovej roviny  $\tau$  (obr. 2.2.23 v strede).

Vektory  $\mathbf{n}_\rho$ ,  $\mathbf{n}_\tau$  sú na seba kolmé, ak je ich skalárny súčin nulový<sup>23</sup>

$$(\mathbf{n}_\rho, \mathbf{n}_\tau) = ((3; 2; 1), (3a_x; -2a_y; -1)) = 9a_x - 4a_y - 1 = 0, \quad \text{t. j. } a_y = \frac{9a_x - 1}{4}.$$

Ak označíme  $a_x = t$ , potom  $a_y = \frac{9t-1}{4}$  a platí

$$\mathbf{a} = \left( t; \frac{9t-1}{4} \right), \quad f(\mathbf{a}) = f\left(t; \frac{9t-1}{4}\right) = \frac{3t^2}{2} - \frac{(9t-1)^2}{16} = \frac{-57t^2 + 18t - 1}{16}.$$

<sup>23</sup>Kolmé vektory  $\mathbf{n}_\rho$  a  $\mathbf{n}_\tau$  zvierajú uhol  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  a platí  $(\mathbf{n}_\rho, \mathbf{n}_\tau) = \|\mathbf{x}\|_3 \cdot \|\mathbf{y}\|_3 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

Dotykových rovín  $\tau$  je nekonečne veľa a ich body dotyku  $(a_x; a_y; f(\mathbf{a}))$  s grafom funkcie  $f$  tvoria priestorovú krivku  $d$  (obr. 2.2.23 vpravo) parametricky definovanú vzťahmi

$$d: x(t) = t, \quad y(t) = \frac{9t-1}{4}, \quad z(t) = \frac{18t-57t^2-1}{16}, \quad t \in R.$$

Ku konkrétnemu  $t \in R$ , t. j.  $\mathbf{a} = (t; \frac{9t-1}{4})$  na základe vzťahu (2.9) patrí dotyková rovina

$$\begin{aligned} \tau: 0 &= -6a_x x + 4a_y y + 2z + 3a_x^2 - 2a_y^2 = -6tx + 4\frac{9t-1}{4}y + 2z + 3t^2 - 2\left(\frac{9t-1}{4}\right)^2 \\ &= -6tx + (9t-1)y + 2z + 3t^2 - \frac{(9t-1)^2}{8}, \quad \text{pričom } \mathbf{n}_\tau = (-6t; 9t-1; 2). \blacksquare \end{aligned}$$

#### Veta 2.2.4 (Lagrangeova).

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  je diferencovateľná na oblasti  $A \subset D(f)$ ,

body  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1; b_2; \dots; b_n) \in A$ .

$\implies$  Pre každé  $i = 1, 2, \dots, n$  existuje  $\mathbf{c}_i = (a_1; \dots; a_{i-1}; c_i; b_{i+1}; \dots; b_n) \in A$  tak, že  $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{a}\|_n < \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_n$ ,  $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{b}\|_n < \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_n$  a platí

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{c}_i)}{\partial x_i} (b_i - a_i) = \frac{\partial f(\mathbf{c}_1)}{\partial x_1} (b_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{c}_n)}{\partial x_n} (b_n - a_n). \quad (2.10)$$

*Dôkaz.*

Na základe vety 2.2.2 je funkcia  $f$  spojitá na množine  $A$ .

Pre  $i = 1, 2, \dots, n$  označme  $m_i = \min \{a_i, b_i\}$ ,  $M_i = \max \{a_i, b_i\}$  a uvažujme funkcie

$$g_i(x) = f(a_1; \dots; a_{i-1}; x; b_{i+1}; \dots; b_n): \langle m_i; M_i \rangle \rightarrow R.$$

Platí  $f(\mathbf{b}) = g_1(b_1)$ ,  $f(\mathbf{a}) = g_n(a_n)$  a navyše  $g_i(a_i) = g_{i+1}(b_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

• Ak pre  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí  $a_i = b_i$ , potom  $\langle m_i; M_i \rangle = \{a_i\}$  je jednoprvková množina. Ak položíme  $c_i = a_i = b_i$ , potom

$$g_i(b_i) = g_i(a_i) = f(a_1; \dots; a_{i-1}; c_i; b_{i+1}; \dots; b_n) = f(\mathbf{c}_i).$$

Keďže  $|c_i - a_i| = 0$ ,  $|b_i - c_i| = 0$  a bod  $\mathbf{c}_i$  má ostatné súradnice totožné s  $\mathbf{a}$  alebo  $\mathbf{b}$ , platia aj nerovnosti  $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{a}\|_n < \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_n$ ,  $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}_i\|_n < \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_n$ .

Derivácia  $\frac{\partial f(\mathbf{c}_i)}{\partial x_i}$  existuje podľa predpokladov vety, takže platí

$$0 = g_i(b_i) - g_i(a_i) = b_i - a_i, \quad \text{t. j. } g_i(b_i) - g_i(a_i) = \frac{\partial f(\mathbf{c}_i)}{\partial x_i} \cdot (b_i - a_i).$$

• Ak pre  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí  $a_i \neq b_i$ , potom sú splnené predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (mal: veta 4.3.3). Funkcia  $g_i$  je spojitá na  $\langle m_i; M_i \rangle$  a pre všetky body  $x \in (m_i; M_i)$  existuje derivácia  $g'_i(x)$ . Potom existuje  $c_i \in (m_i; M_i)$  také, že platí

$$g'_i(c_i) = \frac{g_i(b_i) - g_i(a_i)}{b_i - a_i}, \quad \text{t. j. } g_i(b_i) - g_i(a_i) = g'_i(c_i)(b_i - a_i).$$

Ďalej platí  $|c_i - a_i| < |b_i - a_i|$ ,  $|b_i - c_i| < |b_i - a_i|$ . Pretože bod  $\mathbf{c}_i$  má zostávajúce súradnice totožné s  $\mathbf{a}$  alebo  $\mathbf{b}$ , platí aj  $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{a}\|_n < \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_n$ ,  $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}_i\|_n < \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_n$ .

Keďže  $g_i(c_i) = f(a_1; \dots; a_{i-1}; c_i; b_{i+1}; \dots; b_n) = f(\mathbf{c}_i)$ , potom platí

$$g'_i(c_i) = \frac{\partial f(\mathbf{c}_i)}{\partial x_i}, \quad \text{t. j. } g_i(b_i) - g_i(a_i) = g'_i(c_i) \cdot (b_i - a_i) = \frac{\partial f(\mathbf{c}_i)}{\partial x_i} \cdot (b_i - a_i).$$

Ak to zhrnieme, potom platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) &= g_1(b_1) - g_n(a_n) = \left[ g_1(a_1) = g_2(b_2), g_2(a_2) = g_3(b_3), \dots, g_{n-1}(a_{n-1}) = g_n(b_n) \right] \\ &= [g_1(b_1) - g_1(a_1)] + [g_2(b_2) - g_2(a_2)] + \dots + [g_n(b_n) - g_n(a_n)] \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{c}_1)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \frac{\partial f(\mathbf{c}_2)}{\partial x_2}(b_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{c}_n)}{\partial x_n}(b_n - a_n). \blacksquare \end{aligned}$$

#### Poznámka 2.2.4.

Veta je zovšeobecnením známej a často používannej Lagrangeovej vety o strednej hodnote (ma1: veta 4.3.3). My ju uvádzame ako dôsledok 2.2.4.b.

V praxi sú známe ešte Rolleho a Cauchyho vety o strednej hodnote (ma1: vety 4.3.2, 4.3.4).

Z dôkazu vety je zrejmé, že predpoklady vety môžeme zjednodušiť a vetu formulovať analogicky ako v jednorozmernom prípade pre parciálne derivácie.

#### Dôsledok 2.2.4.a.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  je spojitá a má parciálne derivácie podľa všetkých premenných v každom bode oblasti  $A \subset D(f)$ , body  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1; b_2; \dots; b_n) \in A$ .

$\implies$  Existujú  $c_i \in (m_i; M_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  také, že platí vzťah (2.10), t. j.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{c}_i)}{\partial x_i}(b_i - a_i) = \frac{\partial f(\mathbf{c}_1)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{c}_n)}{\partial x_n}(b_n - a_n) \\ &= (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \left( \frac{\partial f(\mathbf{c}_1)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathbf{c}_2)}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f(\mathbf{c}_n)}{\partial x_n} \right)^T = \left( \frac{\partial f(\mathbf{c}_1)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathbf{c}_2)}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f(\mathbf{c}_n)}{\partial x_n} \right) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})^T. \end{aligned}$$

#### Dôsledok 2.2.4.b (Lagrangeova veta o strednej hodnote).

Funkcia  $f: R \rightarrow R$  je spojitá na  $\langle a; b \rangle$ , pre všetky  $x \in (a; b)$  existuje (aj nevlastná)  $f'(x)$ .

$\implies$  Existuje  $c \in (a; b)$  také, že  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , t. j.

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

#### Dôsledok 2.2.4.c (Lagrangeova veta v $R^2$ ).

Funkcia  $f: R^2 \rightarrow R$  je diferencovateľná na oblasti  $A \subset D(f)$ ,  $\mathbf{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1; b_2) \in A$ .

$\implies$  Existujú<sup>24</sup>  $c_1 \in (m_1; M_1)$ ,  $c_2 \in (m_2; M_2)$  také, že

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f(c_1; b_2)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \frac{\partial f(a_1; c_2)}{\partial x_2}(b_2 - a_2).$$

<sup>24</sup>Ako v dôkaze vety 2.2.4 označenie  $m_i = \min \{a_i, b_i\}$ ,  $M_i = \max \{a_i, b_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Dôsledok 2.2.4.d (Lagrangeova veta v  $R^3$ ).**

$f: R^3 \rightarrow R$  je diferencovateľná na oblasti  $A \subset D(f)$ ,  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3) \in A$ .

$\implies$  Existujú<sup>24</sup>  $c_1 \in (m_1; M_1)$ ,  $c_2 \in (m_2; M_2)$ ,  $c_3 \in (m_3; M_3)$  také, že

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f(c_1; b_2; b_3)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \frac{\partial f(a_1; c_2; b_3)}{\partial x_2}(b_2 - a_2) + \frac{\partial f(a_1; a_2; c_3)}{\partial x_3}(b_3 - a_3).$$

Uvažujme funkciu  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  diferencovateľnú na oblasti  $A \subset D(f)$  a body  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1; b_2; \dots; b_n) \in A$ .

Ak vo vzťahu (2.10) nahradíme všetky body  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  bodom  $\mathbf{a}$ , potom môžeme funkciu  $f$  v nejakom okolí  $O(\mathbf{a})$  aproximovať nasledovne

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}(x_i - a_i) = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n}(x_n - a_n).$$

To znamená, že pre  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$  platí

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n}(x_n - a_n) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}). \quad (2.11)$$

Ak označíme rozdiel medzi ľavou a pravou stranou

$$\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot f'(\mathbf{a})^T,$$

potom zo vzťahu (2.6) pre funkciu  $\omega(\mathbf{x})$  vyplýva

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\omega(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot f'(\mathbf{a})^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} = 0.$$

Pre (absolútnu) **zmenu funkcie  $f$  od bodu  $\mathbf{a}$  po bod  $\mathbf{x}$**  platí

$$\Delta f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot f'(\mathbf{a})^T + \omega(\mathbf{x}) = df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) + \omega(\mathbf{x}).$$

Funkciu  $\omega(\mathbf{x})$  nazývame **zvyšok zmeny funkcie  $f$  od bodu  $\mathbf{a}$  po bod  $\mathbf{x}$**  a predstavuje chybu pri nahradení  $\Delta f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a})$  diferenciálom  $df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a})$ .

Ak  $f(\mathbf{a}) \neq 0$ , potom pomer absolútnej zmeny  $\Delta f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a})$  a funkčnej hodnoty  $f(\mathbf{a})$  nazývame **relatívna zmena funkcie  $f$** . Platí

$$\begin{aligned} \Delta f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &\approx df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot f'(\mathbf{a})^T, \\ \delta f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \frac{\Delta f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a})}{f(\mathbf{a})} \approx \frac{df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a})}{f(\mathbf{a})} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot f'(\mathbf{a})^T}{f(\mathbf{a})}. \end{aligned}$$

Ak použijeme substitúciu  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h} \in O(\mathbf{a})$ , potom dostaneme  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{h} \in O(\mathbf{0}_n)$ ,  $df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T$  a  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n$  pre  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ . Pre zmenu  $f$  od  $\mathbf{a}$  po bod  $\mathbf{a} + \mathbf{h}$  platí

$$\Delta f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T + \omega(\mathbf{h}) = df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) + \omega(\mathbf{h}). \quad (2.12)$$

Funkciu  $f$  aproximujeme v bode  $\mathbf{a} + \mathbf{h}$ ,  $\mathbf{h} \in O(\mathbf{0}_n)$  v tvare

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T, \quad \text{kde } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\omega(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} = 0. \quad (2.13)$$

Pre absolútnu zmenu a relatívnu zmenu funkcie  $f$  platia vzťahy

$$\Delta f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \approx df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T, \quad \delta f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \frac{\Delta f(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{f(\mathbf{a})} \approx \frac{df(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{f(\mathbf{a})} = \frac{\mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T}{f(\mathbf{a})}.$$

Predchádzajúce vzťahy zodpovedajú prípadu funkcie jednej premennej (ma1: Veta 4.2.2 o najlepšej lokálnej lineárnej aproximácii pomocou diferenciálu) a **majú lokálny charakter**, t. j. majú zmysel iba v nejakom blízkom okolí  $O(\mathbf{a})$ , resp.  $O(\mathbf{0}_n)$ .

**Poznámka 2.2.5.**

*V súčasnej dobe ľahko dostupnej výpočtovej techniky už nemajú vzťahy (2.11), resp. (2.13) taký význam pri aproximovaní číselných výrazov ako kedysi. Ale stále majú veľký význam pri zjednodušovaní mnohých vzťahov v technických, ekonomických, fyzikálnych a iných odvetviach. Zložitejšie nelineárne úlohy sa nahradia jednoduchšími lineárnymi, ktoré sú samozrejme menej presné, ale dajú sa vypočítať a chyba výpočtu je prípustná.*

**Príklad 2.2.10.**

Približne vypočítajte hodnoty: a)  $0,97^{2,02}$ , b)  $\sqrt{1,98^3 + 4,05^2 + 4,92^2}$ .

*Riešenie.*

a) Označme  $f(x; y) = x^y: (0; \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (viď pr. 2.2.2), potom  $f'(x; y) = (y x^{y-1}; x^y \ln x)$ . Označme  $\mathbf{a} = (a_x; a_y) = (1; 2)$ , potom  $f(\mathbf{a}) = 1^2 = 1$ ,  $f'(\mathbf{a}) = (2 \cdot 1^{2-1}; 1^2 \cdot \ln 1) = (2; 0)$ . Ak položíme  $\mathbf{x} = (x; y) = (0,97; 2,02)$ , potom

$$f(\mathbf{x}) = 0,97^{2,02}, \quad \mathbf{x} - \mathbf{a} = (0,97 - 1; 2,02 - 2) = (-0,03; 0,02).$$

Pre odhad hodnoty  $0,97^{2,02}$  pomocou vzťahu (2.11) potom platí

$$\begin{aligned} 0,97^{2,02} = f(\mathbf{x}) &\approx f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \\ &= 1 + (2; 0) \cdot (-0,03; 0,02)^T = 1 - 0,06 + 0 = 0,94. \end{aligned}$$

Aby sme mohli použiť postup, postačí, aby bola  $f$  definovaná v  $O(\mathbf{a})$  takom, že  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$ . Presná hodnota výrazu na šesť desatinných miest je  $0,97^{2,02} = 0,940327$ .

b) Označme  $f(\mathbf{x}) = f(x_1; x_2; x_3) = \sqrt{x_1^3 + x_2^2 + x_3^2} = (x_1^3 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Pre deriváciu funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  platí

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= \left( \frac{3}{2} x_1^2 (x_1^3 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}}; \frac{2}{2} x_2 (x_1^3 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}}; \frac{2}{2} x_3 (x_1^3 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \left( \frac{3x_1^2}{2\sqrt{x_1^3 + x_2^2 + x_3^2}}; \frac{x_2}{\sqrt{x_1^3 + x_2^2 + x_3^2}}; \frac{x_3}{\sqrt{x_1^3 + x_2^2 + x_3^2}} \right) = \left( \frac{3x_1^2}{2f(\mathbf{x})}; \frac{x_2}{f(\mathbf{x})}; \frac{x_3}{f(\mathbf{x})} \right). \end{aligned}$$

Ak označíme  $\mathbf{a} = (2; 4; 5)$ ,  $\mathbf{h} = (-0,02; 0,05; -0,08)$ , potom  $\mathbf{a} + \mathbf{h} = (1,98; 4,05; 4,92)$ . Ďalej  $f(\mathbf{a}) = \sqrt{2^3 + 4^2 + 5^2} = 7$ ,  $f'(\mathbf{a}) = (\frac{12}{7}; \frac{4}{7}; \frac{5}{7})$  a pre odhad odmocniny platí

$$\begin{aligned} \sqrt{1,98^3 + 4,05^2 + 4,92^2} = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &\approx f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T \\ &= 7 + (-0,02; 0,05; -0,08) \cdot \left( \frac{12}{7}; \frac{4}{7}; \frac{5}{7} \right)^T = 7 - \frac{0,02 \cdot 12}{7} + \frac{0,05 \cdot 4}{7} - \frac{0,08 \cdot 5}{7} = \frac{48,56}{7}. \end{aligned}$$

Zlomok  $\frac{48,56}{7} \approx 6,937143$  a presná hodnota na šesť desatinných miest je  $6,954947$ . ■

Predpokladajme, že vzťah  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$  vyjadruje závislosť nejakej veličiny  $y$  od veličín  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  a že sme každú z veličín  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  namerali s absolútnou chybou  $\Delta x_i$ , ktorá je v porovnaní s  $x_i$  malá.

Ak označíme  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ ,  $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1; \Delta x_2; \dots; \Delta x_n)$ , potom môžeme **absolútnu chybu**  $\Delta y = \Delta f(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x})$  vyjadriť ako diferenciál  $df(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x})$ .

Ak okolie  $O(\mathbf{x})$  je také, že  $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \in O(\mathbf{x})$ , t. j.  $\Delta \mathbf{x} \in O(\mathbf{0}_n)$ , potom pre absolútnu chybu  $\Delta y$  a relatívnu chybu  $\delta_y$  pre  $\Delta \mathbf{x} \in O(\mathbf{0}_n)$  platí

$$\Delta y = f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \approx df(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}) = \Delta \mathbf{x} \cdot f'(\mathbf{x})^T, \quad \delta_y = \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{\Delta \mathbf{x} \cdot f'(\mathbf{x})^T}{f(\mathbf{x})}.$$

Relatívna chyba  $\delta_y$  sa často vyjadruje v percentách v tvare  $\delta_y \cdot 100\%$ .

**Príklad 2.2.11.**

Aká je chyba pre objem gule, ak sme jej polomer  $r$  namerali s absolútnou chybou  $\Delta r$ ?

*Riešenie.*

Absolútna chyba merania je  $\Delta r$  a relatívna chyba merania je  $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$ .

Pre objem gule pre  $r > 0$  platí  $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3}r^3$ ,  $V'(r) = \frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$ .

Pre absolútnu chybu  $\Delta V$  a relatívnu chybu  $\delta_V$  platí

$$\Delta V \approx \Delta r \cdot V'(r) = \Delta r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^2 \Delta r, \quad \delta_V = \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3\Delta r}{r} = 3\delta_r. \blacksquare$$

**Príklad 2.2.12.**

V sklárskom podniku Drevoplech vyrábajú poháre v tvare valca s vnútorným polomerom podstavy 3 cm a výškou 10 cm. Kontrolnými meraniami sa zistilo, že pri výrobe dosahuje relatívna chyba výšky pohárov 1,1 % a relatívna chyba polomeru podstáv 1,5 %. Aká je absolútna a relatívna chyba objemu pohárov?

*Riešenie.*

Ak označíme  $r = 3$  cm polomer podstavy a  $v = 10$  cm výšku valca, potom pre objem valca platí  $V(r; v) = \pi r^2 v = 90\pi \text{ cm}^3$ ,  $V'(r; v) = (2\pi r v; \pi r^2) = (60\pi \text{ cm}^2; 9\pi \text{ cm}^2)$ .

