Návrat k problémom . . .

M. Kaukič

Katedra matematických metód, FRI ŽU

12. januára 2012

Problém N dám – z histórie

Problém pre 8 nebijúcich sa dám na šachovnici – M. Bezzel, *Berliner Schachzeitung*, 1848

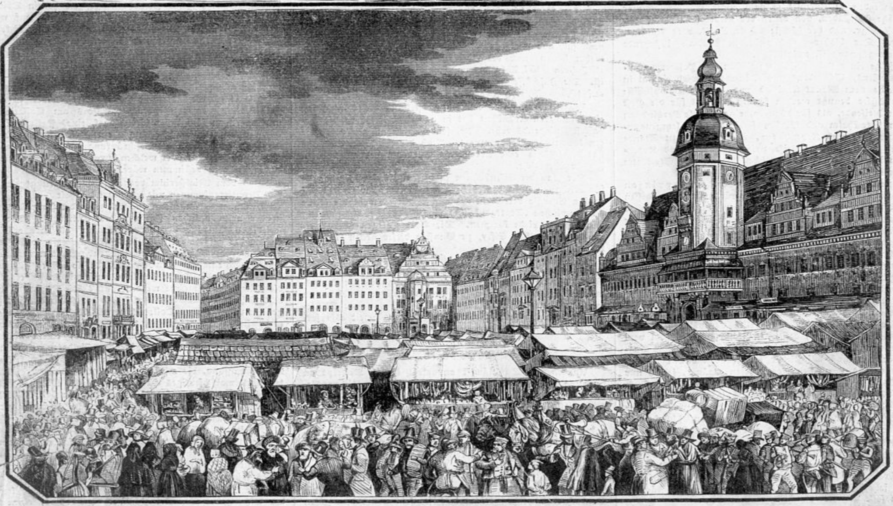
Všeobecne pre n dám – F. J. E. Lionnet, 1869

K. F. Gauss – 72 riešení, F. Nauck, 1850 – 92 riešení
Briefwechseln mit allen für alle, Illustrirte Zeitung
E. Pauls, 1874 – sú to všetky riešenia

Zaujímavosť – obrázky z Illustrirte Zeitung:
`http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Illustrirte_Zeitung`

T. B. Sprague, 1899, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* – prehľad doterajších vysledkov a v prílohe je 2680 riešení pre $N = 11$. Zaujímavé čítanie...

Leipziger Messe



Der Marktplatz in Leipzig.

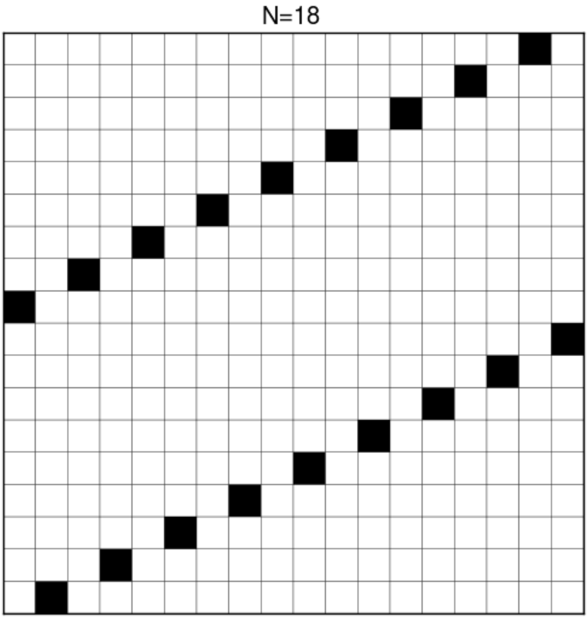
Konštruktívne riešenia

Riešenie pre $N > 3$ – Pauls, 1874 (zvyškové triedy mod 6)