Pre relatívne a absolútne chyby polomeru  $\delta_r$ ,  $\Delta r$  a výšky  $\delta_v$ ,  $\Delta v$  platí:

$$100\delta_r = 1,5 \% \Rightarrow \frac{\Delta r}{r} = \delta_r = \frac{1,5}{100}, \quad \text{t. j. } \Delta r = \frac{1,5r}{100} = \frac{1,5 \cdot 3}{100} \text{ cm} = \frac{4,5}{100} \text{ cm} = 0,045 \text{ cm}.$$

$$100\delta_v = 1,1 \% \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \delta_v = \frac{1,1}{100}, \quad \text{t. j. } \Delta v = \frac{1,1r}{100} = \frac{1,1 \cdot 10}{100} \text{ cm} = \frac{11}{100} \text{ cm} = 0,11 \text{ cm}.$$

Pre absolútnu chybu  $\Delta V$  a relatívnu chybu  $\delta_V$  objemu potom platí:

$$\begin{aligned} \Delta V &= (\Delta r; \Delta v) \cdot V'(r; v)^T = (0,045 \text{ cm}; 0,11 \text{ cm}) \cdot (60\pi \text{ cm}^2; 9\pi \text{ cm}^2) \\ &= 2,7\pi \text{ cm}^3 + 0,99\pi \text{ cm}^3 = 3,69\pi \text{ cm}^3, \quad \delta_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{3,69\pi}{90\pi} = 0,041. \end{aligned}$$

Absolútna chyba objemu je  $3,69\pi \text{ cm}^3$  a relatívna chyba objemu je 4,1 % ■

**Poznámka 2.2.6.**

*Objem vyrábaného pohára by mal byť  $V = V(3; 10) = 90\pi \text{ cm}^3$ .*

*Ak uvážime chyby výroby, potom pre polomer  $r$  a výšku  $v$  pohárov platí*

$$r \approx 3 \pm 0,015 \cdot 3 \text{ cm} = 3 \pm 0,045 \text{ cm}, \quad v \approx 10 \pm 0,011 \cdot 10 \text{ cm} = 10 \pm 0,11 \text{ cm}.$$

*Najmenší objem  $V_{\min} = 2,955^2 \cdot 9,89\pi \text{ cm}^3 \approx 86,359\,727\pi \text{ cm}^3$  dostaneme pre*

$$r_{\min} = 3 - 0,045 \text{ cm} = 2,955 \text{ cm}, \quad v_{\min} = 10 - 0,11 \text{ cm} = 9,89 \text{ cm}.$$

*Najväčší objem  $V_{\max} = 3,045^2 \cdot 10,11\pi \text{ cm}^3 \approx 93,740\,173\pi \text{ cm}^3$  dostaneme pre*

$$r_{\max} = 3 + 0,045 \text{ cm} = 3,045 \text{ cm}, \quad v_{\max} = 10 + 0,11 \text{ cm} = 10,11 \text{ cm}.$$

*Pre relatívne chyby objemov  $V_{\min}$  a  $V_{\max}$  potom platí*

$$\delta_{V_{\min}} = \frac{V - V_{\min}}{V} = \frac{3,640\,273}{90} \approx 0,040\,447, \quad \delta_{V_{\max}} = \frac{V_{\max} - V}{V} = \frac{3,740\,173}{90} \approx 0,041\,557,$$

*čo zodpovedá výsledkom predchádzajúceho príkladu  $\delta_v = 0,041$ .*

Spojitosť funkcie  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  v danom bode  $\mathbf{a} \in D(f)$  nezaručuje jej diferencovateľnosť v tomto bode (viď veta 2.2.2). Neplatí to ani pre reálne funkcie, napr. funkcia  $y = |x|: R \rightarrow R$  je spojitá v bode 0, ale nemá deriváciu v tomto bode. Diferencovateľnosť funkcie zaručuje napríklad spojitosť parciálnych derivácií podľa všetkých premenných.

### Poznámka 2.2.7.

*Kvôli prehľadnosti nasledujúce tvrdenia formulujeme pre reálne funkcie  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$ . Pri vektorových funkciách  $f = (f_1; f_2; \dots; f_m): R^n \rightarrow R^m$ ,  $n, m \in N$  aplikujeme dané tvrdenia samostatne na každú zložku  $f_j: R^n \rightarrow R$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .*

### Veta 2.2.5.

Množina  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť, bod  $\mathbf{a} \in A$ .

Funkcia  $f: A \rightarrow R$  má v bode  $\mathbf{a}$  spojité všetky parciálne derivácie  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$\Rightarrow$  Funkcia  $f$  je diferencovateľná v bode  $\mathbf{a}$ .

*Dôkaz.*

Ukážeme, že existuje limita

$$L = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{D}^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} = 0, \quad \text{kde } \mathbf{D} = \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right).$$

Parciálne derivácie sú spojité v bode  $\mathbf{a}$ , t. j. existujú v nejakom okolí  $O(\mathbf{a}) \subset A$ .

Pre každé  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$  sú splnené podmienky Lagrangeovej vety 2.2.4 (viď poznámka 2.2.4).

Potom existujú  $\mathbf{c}_i \in O(\mathbf{a})$ ,  $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{a}\|_n < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  také, že platí (2.10), t. j.

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{C}^T, \quad \text{pričom } \mathbf{C} = \left( \frac{\partial f(\mathbf{c}_1)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathbf{c}_2)}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f(\mathbf{c}_n)}{\partial x_n} \right).$$

Potom pre argument limity  $L$  platí

$$\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{D}^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{C}^T - (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{D}^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{C}^T - \mathbf{D}^T)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{D})^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n}.$$

Pre limitu  $L$  platí

$$\begin{aligned} 0 \leq |L| &= \left| \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{D})^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} \right| = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \left| \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{D})^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} \right| = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{D})^T|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} \\ &\leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\left| \left( \left( \frac{\partial f(\mathbf{c}_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} \right) \cdot (x_1 - a_1) + \left( \frac{\partial f(\mathbf{c}_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} \right) \cdot (x_2 - a_2) + \dots + \left( \frac{\partial f(\mathbf{c}_n)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right) \cdot (x_n - a_n) \right|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} \\ &\leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\left| \frac{\partial f(\mathbf{c}_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} \right| \cdot |x_1 - a_1| + \left| \frac{\partial f(\mathbf{c}_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} \right| \cdot |x_2 - a_2| + \dots + \left| \frac{\partial f(\mathbf{c}_n)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right| \cdot |x_n - a_n|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n} \\ &= \left[ \text{Pre všetky } i = 1, 2, \dots, n \text{ platí } |x_i - a_i| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n \text{ a navyše pre } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \text{ platí } \mathbf{c}_i \rightarrow \mathbf{a}. \right] \\ &\leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \left[ \left| \frac{\partial f(\mathbf{c}_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial f(\mathbf{c}_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial f(\mathbf{c}_n)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right| \right] \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0. \end{aligned}$$

Posledná rovnosť vyplýva zo spojitosti parciálnych derivácií a z konštrukcie bodov  $\mathbf{c}_i$ .

To znamená, že  $0 = |L| = L$  (veta 2.1.12) a tvrdenie vety je dokázané. ■

### Poznámka 2.2.8.

*Spojitosť všetkých parciálnych derivácií funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  vo vete 2.2.5 je iba postačujúca podmienka diferencovateľnosti funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$ , ale nie nutná. Napríklad funkcia  $f$  definovaná predpisom  $f(x; y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$  pre  $(x; y) \in R^2 - \{(0; 0)\}$  a  $f(0; 0) = 0$  nespĺňa predpoklady tejto vety (pr. 2.2.13, obr. 2.2.24), ale je diferencovateľná v bode  $(0; 0)$ .*

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  sa nazýva **hladká v bode**  $\mathbf{a} \in D(f)$ , ak má v nejakom okolí  $O(\mathbf{a})$  spojité všetky parciálne derivácie  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  sa nazýva **hladká**, ak je hladká v každom bode  $\mathbf{a} \in D(f)$ . Z definície vyplýva, že definičným oborom hladkej funkcie musí byť otvorená množina.

### Dôsledok 2.2.5.a.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  je hladká v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$ .

$\implies$  Funkcia  $f$  je diferencovateľná v bode  $\mathbf{a}$ .

### Dôsledok 2.2.5.b.

Funkcia  $f: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  je hladká.  $\implies$  Funkcia  $f$  je diferencovateľná.

### Príklad 2.2.13.

Uvažujme funkciu  $f(\mathbf{x}) = f(x; y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{pre } (x; y) \neq (0; 0), \\ 0 & \text{pre } (x; y) = (0; 0). \end{cases}$

Funkcia  $f$  je definovaná a spojitá v každom bode  $\mathbf{x} \in D(f) = R^2$  (obrázok 2.2.24).

Jediný problematický bod je  $\mathbf{x} = (0; 0)$ , v ktorom platí (dôsledok 2.1.11.b)

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \left[ \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} (x^2 + y^2) = 0 \mid -1 \leq \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 1 \right] = 0 = f(0; 0).$$

Pre všetky  $\mathbf{x} = (x; y) \in D(f)$ ,  $\mathbf{x} \neq (0; 0)$  platí<sup>25</sup>

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} = 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} = 2y \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Tieto parciálne derivácie sú spojité v bode  $\mathbf{x}$ . To znamená, že v každom bode  $\mathbf{x} \neq (0; 0)$  je funkcia  $f$  diferencovateľná (veta 2.2.5).

Pre bod  $\mathbf{x} = (0; 0)$  platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(0;0)}{\partial x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t;0) - f(0;0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot \sin \frac{1}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (t \cdot \sin \frac{1}{t^2}) = \left[ \begin{array}{c} -1 \leq \sin \frac{1}{t^2} \leq 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0} t = 0 \end{array} \right] = 0, \\ \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0;0+t) - f(0;0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot \sin \frac{1}{t^2} - 0}{t} = 0. \end{aligned}$$

Parciálne derivácie v bode  $(0; 0)$  spojité nie sú, pretože (veta 2.1.18) platí

$$L_x = \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \neq 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial x}, \quad L_y = \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} \neq 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}.$$

$L_x, L_y$  neexistujú, pretože pre  $\{(0; \frac{1}{k})\}_{k=1}^\infty \rightarrow (0; 0)$  a pre  $\{(\frac{1}{k}; 0)\}_{k=1}^\infty \rightarrow (0; 0)$  platí

$$\begin{aligned} L_x &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 2 \cdot 0 \cdot \sin \frac{1}{0 + \frac{1}{k^2}} - 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{0 + \frac{1}{k^2}} \cdot \cos \frac{1}{0 + \frac{1}{k^2}} \right) = \left[ \begin{array}{c} -1 \leq \sin \frac{1}{\frac{1}{k^2}} \leq 1 \\ -1 \leq \cos \frac{1}{\frac{1}{k^2}} \leq 1 \end{array} \right] = 0, \\ L_y &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 2 \cdot 0 \cdot \sin \frac{1}{\frac{1}{k^2} + 0} - 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{k^2} + 0} \cdot \cos \frac{1}{\frac{1}{k^2} + 0} \right) = 0. \end{aligned}$$

A pre  $\{(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}; 0)\}_{k=1}^\infty \rightarrow (0; 0)$  a pre  $\{(0; \frac{1}{\sqrt{2k\pi}})\}_{k=1}^\infty \rightarrow (0; 0)$  platí

$$\begin{aligned} L_x &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \cdot \sin \frac{1}{\frac{1}{2k\pi} + 0} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2k\pi} + 0} \cdot \cos \frac{1}{\frac{1}{2k\pi} + 0} \right) = \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{\frac{1}{2k\pi} + 0} = \frac{1}{\frac{1}{2k\pi}} = 2k\pi, \quad k \in N \\ \sin 2k\pi = 0, \quad \cos 2k\pi = 1 \end{array} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k\pi}} \cdot \sin 2k\pi - 2 \cdot \sqrt{2k\pi} \cdot \cos 2k\pi \right) = \frac{\sqrt{2}}{\infty} \cdot 0 - 2 \cdot \infty \cdot 1 = 0 - \infty = -\infty, \end{aligned}$$

---

<sup>25</sup>  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x^2 + y^2} \right] = \frac{\partial}{\partial x} [(x^2 + y^2)^{-1}] = (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{x^2 + y^2} \right] = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}.$

$$L_y = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \cdot \sin \frac{1}{0 + \frac{1}{2k\pi}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \cdot \frac{1}{0 + \frac{1}{2k\pi}} \cdot \cos \frac{1}{0 + \frac{1}{2k\pi}} \right) = -\infty.$$

V bode  $\mathbf{0} = (0; 0)$  neplatia predpoklady vety 2.2.5. Funkcia  $f$  ale v bode  $\mathbf{0}$  je diferencovateľná, t. j.  $f'(\mathbf{0}) = \left( \frac{\partial f(0;0)}{\partial x}; \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} \right) = (0; 0)$ , pretože existuje limita a platí<sup>26</sup>

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{0} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{0}) - \mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{0})^T}{\|\mathbf{h}\|_n} &= \lim_{(h_x; h_y) \rightarrow (0; 0)} \frac{f(h_x; h_y) - f(0; 0) - (h_x; h_y) \cdot (0; 0)^T}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \\ &= \lim_{(h_x; h_y) \rightarrow (0; 0)} \frac{(h_x^2 + h_y^2) \cdot \sin \frac{1}{h_x^2 + h_y^2} - 0 - 0}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = \lim_{(h_x; h_y) \rightarrow (0; 0)} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} \cdot \sin \frac{1}{h_x^2 + h_y^2} \\ &= \left[ \lim_{(h_x; h_y) \rightarrow (0; 0)} \sqrt{h_x^2 + h_y^2} = 0 \mid -1 \leq \sin \frac{1}{h_x^2 + h_y^2} \leq 1 \right] = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

### Príklad 2.2.14.

Uvažujme funkciu  $f(\mathbf{x}) = f(x; y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \sin(x^2 + y^2) & \text{pre } (x; y) \neq (0; 0), \\ 1 & \text{pre } (x; y) = (0; 0). \end{cases}$

Funkcia  $f$  je definovaná a spojitá v každom bode  $\mathbf{x} \in D(f) = \mathbb{R}^2$  (obrázok 2.2.25). Jediný problematický bod je  $\mathbf{x} = (0; 0)$ , v ktorom platí (dôsledok 2.1.11.b)

$$\lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \left[ \text{Subst. } t = x^2 + y^2 \geq 0 \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 = f(0; 0).$$

Pre všetky  $\mathbf{x} = (x; y) \in D(f)$ ,  $\mathbf{x} \neq (0; 0)$  platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} &= \frac{2x \cdot (x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2) - 2x \cdot \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 2x \cdot \frac{(x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2) - \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} &= \frac{2y \cdot (x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2) - 2y \cdot \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 2y \cdot \frac{(x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2) - \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Tieto parciálne derivácie sú spojité v bode  $\mathbf{x} \neq (0; 0)$ .

Pre bod  $\mathbf{x} = (0; 0)$  platí (pri výpočte limity použijeme L'Hospitalovo pravidlo)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(0; 0)}{\partial x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t; 0) - f(0; 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t^2}{t^2} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t^2 - t^2}{t^3} = \left[ \text{L'H } \frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t \cdot \cos t^2 - 2t}{3t^2} = \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t^2 - 1}{t} = \left[ \text{L'H } \frac{0}{0} \right] = \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t \sin t^2}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-2 \cdot 0 \cdot 0}{1} = 0, \\ \frac{\partial f(0; 0)}{\partial y} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0; 0 + t) - f(0; 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t^2}{t^2} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t^2 - t^2}{t^3} = 0. \end{aligned}$$

Parciálne derivácie  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y}$  sú aj v bode  $(0; 0)$  spojité (veta 2.1.18), pretože

$$L_x = \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0; 0)}{\partial x}, \quad L_y = \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f(0; 0)}{\partial y}.$$

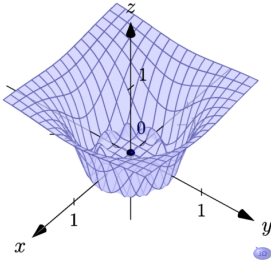
To znamená (veta 2.2.5), že funkcia  $f$  je diferencovateľná v každom bode  $\mathbf{x} \in D(f)$ .

Ukážeme, že  $L_x = 0$ ,  $L_y = 0$ . Najprv vypočítame limitu

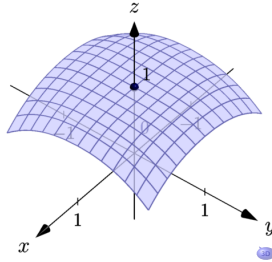
$$\begin{aligned} \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{(x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2) - \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} &= \left[ \text{Subst. } t = x^2 + y^2 \geq 0 \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \cos t - \sin t}{t^2} = \left[ \text{L'H } \frac{0}{0} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - t \cdot \sin t - \cos t}{2t} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Pre limity  $L_x$ ,  $L_y$  potom platí

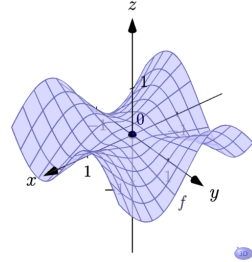
$$\begin{aligned} L_x &= \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} 2x \cdot \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{(x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2) - \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \cdot 0 = 0, \\ L_y &= \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} 2y \cdot \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{(x^2 + y^2) \cdot \cos(x^2 + y^2) - \sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \cdot 0 = 0. \blacksquare \end{aligned}$$



Obr. 2.2.24: Funkcia z príkladu 2.2.13



Obr. 2.2.25: Funkcia z príkladu 2.2.14



Obr. 2.2.26: Funkcia z príkladu 2.2.15

**Veta 2.2.6.**

Množina  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  je oblasť.

Funkcia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  má na  $A$  ohraničené všetky parciálne derivácie  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$\Rightarrow$  Funkcia  $f$  je spojitá na množine  $A$ .

*Dôkaz.*

Nech  $\mathbf{a} \in A$  je ľubovoľný bod a okolie  $O(\mathbf{a})$  je také, že  $O(\mathbf{a}) \subset A$ .

Podľa predpokladov existuje  $\alpha > 0$  také, že  $|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}| \leq \alpha$  pre všetky  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Potom (veta 2.2.4) pre každé  $\mathbf{x} \in O(\mathbf{a})$  existujú  $\mathbf{c}_i \in O(\mathbf{a})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  také, že platí

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{c}_i)}{\partial x_i} (x_i - a_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(\mathbf{c}_i)}{\partial x_i} \right| \cdot |x_i - a_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \alpha |x_i - a_i| \leq \sum_{i=1}^n \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n = n\alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva spojitosť funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  a aj na množine  $A$ , pretože platí:

$$0 \leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| \leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} n\alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_n = n\alpha \cdot 0 = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} [f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})] = 0. \Rightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}). \blacksquare$$

**Veta 2.2.7.**

Množina  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  je oblasť, bod  $\mathbf{a} \in A$ .

Funkcia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  má v bode  $\mathbf{a}$  spojitú všetky parciálne derivácie  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$\Rightarrow$  Funkcia  $f$  je spojitá v bode  $\mathbf{a}$ .

*Dôkaz.*

Ak sú v danom bode  $\mathbf{a} \in D(f)$  spojitú všetky parciálne derivácie, potom musia byť v nejakom okolí ohraničené (veta 2.1.23). Potom (veta 2.2.6) je funkcia  $f$  spojitá v bode  $\mathbf{a}$ .

Tvrdenie vyplýva aj z vety 2.2.5 (diferencovateľnosť) a následne z vety 2.2.2 (spojitosť).  $\blacksquare$

<sup>26</sup>Vid' definícia diferencovateľnosti v bode a vzťah (2.6).

**Poznámka 2.2.9.**

Funkcia  $f$  z príkladu 2.2.5 (obr. 2.2.20) nie je v rozpore s tvrdeniami viet 2.2.5 a 2.2.6. Funkcia  $f$  je spojitá na  $R^2 - \{(t; 0), (0; t), t \in R\}$ , t. j. okrem súradnicových osí  $x$  a  $y$ .

- V bodoch  $(t; 0)$ ,  $t \neq 0$  existuje  $\frac{\partial f(t; 0)}{\partial x} = 0$ , ale neexistuje  $\frac{\partial f(t; 0)}{\partial y}$ .
- V bodoch  $(0; t)$ ,  $t \neq 0$  existuje  $\frac{\partial f(0; t)}{\partial y} = 0$ , ale neexistuje  $\frac{\partial f(0; t)}{\partial x}$ .
- V bode  $(0; 0)$  existujú obe  $\frac{\partial f(0; 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0; 0)}{\partial y} = 0$ , ktoré sú samozrejme ohraničené.

Ale neexistuje okolie  $O(0; 0)$ , kde by v každom bode existovali obe parciálne derivácie naraz.

**Príklad 2.2.15.**

Uvažujme funkciu  $f: R^2 \rightarrow R$  definovanú  $f(\mathbf{x}) = f(x; y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{pre } (x; y) \neq (0; 0), \\ 0 & \text{pre } (x; y) = (0; 0). \end{cases}$

Ukážeme, že  $f$  je diferencovateľná v bode  $\mathbf{a} = (0; 0)$ .

*Riešenie.*

Je zrejmé, že funkcia  $f$  je spojitá a diferencovateľná v každom bode  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  (obr. 2.2.26). Pre všetky  $\mathbf{x} = (x; y) \neq (0; 0) = \mathbf{a}$  platí

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1, \\ -1 &\leq \frac{-y^2}{x^2 + y^2} \leq 0. \end{aligned} \right\} \implies -1 \leq \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \leq 1. \implies -|xy| \leq \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} \leq |xy|.$$

Funkcia  $f$  je spojitá v bode  $\mathbf{a} = (0; 0)$ , pretože platí

$$0 = -\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} |xy| \leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} |xy| = 0, \quad \text{t. j. } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0 = f(\mathbf{a}).$$

Pre parciálne derivácie funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a} = (0; 0)$  platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x; 0) - f(0; 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0, \quad \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0; y) - f(0; 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

Pre parciálne derivácie funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} &= \frac{(3x^2 y - y^3) \cdot (x^2 + y^2) - (x^3 y - xy^3) \cdot (2x + 0)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^4 y - x^2 y^3 + 3x^2 y^3 - y^5 - 2x^4 y + 2x^2 y^3}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} \\ &= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} = \frac{y(x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 + 2x^2 y^2 - y^4 - y^4)}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} = y \left( 1 + \frac{2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right), \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} &= \frac{(x^3 - 3xy^2) \cdot (x^2 + y^2) - (x^3 y - xy^3) \cdot (0 + 2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 3x^3 y^2 + x^3 y^2 - 3xy^4 - 2x^3 y^2 + 2xy^4}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} \\ &= \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} = \frac{x(x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - 6x^2 y^2 - y^4 - y^4)}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} = x \left( 1 - \frac{3 \cdot 2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Tieto parciálne derivácie sú spojité v každom bode  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ . Ukážeme ich spojitosť v bode  $\mathbf{a}$ . Pre odhady výrazov v zátvorkách pre všetky  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{2x^2 y^2}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} \leq \frac{2x^2 y^2}{0 + 2x^2 y^2 + 0} = 1, \quad 0 \leq \frac{2y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{2y^4}{(0 + y^2)^2} = \frac{2y^4}{y^4} = 2. \\ \implies \left\{ \begin{aligned} -1 &= 1 + 0 - 2 \leq 1 + \frac{2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 1 + 1 - 0 = 2, \\ -4 &= 1 - 3 - 2 \leq 1 - \frac{3 \cdot 2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 1 + 0 - 0 = 1. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

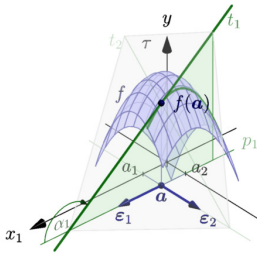
Pre odhady parciálnych derivácií  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y}$  z toho vyplýva

$$-|y| \leq \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} \leq 2|y|, \quad -4|x| \leq \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} \leq |x|.$$

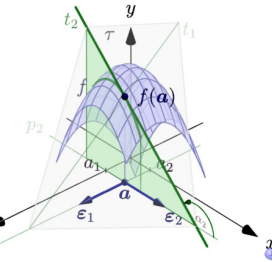
Pre limity parciálnych derivácií v bode  $\mathbf{a}$  potom platí

$$\begin{aligned} 0 &= -\lim_{y \rightarrow 0} |y| \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \leq \lim_{y \rightarrow 0} 2|y| = 0. &\implies \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial x}. \\ 0 &= -\lim_{x \rightarrow 0} 4|x| \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0. &\implies \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f(0;0)}{\partial y}. \end{aligned}$$

To znamená (veta 2.1.18), že sú parciálne derivácie  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y}$  spojité v bode  $\mathbf{a} = (0; 0)$  a na základe vety 2.2.5 je funkcia  $f$  diferencovateľná v bode  $\mathbf{a} = (0; 0)$ . ■



Obr. 2.2.27: Derivácia v smere  $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1; 0)$  (vľavo) a v smere  $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0; 1)$  (vpravo)



Obr. 2.2.28:

Derivácia v smere  $\mathbf{u}$



### 2.2.3 Derivácia v smere vektora

Zovšeobecňíme úvahy, ktoré nás viedli k parciálnym deriváciám. Pri konštrukcii parciálnej derivácie funkcie v danom bode podľa  $i$ -tej zložky sme fixovali všetky premenné okrem  $i$ -tej. Prakticky sme sa pohybovali iba v smere súradnicovej osi  $x_i$ .

Uvažujme reálnu funkciu  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  definovanú na oblasti  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  a bod<sup>27</sup>  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$ . Pre bázikové vektory  $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (na  $i$ -tom mieste je jednotka) pre  $t \in \mathbb{R}$  platí

$$(a_1; \dots; a_{i-1}; a_i + t; a_{i+1}; \dots; a_n) = \mathbf{a} + (0; \dots; 0; t; 0; \dots; 0) = \mathbf{a} + t\boldsymbol{\varepsilon}_i$$

a pre **parciálne derivácie**  $\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  na základe definície platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1; \dots; a_{i-1}; a_i + t; a_{i+1}; \dots; a_n) - f(a_1; \dots; a_{i-1}; a_i; a_{i+1}; \dots; a_n)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\boldsymbol{\varepsilon}_i) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

Nech  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n) \in \mathbb{R}^n$  je ľubovoľný vektor, potom (**smernou**) **deriváciou funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$  podľa vektora  $\mathbf{u}$**  nazývame (pokiaľ existuje) limitu

$$f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

<sup>27</sup>Oblasť je otvorená a súvislá množina, to znamená, že bod  $\mathbf{a}$  je vnútorný.

Z definície je zrejmé, že derivácia podľa vektora  $f'_u(\mathbf{a})$  je závislá aj od veľkosti vektora  $\mathbf{u}$ .

Pre dva lineárne závislé vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$ , t. j.  $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ , kde  $c \in R$ ,  $c \neq 0$ , platí

$$\begin{aligned} f'_v(\mathbf{a}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + tc\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c[f(\mathbf{a} + ct\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})]}{ct} \\ &= \left[ \begin{array}{l} \text{Subst. } h = ct \\ t \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \end{array} \right] = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h} = c \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = cf'_u(\mathbf{a}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Špeciálne, ak  $\mathbf{u} \in R^n$ ,  $\|\mathbf{u}\|_n = 1$ , potom smerovú deriváciu funkcie  $f$  podľa vektora  $\mathbf{u}$  nazývame **deriváciou funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  v smere vektora  $\mathbf{u}$**  a označujeme

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

### Poznámka 2.2.10.

Podmienka  $\|\mathbf{u}\|_n = 1$  znamená, že vektor  $\mathbf{u}$  má jednotkovú (normovanú) veľkosť a je veľmi dôležitá pri ďalšom použití derivácie v smere (vrátane určovania dotyčkovej roviny). Hodnoty derivácií v rôznych smeroch v danom bode môžeme potom porovnávať.

Ak vektor  $\mathbf{u} \in R^n$  nemá jednotkovú veľkosť, môžeme ho jednoducho normovať delením jeho veľkosťou  $\|\mathbf{u}\|_n$  a dostaneme jednotkový vektor  $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|_n$ .

### Poznámka 2.2.11.

Pre reálne funkcie jednej premennej  $f: R \rightarrow R$  derivácia v smere vektora praktický význam nemá, iba formálny. Existujú iba dva smery  $u = +1$ ,  $v = -u = -1$  a platí

$$\begin{aligned} f'_u(a) &= f'_{+1}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+1 \cdot t) - f(a)}{t} = f'(a), \quad f'_v(a) = f'_{-1}(a) = -f'_u(a) = -f'(a), \\ \text{resp. } f'_v(a) &= f'_{-1}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a-1 \cdot t) - f(a)}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a-t) - f(a)}{-t} \\ &= \left[ \begin{array}{l} \text{Subst. } h = -t \\ t \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \end{array} \right] = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = -f'(a). \end{aligned}$$

Geometrický význam smerovej derivácie podľa, resp. v smere vektora je podobný ako pri parciálnych deriváciách. Ilustrujeme ho na funkcii  $f: R^2 \rightarrow R$  v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2)$ .

Na obr. 2.2.27 je znázornená derivácia funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  v smere vektora  $\mathbf{e}_1 = (1; 0)$ , t. j. parciálna derivácia podľa  $x_1$ . Jej hodnota zodpovedá smernici dotyčnice  $t_1$ , to znamená hodnote  $\tan \alpha_1$  (viď poznámka 2.2.2).

Na obr. 2.2.28 je derivácia  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  v smere jednotkového vektora  $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$ , kde  $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ . Jej hodnota je  $\tan \alpha$  a predstavuje smernicu dotyčkovej priamky  $t$ , ktorej kolmý priemet na rovinu  $x_1x_2$  prechádza bodom  $\mathbf{a}$  a je rovnobežný s vektorom  $\mathbf{u}$ . T. j.  $\alpha$  je uhol, ktorý zvierajú dotyčnica  $t$  so svojim kolmým priemetom  $p$  do roviny  $x_1x_2$ .

### Príklad 2.2.16.

Funkcia  $f(\mathbf{x}) = f(x; y; z) = x + y^2 + z^3: R^3 \rightarrow R$  je diferencovateľná v každom bode svojho definičného oboru  $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z) \in R^3$ .

Nech  $\mathbf{u} = (u_x; u_y; u_z) \in R^3$ , potom  $\mathbf{a} + t\mathbf{u} = (a_x + tu_x; a_y + tu_y; a_z + tu_z)$  a platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{u}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a_x + tu_x) + (a_y + tu_y)^2 + (a_z + tu_z)^3 - (a_x + a_y^2 + a_z^3)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a_x + tu_x - a_x) + (a_y^2 + 2ta_yu_y + t^2u_y^2 - a_y^2) + (a_z^3 + 3ta_z^2u_z + 3t^2a_zu_z^2 + t^3u_z^3 - a_z^3)}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tu_x + (2ta_y u_y + t^2 u_y^2) + (3ta_z^2 u_z + 3t^2 a_z u_z^2 + t^3 u_z^3)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(u_x + 2a_y u_y + 3a_z^2 u_z) + t^2(u_y^2 + 3a_z u_z^2) + t^3 u_z^3}{t} = u_x + 2a_y u_y + 3a_z^2 u_z.
\end{aligned}$$

Takýto výpočet je vo všeobecnosti nepraktický avšakčinou veľmi prácny. Výhodnejší je výpočet podľa vzorca (2.15) odvodeného v nasledujúcom texte:

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot f'(\mathbf{a})^T = (u_x; u_y; u_z) \cdot (1; 2a_y; 3a_z^2)^T = u_x + 2a_y u_y + 3a_z^2 u_z. \blacksquare$$

Výpočet smerovej derivácie podľa, resp. v smere daného vektora môžeme previesť na deriváciu reálnej funkcie jednej reálnej premennej.

Uvažujme funkciu  $f: A \rightarrow R$ , kde  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť, bod  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$  a vektor  $\mathbf{u} \in R^n$ . Označme funkciu

$$\Phi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}): R \rightarrow R.$$

Definičný obor  $D(\Phi) = \{t, \mathbf{a} + t\mathbf{u} \in A\} \subset R$ , pričom bod  $0 \in D(\Phi)$  je vnútorný.<sup>28</sup> Pre  $t = 0$  platí  $\Phi(0) = f(\mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{u}) = f(\mathbf{a})$  a navyše pre všetky  $t \in D(\Phi)$ ,  $t \neq 0$  platí

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t - 0} = \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t}, \quad \text{t. j. } \Phi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}).$$

Ak je funkcia  $f$  diferencovateľná v bode  $\mathbf{a}$ , t. j. existuje

$$f'(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right),$$

potom pre zmenu funkcie  $f$  od bodu  $\mathbf{a}$  po bod  $\mathbf{a} + t\mathbf{u}$  platí vzťah (2.12)

$$\Delta f(\mathbf{a}, t\mathbf{u}) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a}) = t\mathbf{u} \cdot f'(\mathbf{a})^T + \omega(t\mathbf{u}) = t\mathbf{u} \cdot \text{grad}(\mathbf{a})^T + \omega(t\mathbf{u}),$$

príčom pre zvyšok  $\omega$  platí

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{t\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\omega(t\mathbf{u})}{\|t\mathbf{u}\|_n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(t\mathbf{u})}{\|t\mathbf{u}\|_n} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(t\mathbf{u})}{|t| \cdot \|\mathbf{u}\|_n} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|_n} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(t\mathbf{u})}{|t|}. \\
&\implies 0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(t\mathbf{u})}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(t\mathbf{u})}{t}.
\end{aligned}$$

Pre smerovú deriváciu  $f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$  podľa, resp. v smere vektora  $\mathbf{u}$  potom platí

$$\begin{aligned}
f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\mathbf{u} \cdot f'(\mathbf{a})^T + \omega(t\mathbf{u})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \mathbf{u} \cdot f'(\mathbf{a})^T + \frac{\omega(t\mathbf{u})}{t} \right] = \mathbf{u} \cdot f'(\mathbf{a})^T, \\
\text{t. j. } f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) &= \mathbf{u} \cdot \text{grad } f(\mathbf{a})^T = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} u_n = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}^T. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

### Poznámka 2.2.12.

*Funkcia  $\Phi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) = f(g(t))$ ,  $D(\Phi) \subset R$  je zložená funkcia, pričom vnútorná zložka je  $\mathbf{x} = g(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{u}: R \rightarrow R^n$  a vonkajšia zložka je  $f(\mathbf{x}): A \rightarrow R$ ,  $A \subset R^n$ .*

*Môžeme ju derivovať podľa vety 2.2.12 z nasledujúcej časti. Potom platí*

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= [f(g(t))]' = f'(\mathbf{x}) \cdot g'(t) = f'(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{a} + t\mathbf{u})' = f'(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}^T. \\
\implies f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) &= \Phi'(0) = f'(\mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}^T = f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}^T = \mathbf{u} \cdot f'(\mathbf{a})^T = \text{df}(\mathbf{a}, \mathbf{u}).
\end{aligned}$$

<sup>28</sup>Bod  $\mathbf{a}$  je vnútorný bod množiny  $A$  (otvorenej a súvislej), potom aj 0 je vnútorný bod  $D(\Phi)$ .

Keďže platí  $f'_u(\mathbf{a}) = \Phi'(0)$  a  $\Phi'(0)$  je obyčajnou deriváciou reálnej funkcie reálnej premennej v bode 0, platia pre smerovú deriváciu rovnaké pravidlá ako pre deriváciu reálnej funkcie reálnej premennej.

**Veta 2.2.8.**

Funkcie  $f, g: A \rightarrow R$  sú diferencovateľné v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$ , kde  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť, vektor  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n) \in R^n$  je ľubovoľný. Potom platí:

$$(f \pm g)'_u(\mathbf{a}) = f'_u(\mathbf{a}) \pm g'_u(\mathbf{a}), \quad (fg)'_u(\mathbf{a}) = f'_u(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot g'_u(\mathbf{a}).$$

Ak navyše  $g(\mathbf{a}) \neq 0$ , potom platí  $\left(\frac{f}{g}\right)'_u(\mathbf{a}) = \frac{f'_u(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot g'_u(\mathbf{a})}{g^2(\mathbf{a})}$ .

*Dôkaz.*

Ak označíme  $\Phi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}): R \rightarrow R$ ,  $\Psi(t) = g(\mathbf{a} + t\mathbf{u}): R \rightarrow R$ , potom platí:

$$\begin{aligned} (f \pm g)'_u(\mathbf{a}) &= (\Phi \pm \Psi)'(0) = \Phi'(0) \pm \Psi'(0) = f'_u(\mathbf{a}) \pm g'_u(\mathbf{a}), \\ (fg)'_u(\mathbf{a}) &= (\Phi\Psi)'(0) = \Phi'(0) \cdot \Psi(0) + \Phi(0) \cdot \Psi'(0) = f'_u(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot g'_u(\mathbf{a}), \\ (f/g)'_u(\mathbf{a}) &= (\Phi/\Psi)'(0) = \frac{\Phi'(0) \cdot \Psi(0) - \Phi(0) \cdot \Psi'(0)}{\Psi^2(0)} = \frac{f'_u(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot g'_u(\mathbf{a})}{g^2(\mathbf{a})} \quad \text{pre } g(\mathbf{a}) \neq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

**Veta 2.2.9.**

Funkcia  $f: A \rightarrow R$  je diferencovateľná v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$ , kde  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť, vektory  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n), \mathbf{v} = (v_1; v_2; \dots; v_n) \in R^n$ , číslo  $c \in R$ . Potom platí

$$f'_{\mathbf{0}_n}(\mathbf{a}) = 0, \quad f'_{c\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = (c\mathbf{u}) \cdot f'(\mathbf{a})^T = c \cdot f'_u(\mathbf{a}), \quad f'_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = f'_u(\mathbf{a}) + f'_v(\mathbf{a}).$$

Navyše pre vektory  $\varepsilon_1 = (1; 0; \dots; 0), \varepsilon_2 = (0; 1; \dots; 0), \dots, \varepsilon_n = (0; 0; \dots; 1)$  platí

$$f'_{\varepsilon_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}, \quad f'_u(\mathbf{a}) = u_1 \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} + \dots + u_n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n}.$$

*Dôkaz.*

Tvrdenia vyplývajú priamo z definície. Druhé tvrdenie vyplýva tiež zo vzťahu (2.14).

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{0}_n}(\mathbf{a}) &= \mathbf{0}_n \cdot f'(\mathbf{a})^T = (0; 0; \dots; 0) \cdot \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right)^T = 0. \\ f'_{c\mathbf{u}}(\mathbf{a}) &= (c\mathbf{u}) \cdot f'(\mathbf{a})^T = c \cdot \mathbf{u} \cdot f'(\mathbf{a})^T = c \cdot [\mathbf{u} \cdot f'(\mathbf{a})^T] = c \cdot f'_u(\mathbf{a}). \\ f'_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(\mathbf{a}) &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot f'(\mathbf{a})^T = \mathbf{u} \cdot f'(\mathbf{a})^T + \mathbf{v} \cdot f'(\mathbf{a})^T = f'_u(\mathbf{a}) + f'_v(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Pre  $i = 1, 2, \dots, n$  platí

$$f'_{\varepsilon_i}(\mathbf{a}) = \varepsilon_i \cdot f'(\mathbf{a})^T = (0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0) \cdot \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}; \dots; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}; \dots; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right)^T = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}.$$

Vektory  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  tvoria bázu lineárneho priestoru  $R^n$  a  $\mathbf{u} \in R^n$  sa dá zapísať ako ich lineárna kombinácia, t. j.  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n) = u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \dots + u_n\varepsilon_n$ . Potom platí:

$$\begin{aligned} f'_u(\mathbf{a}) &= f'_{u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \dots + u_n\varepsilon_n}(\mathbf{a}) = (u_1\varepsilon_1 + u_2\varepsilon_2 + \dots + u_n\varepsilon_n) \cdot f'(\mathbf{a})^T \\ &= u_1\varepsilon_1 f'(\mathbf{a})^T + u_2\varepsilon_2 f'(\mathbf{a})^T + \dots + u_n\varepsilon_n f'(\mathbf{a})^T = u_1 \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} + \dots + u_n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Posledné tvrdenie samozrejme vyplýva aj priamo zo vzťahu (2.15).  $\blacksquare$

Nech  $f: A \rightarrow R$ , pričom  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť,  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$ . Nech vektor  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n) \in R^n$ ,  $\|\mathbf{u}\|_n = 1$  je jednotkový, t. j.  $\|\mathbf{u}\|_n = 1$  a  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sú uhly, ktoré zvierá vektor  $\mathbf{u}$  so súradnicovými osami  $x_i$  (obr. 2.2.29). Potom platí

$$\mathbf{u} = (u_1; u_2; \dots; u_n) = (\cos \gamma_1; \cos \gamma_2; \dots; \cos \gamma_n), \quad \text{t. j. } u_i = \cos \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pre deriváciu funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  v smere vektora  $\mathbf{u}$  potom platí

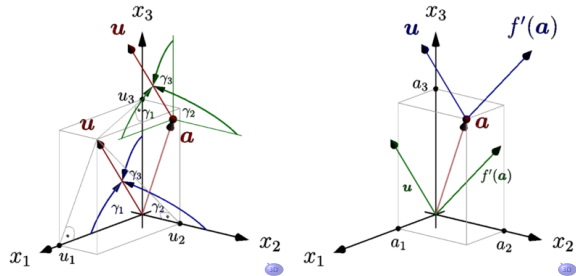
$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{u}} = f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = u_1 \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} + \dots + u_n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} \cos \gamma_1 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \cos \gamma_n,$$

pričom posledný vzťah predstavuje skalárny súčin vektorov  $f'(\mathbf{a})$  a  $\mathbf{u}$  známy z analytickej geometrie a  $\varphi$  je uhol (obr. 2.2.29), ktorý zvierajú vektory  $f'(\mathbf{a})$  a  $\mathbf{u}$ . Keďže  $\|\mathbf{u}\|_n = 1$ , potom pre deriváciu v smere dostávame

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{u}} = \|f'(\mathbf{a})\|_n \cdot \|\mathbf{u}\|_n \cdot \cos \varphi = \|f'(\mathbf{a})\|_n \cdot \cos \varphi.$$

Keďže  $f'(\mathbf{a})$  je pre dané  $\mathbf{a}$  konštanta, posledný výraz je maximálny pre  $\cos \varphi = 1$ , t. j. pre  $\varphi = 0$  a minimálny pre  $\cos \varphi = -1$ , t. j. pre  $\varphi = \pi$ . To znamená, ak sú vektory  $f'(\mathbf{a})$  a  $\mathbf{u}$  kolineárne (rovnobežné).

Derivácia funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  v smere je najväčšia v smere derivácie  $f'(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a})$ , t. j. v smere gradientu a najmenšia v opačnom smere. Takže  $f'(\mathbf{a})$  je vektor, ktorý udáva **smerník najväčšieho rastu (najväčšej kladnej zmeny)** funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  a  $-f'(\mathbf{a})$  je vektor, ktorý udáva **smerník najväčšieho poklesu** funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$ .



Obr. 2.2.29: Skalárny súčin  $(f'(\mathbf{a}), \mathbf{u}) = \|f'(\mathbf{a})\|_n \cdot \|\mathbf{u}\|_n \cdot \cos \varphi$  v priestore  $R^2$  (vľavo) a v priestore  $R^3$  (vpravo)



## 2.2.4 Výpočet derivácií

Pri reálnych funkciách jednej premennej sme dokázali derivovať súčet, súčin a podiel niekoľkých funkcií. Analogické pravidlá existujú aj pre reálne funkcie s viacerými premennými, t. j. pre funkcie  $R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$ . Keďže ani existencia všetkých parciálnych derivácií vo všeobecnosti nezaručuje diferencovateľnosť uvedených funkcií (poznámka 2.2.1), budeme predpokladať diferencovateľnosť zúčastnených funkcií.

Pri operáciách s deriváciami a diferenciálnymi funkciami  $f, g: R^n \rightarrow R$ ,  $n \in N$  je potrebné si uvedomiť, že  $f(\mathbf{a})$ ,  $g(\mathbf{a})$ ,  $df(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ ,  $dg(\mathbf{a}, \mathbf{h})$  sú reálne čísla a výrazy  $f'(\mathbf{a})$ ,  $g'(\mathbf{a})$  predstavujú  $n$ -rozmerné vektory.

Najprv uvedieme jednu z najdôležitejších nerovností v matematike, ktorú budeme potrebovať. Je známa ako **Cauchy-Schwarzova**, niekedy sa tiež nazýva **Buňakovského** a často sa používa v rôznych oblastiach matematiky, fyziky i technickej praxe.