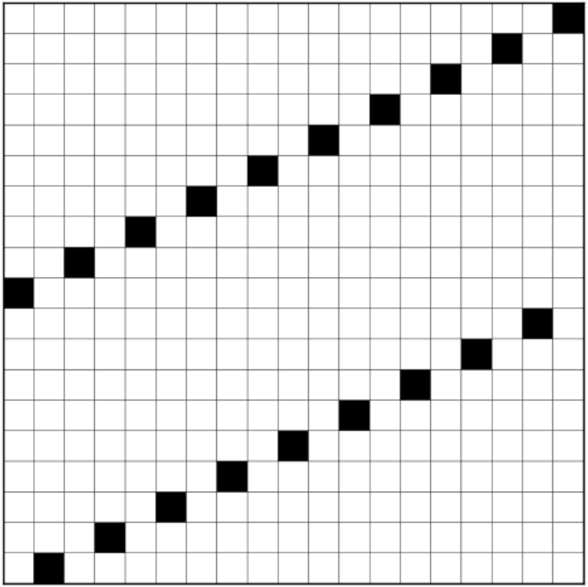
Veľa konštrukcií, niektoré dávajú mnoho riešení, napr. Erbas, Tanik, Aliyazicioglu – ukážeme na papieri.

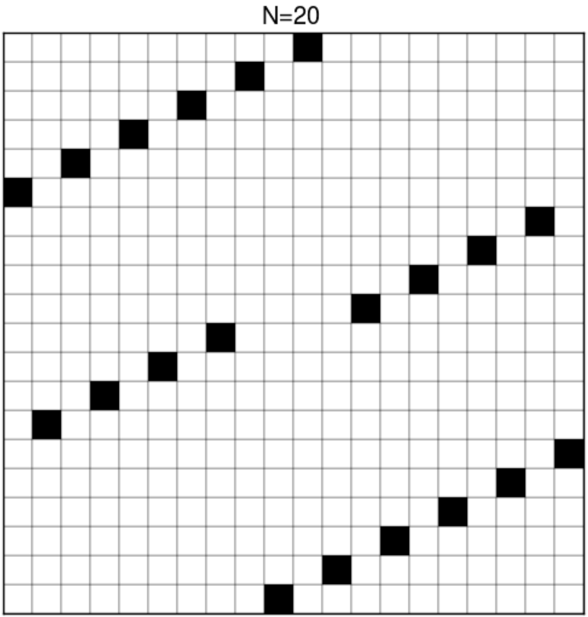
Najjednoduchšie asi – Hoffman, Loessi, Moore, ukážeme obrázky.

Prečo hľadať iné riešenia? Diskusia

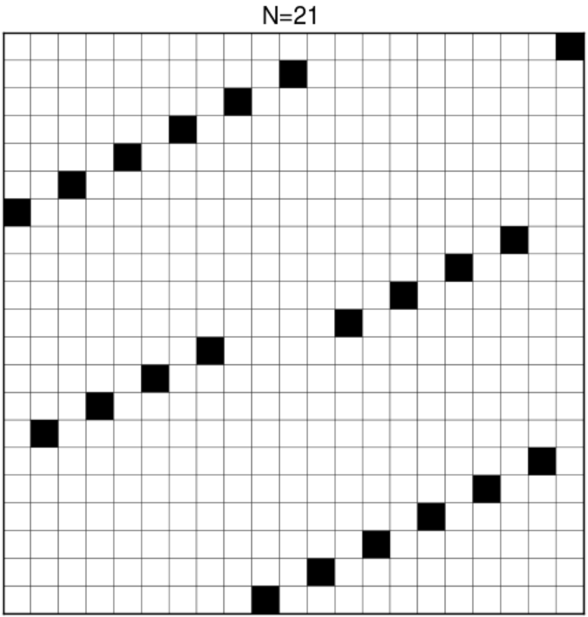

N=18

N=19





N=20


N=21

Skupiny algoritmov

- Generovanie všetkých riešení – hrubá sila, backtracking, generovanie permutácií
- Generovanie fundamentálnych riešení – Topor
- Generovanie jedného alebo niekoľkých riešení – pravdepodobnostné algoritmy

R. Sosič, J. Gu – algoritmus pre jedno riešenie – I

Prezentovaný v 1994, lineárna čas. náročnosť vzhľadom na N.
54.7 sek. priemerný čas pre $N = 3000000$.
To na RS 6000/530, procesor 25 MHz, pamäť najviac 128MB.
Dnes (C++, listing koluje) – ulabserv, 77 sek., proc. čas 0.8 sek.