**Veta 2.2.10 (Cauchy-Schwarzova nerovnosť).**

$V$  je lineárny priestor so skalárnym súčinom  $(\cdot, \cdot)$  a normou  $\|\cdot\|$ , vektory  $\alpha, \beta \in V$ .

$$\implies (\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta), \quad \text{t. j. } |(\alpha, \beta)| \leq \sqrt{(\alpha, \alpha)} \cdot \sqrt{(\beta, \beta)} = \|\alpha\| \cdot \|\beta\|.$$

*Dôkaz.*

- Pre  $\beta = \mathbf{0}$  platí nerovnosť triviálne, pretože  $(\alpha, \mathbf{0})^2 = 0$ ,  $(\alpha, \alpha) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (\alpha, \alpha) \cdot 0 = 0$ .
- Pre  $\beta \neq \mathbf{0}$  označme  $k = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\beta\|^2} = \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$ . Potom platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\alpha - k\beta\|^2 = (\alpha - k\beta, \alpha - k\beta) = (\alpha, \alpha - k\beta) - (k\beta, \alpha - k\beta) \\ &= (\alpha, \alpha) - (\alpha, k\beta) - (k\beta, \alpha) + (k\beta, k\beta) = (\alpha, \alpha) - k(\alpha, \beta) - k(\beta, \alpha) + k^2(\beta, \beta) \\ &= (\alpha, \alpha) - \frac{(\alpha, \beta) \cdot (\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} - \frac{(\beta, \alpha) \cdot (\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} + \frac{(\alpha, \beta)^2 \cdot (\beta, \beta)}{(\beta, \beta)^2} = (\alpha, \alpha) - \frac{(\alpha, \beta) \cdot (\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}. \end{aligned}$$

Pri poslednej úprave sme využili symetriu skalárneho súčtu  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ . Z toho vyplýva

$$0 \leq (\alpha, \alpha) \cdot (\alpha, \alpha) - (\alpha, \beta) \cdot (\alpha, \beta), \quad \text{t. j. } (\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha) \cdot (\beta, \beta). \blacksquare$$

**Dôsledok 2.2.10.a (Cauchy-Schwarzova nerovnosť v  $R^n$ ).**

Vektory  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n) \in R^n$ ,  $n \in N$ .

$$\begin{aligned} \implies |\mathbf{x}\mathbf{y}^T| &\leq \|\mathbf{x}\|_n \cdot \|\mathbf{y}\|_n, \\ \text{t. j. } \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}, \quad \text{resp. } \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_i \right]^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2. \end{aligned}$$

*Dôkaz.*

Ak označíme  $\varphi$  uhol, ktorý zvierajú vektory  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ , potom platí

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}\mathbf{y}^T| &= |(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\|_n \cdot \|\mathbf{y}\|_n \cdot |\cos \varphi| \leq \|\mathbf{x}\|_n \cdot \|\mathbf{y}\|_n. \\ \implies |\mathbf{x}\mathbf{y}^T| &\leq \|\mathbf{x}\|_n \cdot \|\mathbf{y}\|_n, \quad \text{resp. } (\mathbf{x}\mathbf{y}^T)^2 \leq \|\mathbf{x}\|_n^2 \cdot \|\mathbf{y}\|_n^2. \blacksquare \end{aligned}$$

**Veta 2.2.11.**

$A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť, číslo  $c \in R$ , funkcie  $f, g: A \rightarrow R$  sú diferencovateľné v bode  $\mathbf{a} \in A$ .

$\implies$  Funkcie  $cf$ ,  $f \pm g$ ,  $fg$  sú diferencovateľné v bode  $\mathbf{a} \in A$  a platí:

$$\begin{aligned} (cf)'(\mathbf{a}) &= cf'(\mathbf{a}), & d(cf)(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= c df(\mathbf{a}, \mathbf{h}), \\ (f \pm g)'(\mathbf{a}) &= f'(\mathbf{a}) \pm g'(\mathbf{a}), & d(f \pm g)(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \pm dg(\mathbf{a}, \mathbf{h}), \\ (fg)'(\mathbf{a}) &= f'(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot g'(\mathbf{a}), & d(fg)(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot dg(\mathbf{a}, \mathbf{h}). \end{aligned}$$

Ak navyše  $g(\mathbf{a}) \neq 0$ , potom je v bode  $\mathbf{a} \in A$  diferencovateľná funkcia  $f/g$  a platí:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\mathbf{a}) = \frac{f'(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot g'(\mathbf{a})}{g^2(\mathbf{a})}, \quad d\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{a}) = \frac{df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \cdot g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot dg(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{g^2(\mathbf{a})}.$$

*Dôkaz.*

Funkcie  $f, g$  sú podľa predpokladov diferencovateľné v bode  $\mathbf{a}$ , t. j. existujú derivácie  $f'(\mathbf{a})$ ,  $g'(\mathbf{a})$  a diferenciály  $df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T$ ,  $dg(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T$ , pričom platí

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = 0, \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{g(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - g(\mathbf{a}) - \mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = 0.$$

Označme zvyškové funkcie z čitateľov<sup>29</sup>  $\omega_f, \omega_g$ . Potom platí:

$$\begin{aligned} \omega_f(\mathbf{h}) &= f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T : R^n \rightarrow R, & \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\omega_f(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} &= 0, \\ \omega_g(\mathbf{h}) &= g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{a}) - \mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T : R^n \rightarrow R, & \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\omega_g(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} &= 0. \end{aligned}$$

- Prvý pár tvrdení pre funkciu  $cf$  platí triviálne, pretože

$$\begin{aligned} (cf)(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (cf)(\mathbf{a}) - c \cdot \mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T &= c[f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T] = c \cdot \omega_f(\mathbf{h}), \\ \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{(cf)(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - (cf)(\mathbf{a}) - c \cdot \mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T}{\|\mathbf{h}\|_n} &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{c \cdot \omega_f(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} = c \cdot \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\omega_f(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} = c \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

To znamená (veta 2.2.1), že  $(cf)'(\mathbf{a}) = c \cdot f'(\mathbf{a})$ ,  $d(cf)(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = c \cdot \mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T = c \cdot df(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ .

- Pre súčet a rozdiel funkcií  $f \pm g$  platí analogicky

$$\begin{aligned} (f \pm g)(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (f \pm g)(\mathbf{a}) - [\mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T \pm \mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T] &= \omega_f(\mathbf{h}) \pm \omega_g(\mathbf{h}), \\ \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{(f \pm g)(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - (f \pm g)(\mathbf{a}) - [\mathbf{h} \cdot f'(\mathbf{a})^T \pm \mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T]}{\|\mathbf{h}\|_n} &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\omega_f(\mathbf{h}) \pm \omega_g(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} = 0 \pm 0 = 0, \end{aligned}$$

t. j.  $(f \pm g)'(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a}) \pm g'(\mathbf{a})$ ,  $d(f \pm g)(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T \pm \mathbf{h} g'(\mathbf{a})^T = df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \pm dg(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ .

- Pre súčin funkcií  $fg$  platí

$$\begin{aligned} (fg)(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (fg)(\mathbf{a}) - \mathbf{h} \cdot [f'(\mathbf{a})^T \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot g'(\mathbf{a})^T] &= \\ &= [f(\mathbf{a}) + \mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T + \omega_f(\mathbf{h})] \cdot [g(\mathbf{a}) + \mathbf{h} g'(\mathbf{a})^T + \omega_g(\mathbf{h})] \\ &\quad - f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) - g(\mathbf{a})\mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T - f(\mathbf{a})\mathbf{h} g'(\mathbf{a})^T \\ &= f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})\mathbf{h} g'(\mathbf{a})^T + f(\mathbf{a})\omega_g(\mathbf{h}) + g(\mathbf{a})\mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T + \mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T \cdot \mathbf{h} g'(\mathbf{a})^T \\ &\quad + \omega_g(\mathbf{h})\mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T + g(\mathbf{a})\omega_f(\mathbf{h}) + \omega_f(\mathbf{h})\mathbf{h} g'(\mathbf{a})^T + \omega_f(\mathbf{h})\omega_g(\mathbf{h}) \\ &\quad - f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) - g(\mathbf{a})\mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T - f(\mathbf{a})\mathbf{h} g'(\mathbf{a})^T \\ &= f(\mathbf{a})\omega_g(\mathbf{h}) + \mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T \cdot \mathbf{h} g'(\mathbf{a})^T + \omega_g(\mathbf{h})\mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T \\ &\quad + g(\mathbf{a})\omega_f(\mathbf{h}) + \omega_f(\mathbf{h})\mathbf{h} g'(\mathbf{a})^T + \omega_f(\mathbf{h})\omega_g(\mathbf{h}) \\ &= f(\mathbf{a})\omega_g(\mathbf{h}) + g(\mathbf{a})\omega_f(\mathbf{h}) + [\mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T + \omega_f(\mathbf{h})] \cdot [\mathbf{h} g'(\mathbf{a})^T + \omega_g(\mathbf{h})] = \omega(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Kvôli prehľadnosti sme posledný výraz označili  $\omega(\mathbf{h})$ . Je zrejmé, že  $\omega(\mathbf{h}) : R^n \rightarrow R$ .

Funkcie  $f, g, f', g'$  sú v bode  $\mathbf{a}$  konečné, t. j. existuje  $\alpha > 0$  také, že platí

$$|f(\mathbf{a})| \leq \alpha, \quad |g(\mathbf{a})| \leq \alpha, \quad \|f'(\mathbf{a})\|_n \leq \alpha, \quad \|g'(\mathbf{a})\|_n \leq \alpha.$$

Na základe Cauchy-Schwarzovej nerovnosti (dôsledok 2.2.10.a) platí

$$|\mathbf{h} f'(\mathbf{a})^T| \leq \|\mathbf{h}\|_n \cdot \|f'(\mathbf{a})\|_n, \quad |\mathbf{h} g'(\mathbf{a})^T| \leq \|\mathbf{h}\|_n \cdot \|g'(\mathbf{a})\|_n.$$

<sup>29</sup>Vid' vzťahy (2.12) a (2.13).

Najprv ohraničíme výraz  $\omega(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|_n$ . Platí

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left| \frac{\omega(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} \right| = \frac{|\omega(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_n} = \frac{|f(\mathbf{a})\omega_g(\mathbf{h}) + g(\mathbf{a})\omega_f(\mathbf{h}) + [\mathbf{h}f'(\mathbf{a})^T + \omega_f(\mathbf{h})] \cdot [\mathbf{h}g'(\mathbf{a})^T + \omega_g(\mathbf{h})]|}{\|\mathbf{h}\|_n} \\
 &\leq \frac{|f(\mathbf{a})\omega_g(\mathbf{h})| + |g(\mathbf{a})\omega_f(\mathbf{h})| + [|\mathbf{h}f'(\mathbf{a})^T| + |\omega_f(\mathbf{h})|] \cdot [|\mathbf{h}g'(\mathbf{a})^T| + |\omega_g(\mathbf{h})|]}{\|\mathbf{h}\|_n} \\
 &\leq \frac{|f(\mathbf{a})| \cdot |\omega_g(\mathbf{h})| + |g(\mathbf{a})| \cdot |\omega_f(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_n} + \frac{[\|\mathbf{h}\|_n \cdot \|f'(\mathbf{a})\|_n + |\omega_f(\mathbf{h})|] \cdot [\|\mathbf{h}\|_n \cdot \|g'(\mathbf{a})\|_n + |\omega_g(\mathbf{h})|]}{\|\mathbf{h}\|_n} \\
 &\leq \frac{\alpha |\omega_g(\mathbf{h})| + \alpha |\omega_f(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_n} + \frac{[\alpha \|\mathbf{h}\|_n + |\omega_f(\mathbf{h})|] \cdot [\alpha \|\mathbf{h}\|_n + |\omega_g(\mathbf{h})|]}{\|\mathbf{h}\|_n \cdot \|\mathbf{h}\|_n} \cdot \|\mathbf{h}\|_n \\
 &= \alpha \frac{|\omega_g(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_n} + \alpha \frac{|\omega_f(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_n} + \left[ \alpha + \frac{|\omega_f(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_n} \right] \cdot \left[ \alpha + \frac{|\omega_g(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_n} \right] \cdot \|\mathbf{h}\|_n.
 \end{aligned}$$

Pre limitu potom platí

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left| \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\omega(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} \right| = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \left| \frac{\omega(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} \right| \\
 &\leq \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \left( \alpha \frac{|\omega_g(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_n} + \alpha \frac{|\omega_f(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_n} + \left[ \alpha + \frac{|\omega_f(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_n} \right] \cdot \left[ \alpha + \frac{|\omega_g(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_n} \right] \cdot \|\mathbf{h}\|_n \right) \\
 &= \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + [\alpha + 0] \cdot [\alpha + 0] \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že platí

$$0 = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\omega(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{(fg)(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - (fg)(\mathbf{a}) - \mathbf{h} \cdot [f'(\mathbf{a})^T \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot g'(\mathbf{a})^T]}{\|\mathbf{h}\|_n}.$$

To znamená, že platia tvrdenia vety pre deriváciu súčinu funkcií  $fg$ .

• Tvrdenie pre podiel funkcií dokážeme pomocou súčinu. Najprv dokážeme vzorce

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(\mathbf{a}) = -\frac{g'(\mathbf{a})}{g^2(\mathbf{a})}, \quad d\left(\frac{1}{g}\right)(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = -\frac{dg(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{g^2(\mathbf{a})}. \quad (2.16)$$

Pre funkciu  $\frac{1}{g}$  platí

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{g}\right)(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \left(\frac{1}{g}\right)(\mathbf{a}) &= \frac{1}{g(\mathbf{a})} - \frac{1}{g(\mathbf{a} + \mathbf{h})} = \frac{g(\mathbf{a}) - g(\mathbf{a} + \mathbf{h})}{g(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a} + \mathbf{h})} \\
 &= \frac{g(\mathbf{a}) - [g(\mathbf{a}) + \mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T + \omega_g(\mathbf{h})]}{g(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a} + \mathbf{h})} = -\frac{\mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T}{g(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a} + \mathbf{h})} - \frac{\omega_g(\mathbf{h})}{g(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a} + \mathbf{h})}.
 \end{aligned}$$

Limita  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T}{\|\mathbf{h}\|_n}$  existuje a je konečná,<sup>30</sup> označme  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{\mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T}{\|\mathbf{h}\|_n} = s$ . Potom platí

$$\begin{aligned}
 \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{(\frac{1}{g})(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (\frac{1}{g})(\mathbf{a}) - \mathbf{h} \cdot \left[-\frac{g'(\mathbf{a})^T}{g^2(\mathbf{a})}\right]}{\|\mathbf{h}\|_n} &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \frac{-\frac{\mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T}{g(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a} + \mathbf{h})} - \frac{\omega_g(\mathbf{h})}{g(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a} + \mathbf{h})} + \frac{\mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T}{g^2(\mathbf{a})}}{\|\mathbf{h}\|_n} \\
 &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n} \left( -\frac{1}{g(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a} + \mathbf{h})} \cdot \frac{\mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T}{\|\mathbf{h}\|_n} - \frac{1}{g(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a} + \mathbf{h})} \cdot \frac{\omega_g(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_n} + \frac{1}{g^2(\mathbf{a})} \cdot \frac{\mathbf{h} \cdot g'(\mathbf{a})^T}{\|\mathbf{h}\|_n} \right) \\
 &= -\frac{1}{g(\mathbf{a})^2} \cdot s - \frac{1}{g(\mathbf{a})^2} \cdot 0 + \frac{1}{g(\mathbf{a})^2} \cdot s = 0.
 \end{aligned}$$

To znamená, že platia vzťahy (2.16). Pre podiel  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ , t. j. súčin  $f \cdot \frac{1}{g}$ , potom platí

$$(f \cdot \frac{1}{g})'(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a}) \frac{1}{g(\mathbf{a})} + f(\mathbf{a}) \left(\frac{1}{g}\right)'(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a}) \frac{1}{g(\mathbf{a})} - f(\mathbf{a}) \frac{g'(\mathbf{a})}{g^2(\mathbf{a})} = \frac{f'(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a})g'(\mathbf{a})}{g^2(\mathbf{a})},$$

$$d(f \cdot \frac{1}{g})'(\mathbf{a})(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \frac{1}{g(\mathbf{a})} + f(\mathbf{a}) d\left(\frac{1}{g}\right)(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \frac{df(\mathbf{a}, \mathbf{h})g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) dg(\mathbf{a}, \mathbf{h})}{g^2(\mathbf{a})}. \blacksquare$$

<sup>30</sup>Vzťah (2.7) z dôkazu vety 2.2.1.

**Príklad 2.2.17.**

Uvažujme funkcie  $f, g: R^2 \rightarrow R$  definované vzťahmi

$$f(\mathbf{x}) = f(x; y) = x^2 + y^2, \quad g(\mathbf{x}) = g(x; y) = x^2 - y^2.$$

Funkcie  $f, g$  sú diferencovateľné v každom bode  $\mathbf{x} = (x; y) \in R^2$  a platí:

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= (x^2 + y^2)' = (2x; 2y), & g'(\mathbf{x}) &= (x^2 - y^2)' = (2x; -2y), \\ (f + g)'(\mathbf{x}) &= [(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2)]' = (2x^2)' = (4x; 0), \\ (fg)'(\mathbf{x}) &= [(x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2)]' = (x^4 - y^4)' = (4x^3; -4y^3), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(\mathbf{x}) &= \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}\right)' = \left(\frac{2x(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)2x}{(x^2 - y^2)^2}; \frac{2y(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2) \cdot (-2y)}{(x^2 - y^2)^2}\right) \\ &= \left(\frac{-4xy^2}{(x^2 - y^2)^2}; \frac{4x^2y}{(x^2 - y^2)^2}\right) = \frac{1}{(x^2 - y^2)^2} \cdot (-4xy^2; 4x^2y) \quad \text{pre } x \neq y. \end{aligned}$$

Ak použijeme vetu 2.2.11, potom platí:

$$\begin{aligned} (f + g)'(\mathbf{x}) &= f'(\mathbf{x}) + g'(\mathbf{x}) = (2x; 2y) + (2x; -2y) = (4x; 0), \\ (fg)'(\mathbf{x}) &= f'(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot g'(\mathbf{x}) = (2x; 2y) \cdot (x^2 - y^2) + (x^2 + y^2) \cdot (2x; -2y) \\ &= (2x^3 - 2xy^2; 2x^2y - 2y^3) + (2x^3 + 2xy^2; -2x^2y - 2y^3) = (4x^3; -4y^3), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(\mathbf{x}) &= \frac{f'(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot g'(\mathbf{x})}{g^2(\mathbf{x})} = \frac{(2x; 2y) \cdot (x^2 - y^2) - (x^2 + y^2) \cdot (2x; -2y)}{(x^2 - y^2)^2} \\ &= \frac{(2x^3 - 2xy^2; 2x^2y - 2y^3) - (2x^3 + 2xy^2; -2x^2y - 2y^3)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{(-4xy^2; 4x^2y)}{(x^2 - y^2)^2} \quad \text{pre } x \neq y. \blacksquare \end{aligned}$$

Ak počítame parciálne derivácie zloženej funkcie viacerých premenných, prakticky derivujeme zloženú reálnu funkciu jednej premennej. Jednotlivé zložky derivujeme samostatne a ostatné premenné považujeme za konštantné.

Pri riešení reálnych problémov sa často vyskytujú implicitné rovnice, v ktorých vystupujú vektorové funkcie a mnohokrát implicitne a v derivovanom tvare. Vzťahy, ktoré vyplývajú z nasledujúcej vety, majú veľký význam pri riešení takýchto rovníc, pri ich transformáciách na jednoduchšie a ľahšie riešiteľné tvary. Vetu uvádzame bez dôkazu, myšlienka dôkazu je podobná ako pri vete 2.2.11 (viď napr. [8]).

**Veta 2.2.12 (O derivovaní zloženej funkcie).**

Funkcia  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x}): A \rightarrow R^m$  je diferencovateľná v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$ , funkcia  $\mathbf{y} = g(\mathbf{u}): B \rightarrow R^l$  je diferencovateľná v bode  $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} = (b_1; b_2; \dots; b_m) \in B$ , pričom množina  $A \subset R^n$  je oblasť, množina  $B \subset R^m$  je otvorená,  $f(A) \subset B$ ,  $n, m, l \in N$ .

$\implies$  Zložená funkcia  $F = g(f): A \rightarrow R^l$  je diferencovateľná v bode  $\mathbf{a}$  a platí

$$F'(\mathbf{a}) = [g(f)]'(\mathbf{a}) = g'(f(\mathbf{a})) \cdot f'(\mathbf{a}) = g'(\mathbf{b}) \cdot f'(\mathbf{a}).$$

Špeciálne pre  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$  platí

$$\frac{\partial F_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = \frac{\partial g_j(\mathbf{b})}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g_j(\mathbf{b})}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_j(\mathbf{b})}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial f_k(\mathbf{a})}{\partial x_i}.$$

Derivovanie zloženej funkcie  $F = g(f): R^n \rightarrow R^l$  formálne predstavuje násobenie matíc  $g'(\mathbf{b})$  a  $f'(\mathbf{a})$ . Keďže  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $g: R^m \rightarrow R^l$ , potom

$$F'(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial F_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right)_{l \times n}, \quad g'(\mathbf{b}) = \left( \frac{\partial g_j(\mathbf{b})}{\partial u_i} \right)_{l \times m}, \quad f'(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right)_{m \times n}.$$

Deriváciu  $F'(\mathbf{a}) = g'(\mathbf{b}) \cdot f'(\mathbf{a})$  môžeme pomocou matíc prepísať

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\mathbf{a})}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\mathbf{a})}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_l(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_l(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_l(\mathbf{a})}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{b})}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1(\mathbf{b})}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_1(\mathbf{b})}{\partial u_m} \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{b})}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2(\mathbf{b})}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_2(\mathbf{b})}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_l(\mathbf{b})}{\partial u_1} & \frac{\partial g_l(\mathbf{b})}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_l(\mathbf{b})}{\partial u_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$\text{t. j.} \quad \left( \frac{\partial F_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right)_{l \times n} = \left( \frac{\partial g_j(\mathbf{b})}{\partial u_1} \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g_j(\mathbf{b})}{\partial u_m} \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right)_{l \times n} = \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_j(\mathbf{b})}{\partial u_k} \frac{\partial f_k(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right)_{l \times n}.$$

### Poznámka 2.2.13.

*Diferencovateľnosti funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  a funkcie  $g$  v bode  $\mathbf{b}$  môžeme nahradiť silnejšími predpokladmi – spojitostou všetkých ich parciálnych derivácií v daných bodoch.*

*Potom na základe vety 2.2.5 je funkcia  $f$  diferencovateľná v bode  $\mathbf{a}$ , funkcia  $g$  je diferencovateľná v bode  $\mathbf{b}$  a môžeme použiť vetu 2.2.12. Zo spojitosti všetkých parciálnych derivácií vyplýva v nejakých okoliach  $O(\mathbf{a})$ , resp.  $O(\mathbf{b})$  ohraničenosť funkcií  $f$  a  $g$  (veta 2.1.23) a tiež spojitosť funkcií  $f$  a  $g$  (veta 2.2.6) a potom aj spojitosť zloženej funkcie  $F$  (veta 2.1.21).*

### Príklad 2.2.18.

Uvažujme funkciu  $f(x; y) = (f_1(x; y); f_2(x; y)) = (\ln(x^2 + y^2); \arctg(x^2 + 1)): R^2 \rightarrow R^2$ .

Funkcie  $f_1(x; y) = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $f_2(x; y) = \arctg(x^2 + 1): R^2 \rightarrow R$  sú zložené a platí

$$f_1(x; y) = \psi_1(\varphi_1(x; y)), \quad \text{kde } \psi_1(t) = \ln(t): R \rightarrow R, \quad \varphi_1(x; y) = x^2 + y^2: R^2 \rightarrow R,$$

$$f_2(x; y) = \psi_2(\varphi_2(x; y)), \quad \text{kde } \psi_2(t) = \arctg(t): R \rightarrow R, \quad \varphi_2(x; y) = x^2 + 1: R^2 \rightarrow R.$$

Funkcie  $f_1, f_2$  môžeme derivovať podľa predchádzajúcej vety:

$$\begin{aligned} f'_1(x; y) &= \psi'_1(\varphi_1(x; y)) \cdot \varphi'_1(x; y) = \frac{1}{\varphi_1(x; y)} \cdot \left( \frac{\partial \varphi_1(x; y)}{\partial x}; \frac{\partial \varphi_1(x; y)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2x; 2y) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2}; \frac{2y}{x^2 + y^2} \right), \\ f'_2(x; y) &= \psi'_2(\varphi_2(x; y)) \cdot \varphi'_2(x; y) = \frac{1}{1 + \varphi_2^2(x; y)} \cdot \left( \frac{\partial \varphi_2(x; y)}{\partial x}; \frac{\partial \varphi_2(x; y)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{1 + (x^2 + 1)^2} \cdot (2x; 0) = \left( \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}; 0 \right). \end{aligned}$$

Je to nepraktické, preto funkciu  $f$  derivujeme priamo

$$f'(x; y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x; y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x; y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x; y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x; y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial x} & \frac{\partial \ln(x^2 + y^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial \arctg(x^2 + 1)}{\partial x} & \frac{\partial \arctg(x^2 + 1)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2 + y^2} & \frac{2y}{x^2 + y^2} \\ \frac{2x}{1 + (x^2 + 1)^2} & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Nezávislé premenné funkcií sa v priestoroch  $R^2$  a  $R^3$  zvyknú označovať symbolmi  $x, y$ , resp.  $x, y, z$ . Parciálne derivácie funkcií  $f(x; y): R^2 \rightarrow R$ , resp.  $f(x; y; z): R^3 \rightarrow R$  v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$  sa často (hlavne vo fyzike a praxi) označujú

$$f_x(\mathbf{a}) = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}, \quad f_y(\mathbf{a}) = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}, \quad f_z(\mathbf{a}) = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial z}.$$

Tieto označenia sú prehľadnejšie, preto ich v nasledujúcom texte budeme preferovať.

### Poznámka 2.2.14.

*Niekedy sa parciálne derivácie označujú aj symbolmi  $f'_x(\mathbf{a})$ ,  $f'_y(\mathbf{a})$ , resp.  $f'_z(\mathbf{a})$ .*

### Príklad 2.2.19.

Nech  $g(t): R \rightarrow R$  je diferencovateľná funkcia v  $R$ , označme  $F(x; y) = g(x^2 + y^2): R^2 \rightarrow R$ . Funkcia  $f(x; y) = x^2 + y^2: R^2 \rightarrow R$  je diferencovateľná v  $R^2$ . Potom tiež zložená funkcia  $F = g(f)$  je diferencovateľná v  $R^2$  a pre všetky  $(x; y) \in R^2$  platí

$$\begin{aligned} f'(x; y) &= (f_x(x; y); f_y(x; y)) = (2x; 2y), \\ F'(x; y) &= (F_x(x; y); F_y(x; y)) = [g(f(x; y))]' = g'(x^2 + y^2) \cdot f'(x; y) \\ &= g'(x^2 + y^2) \cdot (2x; 2y) = (2x \cdot g'(x^2 + y^2); 2y \cdot g'(x^2 + y^2)). \end{aligned}$$

- Špeciálne pre  $g(t) = \ln t: (0; \infty) \rightarrow R$  platí

$$\begin{aligned} F(x; y) &= \ln(x^2 + y^2): R^2 - \{(0; 0)\} \rightarrow R, \quad g'(t) = [\ln t]' = \frac{1}{t}, \\ g'(x^2 + y^2) &= \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad F'(x; y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2x; 2y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}; \frac{2y}{x^2 + y^2}\right). \end{aligned}$$

Rovnaký výsledok dostaneme aj priamym derivovaním  $[\ln(x^2 + y^2)]' = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}; \frac{2y}{x^2 + y^2}\right)$ . ■

### Príklad 2.2.20.

Nech  $f(x; y): R^2 \rightarrow R$  je diferencovateľná funkcia v  $R^2$ .

Uvažujme transformáciu premenných  $(x; y) = g(u; v)$  určenú diferencovateľnými funkciami

$$x = \alpha(u; v), \quad y = \beta(u; v): R^2 \rightarrow R, \quad \text{t. j. } (x; y) = g(u; v) = (\alpha(u; v); \beta(u; v)): R^2 \rightarrow R^2.$$

Funkcia  $f$  má v nových premenných vyjadrenie  $F = f(g)$ , t. j.

$$F(u; v) = f(g(u; v)) = f(\alpha(u; v); \beta(u; v)): R^2 \rightarrow R.$$

Pre deriváciu funkcie  $F$  platí

$$\begin{aligned} F'(u; v) &= (F_u(u; v); F_v(u; v)) = [f(g(u; v))]' = f'(\alpha(u; v); \beta(u; v)) \cdot g'(u; v) \\ &= \left(f_x(\alpha(u; v); \beta(u; v)); f_y(\alpha(u; v); \beta(u; v))\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_u(u; v) & \alpha_v(u; v) \\ \beta_u(u; v) & \beta_v(u; v) \end{pmatrix} \\ &= \left(f_x(\alpha(u; v); \beta(u; v)) \cdot \alpha_u(u; v) + f_y(\alpha(u; v); \beta(u; v)) \cdot \beta_u(u; v); \right. \\ &\quad \left. f_x(\alpha(u; v); \beta(u; v)) \cdot \alpha_v(u; v) + f_y(\alpha(u; v); \beta(u; v)) \cdot \beta_v(u; v)\right). \end{aligned}$$

Kvôli prehľadnosti prepíšeme uvedené vzťahy bez premenných

$$F' = (F_u; F_v) = [f(g)]' = f' \cdot g' = (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} = (f_x \alpha_u + f_y \beta_u; f_x \alpha_v + f_y \beta_v).$$

- Špeciálne, ak  $F(u; v) = f(x; y) = f(u^2 + v^2; u^2 - v^2): R^2 \rightarrow R$ , potom platí<sup>31</sup>

$$F' = (F_u; F_v) = (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} = (2uf_x + 2vf_y; 2vf_x - 2vf_y).$$

- Pri prevode do polárnych súradníc (príklady 2.1.3, 2.2.7)  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,

$$\text{t. j. } (x; y) = \Psi(\rho; \varphi) = (\alpha(\rho; \varphi); \beta(\rho; \varphi)) = (\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi): \langle 0; \infty \rangle \times R \rightarrow R^2$$

pre deriváciu funkcie  $F(\rho; \varphi) = f(\Psi(\rho; \varphi)) = f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi): \langle 0; \infty \rangle \times R \rightarrow R$  platí

$$\begin{aligned} F'(\rho; \varphi) &= (F_\rho; F_\varphi) = (f_x; f_y) \cdot \Psi' = (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_\rho & \alpha_\varphi \\ \beta_\rho & \beta_\varphi \end{pmatrix} \\ &= (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} = (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi; -\rho f_x \sin \varphi + \rho f_y \cos \varphi). \end{aligned}$$

- Špeciálne pre funkciu  $f(x; y) = \frac{x+y}{x-y}$ ,  $(x; y) \in R^2$ ,  $x \neq y$  má platiť  $\rho \cos \varphi \neq \rho \sin \varphi$ . To znamená  $(\rho; \varphi) \in \langle 0; \infty \rangle \times R$ ,  $\varphi \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in Z$ ,

$$\begin{aligned} F(\rho; \varphi) &= f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) = \frac{\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi}, \\ f'(x; y) &= \left( \frac{x+y}{x-y} \right)' = (f_x(x; y); f_y(x; y)) = \left( \frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2}; \frac{x-y+(x+y)}{(x-y)^2} \right) = \frac{2}{(x-y)^2} \cdot (-y; x), \\ f'(\Psi(\rho; \varphi)) &= \frac{2(-\rho \sin \varphi; \rho \cos \varphi)}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} = \frac{2(-\sin \varphi; \cos \varphi)}{\rho^2(\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi)} = \frac{2(-\sin \varphi; \cos \varphi)}{\rho(1 - \sin 2\varphi)}. \end{aligned}$$

Pre deriváciu  $F$  potom platí  $F' = (F_\rho; F_\varphi) = (f_x; f_y) \cdot \Psi'$ , t. j.

$$\begin{aligned} F'(\rho; \varphi) &= (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} = \frac{2(-\sin \varphi; \cos \varphi)}{\rho(1 - \sin 2\varphi)} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\rho(1 - \sin 2\varphi)} \cdot (0; \rho \sin^2 \varphi + \rho \cos^2 \varphi) = \frac{2}{\rho(1 - \sin 2\varphi)} \cdot (0; \rho) = (0; \frac{2}{1 - \sin 2\varphi}). \end{aligned}$$

Priamy výpočet je najjednoduchší:

$$\begin{aligned} F'(\rho; \varphi) &= \left( \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} \right)' = \left( 0; \frac{(-\sin \varphi + \cos \varphi) \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi) - (\cos \varphi + \sin \varphi) \cdot (-\sin \varphi - \cos \varphi)}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} \right) \\ &= \left( 0; \frac{(-2 \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - (-2 \cos \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi} \right) = \left( 0; \frac{2}{1 - \sin 2\varphi} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

### 2.2.5 Diferencovateľnosť a parciálne derivácie vyšších rádov

Deriváciu, diferenciál i parciálne derivácie, ktoré sme zaviedli v predchádzajúcich častiach, tiež nazývame prvého rádu. Ak funkcie derivujeme ďalej, potom ich nazývame analogicky ako pri reálnej funkcii jednej premennej (ma1: 4.2.3 Derivácia a diferenciál vyšších rádov) derivácia, diferenciál, parciálne derivácie druhého, tretieho, resp. vyšších rádov.

<sup>31</sup>Funkcie  $x = \alpha(u; v) = u^2 + v^2$ ,  $y = \beta(u; v) = u^2 - v^2$  sú diferencovateľné v  $R^2$ .

Kvôli prehľadnosti budeme uvažovať reálne funkcie  $f: R^n \rightarrow R, n \in N$ . Pri vektorových funkciách  $f = (f_1; f_2; \dots; f_m): R^n \rightarrow R^m, n, m \in N$  aplikujeme nasledujúce definície a tvrdenia na každú zložku  $f_1, \dots, f_m$  samostatne.

Uvažujme funkciu  $y = f(x): A \rightarrow R$ , kde  $A \subset R^n, n \in N$  je oblasť. Nech  $A_1 \subset A$  je oblasť taká, že pre všetky  $a \in A_1$  existujú parciálne derivácie  $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n$ . Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: A_1 \rightarrow R$$

je funkcia a (pokiaľ existuje) môžeme vypočítať v bode  $a \in A_1$  jej parciálnu deriváciu podľa  $j$ -tej premennej,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , ktorú označujeme

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i^2} \quad \text{pre } i = j$$

a nazývame **druhá parciálna derivácia (druhého rádu)** funkcie  $f$  **podľa  $i$ -tej a  $j$ -tej premennej**, resp. **podľa  $x_i$  a  $x_j$** . Ak  $i \neq j$ , potom ju nazývame **zmiešaná**.

Zmiešané parciálne derivácie podľa  $x_i$  a  $x_j$  sa nazývajú **zameniteľné**, ak platí rovnosť

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Takýmto spôsobom môžeme pokračovať a definovať pre funkciu  $f$  parciálne derivácie ostatných (vyšších) rádo. Ak  $k \in N, k \neq 1$  a existujú parciálne derivácie rádu  $k-1$  podľa premenných  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k-1}}$ , kde  $i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \in \{1, 2, \dots, n\}$ , potom (pokiaľ existuje)

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^{k-1} f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \right) = \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_k} \quad \text{pre } x_{i_k}, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

sa nazýva  **$k$ -ta parciálna derivácia (rádu  $k$ )** funkcie  $f$  **podľa  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}$** .

Ak sú aspoň dve z premenných podľa ktorých derivujeme rôzne, parciálna derivácia sa nazýva **zmiešaná**. Ak pri danej  $k$ -tej parciálnej derivácii zmeníme poradie premenných, podľa ktorých derivujeme a pri ľubovoľnej zmene tohto poradia dostaneme rovnakú hodnotu, potom tieto parciálne derivácie nazývame **zameniteľné**.

### Poznámka 2.2.15.

*Musíme si uvedomiť, že maximálny počet parciálnych derivácií funkcie  $f: R^n \rightarrow R$  rastie geometricky s rádom derivácie. Prvých parciálnych derivácií môže existovať  $n$ , druhých  $n^2$  a parciálnych derivácií rádu  $k \in N$  môže existovať  $n^k$ , pokiaľ existujú všetky.*

Parciálne derivácie vyšších rádo funkcií  $f(x; y): R^2 \rightarrow R$ , resp.  $f(x; y; z): R^3 \rightarrow R$  v bode  $a \in D(f)$  môžeme tiež označovať<sup>32</sup>

$$f_{xx}(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2}, f_{xy}(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y}, f_{yx}(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y \partial x}, f_{yz}(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y \partial z},$$

$$f_{yxz}(a) = \frac{\partial^3 f(a)}{\partial y \partial x \partial z}, f_{yxx}(a) = \frac{\partial^3 f(a)}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 f(a)}{\partial y \partial x^2}, f_{xxx}(a) = \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x^3}, \dots$$

### Príklad 2.2.21.

a) Funkcia  $f(x) = f(x_1; x_2) = (f_1(x_1; x_2); f_2(x_1; x_2)) = (x_1^2 + x_2^2; x_1^2 - x_2^2): R^2 \rightarrow R^2$ .

Pre všetky  $x = (x_1; x_2) \in R^2$  existujú všetky parciálne derivácie všetkých rádo a platí

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} = 2x_2, \quad \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_2^2} = 2,$$

$$\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} = -2x_2, \quad \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2^2} = -2.$$

<sup>32</sup>Analogicky tiež označenia v zmysle poznámky 2.2.14:  $f''_{xx}(a), f''_{xy}(a), \dots, f''''_{xyxz}(a) = f^{(4)}_{yxyz}(a), \dots$

Keďže všetky parciálne derivácie druhého rádu sú konštanty, všetky ostatné parciálne derivácie tretieho a vyšších rádoov sú nulové.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1^3} &= \frac{\partial^3 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \dots = \frac{\partial^4 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1^4} = \frac{\partial^4 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1^3 \partial x_2} = \dots = \frac{\partial^5 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1^5} = \dots = 0, \\ \frac{\partial^3 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1^3} &= \frac{\partial^3 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} = \dots = \frac{\partial^4 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1^4} = \frac{\partial^4 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1^3 \partial x_2} = \dots = \frac{\partial^5 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1^5} = \dots = 0.\end{aligned}$$

b) Funkcia  $f(\mathbf{x}) = f(x; y) = \arctg \frac{x}{y}: R^2 - \{(x; 0), x \in R\} \rightarrow R$ .

Pre každé  $\mathbf{x} = (x; y) \in R^2$ ,  $y \neq 0$  existujú všetky parciálne derivácie všetkých rádoov a platí

$$\begin{aligned}f_x(\mathbf{x}) &= \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{\frac{y}{y^2}}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}, & f_y(\mathbf{x}) &= \frac{x \cdot \frac{-1}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2}, \\ f_{xx}(\mathbf{x}) &= \frac{0-y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, & f_{xy}(\mathbf{x}) &= \frac{(x^2+y^2)-y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_{yx}(\mathbf{x}) &= \frac{-(x^2+y^2)-(-x) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & f_{yy}(\mathbf{x}) &= \frac{0-(-x) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

c) Funkcia  $f(\mathbf{x}) = f(x; y) = x^3 + x^2y^2 + y: R^2 \rightarrow R$ .

Pre každé  $\mathbf{x} = (x; y) \in R^2$  existujú všetky parciálne derivácie všetkých rádoov a platí

$$\begin{aligned}f' [2 \text{ ks}]: & \quad f_x(\mathbf{x}) = 3x^2 + 2xy^2, \quad f_y(\mathbf{x}) = 2x^2y + 1. \\ f'' [4 \text{ ks}]: & \quad f_{xx}(\mathbf{x}) = 6x + 2y^2, \quad f_{xy}(\mathbf{x}) = f_{yx}(\mathbf{x}) = 4xy, \quad f_{yy}(\mathbf{x}) = 2x^2. \\ f''' [8 \text{ ks}]: & \quad f_{xxx}(\mathbf{x}) = 6x, \quad f_{xxy}(\mathbf{x}) = f_{xyx}(\mathbf{x}) = f_{yxx}(\mathbf{x}) = 4y, \\ & \quad f_{xyy}(\mathbf{x}) = f_{yxy}(\mathbf{x}) = f_{yyx}(\mathbf{x}) = 4x, \quad f_{yyy}(\mathbf{x}) = 0. \blacksquare\end{aligned}$$

V predchádzajúcom príklade sa zmiešané parciálne derivácie podľa rovnakých premenných rovnali, ale ako ukazujú nasledujúce príklady, nemusí to byť vždy pravda.