Princíp algoritmu. Permutácie ako stĺpcové umiestnenia, možné len diag. konflikty. Poč. permutácia $(1, 2, 3, \ldots, N)$.

Initial search.

- Pre riadky $j = 2 \ldots N$ náhodný riadok $r > j$, pokus o výmenu tých riadkov.
- Ak konflikt s predch. dámami (v riadkoch $1 \ldots j - 1$), výmena nebude. Nový náhodný riadok, až kým OK.
- Volanie náhodného generátora $3.08N$ razy.
- Tak sa zadarí K riadkov (veľa, napr. 2999969 pre 3 mil.).
- Ostatné do konca náhodné umiestnenia, aj keď konfliktné.

R. Sosič, J. Gu – algoritmus pre jedno riešenie – II

Final search – minimalizácia konfliktov výmenou dám

- Pre konfliktné riadky $j = K..N$: Pokus vymeniť dámu konfliktnú a ďalšiu náhodnú z riadku $r > j$. Ak výmena zničí konflikty u oboch dám, uskutoční sa.
- Toto sa opakuje, až do úplného odstránenia konfliktov, resp. pre daný max. počet krokov (zvolili 7000).
- Ak sa nepodarilo riešenie, začne sa od začiatku. Vraj pre $N > 400$ to skoro nikdy netreba.

R. Sosič, J. Gu – algoritmus pre jedno riešenie – II

Final search – minimalizácia konfliktov výmenou dám

- Pre konfliktné riadky $j = K..N$: Pokus vymeniť dámu konfliktnú a ďalšiu náhodnú z riadku $r > j$. Ak výmena zničí konflikty u oboch dám, uskutoční sa.
- Toto sa opakuje, až do úplného odstránenia konfliktov, resp. pre daný max. počet krokov (zvolili 7000).
- Ak sa nepodarilo riešenie, začne sa od začiatku. Vraj pre $N > 400$ to skoro nikdy netreba.

Otcovské (dedovské) slovo k Mariánovi

R. Sosič, J. Gu – algoritmus pre jedno riešenie – II

Final search – minimalizácia konfliktov výmenou dám

- Pre konfliktné riadky $j = K..N$: Pokus vymeniť dámu konfliktnú a ďalšiu náhodnú z riadku $r > j$. Ak výmena zničí konflikty u oboch dám, uskutoční sa.
- Toto sa opakuje, až do úplného odstránenia konfliktov, resp. pre daný max. počet krokov (zvolili 7000).
- Ak sa nepodarilo riešenie, začne sa od začiatku. Vraj pre $N > 400$ to skoro nikdy netreba.

Otcovské (dedovské) slovo k Mariánovi

A sa hor' na iné problémy. Vládzeme, či?

Literatúra

- J. Bell, B. Stevens: *A survey of known results and research areas for n-queens,* Discrete Math., 309 (2009), 1-31
- C. Erbas, S. Sarkeshik, M. Tanik: *DIFFERENT PERSPECTIVES OF THE N-QUEENS PROBLEM*, CSC ’92 Proceedings of the ACM annual conference on Communications, 1992, 99-108
- R. Sosič, J. Gu: *Efficient Local Search with Conflict Minimization: A case study of the n-Queens Problem*, IEEE Trans. on Knowl. and Data Engrg., vol. 6, No. 5, 1994, 661-667

Vlastne len jeden problém…

Nech r_n je najväčší reálny koreň polynómu

$$p(x) = x^3 - 2^n x^2 + n.$$

Napr. $r_2 = 3.86619826\ldots$.