### Príklad 2.2.22.

Funkcia  $f: R^2 \rightarrow R$  je definovaná (obr. 2.2.30) vzťahom  $f(x; y) = \begin{cases} xy & \text{pre } |x| \geq |y|, \\ 0 & \text{pre } |x| < |y|. \end{cases}$

Pre parciálne derivácie prvého rádu funkcie  $f$  v bode  $(0; 0)$  platí

$$\begin{aligned}f_x(0; 0) &= \frac{\partial f(0; 0)}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t; 0) - f(0; 0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0 - 0 \cdot 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0, \\ f_y(0; 0) &= \frac{\partial f(0; 0)}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0; t) - f(0; 0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t - 0 \cdot 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0.\end{aligned}$$

Aby sme mohli vypočítať parciálne derivácie druhého rádu  $f$  v bode  $(0; 0)$  potrebujeme určiť  $f_x(x; 0)$ ,  $f_y(x; 0)$  pre  $x \neq 0$  a  $f_x(0; y)$ ,  $f_y(0; y)$  pre  $y \neq 0$ . Je zrejmé, že pri ich výpočte môžeme voliť body  $(t; y)$  tak, aby platilo  $|t| < |y|$  (obr. 2.2.30 v strede) a body  $(x; t)$  tak, aby platilo  $|t| \geq |y|$  (obr. 2.2.30 vpravo). Pre  $x \neq 0$ , resp.  $y \neq 0$  platí

$$\begin{aligned}f_x(x; 0) &= \frac{\partial f(x; 0)}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t; 0) - f(x; 0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t) \cdot 0 - x \cdot 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0, \\ f_x(0; y) &= \frac{\partial f(0; y)}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t; y) - f(0; y)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0,\end{aligned}$$

$$f_y(x; 0) = \frac{\partial f(x; 0)}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x; t) - f(x; 0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x \cdot t - x \cdot 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{xt}{t} = x,$$

$$f_y(0; y) = \frac{\partial f(0; y)}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0; y+t) - f(0; y)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Pre parciálne derivácie druhého rádu funkcie  $f$  v bode  $(0; 0)$  potom platí

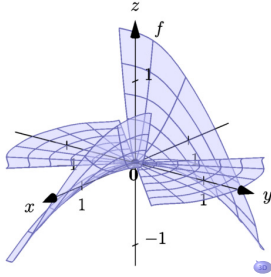
$$f_{xx}(0; 0) = \frac{\partial^2 f(0; 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(0; 0)}{\partial x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(t; 0)}{\partial x} - \frac{\partial f(0; 0)}{\partial x}}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0,$$

$$f_{xy}(0; 0) = \frac{\partial^2 f(0; 0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(0; 0)}{\partial x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(0; t)}{\partial x} - \frac{\partial f(0; 0)}{\partial x}}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0,$$

$$f_{yx}(0; 0) = \frac{\partial^2 f(0; 0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(0; 0)}{\partial y} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(t; 0)}{\partial y} - \frac{\partial f(0; 0)}{\partial y}}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 0}{t - 0} = 1,$$

$$f_{yy}(0; 0) = \frac{\partial^2 f(0; 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(0; 0)}{\partial y} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(0; t)}{\partial y} - \frac{\partial f(0; 0)}{\partial y}}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0.$$

To znamená, že sa druhé zmiešané parciálne derivácie v bode  $(0; 0)$  nerovnejú. ■



Obr. 2.2.30: Funkcia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
z príkladu 2.2.22



### Príklad 2.2.23.

Uvažujme funkciu  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definovanú  $f(x; y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{pre } (x; y) \neq (0; 0), \\ 0 & \text{pre } (x; y) = (0; 0). \end{cases}$

Prvé parciálne derivácie funkcie  $f$  sme vypočítali v príklade 2.2.15. Pre  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  platí

$$f_x(0; 0) = 0, \quad f_y(0; 0) = 0, \quad f_x(x; y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x; y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_x(x; 0) = \frac{0}{x^4} = 0, \quad f_y(x; 0) = \frac{x^5}{x^4} = x, \quad f_x(0; y) = \frac{-y^5}{y^4} = -y, \quad f_y(0; y) = \frac{0}{y^4} = 0.$$

Pre parciálne derivácie druhého rádu v bode  $\mathbf{0} = (0; 0)$  platí

$$f_{xx}(\mathbf{0}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_x(t; 0) - f_x(\mathbf{0})}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t - 0} = 0, \quad f_{xy}(\mathbf{0}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_x(0; t) - f_x(\mathbf{0})}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t - 0}{t - 0} = -1,$$

$$f_{yx}(\mathbf{0}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_y(t; 0) - f_y(\mathbf{0})}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - 0}{t - 0} = 1, \quad f_{yy}(\mathbf{0}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_y(0; t) - f_y(\mathbf{0})}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t - 0} = 0.$$

Pre parciálne derivácie druhého rádu v bode  $\mathbf{x} = (x; y) \neq (0; 0)$  platí

$$\begin{aligned} f_{xx}(\mathbf{x}) &= (f_x)_x(\mathbf{x}) = \frac{(4x^3 y + 8xy^3) \cdot (x^2 + y^2)^2 - (x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5) \cdot 2(x^2 + y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{(4x^3 y + 8xy^3) \cdot (x^2 + y^2) - 4x(x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{12xy^5 - 4x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{xy}(\mathbf{x}) &= (f_x)_y(\mathbf{x}) = \frac{(x^4+12x^2y^2-5y^4) \cdot (x^2+y^2)^2 - (x^4y+4x^2y^3-y^5) \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(x^4+12x^2y^2-5y^4) \cdot (x^2+y^2)^2 - 4y(x^4y+4x^2y^3-y^5)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}, \\
f_{yx}(\mathbf{x}) &= (f_y)_x(\mathbf{x}) = \frac{(5x^4-12x^2y^2-y^4) \cdot (x^2+y^2)^2 - (x^5-4x^3y^2-xy^4) \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(5x^4-12x^2y^2-y^4) \cdot (x^2+y^2)^2 - 4x(x^5-4x^3y^2-xy^4)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}, \\
f_{yy}(\mathbf{x}) &= (f_y)_y(\mathbf{x}) = \frac{(-8x^3y-4xy^3) \cdot (x^2+y^2)^2 - (x^5-4x^3y^2-xy^4) \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(-8x^3y-4xy^3) \cdot (x^2+y^2)^2 - 4y(x^5-4x^3y^2-xy^4)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{4x^3y^3-12x^5y}{(x^2+y^2)^3}. \blacksquare
\end{aligned}$$

**Veta 2.2.13.**

Funkcia  $f: A \rightarrow R$ , kde  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť, indexy  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ .

Parciálne derivácie  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  sú diferencovateľné v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$ .

$\Rightarrow$  Druhé parciálne derivácie podľa  $x_i$  a  $x_j$  sú zameniteľné, t. j.  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}$ .

*Dôkaz.*

Funkcie  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  sú diferencovateľné v bode  $\mathbf{a}$ , t. j. sú definované v nejakom okolí  $O(\mathbf{a}) \subset A$  a existujú (veta 2.2.3) druhé parciálne derivácie  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}$ .

V nasledujúcich úvahách sa budú vo funkcií  $f$  a ďalších uvažovaných funkciách meniť iba hodnoty  $i$ -tych a  $j$ -tych zložiek, pričom hodnoty ostatných zložiek budú zodpovedať bodu  $\mathbf{a} \in A$  a nebudú sa meniť. Kvôli prehľadnosti označme funkciu<sup>33</sup>

$$\begin{aligned}
g(x_i; x_j) &= f(a_1; \dots; x_i; \dots; x_j; \dots; a_n) \\
&= f(a_1; \dots; a_{i-1}; x_i; a_{i+1}; \dots; a_{j-1}; x_j; a_{j+1}; \dots; a_n): O(a_i; a_j) \rightarrow R.
\end{aligned}$$

Je zrejmé, že existujú aj parciálne derivácie  $\frac{\partial^2 g(a_i; a_j)}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $\frac{\partial^2 g(a_i; a_j)}{\partial x_j \partial x_i}$  a platí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g(a_i; a_j)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial g(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g(a_i; a_j+t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i; a_j)}{\partial x_i}}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(a_1; \dots; a_{i-1}; a_j+t; a_{i+1}; \dots; a_n)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}}{t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j}, \\
\frac{\partial^2 g(a_i; a_j)}{\partial x_j \partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial g(\mathbf{a})}{\partial x_j} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g(a_i+t; a_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(a_i; a_j)}{\partial x_j}}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f(a_1; \dots; a_{i-1}; a_i+t; a_{i+1}; \dots; a_n)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_j}}{t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}.
\end{aligned}$$

Pre pevné  $t \in R$  a premenné  $x \in O(a_i)$ , resp.  $x \in O(a_j)$  označme

$$\varphi_i(x) = g(x; a_j + t) - g(x; a_j), \quad x \in O(a_i), \quad \varphi_j(x) = g(a_i + t; x) - g(a_i; x), \quad x \in O(a_j).$$

Pre  $t \in R$ ,  $t \neq 0$  také, aby  $(a_i + t; a_j + t) \in O(a_i; a_j)$ , uvažujme funkciu

$$\begin{aligned}
G(t) &= g(a_i + t; a_j + t) - g(a_i + t; a_j) - g(a_i; a_j + t) + g(a_i; a_j) \\
&= \varphi_i(a_i + t) - \varphi_i(a_i) = \varphi_j(a_j + t) - \varphi_j(a_j).
\end{aligned}$$

<sup>33</sup>Keďže sa menia iba premenné  $x_i$  a  $x_j$ , postačí nám okolie  $O(a_i; a_j)$ , t. j.  $(x_i; x_j) \in O(a_i; a_j)$ .

Pre derivácie funkcií  $\varphi_i$ ,  $\varphi_j$  platí

$$\begin{aligned}\varphi'_i(x) &= \frac{\partial g(x; a_j+t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(x; a_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(a_1; \dots; x; \dots; a_j+t; \dots; a_n)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(a_1; \dots; x; \dots; a_j; \dots; a_n)}{\partial x_i}, \quad x \in O(a_i), \\ \varphi'_j(x) &= \frac{\partial g(a_i+t; x)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(a_i; x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(a_1; \dots; a_i+t; \dots; x; \dots; a_n)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(a_1; \dots; a_i; \dots; x; \dots; a_n)}{\partial x_j}, \quad x \in O(a_j).\end{aligned}$$

Funkcia  $\varphi_i$  spĺňa na intervale  $I_i$  s hranicami  $a_i$ ,  $a_i + t$  predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (dôsledok 2.2.4.b). Potom existuje<sup>34</sup>  $a_i + \theta_i t \in I_i$ ,  $\theta_i \in (0; 1)$  tak, že

$$G(t) = \varphi_i(a_i + t) - \varphi_i(a_i) = \varphi'_i(a_i + \theta_i t) \cdot (a_i + t - a_i) = t \cdot \varphi'_i(a_i + \theta_i t).$$

Pre limitu funkcie  $G(t)/t^2$  v bode 0 platí

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(a_i+t) - \varphi_i(a_i)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \varphi'_i(a_i + \theta_i t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'_i(a_i + \theta_i t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'_i(a_i)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g(a_i; a_j+t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i; a_j)}{\partial x_i}}{t} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j}.\end{aligned}$$

Analogicky funkcia  $\varphi_j$  spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote na intervale  $I_j$  s hranicami  $a_j$ ,  $a_j + t$  a existuje  $a_j + \theta_j t \in I_j$ ,  $\theta_j \in (0; 1)$  tak, že

$$G(t) = \varphi_j(a_j + t) - \varphi_j(a_j) = \varphi'_j(a_j + \theta_j t) \cdot (a_j + t - a_j) = t \cdot \varphi'_j(a_j + \theta_j t).$$

Pre limitu funkcie  $G(t)/t^2$  v bode 0 analogicky platí

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_j(a_j+t) - \varphi_j(a_j)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \varphi'_j(a_j + \theta_j t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'_j(a_j + \theta_j t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'_j(a_j)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g(a_i+t; a_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(a_i; a_j)}{\partial x_j}}{t} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}.\end{aligned}$$

To znamená, že  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}$  a veta je dokázaná. ■

### Dôsledok 2.2.13.a.

Funkcia  $f: A \rightarrow R$ , kde  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť, všetky parciálne derivácie prvého rádu  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sú diferencovateľné v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$ .

⇒ Pre ľubovoľné  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}$  (sú zameniteľné).

K tomu, aby boli druhé parciálne derivácie zameniteľné postačí ich spojitosť v danom bode. Spojitosť funkcie sa väčšinou overuje jednoduchšie, ako diferencovateľnosť. Lenže pri praktických problémoch nás zaujímajú hlavne problematické body a body nespojitosti indikujú problémy.

### Veta 2.2.14 (Schwarzova).

Funkcia<sup>35</sup>  $f: A \rightarrow R$ , kde  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť, indexy  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ .

Druhé parciálne derivácie  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}$  sú spojité v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$ .

⇒ Druhé parciálne derivácie podľa  $x_i$  a  $x_j$  sú zameniteľné, t. j.  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}$ .

<sup>34</sup>Úsečka spájajúca body  $a_i$  a  $a_i + t$  má rovnicu  $y = a_i + x(a_i + t - a_i) = a_i + xt$ ,  $x \in \langle 0; 1 \rangle$ . To znamená, že bod  $a_i + \theta_i t$ ,  $\theta_i \in (0; 1)$  leží na úsečke medzi bodmi  $a_i$  a  $a_i + t$ .

<sup>35</sup>Karl Hermann Amandus Schwarz [1843–1921] — nemecký matematik, známy predovšetkým vďaka svojim prácam z oblasti komplexnej analýzy.

*Dôkaz.*

Dôkaz je podobný dôkazu predchádzajúcej vety 2.2.13 (začiatok dôkazu je identický). Použijeme rovnaké pomocné funkcie  $g$ ,  $G$ ,  $\varphi_i$ ,  $\varphi_j$  ako pri uvedenom dôkaze:

$$\begin{aligned} g(x_i; x_j) &= f(a_1; \dots; x_i; \dots; x_j; \dots; a_n) \\ &= f(a_1; \dots; a_{i-1}; x_i; a_{i+1}; \dots; a_{j-1}; x_j; a_{j+1}; \dots; a_n) : O(a_i; a_j) \rightarrow R. \end{aligned}$$

Z definície funkcie  $g$  vyplýva, že  $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$  existujú, sú spojité v bode  $\mathbf{a}$  a platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 g(a_i; a_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g(a_i; a_j + t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i; a_j)}{\partial x_i}}{t}, \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i} &= \frac{\partial^2 g(a_i; a_j)}{\partial x_j \partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g(a_i + t; a_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i; a_j)}{\partial x_i}}{t}. \end{aligned}$$

Ďalej z toho vyplýva, že existujú v nejakom okolí  $O(a_i; a_j)$  a platí

$$\lim_{(u_i; v_i) \rightarrow (0; 0)} \frac{\partial^2 g(a_i + u_i; a_j + u_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g(a_i; a_j)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \lim_{(u_i; v_i) \rightarrow (0; 0)} \frac{\partial^2 g(a_i + u_i; a_j + u_j)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 g(a_i; a_j)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Pre pevné  $t \in R$  a premenné  $x \in O(a_i)$ , resp.  $x \in O(a_j)$  označme

$$\varphi_i(x) = g(x; a_j + t) - g(x; a_j), \quad x \in O(a_i), \quad \varphi_j(x) = g(a_i + t; x) - g(a_i; x), \quad x \in O(a_j).$$

Pre  $t \in R$ ,  $t \neq 0$  také, aby  $(a_i + t; a_j + t) \in O(a_i; a_j)$ , uvažujme funkciu

$$\begin{aligned} G(t) &= g(a_i + t; a_j + t) - g(a_i + t; a_j) - g(a_i; a_j + t) + g(a_i; a_j) \\ &= \varphi_i(a_i + t) - \varphi_i(a_i) = \varphi_j(a_j + t) - \varphi_j(a_j). \end{aligned}$$

Pre derivácie funkcií  $\varphi_i$ ,  $\varphi_j$  platí

$$\varphi'_i(x) = \frac{\partial g(x; a_j + t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(x; a_j)}{\partial x_i}, \quad x \in O(a_i), \quad \varphi'_j(x) = \frac{\partial g(a_i + t; x)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(a_i; x)}{\partial x_j}, \quad x \in O(a_j).$$

Funkcia  $\varphi_i$  spĺňa na intervale  $I_i$  s hranicami  $a_i$ ,  $a_i + t$  predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (dôsledok 2.2.4.b). Potom existuje<sup>36</sup>  $a_i + \theta_i t \in I_i$ ,  $\theta_i \in (0; 1)$  tak, že

$$\begin{aligned} G(t) &= \varphi_i(a_i + t) - \varphi_i(a_i) = \varphi'_i(a_i + \theta_i t) \cdot (a_i + t - a_i) \\ &= t \cdot \varphi'_i(a_i + \theta_i t) = t \cdot \left[ \frac{\partial g(a_i + \theta_i t; a_j + t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i + \theta_i t; a_j)}{\partial x_i} \right]. \end{aligned}$$

Označme funkciu  $\psi_j(x) = \frac{\partial g(a_i + \theta_i t; x)}{\partial x_j}$ ,  $x \in O(a_j)$ . Potom  $\psi'_j(x) = \frac{\partial^2 g(a_i + \theta_i t; x)}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $x \in O(a_j)$ .

Na intervale s hranicami  $a_j$ ,  $a_j + t$  spĺňa funkcia  $\psi_j$  predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote a existuje  $\vartheta_j \in (0; 1)$  tak, že platí

$$\begin{aligned} \psi_j(a_j + t) - \psi_j(a_j) &= \psi'_j(a_j + \vartheta_j t) \cdot (a_j + t - a_j) = t \cdot \psi'_j(a_j + \vartheta_j t). \\ \implies t \cdot \frac{\partial^2 g(a_i + \theta_i t; a_j + \vartheta_j t)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial g(a_i + \theta_i t; a_j + t)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(a_i + \theta_i t; a_j)}{\partial x_i} = \frac{G(t)}{t}. \end{aligned}$$

Pre limitu funkcie  $G(t)/t^2$  v bode 0 potom platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g(a_i + \theta_i t; a_j + \vartheta_j t)}{\partial x_i \partial x_j} = \left[ \begin{array}{l} u_1 = \theta_i t \rightarrow 0 \\ u_2 = \vartheta_j t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{\substack{u_i \rightarrow 0 \\ v_i \rightarrow 0}} \frac{\partial^2 g(a_i + u_i; a_j + u_j)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.17)$$

<sup>36</sup>Úsečka spájajúca body  $a_i$  a  $a_i + t$  má rovnicu  $y = a_i + x(a_i + t - a_i) = a_i + xt$ ,  $x \in \langle 0; 1 \rangle$ . To znamená, že bod  $a_i + \theta_i t$ ,  $\theta_i \in (0; 1)$  leží na úsečke medzi bodmi  $a_i$  a  $a_i + t$ .

Analogicky funkcia  $\varphi_j$  spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote na intervale  $I_j$  s hranicami  $a_j, a_j + t$ . Potom existuje  $a_j + \theta_j t \in I_j, \theta_j \in (0; 1)$  tak, že

$$\begin{aligned} G(t) &= \varphi_j(a_j + t) - \varphi_j(a_j) = \varphi'_j(a_j + \theta_j t) \cdot (a_j + t - a_j) \\ &= t \cdot \varphi'_j(a_j + \theta_j t) = t \cdot \left[ \frac{\partial g(a_i + t; a_j + \theta_j t)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(a_i; a_j + \theta_j t)}{\partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Ak označíme  $\psi_i(x) = \frac{\partial g(x; a_j + \theta_j t)}{\partial x_j}$ ,  $x \in O(a_i)$ , potom  $\psi'_i(x) = \frac{\partial^2 g(x; a_j + \theta_j t)}{\partial x_j \partial x_i}$ ,  $x \in O(a_i)$ .

Funkcia  $\psi_i$  spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote na intervale s hranicami  $a_i, a_i + t$ . Potom existuje  $\vartheta_i \in (0; 1)$  tak, že platí

$$\begin{aligned} \psi_i(a_i + t) - \psi_i(a_i) &= \psi'_i(a_i + \vartheta_i t) \cdot (a_i + t - a_i) = t \cdot \psi'_i(a_i + \vartheta_i t). \\ \implies t \cdot \frac{\partial^2 g(a_i + \vartheta_i t; a_j + \theta_j t)}{\partial x_j \partial x_i} &= \frac{\partial g(a_i + t; a_j + \theta_j t)}{\partial x_j} - \frac{\partial g(a_i; a_j + \theta_j t)}{\partial x_j} = \frac{G(t)}{t}. \end{aligned}$$

Pre limitu funkcie  $G(t)/t^2$  v bode 0 potom analogicky platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2 g(a_i + \vartheta_i t; a_j + \theta_j t)}{\partial x_j \partial x_i} = \begin{bmatrix} u_1 = \vartheta_i t \rightarrow 0 \\ u_2 = \theta_j t \rightarrow 0 \end{bmatrix} = \lim_{\substack{u_i \rightarrow 0 \\ v_i \rightarrow 0}} \frac{\partial^2 g(a_i + u_i; a_j + u_j)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (2.18)$$

Zo vzťahov (2.17) a (2.18) vyplýva tvrdenie vety

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)}{t^2} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}. \quad \blacksquare$$

### Poznámka 2.2.16.

Podmienka  $i \neq j$  vo vetách 2.2.13 a 2.2.14 je prakticky zbytočná. Pre  $i = j$  platia tvrdenia oboch viet triviálne, pretože  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i^2}$ .

Obe tieto vety môžeme pomocou matematickej indukcie rozšíriť na zmiešané parciálne derivácie ľubovoľného rádu  $k \in N, k > 2$ .

### Dôsledok 2.2.14.a.

Funkcia  $f: A \rightarrow R$ , kde  $A \subset R^n, n \in N$  je oblasť, parciálne derivácie stupňa  $k \in N, k > 2$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}$$

sú spojité v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$ , pričom  $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  sú ľubovoľné indexy a  $j_1, j_2, \dots, j_k$  je ich ľubovoľná permutácia.<sup>37</sup>

$$\implies \text{Uvedené parciálne derivácie sú zameniteľné, t. j. } \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}.$$

### Dôsledok 2.2.14.b.

Funkcia  $f: A \rightarrow R$ , kde  $A \subset R^n, n \in N$  je oblasť, všetky parciálne derivácie funkcie  $f$  stupňa  $k \in N, k > 2$  sú spojité v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$ .

$\implies$  Všetky parciálne derivácie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  podľa rovnakých premenných až do rádu  $k$  (vrátane) sú zameniteľné, pričom parciálne derivácie do rádu  $k - 1$  (vrátane) sú zameniteľné v nejakom okolí  $O(\mathbf{a})$ .

<sup>37</sup>Skupiny indexov  $i_1, i_2, \dots, i_k$  a  $j_1, j_2, \dots, j_k$  obsahujú rovnaké prirodzené čísla  $1, 2, \dots, n$ , ktoré sa môžu opakovať, ale môžu byť zoradené v inom poradí. Sú preusporiadané.

**Poznámka 2.2.17.**

*Zameniteľnosť parciálnych derivácií prakticky znamená, že nezáleží na poradí premenných, podľa ktorých derivujeme. Parciálnych derivácií funkcie  $f: R^n \rightarrow R$  stupňa  $k \in N$  v danom bode je  $n^k$ . Ak sú zameniteľné, potom sa ich počet<sup>38</sup> redukuje na číslo  $\binom{n+k-1}{k}$ .*

Nech  $f: A \rightarrow R$ ,  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť,  $k \in N$ . Hovoríme, že **funkcia  $f$  je  $k$ -krát diferencovateľná (diferencovateľná  $k$ -teho rádu) v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$** , ak sú všetky jej parciálne derivácie rádu  $k-1$  diferencovateľné v bode  $\mathbf{a}$ .

Ak je funkcia  $f$  diferencovateľná  $k$ -teho rádu v každom bode  $\mathbf{a} \in B$ , kde  $B \subset A$ , potom sa nazýva **diferencovateľná  $k$ -teho rádu na množine  $B$** .

**Poznámka 2.2.18.**

*Ak je  $f: A \rightarrow R$  diferencovateľná  $k$ -teho rádu v bode  $\mathbf{a} \in A$ , potom sú všetky parciálne derivácie nižších rádoov diferencovateľné v nejakom okolí  $O(\mathbf{a}) \subset A$  a podľa vety 2.2.13 sú zameniteľné všetky zmiešané parciálne derivácie do rádu  $k$ , ktoré sa líšia iba poradím derivovania.*

S pojmom diferencovateľnosť (prvého rádu) sme definovali aj diferenciál a deriváciu funkcie. Prvá derivácia  $f'$  funkcie  $f: R^n \rightarrow R^m$  je matica typu  $m \times n$  zložená z prvých parciálnych derivácií.

Logickým rozšírením je vyjadrenie  $f''$  (pokiaľ existuje) pomocou parciálnych derivácií druhého rádu. Druhých parciálnych derivácií je  $mn^2$ , pričom každá zo zložiek  $f_1, f_2, \dots, f_m$  má  $n^2$  druhých parciálnych derivácií. Takto by sme mohli pokračovať po ľubovoľnú deriváciu rádu  $k \in N$ , kde počet parciálnych derivácií rádu  $k$  je  $mn^k$ .

Preto sa obmedzíme (ako sme deklarovali v úvode tejto časti) na funkcie  $f: R^n \rightarrow R$  a úvahy a tvrdenia v prípade vektorovej funkcie aplikujeme na každú zložku samostatne.

Nech  $f: A \rightarrow R$ ,  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť. Ak je  $f$  v bode  $\mathbf{a} \in A$  diferencovateľná, potom jej (prvá) **derivácia (gradient)** v bode  $\mathbf{a}$  má tvar  $n$ -rozmerného vektora

$$f'(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right).$$

Ak je  $f$  v bode  $\mathbf{a} \in A$  diferencovateľná druhého rádu, potom **druhá deriváciu funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$**  definujeme ako štvorcovú maticu typu  $n \times n$

$$f''(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Matica  $f''(\mathbf{a})$  je symetrická podľa hlavnej diagonály, pretože zmiešané parciálne derivácie sú zameniteľné (poznámka 2.2.18), t. j.  $\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}$  pre  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ ,

**Poznámka 2.2.19.**

*Ak existujú všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a} \in A$ , ale niektoré z príslušajúcich dvojíc nie sú zameniteľné, potom ich tiež môžeme zapísať v tvare matice.*

<sup>38</sup>Kombinácie s opakovaním  $k$ -tej triedy z  $n$  prvkov.

*Táto matica nebude symetrická podľa hlavnej diagonály a nebude reprezentovať deriváciu  $f''(\mathbf{a})$ , pretože funkcia  $f$  nebude diferencovateľná druhého rádu.<sup>39</sup>*

### Príklad 2.2.24.

Uvažujme zloženú funkciu  $F(u; v) = f(\alpha(u; v); \beta(u; v)): R^2 \rightarrow R$  z príkladu 2.2.20.

Predpokladajme, že funkcia  $f(x; y): R^2 \rightarrow R$  je diferencovateľná druhého rádu v  $R^2$  a vnútorné zložky  $x = \alpha(u; v)$ ,  $y = \beta(u; v): R^2 \rightarrow R$  sú tiež diferencovateľné druhého rádu v  $R^2$ . Ak použijeme rovnaké označenie  $(x; y) = g(u; v) = (\alpha(u; v); \beta(u; v)): R^2 \rightarrow R^2$ , potom  $F(u; v) = f(g(u; v))$  a pre prvú deriváciu  $F'$  (viď príklad 2.2.20) platí<sup>40</sup>

$$F' = (F_u; F_v) = [f(g)]' = f'g' = (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} = (f_x\alpha_u + f_y\beta_u; f_x\alpha_v + f_y\beta_v).$$

Druhá derivácia  $F'' = (F_u; F_v)'$  obsahuje derivácie funkcií  $F_u$ ,  $F_v$ , ktoré sú opäť zložené funkcie, pričom  $f_x(x; y)$ ,  $f_y(x; y): R^2 \rightarrow R$  majú vnútorné zložky  $x = \alpha(u; v)$ ,  $y = \beta(u; v)$ . Funkcie  $\alpha_u, \alpha_v, \beta_u, \beta_v$  sú funkcie dvoch premenných  $(u; v) \in R^2$ . Potom platí

$$(\alpha_u)' = (\alpha_{uu}; \alpha_{uv}), \quad (\alpha_v)' = (\alpha_{vu}; \alpha_{vv}), \quad (\beta_u)' = (\beta_{uu}; \beta_{uv}), \quad (\beta_v)' = (\beta_{vu}; \beta_{vv}).$$

Funkcie  $F_u = f_x\alpha_u + f_y\beta_u$ ,  $F_v = f_x\alpha_v + f_y\beta_v$  derivujeme ako súčet a súčin funkcií. Platí

$$\begin{aligned} (F_u)' &= (F_{uu}; F_{uv}) = (f_x\alpha_u + f_y\beta_u)' = (f_x)'\alpha_u + f_x(\alpha_u)' + (f_y)'\beta_u + f_y(\beta_u)' \\ &= (f_{xx}; f_{xy}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} + f_x(\alpha_{uu}; \alpha_{uv}) + (f_{yx}; f_{yy}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} + f_y(\beta_{uu}; \beta_{uv}), \\ (F_v)' &= (F_{vu}; F_{vv}) = (f_x\alpha_v + f_y\beta_v)' = (f_x)'\alpha_v + f_x(\alpha_v)' + (f_y)'\beta_v + f_y(\beta_v)' \\ &= (f_{xx}; f_{xy}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} + f_x(\alpha_{vu}; \alpha_{vv}) + (f_{yx}; f_{yy}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} + f_y(\beta_{vu}; \beta_{vv}). \end{aligned}$$

Z diferencovateľnosti druhého rádu (veta 2.2.13) vyplýva zameniteľnosť zmiešaných parciálnych derivácií  $f_{xy} = f_{yx}$ ,  $\alpha_{uv} = \alpha_{vu}$ ,  $\beta_{uv} = \beta_{vu}$ . Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} F'' &= \begin{pmatrix} (F_u)' \\ (F_v)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{uu} & F_{uv} \\ F_{vu} & F_{vv} \end{pmatrix}, \quad \text{pričom} \\ F_{uu} &= f_{xx}(\alpha_u)^2 + 2f_{xy}\alpha_u\beta_u + f_{yy}(\beta_u)^2 + f_x\alpha_{uu} + f_y\beta_{uu}, \\ F_{uv} &= f_{xx}\alpha_u\alpha_v + f_{xy}(\alpha_u\beta_v + \alpha_v\beta_u) + f_{yy}\beta_u\beta_v + f_x\alpha_{uv} + f_y\beta_{uv} = F_{vu}, \\ F_{vv} &= f_{xx}(\alpha_v)^2 + 2f_{xy}\alpha_v\beta_v + f_{yy}(\beta_v)^2 + f_x\alpha_{vv} + f_y\beta_{vv}. \end{aligned}$$

- Špeciálne pre  $F(u; v) = f(x; y) = f(u^2 + v^2; u^2 - v^2): R^2 \rightarrow R$  platí

$$F' = (F_u; F_v) = (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} = (2uf_x + 2uf_y; 2vf_x - 2vf_y).$$

Pre derivácie funkcií  $x = \alpha(u; v) = u^2 + v^2$ ,  $y = \beta(u; v) = u^2 - v^2$  platí

$$x: \alpha' = (\alpha_u; \alpha_v) = (u^2 + v^2)' = (2u; 2v), \quad y: \beta' = (\beta_u; \beta_v) = (u^2 - v^2)' = (2u; -2v).$$

<sup>39</sup>Keby bola, potom by mala zameniteľné všetky príslušné parciálne derivácie druhého rádu.

<sup>40</sup>Kvôli prehľadnosti uvádzame nasledujúce vzťahy bez premenných  $u, v$ .

Funkcie  $\alpha_u = \beta_u = 2u$ ,  $\alpha_v = -\beta_v = 2v$  sú opäť funkcie premenných  $(u; v)$  a platí

$$\alpha_u = \beta_u: (2u)' = \left( \frac{\partial(2u)}{\partial u}; \frac{\partial(2u)}{\partial v} \right) = (2; 0), \quad \alpha_v = -\beta_v: (2v)' = \left( \frac{\partial(2v)}{\partial u}; \frac{\partial(2v)}{\partial v} \right) = (0; 2).$$

Z toho vyplýva

$$\begin{aligned} (F_u)' &= (F_{uu}; F_{uv}) = [2u(f_x + f_y)]' = (2u)' \cdot (f_x + f_y) + 2u \cdot (f_x)' + 2u \cdot (f_y)' \\ &= (2; 0) \cdot (f_x + f_y) + 2u \cdot (f_{xx}; f_{xy}) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} + 2u \cdot (f_{yx}; f_{yy}) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}, \\ (F_v)' &= (F_{vu}; F_{vv}) = [2v(f_x - f_y)]' = (2v)' \cdot (f_x - f_y) + 2v \cdot (f_x)' - 2v \cdot (f_y)' \\ &= (0; 2) \cdot (f_x - f_y) + 2v \cdot (f_{xx}; f_{xy}) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix} - 2v \cdot (f_{yx}; f_{yy}) \cdot \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Po roznásobení a jednoduchých úpravách ( $f_{xy} = f_{yx}$  sú zameniteľné) dostaneme

$$\begin{aligned} F_{uu} &= 4u^2(f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}) + 2(f_x + f_y), \quad F_{uv} = 4uv(f_{xx} - f_{yy}) = F_{vu}, \\ F_{vv} &= 4v^2(f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}) + 2(f_x + f_y). \end{aligned}$$

• Špeciálne pre prevod  $f(x; y): R^2 \rightarrow R$  do polárnych súradníc (pr. 2.1.3, pr. 2.2.7), t. j. pre funkciu  $F(\rho; \varphi) = f(\Psi(\rho; \varphi)) = f((\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi)): \langle 0; \infty \rangle \times R \rightarrow R$  platí

$$\begin{aligned} F'(\rho; \varphi) &= (F_\rho; F_\varphi) = (f_x; f_y) \cdot \Psi' = (f_x; f_y) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \\ \sin \varphi \quad \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi; -f_x \rho \sin \varphi + f_y \rho \cos \varphi). \end{aligned}$$

Funkcie  $F_\rho, F_\varphi$  sú opäť zložené funkcie. Potom platí

$$\begin{aligned} (F_\rho)' &= (F_{\rho\rho}; F_{\rho\varphi}) = [f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi]' \\ &= (f_{xx}; f_{xy})\Psi' \cos \varphi + f_x(0; -\sin \varphi) + (f_{yx}; f_{yy})\Psi' \sin \varphi + f_y(0; \cos \varphi), \\ (F_\varphi)' &= (F_{\varphi\rho}; F_{\varphi\varphi}) = [-f_x \rho \sin \varphi + f_y \rho \cos \varphi]' \\ &= -(f_{xx}; f_{xy})\Psi' \rho \sin \varphi - f_x(\sin \varphi; \rho \cos \varphi) + (f_{yx}; f_{yy})\Psi' \rho \cos \varphi + f_y(\cos \varphi; -\rho \sin \varphi). \end{aligned}$$

Po roznásobení a jednoduchých úpravách ( $f_{xy} = f_{yx}$  sú zameniteľné) dostaneme

$$F_{\rho\rho} = f_{xx} \cos^2 \varphi + f_{xy} \sin 2\varphi + f_{yy} \sin^2 \varphi, \quad (2.19)$$

$$F_{\rho\varphi} = \frac{1}{2}(f_{yy} - f_{xx})\rho \sin 2\varphi + f_{xy}\rho \cos 2\varphi - f_x \sin \varphi + f_y \cos \varphi = F_{\varphi\rho},$$

$$F_{\varphi\varphi} = f_{xx}\rho^2 \sin^2 \varphi - f_{xy}\rho^2 \sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2 \cos^2 \varphi - f_x \rho \cos \varphi - f_y \rho \sin \varphi.$$

• Uvažujme funkciu  $f(x; y) = \frac{x+y}{x-y}: R^2 \rightarrow R$  a jej vyjadrenie v polárnych súradniciach, t. j.  $F(\rho; \varphi) = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi}: \langle 0; \infty \rangle \times R \rightarrow R$ ,  $\varphi \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in Z$ . Pre derivácie funkcie  $f$  platí

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-2 \sin \varphi}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)^2}, \quad f_{xx} = \frac{0 - (-2y)2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{4y}{(x-y)^3} = \frac{4 \sin \varphi}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3}, \\ f_{xy} &= \frac{-2(x-y)^2 - (-2y)2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} = \frac{-2(x-y) - 4y}{(x-y)^3} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3} = \frac{-2(\sin \varphi + \cos \varphi)}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3}, \end{aligned}$$

$$f_y = \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{2 \cos \varphi}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)^2}, \quad f_{yy} = \frac{0-2x2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} = \frac{4x}{(x-y)^3} = \frac{4 \cos \varphi}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3},$$

$$f_{yx} = \frac{2(x-y)^2-2x2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{2(x-y)-4x}{(x-y)^3} = \frac{-2(x+y)}{(x-y)^3} = \frac{-2(\sin \varphi + \cos \varphi)}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3}.$$

Potom pre prvú deriváciu funkcie  $F$  platí

$$\begin{aligned} F'(\rho; \varphi) &= (F_\rho; F_\varphi) = (f_x; f_y) \cdot \Psi' = \left( \frac{-2 \sin \varphi}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)^2}; \frac{2 \cos \varphi}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} \cdot (-\sin \varphi; \cos \varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} \cdot (-\sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi; \rho \sin^2 \varphi + \rho \cos^2 \varphi) \\ &= \frac{2}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} \cdot (0; \rho) = \left( 0; \frac{2}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} \right). \end{aligned}$$

Ak dosadíme do vzorcov (2.19), potom pre druhé parciálne derivácie funkcie  $F$  platí

$$\begin{aligned} F_{\rho\rho} &= f_{xx} \cos^2 \varphi + f_{xy} \sin 2\varphi + f_{yy} \sin^2 \varphi \\ &= \frac{4 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3} + \frac{-2(\sin \varphi + \cos \varphi) \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3} + \frac{4 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3} = 0, \\ F_{\rho\varphi} &= F_{\varphi\rho} = \frac{1}{2}(f_{yy} - f_{xx})\rho \sin 2\varphi + f_{xy}\rho \cos 2\varphi - f_x \sin \varphi + f_y \cos \varphi \\ &= \frac{4 \cos \varphi \cdot 2\rho \sin \varphi \cos \varphi}{2\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3} - \frac{4 \sin \varphi \cdot 2\rho \sin \varphi \cos \varphi}{2\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3} + \frac{-2(\sin \varphi + \cos \varphi)\rho(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3} \\ &\quad - \frac{-2 \sin \varphi \sin \varphi}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} + \frac{2 \cos \varphi \cos \varphi}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} = 0, \\ F_{\varphi\varphi} &= f_{xx}\rho^2 \sin^2 \varphi - f_{xy}\rho^2 \sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2 \cos^2 \varphi - f_x \rho \cos \varphi - f_y \rho \sin \varphi \\ &= \frac{4 \sin \varphi \rho^2 \sin^2 \varphi}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3} - \frac{-2(\sin \varphi + \cos \varphi) \cdot 2\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3} + \frac{4 \cos \varphi \rho^2 \cos^2 \varphi}{\rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi)^3} \\ &\quad - \frac{-2 \sin \varphi \rho \cos \varphi}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} - \frac{2 \cos \varphi \rho \sin \varphi}{\rho(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} = \frac{4(\sin \varphi + \cos \varphi)}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^3}. \end{aligned}$$

Priamy výpočet je najjednoduchší a najprehľadnejší (viď pr. 2.2.20):

$$F' = (F_\rho; F_\varphi) = \left( \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} \right)' = \left( 0; \frac{2}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^2} \right).$$

Keďže  $F_{\varphi\varphi} = \frac{\partial 2(\cos \varphi - \sin \varphi)^{-2}}{\partial \varphi} = \frac{-2 \cdot 2(-\sin \varphi - \cos \varphi)}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^3} = \frac{4(\sin \varphi + \cos \varphi)}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^3}$ , potom platí

$$F'' = \begin{pmatrix} (F_\rho)' \\ (F_\varphi)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\rho\rho} & F_{\rho\varphi} \\ F_{\varphi\rho} & F_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{4(\sin \varphi + \cos \varphi)}{(\cos \varphi - \sin \varphi)^3} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

### Príklad 2.2.25.

Nech  $z = f(x; y): A \rightarrow R$  je dvakrát diferencovateľná funkcia na oblasti  $A \subset R^2$  taká, že pre nejaké  $(x; y) \in A$  spĺňa Laplaceovu diferenciálnu rovnicu

$$f_{xx}(x; y) + f_{yy}(x; y) = 0, \quad \text{t. j.} \quad \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y^2} = 0.$$

Pre prevod súradníc z karteziánskeho do polárneho tvaru platí  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Funkcia  $f$  má v polárnych súradniciach tvar  $F(\rho; \varphi) = f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi)$ . Zo vzťahu (2.19) z príkladu 2.2.24 vyplýva

$$\begin{aligned} F_{\rho\rho} &= f_{xx} \cos^2 \varphi + f_{xy} \sin 2\varphi + f_{yy} \sin^2 \varphi, \\ F_{\varphi\varphi} &= f_{xx}\rho^2 \sin^2 \varphi - f_{xy}\rho^2 \sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2 \cos^2 \varphi - f_x \rho \cos \varphi - f_y \rho \sin \varphi. \end{aligned}$$

Keď prvú rovnosť vynásobíme  $\rho^2$  a pripočítame k druhej, dostaneme

$$\begin{aligned}\rho^2 F_{\rho\rho} + F_{\varphi\varphi} &= f_{xx}\rho^2 \cos^2 \varphi + f_{xy}\rho^2 \sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2 \sin^2 \varphi \\ &\quad + f_{xx}\rho^2 \sin^2 \varphi - f_{xy}\rho^2 \sin 2\varphi + f_{yy}\rho^2 \cos^2 \varphi - f_x \rho \cos \varphi - f_y \rho \sin \varphi \\ &= f_{xx}\rho^2 + f_{yy}\rho^2 - \rho(f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi) = (f_{xx} + f_{yy})\rho^2 - \rho F_\rho = 0 - \rho F_\rho = -\rho F_\rho.\end{aligned}$$

Z toho vyplýva vyjadrenie Laplaceovej rovnice v polárnych súradniciach.

$$\rho^2 F_{\rho\rho}(\rho; \varphi) + F_{\varphi\varphi}(\rho; \varphi) + \rho F_\rho(\rho; \varphi) = 0. \blacksquare$$

Nech funkcia  $f: A \rightarrow R$  je  $k$ -krát diferencovateľná v bode  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in A$ , kde  $A \subset R^n$ ,  $n \in N$  je oblasť,  $k \in N$ . To znamená, že všetky prislúchajúce zmiešané parciálne derivácie funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$  až do rádu  $k$  sú zameniteľné.

Nech  $\mathbf{h} = (h_1; h_2; \dots; h_n) \in R^n$  je ľubovoľný vektor taký, že platí  $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in A$ . Označme  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ . **Diferenciálom  $k$ -teho rádu ( $k$ -tým diferenciálom) funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$**  nazývame formu  $k$ -teho stupňa (homogénny polynóm  $k$ -teho stupňa) v tvare

$$\begin{aligned}d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n \right]^k f(\mathbf{a}), \\ \text{resp. } d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} (x_n - a_n) \right]^k f(\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Predchádzajúce zápisy sú formálne a naznačujú použitie polynomickej vety. Formálne výrazy umocníme, ale namiesto súčinnov  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \dots \frac{\partial f}{\partial x_j}$  vytvoríme parciálne derivácie  $\frac{\partial^k f(\mathbf{a})}{\partial x_i \dots \partial x_j}$ .

$$\begin{aligned}d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = k \\ 0 \leq i_1, \dots, i_n \leq k}} \frac{k!}{i_1! \dots i_n!} \cdot \frac{\partial^k f(\mathbf{a})}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \cdot h_1^{i_1} \dots h_n^{i_n}, \\ \text{resp. } d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = k \\ 0 \leq i_1, \dots, i_n \leq k}} \frac{k!}{i_1! \dots i_n!} \cdot \frac{\partial^k f(\mathbf{a})}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \cdot (x_1 - a_1)^{i_1} \dots (x_n - a_n)^{i_n}.\end{aligned}$$

Špeciálne pre  $k = 0$  definujeme **diferenciál 0-teho rádu (0-ty diferenciál) funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a}$**  vzťahom  $d^0 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = f(\mathbf{a})$ , resp.  $d^0 f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$ .