Treba nájsť posledných 8 cifier čísla $\sum_{n=1}^{30} [r_n^{987654321}]$,

kde $[a]$ znamená celú časť čísla a.

A je to problém? Prečo?

Korene predsa poznáme!

V symbolickom tvare, presne (Mathematica, Maxima, Sage…).
Alebo numericky, napr. v Pylabe. Dá nám:

n	x_1	x_2	x_3
1	1.61803399	-0.618033992	1.0
7	127.99957275	-0.23364045	0.2340677
20	1.04857600e+06	-4.36732026e-03	4.36732028e-03
30	1.07374182e+09	-1.67151659e-04	1.67151659e-04

Korene predsa poznáme!

V symbolickom tvare, presne (Mathematica, Maxima, Sage…).
Alebo numericky, napr. v Pylabe. Dá nám:

n	x_1	x_2	x_3
1	1.61803399	-0.618033992	1.0
7	127.99957275	-0.23364045	0.2340677
20	1.04857600e+06	-4.36732026e-03	4.36732028e-03
30	1.07374182e+09	-1.67151659e-04	1.67151659e-04

Hypotézy?

Čo na to napasovať?

Čo na to napasovať?

Google, sum of powers roots polynomial. . .

Čo na to napasovať?

Našiel som Newtonove identity. Nech

$$P_n(x) = a_n x^x + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

a korene nech má $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potom pre súčet $s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ ich k-tých mocnín platia rekur. vzorce:

$$a_n s_k + a_{n-1} s_{k-1} + a_{n-2} s_{k-2} + \cdots a_{n-k+1} s_1 + k\, a_{n-k} = 0.$$

Čo na to napasovať?

Našiel som Newtonove identity. Nech

$$P_n(x) = a_n x^x + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

a korene nech má $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potom pre súčet $s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ ich k-tých mocnín platia rekur. vzorce:

$$a_n s_k + a_{n-1} s_{k-1} + a_{n-2} s_{k-2} + \cdots a_{n-k+1} s_1 + k\, a_{n-k} = 0.$$

Takže s_k možno vyjadriť pomocou predchádzajúcich súčtov $s_{k-1}, \ldots, s_1$. Keďže s_1 vieme, je kde začať. Realizácia – Python, zo päť hodín výpočtov na ulabserve.

Čo na to napasovať?

Našiel som Newtonove identity. Nech

$$P_n(x) = a_n x^x + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

a korene nech má $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potom pre súčet $s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ ich k-tých mocnín platia rekur. vzorce:

$$a_n s_k + a_{n-1} s_{k-1} + a_{n-2} s_{k-2} + \cdots a_{n-k+1} s_1 + k\, a_{n-k} = 0.$$

Takže s_k možno vyjadriť pomocou predchádzajúcich súčtov $s_{k-1}, \ldots, s_1$. Keďže s_1 vieme, je kde začať. Realizácia – Python, zo päť hodín výpočtov na ulabserve. Zo súčtu všetkých koreňov ako k jednému?

Ide to aj lepšie?

Pozrime sa, kde som problém zobral: *http://projecteuler.net*
Tam, po vyriešení, sa človek poučiť môže :-)

Ide to aj lepšie?

Súčet koreňov je stopa charakteristickej matice A. Súčet k-tých mocnín je stopa matice A^k. A existujú systémy, čo to umocnia brutálne rýchlo.

Ide to aj lepšie?

Súčet koreňov je stopa charakteristickej matice A. Súčet k-tých mocnín je stopa matice A^k. A existujú systémy, čo to umocnia brutálne rýchlo.

Náš polynóm má char. maticu svoju takú:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -n & 0 & 2^n - \lambda \end{pmatrix}$$

A realizácia?

V systéme Sage, ktorý používame aj na výučbu.

```
def problem1():
    su = 0
    for i in range(1, 31):
        M = matrix(Integers(10**8),3,3,[0,1,0,0,0,1,-i,0,2**i])
        su += (M**987654321).trace()-1
    return su % 10**8
```

KONIEC