Diferenciál (prvého rádu)  $d^1 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = df(\mathbf{a}, \mathbf{h})$  predstavuje lineárnu formu a na základe definície diferencovateľnosti a definície parciálnych derivácií prvého rádu funkcie  $f$  platí

$$\begin{aligned}df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}^T = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}^T \\ &= \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right) \cdot (h_1; h_2; \dots; h_n)^T = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} h_n.\end{aligned}$$

Diferenciál druhého rádu  $d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$  predstavuje kvadratickú formu s maticou  $f''(\mathbf{a})$  a má veľký význam hlavne pri hľadaní extrémov funkcie  $f$ . Môžeme ho vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned}d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= \mathbf{h} \cdot f''(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \cdot (h_1; h_2; \dots; h_n)^T \\ &= \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + 2 \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_3} h_1 h_3 + \dots + 2 \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_{n-1} \partial x_n} h_{n-1} h_n + \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n^2} h_n^2.\end{aligned}$$

Diferenciál tretieho rádu  $d^3f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$  predstavuje formu tretieho stupňa a po použití polynomickej vety ho môžeme písať v tvare

$$d^3f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \frac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^3} h_1^3 + 3 \frac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^2 \partial x_2} h_1^2 h_2 + 3 \frac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_2^2} h_1 h_2^2 + 3 \frac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^2 \partial x_3} h_1^2 h_3 + \cdots + \frac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial x_n^3} h_n^3.$$

**Poznámka 2.2.20.**

*Polynomická (multinomial) veta je rozšírením známej binomickej vety*

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x_1^{k-i} x_2^i = \sum_{\substack{i_1 + i_2 = k \\ 0 \leq i_1, i_2 \leq k}} \frac{k!}{i_1! i_2!} \cdot x_1^{i_1} x_2^{i_2}$$

*z k-tej mocniny dvoch sčítancov na k-tu mocninu n sčítancov, kde  $k, n \in \mathbb{N}$ . Platí*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_n = k \\ 0 \leq i_1, \dots, i_n \leq k}} \frac{k!}{i_1! i_2! \cdots i_n!} \cdot x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}.$$

**Príklad 2.2.26.**

Nech je funkcia  $f: R^2 \rightarrow R$  trikrát diferencovateľná v bode  $\mathbf{a} = (a_x; a_y)$ .

Ak označíme  $\mathbf{x} = (x; y)$ , potom platí:

$$\begin{aligned} df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= f'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T = (f_x(\mathbf{a}); f_y(\mathbf{a})) \cdot \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \end{pmatrix} \\ &= f_x(\mathbf{a}) \cdot (x - a_x) + f_y(\mathbf{a}) \cdot (y - a_y), \\ d^2f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot f''(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \\ &= (x - a_x; y - a_y) \cdot \begin{pmatrix} f_{xx}(\mathbf{a}) & f_{xy}(\mathbf{a}) \\ f_{yx}(\mathbf{a}) & f_{yy}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \end{pmatrix} \\ &= f_{xx}(\mathbf{a}) \cdot (x - a_x)^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a}) \cdot (x - a_x) \cdot (y - a_y) + f_{yy}(\mathbf{a}) \cdot (y - a_y)^2, \\ d^3f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \cdot \frac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial x^{3-i} \partial y^i} \cdot (x - a_x)^{3-i} \cdot (y - a_y)^i \\ &= f_{xxx}(\mathbf{a}) \cdot (x - a_x)^3 + 3f_{xxy}(\mathbf{a}) \cdot (x - a_x)^2 \cdot (y - a_y) \\ &\quad + 3f_{xyy}(\mathbf{a}) \cdot (x - a_x) \cdot (y - a_y)^2 + f_{yyy}(\mathbf{a}) \cdot (y - a_y)^3. \blacksquare \end{aligned}$$

**Príklad 2.2.27.**

Funkcia  $f(\mathbf{x}) = f(x; y) = x^3 + xy^2: R^2 \rightarrow R$  je trikrát diferencovateľná v  $R^2$ .

Pre všetky  $\mathbf{x} = (x; y) \in R^2$  platí:

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= (3x^2 + y^2; 2xy), \quad f_x(\mathbf{x}) = 3x^2 + y^2, \quad f_y(\mathbf{x}) = 2xy, \\ f''(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad f_{xx}(\mathbf{x}) = 6x, \quad f_{xy}(\mathbf{x}) = f_{yx}(\mathbf{x}) = 2y, \quad f_{yy}(\mathbf{x}) = 2x, \\ f_{xxx}(\mathbf{x}) &= 6, \quad f_{xxy}(\mathbf{x}) = f_{xyx}(\mathbf{x}) = f_{yxx}(\mathbf{x}) = 0, \\ f_{xyy}(\mathbf{x}) &= f_{yxy}(\mathbf{x}) = f_{yyx}(\mathbf{x}) = 2, \quad f_{yyy}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned}$$

Napríklad pre  $\mathbf{0} = (0; 0)$ ,  $(1; 2)$  a pre ľubovoľné  $\mathbf{a} = (a_x; a_y) \in R^2$  platí:

$$\begin{aligned} f'(a_x; a_y) &= (3a_x^2 + a_y^2; 2a_x a_y), & f'(0; 0) &= (0; 0), & f'(1; 2) &= (7; 4), \\ f''(a_x; a_y) &= \begin{pmatrix} 6a_x & 2a_y \\ 2a_y & 2a_x \end{pmatrix}, & f''(0; 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & f''(1; 2) &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pre prvý, druhý a tretí diferenciál  $f$  v bodoch  $\mathbf{a} = (a_x; a_y)$ ,  $\mathbf{0} = (0; 0)$  a  $(1; 2)$  platí:

$$\begin{aligned} df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= (3a_x^2 + a_y^2) \cdot (x - a_x) + 2a_x a_y (y - a_y), \\ df(\mathbf{0}, \mathbf{x}) &= 0, & df((1; 2), \mathbf{x} - (1; 2)) &= 7(x - 1) + 4(y - 2) = 7x + 4y - 9, \\ d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= 6a_x (x - a_x)^2 + 2 \cdot 2a_x a_y (x - a_x) \cdot (y - a_y) + 2a_x (y - a_y)^2, \\ d^2 f(\mathbf{0}, \mathbf{x}) &= 0, & d^2 f((1; 2), \mathbf{x} - (1; 2)) &= 6(x - 1)^2 + 8(x - 1) \cdot (y - 2) + 2(y - 2)^2, \\ d^3 f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= 6(x - a_x)^3 + 3 \cdot 2(x - a_x) \cdot (y - a_y)^2, \\ d^3 f(\mathbf{0}, \mathbf{x}) &= 6x^3 + 6xy^2, & d^3 f((1; 2), \mathbf{x} - (1; 2)) &= 6(x - 1)^3 + 6(x - 1) \cdot (y - 2)^2. \blacksquare \end{aligned}$$

### Príklad 2.2.28.

Uvažujme funkciu  $f(\mathbf{x}) = f(x; y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}: R^2 - \{(x; 0), x \in R\} \rightarrow R$  z príkladu 2.2.21 b).

Pre všetky  $\mathbf{x} = (x; y) \in R^2$ ,  $y \neq 0$  existujú prvá a druhá derivácia funkcie  $f$  a platí

$$f'(\mathbf{x}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (y; -x), \quad f''(\mathbf{x}) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} -2xy & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$$

Pre prvý a druhý diferenciál funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a} = (a_x; a_y) \in R^2$ ,  $a_y \neq 0$  platí:

$$\begin{aligned} df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \frac{1}{a_x^2 + a_y^2} \cdot [a_y(x - a_x) - a_x(y - a_y)] = \frac{a_y x - a_x y}{a_x^2 + a_y^2}, \\ d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \frac{-2a_x a_y (x - a_x)^2 + 2(a_x^2 - a_y^2)(x - a_x)(y - a_y) + 2a_x a_y (y - a_y)^2}{(a_x^2 + a_y^2)^2}. \end{aligned}$$

Napríklad pre  $\mathbf{a} = (1; 1)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0; 1)$  platí:

$$\begin{aligned} df(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \frac{x - y}{2}, & d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \frac{-2(x - 1)^2 + 2(y - 1)^2}{2^2} = \frac{(y - 1)^2 - (x - 1)^2}{2}, \\ d^2 f(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{x} - \boldsymbol{\varepsilon}_2) &= x, & d^2 f(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{x} - \boldsymbol{\varepsilon}_2) &= -2x(y - 1). \blacksquare \end{aligned}$$

### Príklad 2.2.29.

Nech je funkcia  $f(\mathbf{x}) = f(x; y; z): R^3 \rightarrow R$  trikrát diferencovateľná v bode  $\mathbf{a} \in D(f)$ ,  $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z)$  a nech  $\mathbf{h} = (h_x; h_y; h_z)$  je také, že  $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in O(\mathbf{a}) \subset D(f)$ . Potom platí:

$$\begin{aligned} df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= f'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}^T = f_x(\mathbf{a})h_x + f_y(\mathbf{a})h_y + f_z(\mathbf{a})h_z, \\ d^2 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= \mathbf{h} \cdot f''(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}^T = f_{xx}(\mathbf{a})h_x^2 + f_{yy}(\mathbf{a})h_y^2 + f_{zz}(\mathbf{a})h_z^2 \\ &\quad + 2f_{xy}(\mathbf{a})h_x h_y + 2f_{xz}(\mathbf{a})h_x h_z + 2f_{yz}(\mathbf{a})h_y h_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^3 f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = & f_{xxx}(\mathbf{a})h_x^3 + f_{yyy}(\mathbf{a})h_y^3 + f_{zzz}(\mathbf{a})h_z^3 + 3f_{xxy}(\mathbf{a})h_x^2h_y + 3f_{xxz}(\mathbf{a})h_x^2h_z \\ & + 3f_{xyy}(\mathbf{a})h_xh_y^2 + 3f_{xzz}(\mathbf{a})h_xh_z^2 + 3f_{yyz}(\mathbf{a})h_y^2h_z + 3f_{yzz}(\mathbf{a})h_yh_z^2 + 6f_{xyz}(\mathbf{a})h_xh_yh_z. \end{aligned}$$

- Špeciálne pre (trikrát diferencovateľnú) funkciu  $f(x; y; z) = x^3 + xy^2z$ :  $R^3 \rightarrow R$  platí:

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 + y^2z, & f_y &= 2xyz, & f_z &= xy^2, \\ f_{xx} &= 6x, & f_{yy} &= 2xz, & f_{zz} &= 0, & f_{xy} &= 2yz, & f_{xz} &= y^2, & f_{yz} &= 2xy, \\ f_{xxx} &= 6, & f_{yyy} &= 0, & f_{zzz} &= 0, & f_{xxy} &= 0, & f_{xxz} &= 0, \\ & & f_{xyy} &= 2z, & f_{xzz} &= 0, & f_{yyz} &= 2x, & f_{yzz} &= 0, & f_{xyz} &= 2y. \end{aligned}$$

Pre diferenciály  $f$  do tretieho rádu v bode  $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z)$ ,  $\mathbf{h} = (h_x; h_y; h_z)$  platí:

$$\begin{aligned} df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= (3a_x^2 + a_y^2a_z)h_x + 2a_xa_ya_zh_y + a_xa_y^2h_z, \\ d^2f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= 6a_xh_x^2 + 4a_ya_zh_xh_y + 2a_y^2h_xh_z + 2a_xa_zh_y^2 + 4a_xa_yh_yh_z, \\ d^3f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= 6h_x^3 + 6a_zh_xh_y^2 + 12a_yh_xh_yh_z + 6a_xh_y^2h_z. \end{aligned}$$

Napríklad pre  $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1; 0; 0)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0; 1; 0)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0; 0; 1)$ ,  $\mathbf{0} = (0; 0; 0)$ ,  $\mathbf{a} = (1; 1; 1)$  platí

$$\begin{aligned} df(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{h}) &= 3h_x, & df(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{h}) &= 0, & df(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \mathbf{h}) &= 0, \\ df(\mathbf{0}, \mathbf{h}) &= 0, & df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= 4h_x + 2h_y + h_z, \\ d^2f(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{h}) &= 6h_x^2, & d^2f(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{h}) &= 2h_xh_z, & d^2f(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \mathbf{h}) &= 0, \\ d^2f(\mathbf{0}, \mathbf{h}) &= 0, & d^2f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= 6h_x^2 + 4h_xh_y + 2h_xh_z + 2h_y^2 + 4h_yh_z, \\ d^3f(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \mathbf{h}) &= 6h_x^3 + 6h_y^2h_z, & d^3f(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{h}) &= 6h_x^3 + 12h_xh_yh_z, & d^3f(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \mathbf{h}) &= 6h_x^3 + 6h_xh_y^2, \\ d^3f(\mathbf{0}, \mathbf{h}) &= 0, & d^3f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= 6h_x^3 + 6h_xh_y^2 + 12h_xh_yh_z + 6h_y^2h_z. \blacksquare \end{aligned}$$

### Príklad 2.2.30.

Funkcia  $f(x; y; z) = e^{x+y+z}$ :  $R^3 \rightarrow R$  je  $k$ -krát diferencovateľná v  $R^3$  pre každé  $k \in N$ .

Pre všetky  $\mathbf{x} = (x; y; z) \in R^3$  platí

$$f(\mathbf{x}) = e^{x+y+z} = e^x e^y e^z, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial z} = e^x e^y e^z = f(\mathbf{x}).$$

To znamená, že sú všetky parciálne derivácie každého rádu podľa premenných v ľubovoľnom poradí v bode  $\mathbf{x} \in R^3$  rovnaké a pre všetky  $i, j, l \in N$ ,  $i + j + l = k$  platí

$$f(\mathbf{a}) = \frac{\partial^k f(\mathbf{a})}{\partial x^i \partial y^j \partial z^l} = e^{a_x + a_y + a_z} = e^{a_x} e^{a_y} e^{a_z}.$$

Pre  $k$ -ty diferenciál funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z)$ ,  $\mathbf{h} = (h_x; h_y; h_z)$  platí

$$\begin{aligned} d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) &= \sum_{\substack{i+j+l=k \\ 0 \leq i, j, l \leq k}} \frac{k!}{i!j!l!} \cdot \frac{\partial^k f(\mathbf{a})}{\partial x^i \partial y^j \partial z^l} \cdot h_x^i h_y^j h_z^l = \sum_{\substack{i+j+l=k \\ 0 \leq i, j, l \leq k}} \frac{k!}{i!j!l!} \cdot f(\mathbf{a}) \cdot h_x^i h_y^j h_z^l \\ &= f(\mathbf{a}) \sum_{\substack{i+j+l=k \\ 0 \leq i, j, l \leq k}} \frac{k!}{i!j!l!} \cdot h_x^i h_y^j h_z^l = f(\mathbf{a}) \cdot (h_x + h_y + h_z)^k = e^{a_x + a_y + a_z} (h_x + h_y + h_z)^k. \end{aligned}$$

Špeciálne pre  $\mathbf{0} = (0; 0; 0)$  platí  $f(\mathbf{0}) = e^{0+0+0} = 1$ ,  $d^k f(\mathbf{0}, \mathbf{h}) = (h_x + h_y + h_z)^k$ .  $\blacksquare$

# Literatúra

- [1] Bartsch H. J., *Matematické vzorce*, 3. revidované vydání, Praha, Mladá fronta 2002, ISBN 80-204-0607-7.
- [2] Berman G. N., *Zbierka úloh z matematickej analýzy*, Bratislava, ŠNTL 1955.
- [3] Bican, L., *Lineární algebra*, Praha, SNTL 1979.
- [4] Birkhoff, G., Bartee, T., *Modern applied algebra*, New York, Mc Graw – Hill Book Company 1970, (Slov. preklad: *Aplikovaná algebra*, Bratislava, ALFA 1981).
- [5] Birkhoff, G., Mac Lane, S., *A Survey of Modern Algebra*, New York, The Macmillan Company 1965, (Slov. preklad: *Prehľad modernej Algebry*, Bratislava, SNTL a ALFA 1979).
- [6] Blaško R., *Matematická analýza 1*, Žilina, EDIS 2009, ISBN 978-80-554-0119-5.
- [7] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., *Matematická analýza I*, Praha, SNTL ALFA 1985.
- [8] Brabec J., Hrůza B., *Matematická analýza II*, Praha, SNTL ALFA 1986.
- [9] Под редакцией Демидовича Б. П., *Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов*, издание пятое, Москва, НАУКА 1966.
- [10] Демидович Б. П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, издание девятое, Москва, Издательство НАУКА 1977.
- [11] Demlová M., Nagy J., *Algebra*, Matematika pro VŠT, sešit III, Praha, SNTL 1985.
- [12] Drábek, J., Křižalkovič, K., Liška, J., Viktora, V., *Základy elementární aritmetiky*, Praha, SPN 1984.
- [13] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1. časť*, Bratislava, ALFA 1985.
- [14] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 2. časť*, Bratislava, ALFA 1972.
- [15] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 3. časť*, Bratislava, ALFA 1971.

- [16] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., Šulka R., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 4. časť*, Bratislava, ALFA 1970.
- [17] Frank L. a kolektiv autorů, *Matematika*, Praha, SNTL 1973.
- [18] Göhler W., Ralle B., *Lexikón vyššej matematiky*, Vzorce, Bratislava, ALFA 1992.
- [19] Goult, R. J., *Applied Linear Algebra*, New York, E. Horwood 1978.
- [20] Havel, V., Holenda, J., *Lineární algebra*, Praha, SNTL a ALFA 1984.
- [21] Hlaváček A., *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, I. a II. díl*, 2. změněné vydání, Praha, SPN 1971.
- [22] Holenda J., *Řady*, Matematika pro VŠT, sešit XII, Praha, SNTL 1990.
- [23] Horský Z., *Diferenciální počet*, Matematika pro VŠT, sešit V, Praha, SNTL 1981.
- [24] Horský, Z., *Vektorové prostory*, Praha, SNTL 1980.
- [25] Hruša K., Kraemer E., Sedláček J., Vyšín J., Zelinka R., *Přehled elementární matematiky*, Praha, SNTL 1957.
- [26] Jarník V., *Integrální počet I, II*, Praha, Nakladatelství ČSAV 1956.
- [27] Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z., *Sbírka řešených příkladů z matematiky*, Praha, SNTL ALFA 1982.
- [28] Kľuvánek I., Mišík L., Švec M., *Matematika pre štúdium technických vied, I. a II. diel*, Bratislava, SVTL 1965.
- [29] Knichal V., Bašta A., Pišl M., Rektorys K., *Matematika II*, Praha, SNTL SVTL 1966.
- [30] Kolář J., Štěpánková O., Chytil M., *Logika, algebry a grafy*, Praha, SNTL 1989.
- [31] Kučera, L., Nešetřil, J., *Algebraické metody diskrétní matematiky*, Praha, SNTL 1989.
- [32] Kolektiv autorů za redakce Nečase J., *Aplikovaná matematika I (A—L) a II (M—Ž)*, odborové encyklopedie, Praha, SNTL 1978.
- [33] Míka S., *Numerické metody algebry*, Matematika pro VŠT, sešit IV, Praha, SNTL 1985.
- [34] Mikola M., *Algebra*, 2. vydanie, skriptá ŽU, Žilina 1998.
- [35] Mikola M., Chvál V., *Lineárna algebra*, Ružomberok, Žilina 2000, ISBN 80-89039-00-6.
- [36] Nagy J., Nováková E., Vacek M., *Integrální počet*, Matematika pro VŠT, sešit VI, Praha, SNTL 1984.
- [37] Nekvinda M., Šrubař J., Vild J., *Úvod do numerické matematiky*, Praha, SNTL 1976.

- [38] Neubrunn T., Vencko J., *Úvod do matematickej analýzy*, skriptá MFF UK, Bratislava 1981.
- [39] Neubrunn T., Vencko J., *Matematická analýza II*, skriptá MFF UK, Bratislava 1984.
- [40] Pondělíček, B., *Algebraické struktury s binárními operacemi*, Praha, SNTL 1977.
- [41] Prágerová A., *Cvičení z matematiky*, Praha, SNTL ALFA 1987.
- [42] Příkryl P., *Numerické metody matematické analýzy*, Matematika pro VŠT, sešit XXIV, Praha, SNTL 1985.
- [43] Šilov G. J., *Matematická analýza*, Bratislava, ALFA 1974.
- [44] Smoljanskij M. L., *Tabuľky neurčitých integrálov*, Bratislava, ALFA 1963.
- [45] Svätokrížny P., *Lineárna algebra v úlohách*, Bratislava, ALFA 1986.
- [46] Švec M., Šalát T., Neubrunn T., *Matematická analýza funkcií reálnej premennej*, Bratislava, ALFA SNTL 1987.
- [47] Vitásek E., *Numerické metody*, Praha, SNTL 1987.
- [48] Blaško, R., *Matematická analýza I*, <http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/sa-1.pdf>, (skriptum MA1) 2007.
- [49] Blaško, R., *Matematická analýza I*, <http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/ma-1.pdf>, (učebnica MA1) 2016.
- [50] Blaško, R., *Neurčitý a určitý integrál reálnej funkcie*, <http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/sa-2.pdf>, (učebnica MA2) 2016.
- [51] Blaško, R., *Zbierka úloh z matematickej analýza I*, <http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/cv1.pdf>, 2009.
- [52] Blaško, R., *Základy lineárnej algebry a základy matematickej analýzy pre manažérov*, <http://frcatel.fri.uniza.sk/users/beerb/ma1/zla-zma.pdf>, 2015.
- [53] Drexel University, The Math Forum, <http://mathforum.org/>, Internet Mathematics Library, <http://mathforum.org/library/>.
- [54] Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics, <http://members.aol.com/jeff570/mathword.html>.
- [55] Elsevier Mathematics, <http://www.elseviermathematics.com/mathematicsweb/show/Index.htm>.
- [56] EMIS, The European Mathematical Information Service, <http://www.emis.de/>.
- [57] Encyklopédie des Formes Mathématiques Remarquables, <http://www.mathcurve.com/>.

- [58] Excellent Matematika, <http://matematika.host.sk/index2.htm>.
- [59] GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra, <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/>.
- [60] Geometry the online learning center, <http://www.geometry.net/>.
- [61] The Math Forum, Internet Mathematics Library, <http://mathforum.org/library/>.
- [62] On-line Mathematics Dictionary,  
[http://pax.st.usm.edu/cmi/inform\\_html/glossary.html](http://pax.st.usm.edu/cmi/inform_html/glossary.html).
- [63] Turnbull, The MacTutor History of Mathematics archive, <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/>.
- [64] World of mathematics, A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/>,  
WolframAlpha – computational knowledge engine, <http://www.wolframalpha.com/>.